87

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Ersin KIRAL

SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2002

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİ

ERSİN KIRAL

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 04/10/2002 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oy Çokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza:.............. İmza:.............. İmza:..............

Prof. Dr. Naime EKİCİ — DANIŞMAN

Prof. Dr. Melih BORAL — ÜYE

Doç. Dr. Adnan TERCAN — ÜYE

İmza:.............. İmza:..............

Doç. Dr. Bilal VATANSEVER — ÜYE

Yrd. Doç. Dr. Perihan (DİNÇ) ARTUT — ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 689

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

Enstitü Müdürü

İmza ve Mühür

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİ

ERSİN KIRAL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Naime EKİCİ
Yıl : 2002, Sayfa: 81
Jüri: Prof. Dr. Naime EKİCİ
Prof. Dr. Melih BORAL
Doç. Dr. Adnan TERCAN
Doç. Dr. Bilal VATANSEVER
Yrd. Doç. Dr. Perihan (DİNÇ) ARTUT

Bu çalışmada serbest color Lie süpercebirleri için bulduğumuz test elemanları ve özel olarak rankı iki olan serbest color Lie süpercebirleri için test elemanları verilmiştir. Ayrıca çift Jacobian matristen yararlanarak L nin bir endomorfizminin bir otomorfizm olup olmadığına karar veren bir kriter geliştirdik. $n \leq 9$ olmak üzere L_n / L_{n+1} serbest bölüm cebirlerinin baz ve boyutları hesaplanmıştır. Rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmleri genelleştirilmiştir. Son olarak serbest color Lie süpercebirlerinde verilen bir w-homojen elemanın rankını bulmamızı sağlayan bir algoritma geliştirdik.

Anahtar Kelimeler : Serbest color Lie süpercebiri, Jacobian matris, Test elemanları.

ABSTRACT

PhD THESIS

FREE COLOR LIE SUPERALGEBRAS

ERSİN KIRAL

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSTY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Naime EKİCİ

Year : 2002, Pages : 81

Jury : Prof. Dr. Naime EKİCİ
Prof. Dr. Melih BORAL
Assoc. Prof. Dr. Adnan TERCAN
Assoc. Prof. Dr. Bilal VATANSEVER
Assist. Prof. Dr. Perihan (DİNÇ) ARTUT

In this study, some test elements have been obtained for free color Lie superalgebras and particularly free color Lie superalgebras having rank two. Besides we have developed some criteria by using double Jacobian matrix to determine whether an endomorphism of L is an automorphism. Basis and dimensions of L_n / L_{n+1} algebras have been calculated for $n \leq 9$. The automorphisms of free color Lie superalgebras of rank two have been generalized. In addition, we have developed an algorithm for finding the rank of a given w-homogenues element of free color Lie superalgebras.

Key Words : Free color Lie superalgebra, Jacobian matrix, Test elements.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Naime EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı tüm Matematik Bölümü akademik personeline ve manevi desteklerin dolayı aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **Sayfa No**

1. GİRİŞ

Lie süpercebirlerinin teorisi 1950'li yıllarda geliştirilmiştir. Cebirin Z_2 derecelendirilmesi fikri geliştirilerek Z derecelendirilme veya G değişmeli bir grup olmak üzere G-derecelendirme ile birlikte ters-simetrik bir formun cebirdeki çarpmaya etkisi tanımlanarak, 1970'li yıllarda yeni bir cebir yapısı inşa edilmiştir. Bu cebir color Lie süpercebiri veya ε-Lie cebiri olarak isimlendirilir. Color Lie süpercebirleri konusu yeni olmasına rağmen teorisi hızla geliştirilmiş ve geliştirilmeye devam edilmektedir.

Sonlu ranklı bir serbest L Lie (süpercebir) cebiri için verilen bir endomorfizmin otomorfizm olup olmadığına, endomorfizmin Jacobian matrisine bakılarak kolayca karar verilebilir. Bunun yanında bir endomorfizminin otomorfizm olabileceğini test eden bir kriter geliştirilmiştir. Biz bu çalışmamızda serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmlerini tanımak için bir kriter geliştirdik. Ayrıca $n \leq 9$ olmak üzere n'inci dereceden nilpotent serbest color Lie süpercebirlerinin baz ve boyutunu hesapladık. Rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmlerini sınıflandırdık. Bundan başka serbest color Lie süpercebirlerinde verilen bir w-homojen elemanın rankını bulmak için bir algoritma geliştirdik.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızın kaynağını oluşturan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde serbest color Lie süpercebirleri için bir baz kümesi inşa edilmiştir. Ayrıca bu bölümde $n \leq 9$ olmak üzere L_n / L_{n+1} bölüm cebirlerinin baz ve boyutları hesaplanmış ve bundan faydalanılarak n. dereceden nilpotent serbest color Lie süpercebirlerinin baz ve boyutları hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmleri genelleştirilmiştir.

Beşinci bölümde serbest color Lie süpercebirleri için bulduğumuz test elemanları ve özel olarak rankı iki olan serbest color Lie süpercebirleri için test elemanları verilmiştir. Ayrıca bu kısımda Jacobian matristen yararlanarak L nin bir endomorfizminin bir otomorfizm olup olmadığına karar veren bir kriter geliştirdik.

Bundan başka rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmleri için bir kriter verilmiştir.

Altıncı bölümde ise serbest color Lie süpercebirlerinde verilen bir w-homojen elemanın rankını bulmamızı sağlayan bir algoritma geliştirdik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Temel Tanımlar

Bu kısımda çalışmamızın temelini oluşturan Color Lie Süpercebirleri ile ilgili temel kavramları inceleyeceğiz. Color Lie Süpercebirlerinin tanımını vermeden önce bu cebirlerin inşasında kullanacağımız derecelendirilmiş cebir kavramından ve ε dönüşümünden bahsedelim.

Tanım 2.1.1

R bir *K* cismi üzerinde cebir ve *G* de toplamsal bir grup olsun. $g \in G$ için R_g ile *R* nin *G* tarafından etiketlenen alt uzayını gösterelim. Eğer $\{R_g : g \in G\}$ dizisi için;

i) $R = \underset{g \in G}{\oplus} R_g$

ii) Her $g, g' \in G$ için $R_g \cdot R_{g'} \subseteq R_{g+g'}$

koşulları sağlanıyorsa *R ye G tarafından derecelendirilmiş cebir* denir. $g \in G$ için R_g nin elemanlarına *g-inci dereceden homojen eleman* denir.

I, R nin bir alt cebiri (ideali) ve $g \in G$ için, $I_g = I \cap R_g$ olsun. Eğer

$$I = \underset{g \in G}{\oplus} I_g$$

oluyorsa *I* ya *R* nin *derecelendirilmiş alt cebiri (ideali)* denir.

G değişmeli bir grup, K çarpımsal grubu $U(K) = K \setminus \{0\}$ olan bir cisim,

$$\varepsilon : G \times G \to U(K)$$

ters-simetrik bilineer bir form yani; her $g, g_1, g_2, h, h_1, h_2 \in G$ için,

$$\begin{gathered}\varepsilon(g_1 + g_2 , h) = \varepsilon(g_1, h)\varepsilon(g_2, h), \\ \varepsilon(g , h_1 + h_2) = \varepsilon(g, h_1)\varepsilon(g, h_2), \\ \varepsilon(g, h)\varepsilon(h, g) = 1, \\ \varepsilon(g, g) = \mp 1\end{gathered}$$

olsun.

$$G_{(-1)} = \{g \in G : \varepsilon(\mathrm{g}, \mathrm{g}) = -1\}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 2.1.2

$R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, K cismi üzerinde G–derecelendirilmiş bir cebir olsun. $a \in R_g$ için $d(a) = g$ olarak tanımlayalım. R üzerindeki $[\,,\,]$ işlemi x, y, $z \in R$ G-homojen elemanları için;

$$[x, y] = -\varepsilon(d(x), d(y))[y, x],$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + \varepsilon(d(x), d(y))[y, [x, z]]$$

koşulunu sağlıyorsa R ye K cismi üzerinde bir *color Lie süpercebiri* denir.

Şimdi color Lie süpercebirlerinin özel bir durumu olan Lie süpercebirlerini tanımlayalım.

Tanım 2.1.3

R, K cismi üzerinde Z_2–derecelendirilmiş bir cebir yani,

$$R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$$

olsun. R üzerindeki $[\ ,\ ]$ işlemi her $\alpha,\beta,\gamma \in Z_2$ ve $x \in R_\alpha$, $y \in R_\beta$, $z \in R_\gamma$ için;

$$[x,y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y,x],$$

$$(-1)^{\alpha\gamma}[x,[y,z]] + (-1)^{\alpha\beta}[y,[z,x]] + (-1)^{\beta\gamma}[z,[x,y]] = 0$$

koşulunu sağlıyorsa R ye K cismi üzerinde bir *Lie süpercebir* denir. $R_{\bar{0}}$ ve $R_{\bar{1}}$ uzaylarının elemanlarına sırasıyla R nin *çift* ve *tek* elemanları denir. Özel olarak $R_{\bar{0}}$ bir Lie cebiridir.

Bundan sonra, bir K cismi üzerindeki herhangi bir color Lie süpercebiri L ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.4

M, L nin bir alt uzayı olsun. M, L deki çarpım altında kapalı ise M ye L nin bir *alt cebiri* denir.

Tanım 2.1.5

I, *L* nin bir alt cebiri olmak üzere. Eğer

$$[I, L] \subseteq I$$

koşulu sağlanıyorsa *I* ya *L* nin bir *ideali denir* ve $I \lhd L$ ile gösterilir.

Şimdi bir *L* color Lie süpercebiri ile bir *I* idealinin bölüm cebirini verelim.

Tanım 2.1.6

I, *L* nin bir ideali olmak üzere, L/I *bölüm cebiri*

$$L/I = \{x + I : x \in L\}$$

şeklinde tanımlanır. L/I kümesinde toplama ve çarpma işlemi;
$x + I,\ y + I \in L/I$ için,

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$$
$$[x+I, y+I]=[x,y]+I$$

olarak tanımlanır. $I \lhd L$ olup toplama ve çarpma iyi tanımlıdır ve L/I her iki işleme göre kapalıdır. L/I da Jacobi özdeşliği geçerli olup L/I bir color Lie süpercebiridir.

Tanım 2.1.7

L nin $\{L_n\}$ *alt merkezi serisi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L_1 = L$$
$$L_{n+1} = [L, L_n]$$

Eğer bir pozitif m-tamsayısı için $L_{m-1} \neq \{0\}$ fakat $L_m = \{0\}$ oluyorsa L ye *m-inci dereceden nilpotent color Lie süpercebiri* denir.

Özel olarak $m=2$ için

$$[L, L] = \{0\}$$

ise L değişmelidir. L nin alt merkezi serisinin terimleri

$$\cdots L_n \lhd L_{n-1} \lhd \cdots \lhd L_2 \lhd L_1 = L$$

olacak şekilde bir idealler zinciri meydana getirir. Bu durumda L_n / L_{n+1} ve L / L_n bölüm cebirlerinden bahsedebiliriz. Jacobi özdeşliğinden

$$[L_m, L_n] \subseteq L_{m+n}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.8

Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\delta^0 L = L$$
$$\delta^{n+1} = [\delta^n L, \delta^n L]$$

olarak tanımlanırsa, $\{\delta^n L\}_{n \geq 0}$ dizisine *L nin türetilmiş serisi* denir.

Bazı m tamsayıları için

$$\delta^m L = \{0\}$$

oluyorsa, L'ye *çözülebilir* denir. Eğer m,

$$\delta^{m} L = \{0\}$$

olacak şekildeki en küçük tamsayı ise m ye L nin *türetilmiş uzunluğu* denir. Bu durumda *L m inci dereceden çözülebilir color Lie süpercebiri* adını alır. Özel olarak $m=2$ için L *metabelyan* olarak isimlendirilir.

Her $n \geq 0$ için,

$$\delta^{n+1} L \lhd \delta^{n} L$$

ve

$$\delta^{n} L \lhd L$$

dir.

Burada özel olarak

$$L_{\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k}} = \delta^{k} L$$

olarak tanımlanır.

Şimdi serbest Lie cebirleri ve Hall bazını tanımlayalım. Serbest Lie cebirleri F ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.9

Bir F Lie cebiri ve herhangi bir $X \neq \phi$ kümesi verildiğinde her B Lie cebiri için $\alpha : X \to B$ bir dönüşüm olmak üzere, $i : X \to F$ dönüşümü için

$$\alpha = \eta i$$

olacak şekilde bir tek

$$\eta : F \to B$$

Lie homomorfizmi varsa, *(F,i)* çiftine X üzerinde *serbest Lie cebiri* denir. $\alpha = \eta i$ olduğundan aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & F \arrow[d, "\eta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Bir $X \neq \phi$ kümesi üzerindeki serbest Lie cebirinin Hall bazı aşağıdaki gibi inşa edilir.

Tanım 2.1.10

n-pozitif tamsayıları için;

$$X_1 = X$$
$$X_n = \bigcup_{p=1}^{n-1} (X_p \times X_{n-p})$$

olarak tanımlayalım.

$$M(X) = \bigcup_{n \in N} X_n$$

olsun. Her $a,b \in M(X)$ için, $a \in X_p$, $b \in X_q$ ve $(a,b) \in (X_p \times X_q)$ olacak şekilde p ve q sayıları vardır. $n=p+q$ olsun. O zaman $(a,b) \in (X_p \times X_{n-p})$ olur. (a,b) nin $X_p \times X_{n-p} \to X_n$ kanonik injeksiyonu altındaki görüntüsünü (ab) ile gösterelim. Böylece her $a,b \in M(X)$ için (ab) çarpımını tanımlarız. $a \in X_p$ olacak şekildeki p tamsayısına a nın *uzunluğu* denir ve $l(a)$ ile gösterilir.

$$l(ab) = l(a) + l(b)$$

dir. Uzunluğu 1 olan elemanlar X in elemanlarıdır. Uzunluğu ≥ 2 olan elemanlar için,

$$c = (ab)$$

yazarız öyle ki a ve b nin uzunluğu c nin uzunluğundan daha küçüktür.

Yukarıda tanımlanan $M(X)$ kümesi, bu küme üzerindeki çarpma ve uzunluk fonksiyonları kullanılarak X üzerindeki Hall kümesi aşağıdaki gibi kurulur.

Tanım 2.1.11

Bir $H \subseteq M(X)$ *Hall kümesi* aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) $H_1 = X \subseteq H$ ve H ye keyfi bir sıralama verilmiştir.

ii) $H_2 = H \cap M^2(X)$, $x,y \in X$ ve $x>y$ olacak şekilde (xy) elemanlarını içerir.

iii) $H_1,\ldots,H_{n-1}$ tanımlanmış ve uzunlukları koruyan bir sıralama verilmiş olsun.

O zaman;

$$H \cap M^n(X) = \left\{ ((ab)c) : a, b, c, ab \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (H \cap M^k(X)), 1 \le k \le n-1, a > b \le c, ab > c \right\}$$

ve

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H \cap M^n(X)$$

olsun. Kısa olması bakımından $H_n = H \cap M^n(X)$ dersek,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

olup *H* ye *X* üzerinde bir Hall kümesi denir.

İspatını (Bourbaki, 1975) de bulabileceğimiz aşağıdaki teorem serbest Lie cebirlerinin bazını belirler.

Teorem 2.1.1

F bir *X* kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. *X* kümesi üzerinde kurulan Hall kümesi F nin bir bazıdır.

Bundan sonra Hall kümesi üzerindeki sıralama aşağıdaki gibi olacaktır.

i) *X* keyfi olarak sıralanmış olsun.

ii) $u, v \in H$ ve $u = (u_1 u_2)$, $v = (v_1 v_2)$ şeklinde iki eleman olsun. Eğer *l(u)<l(v)* ise *u<v* diyelim. Eğer *l(u)=l(v)* ise $u < v \Leftrightarrow u_2 < v_2$ veya $u_2 = v_2$ iken $u_1 < v_1$ olmalıdır.

Şimdi serbest color Lie süpercebirlerinin nasıl oluşturulacağını inceleyelim.

$X = \bigcup_{g\in G} X_g$ G–derecelendirilmiş bir küme, $x \in X_g$ için $d(x) = g$ ve $A(X)$ serbest G–derecelendirilmiş birleşmeli K-cebir, serbest doğuraylarının kümesi X olan serbest color Lie süpercebiri $L(X)$ ile gösterilecektir.

X alfabesindeki birleşmeli olmayan monomiallerin grupoidini $V[X]$ ile gösterelim. $\langle X \rangle$ birleşmeli kelimelerin yarıgrubu,

$$\gamma : V[X] \to \langle X \rangle$$

parantezleri kaldıran homomorfizm, $u \in \langle X \rangle$ için u üzerindeki parantezlerin düzenlenmiş hali $[u]$, $l_X(z) = l_X(\gamma(z))$ bir kelimenin uzunluğu yani X alfabesindeki görülen elemanların toplam sayısı, $F[X]$ ve $F\langle X \rangle$ X üzerinde sırasıyla birleşmeli olmayan ve birleşmeli serbest cebirler olsun.

$X = \bigcup_{g\in G} X_g$ $x \in X_g$ için $d(x) = g$ G–derecelendirilmiş bir küme, $x_i \in X$

için $u = x_1 \cdots x_n \in \langle X \rangle$ olmak üzere $d(u) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) \in G$,

$z \in V[X]$ için $d(z) = d(\gamma(z))$,

$$(\langle X \rangle)_g = \{u \in \langle X \rangle : \mathrm{d(u) = g}\}$$
$$(V[X])_g = \{z \in V[X] : \mathrm{d(z) = g}\}$$

olsun.

Tanım 2.1.12

L, M (aynı *G* grubu tarafından derecelendirilmiş) *K* cismi üzerinde color Lie süpercebirleri olsun. Eğer bir

$$f : L \to M$$

K- lineer dönüşümü her $a,b \in L$ için,

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

ve her $g \in G$ için,

$$f(L_g) \subseteq M_g$$

sağlıyorsa f ye *sıfırıncı dereceden homomorfizm* denir.

Tanım 2.1.13

$(F[X])$ ve $(F\langle X\rangle)$ deki $(\mathrm{V}[X])_g$ ve $(\langle X\rangle)_g$ alt kümelerinin K-lineer uzayları sırasıyla $(F[X])_g$ ve $(F\langle X\rangle)_g$ olsun.

$$(F[X]) = \underset{g\in G}{\oplus}(F[X])_g$$

ve

$$(F\langle X\rangle) = \underset{g\in G}{\oplus}(F\langle X\rangle)_g$$

serbest G-derecelendirilmiş sırasıyla birleşmeli olmayan ve birleşmeli cebirler, a, b, c $\in \mathrm{V}[\mathrm{X}]$ için, $F[X]$de

$$[a,b] - \varepsilon(d(a),d(b))[b,a],$$
$$[[a,b],c] - [a,[b,c]] + \varepsilon(d(a),d(b))[b,[a,c]]$$

formundaki homojen elemanlar tarafından doğrulan ideal I olsun..

$$L(X) = F[X]/I$$

serbest color Lie süpercebirdir. Yani; X den herhangi bir R color Lie süpercebirine olan 0'ıncı dereceden her G dönüşümünün, 0-ıncı dereceden bir,

$$L(X) = F[X]/I \to R$$

homorfizmine G–genişlemesi tekdir.

Tanım 2.1.14

Bir $[u] \in V[X]$ monomialinin *regüler* tanımlı olabilmesi için $[u] = x \in X$ olması veya

a) $[u] = ([u_1])([u_2])$ yazılımında $[u_1]$, $[u_2]$ regüler monomialler ve $u_1 > u_2$,

b) $[u] = (([u_1])([u_2]))([u_3])$ iken $u_2 \le u_3$ gerekir.

Bir $[u] \in V[X]$ monomiali için eğer $[u]$ bir regüler monomial ise veya $[p]$ bir regüler monomial olmak üzere, $d(p) \in G_{(-1)}$ ve $[u] = ([p])([p])$ ise $[u]$ ya *s-regüler monomial* denir.

$w \in L[X]$ ise $h_X(w)$ sayısı, w nun yazılışında görülen en büyük uzunluklu s-regüler monomiallerin uzunluğu olsun. $h_X = \max\limits_{1 \le i \le k}\{l_X(u_i)\}$ dir ve $h_X(w)$ sayısı, X üzerindeki sıraya bağlı değildir. w_0, w elemanının en büyük dereceli kısmı olsun. [yani, w 'nun s-regüler yazılımındaki $h_X(w)$ uzunluklu terimlerin toplamı] w=w_o ise, w elemanına *h-homojen* denir. Benzer şekilde $h_X(w)$ uzunluğunu da en büyük dereceli kısmı ve $x \in X$ deki homojenliğine göre tanımlarız. Eğer her $x \in X$ için w homojen ise, w 'ya *polihomojen* diyeceğiz.

ε Dönüşümünün Bazı Özellikleri

X kümesi G değişmeli grubu tarafından derecelendirilmiş bir küme ve $L(X)$ de X kümesi üzerindeki serbest color Lie süpercebiri olsun. Şimdi $L(X)$ de seçilen elemanların çarpımlarının d ölçümlerinin hangi durumlarda $G_{(-1)}$ de olacağına karar verelim.

1) $u, v \in L(X)$ için $d(u) \in G_{(-1)}$ ve $d(v) \notin G_{(-1)}$ olsun.

$$d([u,v]) = d(u) + d(v)$$

$$\varepsilon(d(u)+d(v), d(u)+d(v)) = \varepsilon(d(u),d(u))\varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u))\varepsilon(d(v),d(v))$$

dir. Burada,

$$\varepsilon(d(u),d(u)) = -1,\ \varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u)) = 1 \text{ ve } \varepsilon(d(v),d(v)) = 1$$

olup,

$$\varepsilon(d(u)+d(v), d(u)+d(v)) = -1$$

dir ve sonuç olarak;

$$d([u,v]) \in G_{(-1)}$$

bulunur.

2) $d(u) \in G_{(-1)}$ ve $d(v) \in G_{(-1)}$ olsun.

$$\varepsilon(d(u)+d(v),d(u)+d(v)) = \varepsilon(d(u),d(u))\varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u))\varepsilon(d(v),d(v))$$

dir. Burada,

$$\varepsilon(d(u),d(u)) = -1\text{, } \varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u)) = 1 \text{ ve } \varepsilon(d(v),d(v)) = -1$$

olup,

$$\varepsilon(d(u)+d(v),d(u)+d(v)) = 1$$

dir ve sonuç olarak;

$$d([u,v]) \notin G_{(-1)}$$

bulunur.

3) $u, v \in L(X)$ için $d(u) \notin G_{(-1)}$ ve $d(v) \notin G_{(-1)}$ olsun.

$$\varepsilon(d(u)+d(v),d(u)+d(v)) = \varepsilon(d(u),d(u))\varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u))\varepsilon(d(v),d(v))$$

dir. Burada,

$$\varepsilon(d(u),d(u)) = 1\text{, } \varepsilon(d(u),d(v))\varepsilon(d(v),d(u)) = 1 \text{ ve } \varepsilon(d(v),d(v)) = 1$$

olup,

$$\varepsilon(d(u)+d(v),d(u)+d(v)) = 1$$

dir ve sonuç olarak;

$$d([u,v]) \notin G_{(-1)}$$

bulunur.

Tanım 2.1.15

L(X) *K*-cismi üzerinde bir color Lie süpercebiri olsun. Eğer,

$$L(X) \cong F / F_{n+1}$$

olacak şekilde *L(X)* ile aynı ranka sahip bir *F* serbest color Lie süpercebiri varsa *L(X)* e *n-inci dereceden serbest nilpotent color Lie süpercebiri* denir. *n=1* ise *L(X) serbest değişmeli color Lie süpercebiri* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.16

L(X) *K*-cismi üzerinde bir color Lie süpercebiri olsun. Eğer bir *k* pozitif tamsayısı için,

$$L(X) = F / \delta^k F$$

olacak şekilde *L(X)* ile aynı ranka sahip bir *F* serbest color Lie süpercebiri varsa, *L(X)* e *serbest çözülebilir color Lie süpercebiri* denir. Özel olarak *k=2* alınırsa *L(X)* e *serbest metabelyen color Lie süpercebiri* denir.

2.2 Serbest Birleşmeli Süpercebirler ve Serbest Color Lie Süpercebirleri

K herhangi bir cisim olmak üzere, birleşmeli bir *A* cebiri verildiğinde bu cebirin Lie cebiri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.1

A, K cismi üzerinde birleşmeli bir cebir olsun. Her $x, y \in A$ için

$$[x, y] = xy - yx$$

olarak tanımlayalım. A nın bu $[x, y]$ elemanına x ile y nin komutatörü denir. $[A]$ ile çarpımı iki elemanın komutatörü olan cebiri gösterelim. $[A]$ Lie cebiri aksiyomlarını sağlar ve bir Lie cebiridir.

Yukarıdakine benzer şekilde birleşmeli bir A cebiri verildiğinde bu cebirin color Lie süpercebiri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.2

H, G–derecelendirilmiş birleşmeli bir *K*-cebir olsun. $[H]$, $u, v \in H$ *G*-homojen elemanları için;

$$[u, v] = uv - \varepsilon(d(u), d(v))vu$$

çarpması ile *color Lie süpercebirdir.*

Tanım 2.2.3

$X \neq \phi$ bir küme $W(X)$ de X kümesindeki elemanların yanyana çarpımıyla oluşan kelimelerin kümesi olsun. A ile bazı $W(X)$ olan serbest K modülü gösterelim. A daki çarpım $W(X)$ kümesini A nın alt yarı grubu ve A yı cebir yapacak şekilde tek olarak belirlenir. $W(X)$ de boş kelime 1 ile gösterilecektir. Bu durumda A serbest üretici kümesi X olan, 1 birim elemanlı bir serbest birleşmeli cebirdir.

X, G derecelendirilmiş bir küme ve *A(X), K* cismi üzerinde *G*-derecelendirilmiş serbest birleşmeli bir cebir olsun. *L(X)* serbest color Lie süpercebiri $[A(X)]$ in bir alt cebirine izomorftur. Bu nedenle *L(X)* cebirini $[A(X)]$ cebirinin bir alt cebiri gibi düşünebiliriz.

Tanım 2.2.4

Z_2 derecelendirilmiş bir serbest birleşmeli cebire *serbest birleşmeli süpercebir* denir.

Tanım 2.2.5

L(X), X tarafından üretilen serbest color Lie süpercebiri ve $Y \subseteq L(X)$ olsun. Eğer *Y*, ürettiği alt cebirin bir serbest üretici kümesi ise *Y* kümesine *bağımsızdır* denir. Diğer bir ifade ile eğer *Y* nin elemanları arasında sıfırdan farklı bir bağıntı yoksa *Y* kümesi bağımsız bir kümedir.

X kümesi tarafından üretilen *A(X)* serbest birleşmeli cebirinin üzerindeki bilinen uzunluk fonksiyonu l ve $a \in A(X)$ için a^0 ile l fonksiyonuna göre a içindeki en yüksek dereceli monomiallerin toplamını gösterelim. Bu durumda a^0, a nın *en büyük dereceli kısmı* olarak adlandırılır. $\deg a$ ile de a nın içerdiği en büyük uzunluklu elemanın uzunluğunu gösterip a nın *derecesi* diyeceğiz.

Tanım 2.2.6

$a \in A$ için $a = a^0$ ise a ya *homojen eleman* denir.

Tanım 2.2.7

$Y \subseteq L(X)$ olsun. Her $y \in Y$ için y^0 elemanı $\{u^0 : u \in Y - \{y\}\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire ait değilse *Y* kümesine *indirgenmiş küme* denir.

Aşağıdaki teorem (Mikhalev,1984), (Mikhalev,1985) de ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.1

L(X) in her indirgenmiş alt kümesi bağımsızdır.

Tanım 2.2.8

L(X) bir *X* kümesi tarafından serbestçe üretilen serbest color Lie süpercebiri olsun. *X* in eleman sayısına *L(X)* in *rankı* denir. Bunu *rank L* ile göstereceğiz.

Aşağıdaki teorem (Mikhalev,1985) de ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.2

L(X) bir serbest color Lie süpercebiri olsun. *L(X)* in her *G*-homojen alt cebiri serbesttir.

Tanım 2.2.9

$\sigma : A \to K$, $1 \le i \le n$ için $\sigma(x_i) = 0$ olacak şekilde tanımlanan homomorfizme *genişletme homomorfizmi* denir. Bu homomorfizmin çekirdeği, bazı X olan bir serbest sol $A(X)$- modüldür. Bu modülü Δ ile gösterelim. Her $u \in \Delta$ elemanı $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i$ formunda tek bir şekilde yazılabilir. u nun $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bazına göre koordinatları olan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ elemanları *Fox türevleri* olup bu türevler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.10

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : A(X) \to A(X) \quad (1 \leq i \leq n)$ dönüşümleri *sol Fox türevleri* olarak adlandırılırlar.

i) $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ (kronecker delta)

ii) Her $u,v \in A$ ve $\alpha,\beta \in k$ için $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u + \beta v) = \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$

iii) Her $u,v \in A$ için $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \sigma(v) + u \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$

$a \in A(X)$ için a nın *sağ Fox türevi* $\dfrac{a\partial}{\partial x_i}$ şeklinde gösterilir. Sağ Fox türevleri için *(i)* ve *(ii)* koşulları aynı olup *(iii)* koşulu; her $u,v \in A(X)$ için,

$$(uv)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sigma(u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v$$

şeklinde ifade edilir.

Bu tanımın açık bir sonucu olarak $\dfrac{\partial(1)}{\partial x_i} = 0$ dır.

Tanım 2.2.11

A(X), $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir ve $Y = \{y_1, \ldots, y_m\} \subset A(X)$ olsun. Y nin Jacobian matrisi

$$J_Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir *mxn* matristir.

Tanım 2.2.12

$\varphi : L(X) \to L(X)$ *endomorfizmi için* φ *nin* Jacobian matrisi,

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi(x_n)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi(x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Sağ ve sol Fox türevleri için zincir kuralını ifade eden aşağıdaki önerme (Fox, 1952) de ispatlanmıştır.

Önerme 2.2.1

φ, *L(X)* in bir endomorfizmi ve $u \in A(X)$ olsun. O zaman,

1) $\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right) \dfrac{\partial \varphi(x_k)}{\partial x_j}$

2) $\dfrac{\varphi(u)\partial}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varphi(x_k)\partial}{\partial x_j} \varphi\left(\dfrac{u\partial}{\partial x_k}\right)$

dır.

2.3 Serbest Color Lie Süpercebirlerinin Otomorfizmleri

Tanım 2.3.1

L(X) serbest color Lie süpercebirinin *G*-homojen alt kümesi $S = \{s_\alpha : \alpha \in I\}$ olsun. Aşağıdaki ω dönüşümüne bir *basit dönüşüm* denir.

$$\omega : S \to L(X)$$

ω tersinir bir lineer dönüşümdür veya her $\alpha \in I$ için bütün $\omega(s_\alpha)$ lar G-homojen elemanlar ve $d(\omega(s_\alpha)) = d(s_\alpha)$ olmak üzere, her $\alpha \in I - \{\beta\}$ için

$$\omega(s_\alpha) = s_\alpha$$

olacak şekilde bir $\beta \in I$ vardır ve

$$\omega(s_\beta) = s_\beta + f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t})$$

dır. Burada, $f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t})$ *L(X)* de $\{s_\alpha : \alpha \in I - \{\beta\}\}$ tarafından üretilen alt cebirin bir G-homojen elemanı ve

$$d(f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t})) = d(s_\beta)$$

dır.

L(X) in herhangi bir otomorfizminin sonlu adımda elde edilebileceğini (Mikhalev, A. A. and Zolotykh, 1995) de aşağıdaki önerme ile ifade etmiştir.

Önerme 2.3.1

L serbest color Lie süpercebirinin her otomorfizmi, L nin serbest doğuraylarının bir kümesine ardışık olarak basit dönüşümlerin uygulanmasıyla elde edilir.

3. SERBEST COLOR VE SERBEST NİLPOTENT COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİNİN BAZI

Bu bölümün birinci kısmında serbest color Lie süpercebirlerinin bazını daha kolay anlaşılır ve kullanışlı biçimini ifade edeceğiz. İkinci kısımda ise $n \leq 9$ olmak üzere n-inci dereceden serbest nilpotent color Lie süpercebirlerinin bazını ve boyutlarını belirleyeceğiz.

3.1 Serbest Color Lie Süpercebirlerinin Bazı

Önerme 3.1.1

$F\langle X\rangle$ bir X kümesi üzerindeki serbest birleşmeli cebir olmak üzere $F\langle X\rangle$ cebirinden elde edilen color Lie süpercebirini $F\langle X\rangle^{(\varepsilon)}$ ile ve X kümesi üzerindeki serbest color Lie süpercebirini *L(X)* ile gösterelim. $[X]$, $F\langle X\rangle^{(\varepsilon)}$ içerisinde X kümesi tarafından üretilen alt cebir olsun. X kümesinin özdeşlik dönüşümü tarafından doğrulan doğal homomorfizm

$$L[X] \xrightarrow{\pi} [X]$$

olsun. O zaman π colored Lie süpercebirlerinin bir izomorfizmidir, her $[u]$ regüler monomiali için

$$\pi([u]+I) = u + u^{*}$$

ve $[p]$ regüler bir monomial, $d(p) \in G_{(-1)}$, $[u] = ([p])([p])$ için, $\pi([u]+I) = 2u + u^{*}$. Her iki durumda da u^{*}, u'dan küçük *m(u)* polidereceli kelimelerin bir lineer kombinasyonudur.

Teorem 3.1.1 (Mikhalev, 1985)

K bir cisim ve $kar\, K \neq 2{,}3$ olsun. O zaman $L(X) = F[X]/I$ serbest color Lie süpercebirindeki s-regüler monomialler tarafından doğurulan kosetler $L(X)$ in bazını oluştururlar.

X alfabesindeki birleşmeli olmayan monomiallerin serbest grupoidini $\Gamma(X)$ ile gösterelim. Bir $R \subset \Gamma(X)$ kümesi < sıralaması ile aşağıdaki koşulları sağlıyorsa R ye bir *baz ailesi* denir.

1) $X \subset R$

2) $w = [u,v] \in R \iff u,v \in R$ ve

   a) $u>v$

   b) $u = [u_1,u_2]$ ise $u_2 \leq v$;

   c) $w>v$

Teorem 3.1.2 (Shirshov, 1962)

$\Gamma(X)$ in her R baz ailesi $F(X)$ serbest Lie cebirinin bir bazıdır.

Ayrıca R deki < sıralamasını $l(u)>l(v)$ ise $u>v$ olarak alırsak X kümesi üzerindeki Hall bazını elde edeceğimiz açıktır.

Tanım 3.1.1

$X \neq \phi$ sonlu bir küme, $F = F(X)$, X kümesi üzerindeki serbest Lie cebiri ve $L = L(X)$ de X kümesi üzerindeki serbest color Lie süpercebiri olsun. H_i, $i \in IN$, F nin Hall bazındaki i-uzunluklu terimlerin kümesini göstermek üzere B_i, $i \in IN$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$B_{2k+1} = H_{2k+1}$$

$$B_{2k} = H_{2k} \cup \{[u,u] : u \in B_k, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

Teorem 3.1.2

$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ kümesi X kümesi üzerindeki serbest color L-Lie süpercebirinin bir bazıdır.

İspat

$B = \{a, [b,b]: a,b \in R, d(b) \in G_{(-1)}\}$ kümesinin L nin bir bazı olduğunu (Mikhalev ve Zolotykh, 1995) de ispatlamıştır. $B = R \cup \{[b,b]: b \in R, d(b) \in G_{(-1)}\}$ olarak yazabiliriz. H, X kümesi üzerindeki Hall bazı olmak üzere; R kümesi üzerindeki lineer sıralamayı elemanlarının uzunluk fonksiyonu olarak düşünürsek R=H elde ederiz. O halde

$$B = H \cup \{[b,b]: b \in H, d(b) \in G_{(-1)}\}$$

dır. B kümesini elemanlarının uzunluklarına göre ayırırsak,

$$B_{2k+1} = H_{2k+1}$$

$$B_{2k} = H_{2k} \cup \{[u,u] : u \in B_k, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

olarak elde ederiz ki bu da $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ kümesinin baz olacağı anlamına gelir.

3.2 Serbest Nilpotent Color Lie Süpercebirlerinin Bazı

Şimdi birinci bölümde özellikleri hesaplanan ε dönüşümünü ve B baz kümesini kullanarak $n \leq 9$ olmak üzere n-inci dereceden nilpotent serbest color Lie süpercebirlerinin bazını ve boyutunu hesaplayalım.

G değişmeli bir grup ve $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi G tarafından derecelendirilmiş boş olmayan bir küme ve $L=L(X)$ olsun.

$$X_0 = \{x \in X : d(x) \in G_{(-1)}\}$$

ve

$$X_1 = \{x \in X : d(x) \notin G_{(-1)}\}$$

olarak tanımlayalım $X = X_0 \cup X_1$ dir. B, L nin bir bazı ve $B_{(i)}$, B de derecesi i olan elemanların kümesi olsun.

$$B^+_{(i)} = \{u \in B_{(i)} : d(u) \notin G_{-1}\}$$

ve

$$B^-_{(i)} = \{u \in B_{(i)} : d(u) \in G_{-1}\}$$

olarak tanımlayalım. $B_{(i)} = B^+_{(i)} \cup B^-_{(i)}$ olduğu açıktır. $L^+_i = Sp(B^+_{(i)})$ ve $L^-_i = Sp(B^-_{(i)})$ olmak üzere $L_i / L_{i+1} = L^+_i \oplus L^-_i$ dir. Şimdi L_i / L_{i+1} alt merkezi faktörlerinin ve L^+_i ile L^-_i bileşenlerinin baz ve boyutlarını belirleyip L / L_i serbest nilpotent color Lie süpercebirinin bazını yazacağız.

Önerme 3.2.1

L_1 / L_2 nin bazı $B_{(1)} = X$ ve boyutu $boy\, L_1 / L_2 = |X|$ dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den $B_{(1)} = X$ olup ispat açıktır.

Sonuç 3.2.1

2. dereceden serbest nilpotent color L Lie süpercebirinin bazı

$$B_{(1)} = X$$

ve boyutu

$$boyL = |X|$$

dir.

Önerme 3.2.2

$L_2 / L_3 = L_2^+ \oplus L_2^-$ olup L_2^+ nın bazı,

$$B_{(2)}^+ = \left(H^{X_0}\right)_2 \cup \left(H^{X_1}\right)_2 \cup \{[x_i, x_i] : x_i \in X_0 \}$$

ve L_2^- nin bazı,

$$B_{(2)}^- = \{[x_i, x_j] : x_i \in X_1, x_j \in X_0\}$$

olup,

$$boyL_2^+ = \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0|$$

ve

$$boy L_2^- = |X_0||X_1|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den,

$$B_{(2)} = H_2 \cup \{[x,x] : x \in X, d(x) \in G_{(-1)}\}$$

dir. Burada ,

$$B_{(2)} = \left(H^{X_0}\right)_2 \cup \left(H^{X_1}\right)_2 \cup \{[x_i,x_i] : x_i \in X_0 \} \cup \{[x_i,x_j] : x_i \in X_1, x_j \in X_0\}$$

parçalanışından söz edebiliriz.

$$B_{(2)}^+ = \left(H^{X_0}\right)_2 \cup \left(H^{X_1}\right)_2 \cup \{[x_i,x_i] : x_i \in X_0 \}$$
$$B_{(2)}^- = \{[x_i,x_j] : x_i \in X_1, x_j \in X_0\}$$

dir.

$$Sp\left(B_{(2)}\right) = Sp\left(B_{(2)}^+\right) \oplus Sp\left(B_{(2)}^-\right)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\left|\left(H^{X_0}\right)_2\right| = \frac{1}{2}\left(\mu(1)|X_0|^2 + \mu(2)|X_0|^1\right) = \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right)$$
$$\left|\left(H^{X_1}\right)_2\right| = \frac{1}{2}\left(\mu(1)|X_1|^2 + \mu(2)|X_1|^1\right) = \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right)$$
$$\left|\{[x_i,x_i] : x_i \in X_0\}\right| = |X_0|$$

$$\left|\left\{[x_i, x_j] : x_i \in X_1 \ , x_j \in X_0\right\}\right| = |X_0||X_1|$$

olup,

$$\left|B_{(2)}^{+}\right| = \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0|$$

$$\left|B_{(2)}^{-}\right| = |X_0||X_1|$$

dir. O halde,

$$boyL_2^{+} = \left|B_{(2)}^{+}\right| = \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0|$$

ve

$$boyL_2^{-} = \left|B_{(2)}^{-}\right| = |X_0||X_1|$$

olup,

$$boy\, L_2 / L_3 = \left|B_{(2)}\right| = \left|B_{(2)}^{+}\right| + \left|B_{(2)}^{-}\right| = \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0| + |X_0||X_1|$$

bulunur, veya;

$$boy\, L_2 / L_3 = \left|B_{(2)}\right| = |H_2| + |X_0| = \frac{|X|\left(|X| - 1\right)}{2} + |X_0|$$

dır.

Sonuç 3.2.2

$L/L_3 = L_1/L_2 \oplus L_2/L_3$ 3. dereceden serbest nilpotent color Lie süpercebirinin bazı $B_{(1)} \cup B_{(2)}$ olup $boyL^+ = |X_1| + \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0|$ ve $boyL^- = |X_0| + |X_0||X_1|$ dir.

Önerme 3.2.3

L_3/L_4 bazı ve boyutu:

$$B_{(3)} = H_3$$

ve

$$boy\, L_3/L_4 = |B_{(3)}| = |H_3|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den $B_{(3)} = H_3$ dür ve boyutu $L_3/L_4 = |B_{(3)}| = |H_3|$ dür. Şimdi $B_{(3)}$ de d-ölçümü $G_{(-1)}$ e düşen elemanları inceleyelim. Bu elemanlar,

$$A_1 = \{(x_i x_j)x_k : (x_i x_j) \in H_2 \,, d(x_i x_j) \in G_{(-1)} \,, d(x_k) \notin G_{(-1)}\}$$

veya

$$A_2 = \{(x_i x_j)x_k : (x_i x_j) \in H_2 \,, d(x_i x_j) \notin G_{(-1)} \,, d(x_k) \in G_{(-1)}\}$$

şeklindeki regüler elemanlar formundadır.

A_1 durumu:

$d(x_i x_j) \in G_{(-1)}$ ise $(x_i x_j) \in B_{(2)}^{-}$ ve $d(x_k) \notin G_{(-1)}$ ise $x_k \in X_1$ dir. $x_j \in X_0$, $x_k \in X_1$ için $x_j < x_k$ olup bu elemanların sayısı

$$|B_{(2)}^{-}||X_1| = |X_0||X_1||X_1| = |X_0||X_1|^2$$

dir.

A_2 durumu:

$d(x_i x_j) \notin G_{(-1)}$ ise burada iki durum ile karşılaşırız,

$$1)\ (x_i x_j) \in (H^{X_1})_2 \quad \text{veya} \quad 2)\ (x_i x_j) \in (H^{X_0})_2$$

dir.

Durum 1)

$(x_i x_j) \in (H^{X_1})_2$ ve $d(x_k) \in G_{(-1)}$ ise, $x_k \in X_0$ dır. Fakat her $x_j \in X_1$ ve her $x_k \in X_0$ için $x_j > x_k$ olup $(x_i x_j)x_k$ elemanı regüler olamaz.

Durum 2)

$(x_i x_j) \in (H^{X_0})_2$ ve $d(x_k) \in G_{(-1)}$ ise $x_k \in X_0$ dır. O halde bu şekilde elde edeceğimiz regüler terimlerin sayısı:

$$\left|\left(H^{X_0}\right)_3\right| = \frac{1}{3}\left(\left|X_0\right|^3 - \left|X_0\right|\right)$$

dir. $B_{(3)}$ de d-ölçümü $G_{(-1)}$ de olmayan elemanları inceleyelim. Bu elemanlar,

$$A_3 = \left\{(x_i x_j)x_k : (x_i x_j) \in H_2 , d(x_i x_j) \in G_{(-1)} , d(x_k) \in G_{(-1)}\right\}$$

veya

$$A_4 = \left\{(x_i x_j)x_k : (x_i x_j) \in H_2 , d(x_i x_j) \notin G_{(-1)} , d(x_k) \notin G_{(-1)}\right\}$$

şeklindeki regüler elemanlar formundadır.

A_3 durumu:

$d(x_i x_j) \in G_{(-1)}$ ise $(x_i x_j) \in B_{(2)}^{-}$ ve $d(x_k) \in G_{(-1)}$ ise $x_i \in X_1$, $x_j \in X_0$, $x_k \in X_1$ dir.

Bu durumdaki elemanların sayısı

$$\left|X_1\right|\frac{\left|X_0\right|\left(\left|X_0\right|+1\right)}{2}$$

dir.

A_4 durumu:

$d(x_i x_j) \notin G_{(-1)}$ ise A_2 durumunda olduğu gibi iki durum ile karşılaşırız,

$$1)\ (x_i x_j) \in \left(H^{X_1}\right)_2 \text{ veya } 2)\ (x_i x_j) \in \left(H^{X_0}\right)_2$$

dir.

Durum 1)

$(x_i x_j) \in \left(H^{X_1}\right)_2$ ve $x_k \in X_1$ olup bu şekilde elde edeceğimiz regüler terimlerin sayısı

$$\left|\left(H^{X_1}\right)_3\right|$$

dir.

Durum 2)

$(x_i x_j) \in \left(H^{X_0}\right)_2$ ve $x_k \in X_1$ dir. $x_j \in X_0$, $x_k \in X_1$ için $x_j < x_k$ dır. O halde bu şekilde elde edeceğimiz regüler terimlerin sayısı

$$\left|\left(H^{X_0}\right)_2\right|\left|X_1\right|$$

dir. Şimdi yukarıda elde ettiğimiz terimleri toplayalım.

$$|X_0||X_1|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right) + |X_1||X_0|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_1|^3 - |X_1|\right)$$

Burada $|X_0| = s$, $|X_1| = t$ yazarsak $|X| = s + t$ dir.

$$st^2 + \frac{1}{3}(s^3 - s) + ts^2 + \frac{1}{3}(t^3 - t)$$

$$= \frac{1}{3}[s^3 + t^3 + 3st^2 + 3s^2t - (s+t)]$$

$$= \frac{1}{3}[(s+t)^3 - (s+t)]$$

$$= \frac{1}{3}(|X|^3 - |X|)$$
$$= |H_3|$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.3

$L/L_4 = L_1/L_2 \oplus L_2/L_3 \oplus L_3/L_4$ 4. dereceden serbest nilpotent color Lie süpercebirinin bazı

$$B_{(1)} \cup B_{(2)} \cup B_{(3)}$$

olup

$$boyL^+ = |X_1| + \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0| + |X_1||X_0|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_1|^3 - |X_1|\right)$$
$$boyL^- = |X_0| + |X_0||X_1| + |X_0||X_1|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right)$$

dir.

Önerme 3.2.4

L_4/L_5 in bazı;

$$B_{(4)} = H_4 \cup \{[u,u] : u \in B_{(2)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

dir ve boyutu;

$$boy\, L_4/L_5 = |B_{(4)}| = |H_4| + |B_2^-| = |H_4| + |X_0||X_1|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den, $B_{(4)} = H_4 \cup \{[u,u] : u \in B_{(2)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$ dir.

$$|B_{(4)}| = |H_4| + |B^-_{(2)}| = |H_4| + |X_0||X_1|$$

$$|H_4| = \frac{1}{4}\left(\mu(1)|X|^4 + \mu(2)|X|^2 + \mu(4)|X|^1\right)$$

$$= \frac{|X|^4 - |X|^2}{4}$$

olup,

$$boy\, L_4 / L_5 = |B_4| = \frac{|X|^4 - |X|^2}{4} + |X_0||X_1|$$

olarak bulunur. Ayrıca $B_{(4)}$ deki regüler elemanlar,

$$1)\ ((x_i x_j)x_k)x_l \quad \text{veya} \quad 2)\ (x_i x_j)(x_k x_l)$$

formundadır.

$$((A_1A_2)A_3)A_4 = \{((x_i x_j)x_k)x_l : x_i > x_j,\, x_j \le x_k \le x_l,\, x_\alpha \in X,\, 1 \le \alpha \le n\}$$

olarak tanımlayalım.

Durum 1)

Bu durumdaki elemanlar:

$$a)\ ((X_0X_0)X_0)X_0 \quad d)\ ((X_1X_0)X_0)X_0 \quad g)\ ((X_1X_1)X_1)X_1$$
$$b)\ ((X_0X_0)X_0)X_1 \quad e)\ ((X_1X_0)X_0)X_1$$
$$c)\ ((X_0X_0)X_1)X_1 \quad f)\ ((X_1X_0)X_1)X_1$$

Şeklindedir, $d(((x_ix_j)x_k)x_l)\in G_{(-1)}$ ise, bu kelimelerden d-ölçümü $G_{(-1)}$ e düşen elemanlar: *b), d)* ve *f)* dir. Şimdi bu elemanları regülerliği de düşünerek sayalım.

b) Burada her $x\in X_0$ ve her $y\in X_1$ için $x<y$ olduğundan,

$$\left|\left(H^{X_0}\right)_3\right|\left|X_1\right|=\frac{1}{3}\left(\left|X_0\right|^3-\left|X_0\right|\right)\left|X_1\right|$$

eleman vardır.

d) $X_0=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$ kabul edelim. A bir küme olmak üzere,

$$(Ab)=\{(ab):a>b,\ a\in A\}$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi $((X_1X_0)X_0)X_0$ formundaki regüler elemanları sayalım, bunlar:

$((X_1x_1)x_1)x_1$, $((X_1x_1)x_1)x_2,\cdots,((X_1x_1)x_1)x_t$ den $|X_1||X_0|$ tane,

$((X_1x_1)x_2)x_2$, $((X_1x_1)x_2)x_3,\cdots,((X_1x_1)x_2)x_t$ den $|X_1|(|X_0|-1)$ tane ve böyle devam edersek,

$$\vdots$$

$((X_1x_t)x_t)x_t$ den $|X_1|\cdot 1$ tane bulunur ve

$$|X_1|(1+2+\cdots+|X_0|)=\frac{1}{2}(|X_0|+1)|X_0||X_1|$$

eleman elde edilir. Aynı düşünceyi sürdürerek,

$((X_1x_2)x_2)x_2$, $((X_1x_2)x_2)x_3, \cdots, ((X_1x_2)x_2)x_t$ den $|X_1|(|X_0|-1)$ tane,

$((X_1x_2)x_3)x_3$, $((X_1x_2)x_3)x_4, \cdots, ((X_1x_2)x_3)x_t$ den $|X_1|(|X_0|-2)$ tane ve böyle devam edersek,

$$\vdots$$

$((X_1x_2)x_t)x_t$ den $|X_1|\cdot 1$ tane bulunur ve

$$|X_1|(1+2+\cdots+(|X_0|-1)) = \frac{1}{2}(|X_0|-1)|X_0||X_1|$$

eleman elde edilir. Son olarak,

$((X_1x_t)x_t)x_t$ den $|X_1|\cdot 1$ tane eleman elde edilir. O halde bu durumdaki elemanların toplam sayısı:

$$\frac{1}{2}(|X_0|+1)|X_0||X_1| + \frac{1}{2}(|X_0|-1)|X_0||X_1| + \frac{1}{2}(|X_0|-2)(|X_0|-1)|X_1| + \cdots + 1\cdot|X_1|$$
$$= \frac{1}{2}|X_1|\sum_{k=0}^{|X_0|-1}(|X_0|-k)(|X_0|-k+1)$$

olarak bulunur.

f) $X_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ kabul edelim.

Şimdi $((X_1X_0)X_1)X_1$ formundaki regüler elemanları sayalım, bunlar:

$((X_1X_0)x_1)x_1$, $((X_1X_0)x_1)x_2, \cdots, ((X_1X_0)x_1)x_n$ den $|X_1||X_0|\,|X_1|$ tane,

$((X_1X_0)x_2)x_2$, $((X_1X_0)x_2)x_3, \cdots, ((X_1X_0)x_2)x_n$ den $|X_1||X_0|\,(|X_1|-1)$ tane ve böyle devam edersek,

$\vdots$

$((X_1X_0)x_n)x_n$ den $|X_1||X_0|\cdot 1$ tane eleman elde edilir.

O halde bu durumdaki elemanların toplam sayısı:

$$\begin{aligned}&|X_0||X_1|(1+2+\cdots+|X_1|)\\&=\frac{1}{2}(|X_1|+1)|X_0||X_1|^2\end{aligned}$$

olarak bulunur. $d((((x_i)x_j)x_k)x_l)\in G_{(-1)}$ elemanlarının sayısı;

$$\frac{1}{3}\left(|X_0|^3-|X_0|\right)|X_1|+\frac{1}{2}|X_1|\sum_{k=0}^{|X_0|-1}(|X_0|-k)(|X_0|-k+1)+\frac{1}{2}(|X_1|+1)|X_0||X_1|^2$$

olarark elde edilir.

Durum 2)

$(x_ix_j)(x_kx_l)$ regüler kelimelerinden d-ölçümü $G_{(-1)}$ e düşen elemanlar:

$B_{(2)}$ de $G_{(-1)}$'e düşen regüler terim sayısı $|B^-_{(2)}|=|X_0||X_1|$ tanedir. $G_{(-1)}$'e düşmeyen regüler terim sayısı ise $|(H^{X_1})_2|+|(H^{X_0})_2|$ tane olup sonuç olarak bu durumun eleman sayısı;

$$|X_0||X_1|\left(|(H^{X_1})_2|+|(H^{X_0})_2|\right)$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.2.4

$L/L_5 = L_1/L_2 \oplus L_2/L_3 \oplus L_3/L_4 \oplus L_4/L_5$ 5. dereceden serbest nilpotent color Lie süpercebirinin bazı

$$B_{(1)} \cup B_{(2)} \cup B_{(3)} \cup B_{(4)}$$

olup

$$boyL^{+} = |X_1| + \frac{1}{2}\left(|X_0|^2 - |X_0|\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1|^2 - |X_1|\right) + |X_0| + |X_1||X_0|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_1|^3 - |X_1|\right)$$
$$+\frac{|X|^4 - |X|^2}{4} + |X_0||X_1| - \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right)|X_1|$$
$$-\frac{1}{2}|X_1| \sum_{k=0}^{|X_0|-1}\left(|X_0| - k\right)\left(|X_0| - k + 1\right) - \frac{1}{2}\left(|X_1| + 1\right)|X_0||X_1|^2$$
$$boyL^{-} = |X_0| + |X_0||X_1| + |X_0||X_1|^2 + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right) + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right)|X_1|$$
$$+\frac{1}{2}|X_1| \sum_{k=0}^{|X_0|-1}\left(|X_0| - k\right)\left(|X_0| - k + 1\right) + \frac{1}{2}\left(|X_1| + 1\right)|X_0||X_1|^2$$

dir.

Önerme 3.2.5

L_5/L_6 bazı ve boyutu:

$$B_{(5)} = H_5$$

ve

$$boy\, L_5/L_6 = \left|B_{(5)}\right| = |H_5|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den,

$$B_{(5)} = H_5$$

dir ve boyutu

$$boy\, L_5 / L_6 = |B_{(5)}| = |H_5|$$

dir.

Önerme 3.2.6

L_6 / L_7 bazı;

$$B_{(6)} = H_6 \cup \{[u,u] : u \in B_{(3)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

ve boyutu;

$$boy\, L_6 / L_7 = |B_{(6)}| = |H_6| + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right) + |X_0||X_1|^2$$

dır.

İspat

Teorem 3.1.2 den,

$$B_{(6)} = H_6 \cup \{[u,u] : u \in B_{(3)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

dır. Önerme 3.2.3 de $\left|B_3^-\right|$ yi hesaplamıştık, yerine yazarsak,

$$boy\, L_6 / L_7 = \left|B_{(6)}\right| = \left|H_6\right| + \frac{1}{3}\left(\left|X_0\right|^3 - \left|X_0\right|\right) + \left|X_0\right|\left|X_1\right|^2$$

bulunur.

Önerme 3.2.7

L_7 / L_8 bazı

$$B_{(7)} = H_7$$

ve boyutu,

$$boy\, L_7 / L_8 = \left|B_{(7)}\right| = \left|H_7\right|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den,

$$B_{(7)} = H_7$$

dir. Dolayısıyla,

$$boy\, L_7 / L_8 = \left|B_{(7)}\right| = \left|H_7\right|$$

bulunur.

Önerme 3.2.8

L_8 / L_9 bazı,

$$B_{(8)} = H_8 \cup \{[u,u] : u \in B_{(4)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

ve boyutu,

$$\begin{aligned} boyL_8 / L_9 = \left|B_{(8)}\right| &= |H_8| + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right)|X_1| + \frac{1}{2}|X_1| \sum_{k=0}^{|X_0|-1}\left(|X_0| - k\right)\left(|X_0| - k + 1\right) \\ &+ |X_0||X_1| \frac{|X_1|\left(|X_1| + 1\right)}{2} + |X_0||X_1|\left(\left|\left(H^{X_1}\right)_2\right| + \left|\left(H^{X_0}\right)_2\right|\right) \end{aligned}$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den,

$$B_{(8)} = H_8 \cup \{[u,u] : u \in B_{(4)}, d(u) \in G_{(-1)}\}$$

dir. Önerme 3.2.4 de $\left|B^{-}_{(4)}\right|$ yi hesaplamıştık, bunu yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} boyL_8 / L_9 = \left|B_{(8)}\right| &= |H_8| + \frac{1}{3}\left(|X_0|^3 - |X_0|\right)|X_1| + \frac{1}{2}|X_1| \sum_{k=0}^{|X_0|-1}\left(|X_0| - k\right)\left(|X_0| - k + 1\right) \\ &+ |X_0||X_1| \frac{|X_1|\left(|X_1| + 1\right)}{2} + |X_0||X_1|\left(\left|\left(H^{X_1}\right)_2\right| + \left|\left(H^{X_0}\right)_2\right|\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.2.9

L_9 / L_{10} bazı;

$$B_{(9)} = H_9$$

ve boyutu,

$$boy\, L_9 / L_{10} = |B_{(9)}| = |H_9|$$

dir.

İspat

Teorem 3.1.2 den

$$B_{(9)} = H_9$$

dir ve dolayısıyla,

$$boy\, L_9 / L_{10} = |B_{(9)}| = |H_9|$$

olarak bulunur.

4. RANKI İKİ OLAN SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Bu bölümde rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmlerini genelleştireceğiz. P. M. Cohn 1964 de rankı iki olan serbest Lie cebirleri için benzer çalışmayı yapmış ve üretici kümenin *Gl(2,K)* ya izomorfik olduğunu ispatlamıştır.

Serbest Lie cebirlerindeki otomorfizmlerin üretici kümesini bulmak için basit Lie dönüşümleri kullanılır. (Cohn, 1964) de rankı iki olan serbest Lie cebirlerinde tek değişkenli bir Lie polinomunun lineer olması gerçeğinden yola çıkarak aşağıdaki Önermeyi ispatlamıştır.

Önerme 4.1

F rankı iki olan serbest Lie cebiri olmak üzere, F nin otomorfizm grubu lineerdir. Başka bir deyişle;

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta y$$
$$\varphi(y) = \gamma x + \delta y$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ öyle ki;

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

matrisi tersinirdir.

Aşağıdaki Önermenin ispatı (Mikhalev ve Zolotykh, 1995) de bulunabilir.

Önerme 4.2

M, L nin indirgenmiş bir alt kümesi olsun. O zaman *M* nin elemanları üzerindeki bir Lie polinomunun en büyük dereceli kısmı, *M* nin elemanlarının en büyük dereceli kısımlarının bir Lie polinomudur.

Serbest color Lie süpercebirleri için aşağıdaki Teorem (Mikhalev ve Zolotykh, 1995) de verilmiştir.

Teorem 4.1

L bir serbest color Lie süpercebiri olmak üzere L nin basit otomorfizmlerinin kümesi, L nin otomorfizm grubunu üretir.

İspat

L(X)=L(Y) olsun. Rankın tekliğinden $|X| = |Y|$ dir. $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ kümesini basit dönüşümler ile X-indirgenmiş D kümesine indirgeyebiliriz. Örneğin,

$\hat{y}_n = g(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{n-1})$ ise $\omega(y_i) = y_i$ ve $\omega(y_n) = y_n - g(y_1, \ldots, y_{n-1})$ dir. Y bağımsız bir alt küme olup, $\omega(y_n) \neq 0$ dır. Böylece sonlu adımda $D = \{d_1, \ldots, d_n\}$ kümesi elde edilir.

$$x_i = g_i(d_1, \ldots, d_n), \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad g_i \in L(T) \qquad (4.1)$$

D indirgenmiş küme olup Önerme 4.2 den, $g_i(d_1, \ldots, d_n)$ nin en büyük dereceli kısmı $\hat{d}_i$, $1 \leq i \leq n$ en büyük dereceli terimlerinin bir Lie polinomudur. O halde (4.1) den d_i, $x_i \in X$ doğuraylarının bir lineer kombinasyonudur. Bir non-dejenere lineer dönüşüm ile D yi X e dönüştürebiliriz.

Şimdi rankı iki olan serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmlerini aşağıdaki Teorem ile genelleştirelim.

Teorem 4.2

L serbest üretici kümesi $X = \{x, y\}$ olan serbest color Lie süpercebiri olsun. O zaman L nin otomorfizmleri;

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$
$$\varphi(y) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 [x, x]$$

formundadır. Buradaki $1 \le i \le 2$ ve $1 \le j \le 3$ için $\alpha_i, \beta_j \in K$ ve α_i, β_j katsayıları X kümesinin G-derecelendirilmesine göre belirlenir.

İspat

Teorem 4.1 den dolayı L nin otomorfizm grubu lineer otomorfizmler ve basit otomorfizmler tarafından üretilir. L nin lineer otomorfizmleri,

$$x \to \alpha x + \beta y$$
$$y \to \gamma x + \delta y$$

formundadır. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ ve $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dır. X kümesine basit dönüşümler uygulayarak L nin basit otomorfizmlerini bulacağız. Ancak burada X kümesinin G-derecelendirilmesi basit otomorfizmlerin belirlenmesinde etkin bir rol alacağından, ispatı üç durum için inceleyeceğiz.

Durum 1) $d(x) \in G_{-1}$, $d(y) \notin G_{-1}$ ise; L nin basit otomorfizmleri $\gamma \in K$ olmak üzere

$$x \to x$$
$$y \to y + \gamma [x, x]$$

olarak elde edilir. O halde otomorfizm grubunun herhangi bir elemanı $\alpha, \beta, \gamma \in K$ ve $\alpha\beta \neq 0$ için

$$x \to \alpha x$$
$$y \to \beta y + \gamma[x, x]$$

formundadır.

Durum 2) $d(x), d(y) \notin G_{-1}$ ise; L nin basit otomorfizmleri

a) d(x)=d(y) ise $\alpha, \beta \in K$ için

$$x \to x + \beta y \qquad x \to x$$
$$y \to y \qquad y \to y + \alpha x$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla L nin otomorfizm grubunun elemanları $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ ve $\alpha\delta - \beta\delta \neq 0$ olmak üzere

$$x \to \alpha x + \beta y$$
$$y \to \gamma x + \delta y$$

$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ formundadır.

b) $d(x) \neq d(y)$ ise L nin basit otomorfizmleri tersinir lineer dönüşümler olup otomorfizm grubunun elemanları $\alpha, \beta \in K$ ve $\alpha\beta \neq 0$ için

$$x \to \alpha x$$
$$y \to \beta y$$

formundadır.

Durum 3) $d(x), d(y) \in G_{-1}$ ise; L nin basit otomorfizmleri

a) d(x)=d(y) ise

$$\begin{aligned} x &\to x + \beta y \\ y &\to y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &\to x \\ y &\to y + \alpha x \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve L nin otomorfizm grubunun elemanları

$$\begin{aligned} x &\to \alpha x + \beta y \\ y &\to \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

formundadır. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ ve $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dır.

b) $d(x) \neq d(y)$ ise L nin otomorfizm grubunun elemanları $\alpha, \beta \in K$ ve $\alpha\beta \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\to \alpha x \\ y &\to \beta y \end{aligned}$$

formundadır.

Şimdi Durum 1, 2 ve 3 de elde ettiğimiz sonuçları birleştirirsek L nin otomorfizmlerini, $d(x) \in G_{-1}$ ise

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \varphi(y) &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 [x, x] \end{aligned}$$

veya $d(y) \in G_{-1}$ ise

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta_3 [y, y] \\ \varphi(y) &= \beta_1 x + \beta_2 y \end{aligned}$$

$\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0$, olarak elde ederiz.

5. TEST ELEMANLARI VE OTOMORFİZMLER

5.1 Test Elemanları

L ve *A(X)* sırasıyla, $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ kümesi tarafından serbestçe doğrulan serbest color Lie süpercebiri ve serbest birleşmeli cebir olsun.

Serbest Lie cebirleri için (Umirbaev, 1990) da, bir serbest Lie cebirinin bir endomorfizminin bir otomorfizm olması için gerek ve yeter koşulun bu endomorfizmin Jacobian matrisinin tersinir olmasıdır gerçeğini ispatlamıştır. Serbest color Lie süpercebirleri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 5.1.1 (Mikhalev, 1992)

L nin bir φ endomorfizminin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul J_φ Jacobian matrisinin *A* üzerinde tersinir olmasıdır.

Teorem 5.1.2

H, L nin bir alt cebiri ve *J, A(X)* in *H* tarafından üretilen sağ ideali olsun. O zaman $L \cap J = H$ dir.

Tanım 5.1.1

$u \in L$ olmak üzere *L* nin her φ endomorfizmi için;

$$\varphi(u) = u$$

iken φ bir otomorfizm ise *u* ya *test elemanı* denir.

Serbest gruplarda bir u elemanının bir test elemanı olabilmesi için gerekli koşullar (Shpilrain, 1994) de verilmiştir. (Shpilrain, 1995) de otomorfizmleri ayırt etmede test elemanı yaklaşımı ile ters fonksiyon teoremi yaklaşımları arasındaki ilişkileri açıklamıştır.

Bu bölümde n doğuraylı ve ilginçliği açısından iki doğuraylı serbest color Lie süpercebirleri için bulduğumuz test elemanlarını vereceğiz.

Teorem 5.1.3

Aşağıdaki elemanlar L için birer test elemanıdır.

(a) n-çift pozitif tamsayı ise;

$$u = [x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n].$$

(b) $z = [x_1 x_1] + \cdots + [x_n, x_n]$ $\qquad d(x_i) \in G_{(-1)},\ i = 1, \ldots, n.$

İspat

(a) $\varphi(u) = u$ olup $u = [x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n]$ yazarsak,

$$\varphi([x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n]) = [x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n]$$

dir. φ nin homomorfizm olmasından,

$$[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] + \cdots + [\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)] = [x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n]$$

bulunur. Şimdi bu eşitliği oluşturan elemanların $A(X)$ birleşmeli cebiri üzerindeki özdeşlerini yazarsak

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1)\varphi(x_2)-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\varphi(x_1)+\cdots+\\&\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)-\varepsilon(d(\varphi(x_{n-1})),d(\varphi(x_n)))\varphi(x_n)\varphi(x_{n-1})\\&=x_1x_2-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2x_1+\cdots+x_{n-1}x_n-\varepsilon(d(x_{n-1}),d(x_n))x_nx_{n-1}\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının sırasıyla $x_1,\ldots,x_n$ değişkenlerine göre Fox türevlerini alırsak;

$$\begin{aligned}&-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}+\cdots+\varphi(x_{n-1})\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_1}=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2\\&-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}+\cdots+\varphi(x_{n-1})\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_2}=x_1\\&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\&-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_n}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_n}+\cdots+\varphi(x_{n-1})\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_n}=x_{n-1}\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her birini soldan $\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)$ parantezine alırsak;

$$\begin{aligned}&\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\right)+\varphi(x_1)\left(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\right)+\cdots+\varphi(x_{n-1})\left(\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_1}\right)=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2\\&\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}\right)+\varphi(x_1)\left(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right)+\cdots+\varphi(x_{n-1})\left(\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_2}\right)=x_1\\&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\&\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_n}\right)+\varphi(x_1)\left(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_n}\right)+\cdots+\varphi(x_{n-1})\left(\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_n}\right)=x_{n-1}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sol tarafındaki elemanlar, *A(X)* birleşmeli cebirinde $\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)$ elemanları tarafından üretilen sağ idealin elemanlarıdır aynı zamanda $\varepsilon(d(x_i),d(x_j)) \neq 0$ olup $\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ yine bu idealin elemanlarıdır.

O halde $\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ L de $\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)$ elemanları tarafından doğrulan alt cebirin elemanlarıdır. Bu alt cebire H dersek;

$$\{x_1,\ldots,x_n\} \subset \langle\{\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)\}\rangle = H$$

olur.

$$L \subset H \text{ ve aynı zamanda } H \subset L$$

olup, $H = L$ bulunur. Bu ise

$$\{\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)\}$$

kümesinin L için bir serbest üretici küme olduğu anlamına gelir, bu da

$$\{x_1,\ldots,x_n\} \xrightarrow{\psi} \{\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)\}$$

$$\psi(x_i) = \varphi(x_i) \qquad i = 1,\ldots,n$$

sağlayan bir ψ otomorfizmini gerektirir. O halde φ bir otomorfizm olup u bir test elemanıdır.

(b) $\varphi(z) = z$ olup $z = [x_1,x_1]+\cdots+[x_n,x_n]$ yazarsak,

$$\varphi([x_1,x_1]+\cdots+[x_n,x_n]) = [x_1,x_1]+\cdots+[x_n,x_n]$$

dir. φ nin homomorfizm olmasından,

$$[\varphi(x_1),\varphi(x_1)]+\cdots+[\varphi(x_n),\varphi(x_n)] = [x_1,x_1]+\cdots+[x_n,x_n]$$

bulunur. Şimdi bu eşitliği oluşturan elemanların *A(X)* birleşmeli cebiri üzerindeki özdeşlerini yazarsak

$$2\varphi(x_1)\varphi(x_1)+\cdots+2\varphi(x_n)\varphi(x_n)=2x_1x_1+\cdots+2x_nx_n$$

eşitliğini elde ederiz, her iki tarafın sırasıyla $x_1,\ldots,x_n$ değişkenlerine göre Fox türevlerini alırsak;

$$\begin{aligned}
2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\cdots+2\varphi(x_n)\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_1}&=2x_1\\
2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\cdots+2\varphi(x_n)\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_2}&=2x_2\\
\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\quad&\quad\vdots\\
\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\quad&\quad\vdots\\
2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_n}+\cdots+2\varphi(x_n)\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_n}&=2x_n
\end{aligned}$$

bulunur $2x_1,\ldots,2x_n$ elemanları L nin üreteçleri olup bu elemanlar $\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)$ tarafından üretilen sağ idealin elemanıdır Teorem 5.1.2 ve (a) nın ispatından dolayı φ bir otomorfizmdir. Dolayısıyla z bir test elemanıdır.

Şimdi iki üreteçli serbest color Lie süpercebirlerinde test elemanlarını inceleyelim. L serbest üretici kümesi $\{x_1,x_2\}$ olan serbest color Lie süpercebiri olsun. L için bulduğumuz test elemanlarını aşağıdaki teorem ile ifade edelim.

Teorem 5.1.4

Aşağıdaki elemanlar L için birer test elemanıdır.

(a) $u=[x_1,x_2]$.

(b) $v = [x_1, x_2] + [x_1, x_1], \quad d(x_1) \in G_{(-1)}$

(c) $w = [x_1, x_2] + [x_2, x_2], \quad d(x_2) \in G_{(-1)}$

(d) $z = [x_1, x_2] + [x_1, x_1] + [x_2, x_2] \quad d(x_i) \in G_{(-1)}\ ,\ i = 1,2$

İspat

(a) $\varphi(u) = u$ olup $u = [x_1, x_2]$ yazarsak,

$$\varphi([x_1, x_2]) = [x_1, x_2]$$

dir. φ nin homomorfizm olmasından,

$$[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] = [x_1, x_2]$$

bulunur. Şimdi bu eşitliği oluşturan elemanların $A(X)$ birleşmeli cebiri üzerindeki özdeşlerini yazarsak

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) - \varepsilon(d(\varphi(x_1)), d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\varphi(x_1) = x_1x_2 - \varepsilon(d(x_1), d(x_2))x_2x_1$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının sırasıyla x_1 ve x_2 değişkenlerine göre Fox türevlerini alırsak;

$$-\varepsilon(d(\varphi(x_1)), d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1} + \varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1} = -\varepsilon(d(x_1), d(x_2))x_2$$

$$-\varepsilon(d(\varphi(x_1)), d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2} + \varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2} = x_1$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her birini soldan $\varphi(x_1)$ ve $\varphi(x_2)$ parantezine alırsak;

$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\right)+\varphi(x_1)\left(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\right)=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2$$
$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}\right)+\varphi(x_1)\left(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right)=x_1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sağ tarafındaki elemanlar, $A(X)$ birleşmeli cebirinde $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ elemanları tarafından üretilen sağ idealin elemanları anlamına gelir aynı zamanda $\varepsilon(d(x_1),d(x_2))\neq 0$ olup $\{x_1,x_2\}$ yine bu idealin elemanlarıdır.

O halde $\{x_1,x_2\}$ L de $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ elemanları tarafından doğrulan alt cebirin elemanlarıdır. Bu alt cebire H dersek;

$$\{x_1,x_2\}\subset\langle\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\}\rangle=H$$

olur.

$$L\subset H \text{ ve aynı zamanda } H\subset L$$

olup, $H=L$ bulunur. Bu ise

$$\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\}$$

kümesinin L için bir serbest doğuray kümesi olduğu anlamına gelir, bu da

$$\{x_1,x_2\}\xrightarrow{\psi}\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\}$$
$$\sigma\psi(x_i)=\varphi(x_i) \qquad i=1,2$$

sağlayan bir ψ otomorfizmini gerektirir. φ bir otomorfizm olup u test bir elemanıdır.

(b) $v=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]$ $d(x_1)\in G_{(-1)}$ elemanı için $\varphi(v)=v$ olsun

$$\varphi([x_1,x_2]+[x_1,x_1])=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]$$

dir. φ nin homomorfizm olmasından,

$$[\varphi(x_1),\varphi(x_2)]+[\varphi(x_1),\varphi(x_1)]=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]$$

bulunur. Şimdi bu eşitliği oluşturan elemanların $A(X)$ birleşmeli cebiri üzerindeki özdeşlerini yazarsak

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\varphi(x_1)+2\varphi(x_1)\varphi(x_1)=x_1x_2-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2x_1+2x_1x_1$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının sırasıyla x_1 ve x_2 değişkenlerine göre Fox türevlerini alırsak;

$$-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2+2x_1$$

$$-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}=x_1$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her birini soldan $\varphi(x_1)$ ve $\varphi(x_2)$ parantezine alırsak;

$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\right)+\varphi(x_1)\left(2\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\right)=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2+2x_1$$

$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}\right)+\varphi(x_1)\left(2\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right)=x_1$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitliklerin sağ tarafındaki elemanların kümesini;

$$A = \{-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2 + 2x_1, \quad x_1\}$$

olarak tanımlayalım. A kümesinin Jacobian matrisini hesaplarsak,

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & -\varepsilon(d(x_1),d(x_2)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

$$\det J_A = \varepsilon(d(x_1),d(x_2)) \neq 0$$

olup φ bir otomorfizmdir. O halde v test elemanıdır.

(c) $w = [x_1,x_2] + [x_2,x_2]$ $\quad d(x_2) \in G_{(-1)}$ elemanı için ispat ise (b) $[x_1,x_1]$ terimi yerine $[x_2,x_2]$ yazılırsa aynı ara işlemlerden sonra,

$$A = \{-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2, \quad x_1 + 2x_2\}$$

bulunur. A nın Jacobian matrisi

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon(d(x_1),d(x_2)) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $\det J_A = \varepsilon(d(x_1),d(x_2)) \neq 0$ dir. O halde φ bir otomorfizmdir. w test elemanıdır.

(d) Bu durumun ispatı (a), (b) ve (c) nin ispatları ile benzer biçimde yapılacaktır.

$z=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]+[x_2,x_2]$ $\quad d(x_i)\in G_{(-1)}$, $i=1,2$ ve $d(x_1)=d(x_2)$ olsun. z elemanı için, $\varphi(z)=z$ olsun.

$$\varphi([x_1,x_2]+[x_1,x_1]+[x_2,x_2])=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]+[x_2,x_2]$$

dir. φ nin homomorfizm olmasından,

$$[\varphi(x_1),\varphi(x_2)]+[\varphi(x_1),\varphi(x_1)]+[\varphi(x_2),\varphi(x_2)]=[x_1,x_2]+[x_1,x_1]+[x_2,x_2]$$

bulunur. Şimdi bu eşitliği oluşturan elemanların $A(X)$ birleşmeli cebiri üzerindeki özdeşlerini yazarsak

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1)\varphi(x_2)-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\varphi(x_1)+2\varphi(x_1)\varphi(x_1)+2\varphi(x_2)\varphi(x_2)\\&=x_1x_2-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2x_1+2x_1x_1+2x_2x_2\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının sırasıyla x_1 ve x_2 değişkenlerine göre Fox türevlerini alırsak;

$$\begin{aligned}&-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}+2\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\\&=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2+2x_1\\&-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+2\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\varphi(x_1)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}+2\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\\&=x_1+2x_2\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafındaki terimlerin her birini soldan $\varphi(x_1)$ ve $\varphi(x_2)$ parantezine alırsak;

$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+2\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\right)+\varphi(x_1)\left(2\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}\right)=-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2+2$$

$$\varphi(x_2)\left(-\varepsilon(d(\varphi(x_1)),d(\varphi(x_2)))\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+2\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right)+\varphi(x_1)\left(2\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}\right)=x_1+2x_2$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitliklerin sağ tarafındaki elemanların kümesini;

$$A=\{-\varepsilon(d(x_1),d(x_2))x_2+2x_1,\quad x_1+2x_2\}$$

olarak tanımlayalım. A kümesinin Jacobian matrisini hesaplarsak,

$$J_A=\begin{pmatrix} 2 & -\varepsilon(d(x_1),d(x_2)) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

$$\det J_A = 4+\varepsilon(d(x_1),d(x_2))$$

olarak elde ederiz. $d(x_i)\in G_{(-1)}$, $i=1,2$ .olup, $\varepsilon(d(x_1),d(x_2))=-1$ dir. O halde,

$$\det J_A = 3 \neq 0 .$$

Teorem 5.1.3 (b) nin ispatından dolayı φ bir otomorfizmdir. Dolayısıyla z test elemanıdır.

5.2. Serbest Color Lie Süpercebirlerinde Otomorfizmler

L, $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ tarafından üretilen bir serbest color Lie süpercebiri ve $A(X)$ de X tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun. Bu kısımda Jacobian matristen yararlanarak L nin bir endomorfizminin bir otomorfizm olup olmadığına karar veren bir kriter geliştirdik.

Bu bölümde (Shpilrain, 1994) in sonuçlarını serbest color Lie süpercebirlerinin otomorfizmleri için ispatlayacağız.

Tanım 5.2.1

Bir $u \in L(X)$ elemanının çift Jacobian matrisi

$$J_D(u) = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 5.2.1

$y_1, \ldots, y_n$ $L(X)$ de G- homojen elemanlar olsun. O zaman;

$$\varphi : L(X) \to L(X),\ d(x_i) = d(y_i),\ 1 \le i \le n$$

endomorfizminin bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$J_l(\varphi) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

sol Jacobian matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

Teorem 5.2.1 sağ Jacobian matrisi $J_r(\varphi) = \left(\frac{(y_i)\partial}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le n}$ için de geçerlidir.

Serbest color $L(X)$ Lie süpercebirlerinde $J_D(u)$ çift Jacobian matrisi tersinir olan u elemanları, $L(X)$ in otomorfizmlerini tanımada önemli bir rol oynarlar.

Teorem 5.2.2

φ, $L(X)$.serbest color Lie süpercebirinin bir endomorfizmi olsun. φ nin bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

(a) $u = [x_1, x_2] + \cdots + [x_{n-1}, x_n]$ n-çift bir pozitif tamsayı, $1 \le i \le n$, $d(\varphi(x_i)) = d(x_i)$ için $J_D(\varphi(u))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

(b) $v = [x_1, x_1] + \cdots + [x_n, x_n]$ $1 \le i \le n$ $d(\varphi(x_i)) = d(x_i) \in G_{(-1)}$ için $J_D(\varphi(v))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

İspat

(a) $n = 2k$ olsun. $\varphi(u)$ nun sol Fox türevini alırsak; Önerme 2.2.1 den,

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x_j} = -\varepsilon_{12}\varphi(x_2)\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_j} + \varphi(x_{2k-1})\frac{\partial\varphi(x_{2k})}{\partial x_j} + \sum_{m=2}^{2k-1}\left[\varphi(x_{m-1}) - \varepsilon_{m(m+1)}\varphi(x_{m+1})\right]\frac{\partial\varphi(x_m)}{\partial x_j} \tag{1}$$

buluruz. Burada, $\varepsilon_{st} = \varepsilon(d(\varphi(x_s)), d(\varphi(x_t)))$, $1 \le s \le 2k-1$, $2 \le t \le 2k$ dır. Şimdi (1) in iki tarafına sağ Fox türevini uygulayarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = &-\varepsilon_{12}\frac{\varphi(x_2)\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_j} + \frac{\varphi(x_{2k-1})\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x_{2k})}{\partial x_j} \\ &+ \sum_{m=2}^{2k-1}\left[\frac{\varphi(x_{m-1})\partial}{\partial x_i} - \varepsilon_{m(m+1)}\frac{\varphi(x_{m+1})\partial}{\partial x_i}\right]\frac{\partial\varphi(x_m)}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{2}$$

$i, j \in \{1, \ldots, n\}$ elde ederiz. (2) n^2 denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistem matris formunda aşağıdaki yazılıma sahiptir:

$$J_D(\varphi(u)) = J_r^t(\varphi)J_D(u)J_l(\varphi) \tag{3}$$

burada, $J_r^t(\varphi)$ ile φ nin sağ Jacobian matrisinin transpozu gösterilmektedir.

Eğer $J_D(\varphi(u))$ tersinir ise (3) eşitliğinin sağ tarafındaki bütün matrisler tersinirdir. O halde Teorem 5.2.1 φ nin bir otomorfizm olmasını gerektirir.

Diğer taraftan ispat için φ nin bir otomorfizm olduğunu kabul edelim. Teorem 5.2.1 den $J_r(\varphi)$ ve $J_l(\varphi)$ matrisleri tersinirdir. Şimdi aşağıdaki matrisi göz önüne alalım.

$$J_D(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{12} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{23} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{(2k-1)2k} & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(d(x_i), d(x_j))$, $1 \le i \le 2k-1$, $2 \le j \le 2k$. $J_D(u)$ matrisinin determinantı;

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{(2m-1)2m} & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \le m \le k$$

matrislerinin determinantlarının çarpımıdır. Böylece $J_D(u)$ matrisi tersinirdir ve dolayısıyla $J_D(\varphi(u))$ matrisi tersinirdir.

(b) Bu durum için (a) da u yerine $v = [x_1, x_1] + \cdots + [x_n, x_n]$ yazılırsa

$$J_D(\varphi(v)) = J_r^t(\varphi)J_D(v)J_l(\varphi)$$

bulunur. $J_D(v)$ çift Jacobian matrisi köşegen elemanları 2 olan köşegen bir matris olup tersinirdir. Dolayısıyla (a) da yapılan ispat v için de geçerlidir.

5.3 Rankı İki olan Serbest Color Lie Süpercebirlerinin Otomorfizmleri İçin bir Kriter

L rankı 2 olan x ve y tarafından doğrulan serbest color Lie süpercebiri olsun. (Cohn, 1964) de sonlu ranklı Lie cebirlerinin bütün otomorfizmlerinin benzer olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuç sonlu ranklı serbest color Lie süpercebirleri için de doğrudur (Mikhalev, 1985). İki değişken olması durumunda L nin otomorfizm grubu kolayca tanımlanır.

Önerme 5.3.1

φ, L nin bir otomorfizmi ve $d(x)=d(y)$ olsun. O zaman $a,b,c,d \in K$, $d(x)=d(\varphi(x))$, $d(y)=d(\varphi(y))$, $ad-bc \neq 0$ olmak üzere φ otomorfizmi

$$\varphi(x)=ax+by$$
$$\varphi(y)=cx+dy$$

şeklindedir.

Rankın 2 olması L nin otomorfizm grubunun yapısını kolaylaştırır. Bu ise, φ, L nin otomorfizm grubunun bir elemanı olmak üzere, $J_D(\varphi(u))$ matrisinin tersinir olduğu bir $u \in L$ elemanını kolayca bulmamıza olanak sağlar.

Önerme 5.3.2

φ, L nin bir endomorfizmi ve $d(x)=d(\varphi(x))$, $d(y)=d(\varphi(y))$ olsun. φ nin bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

(a) $f=[x,y]$ için $J_D(\varphi(f))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

(b) $v=[x,y]+[x,x]$, $d(x)\in G_{(-1)}$ için $J_D(\varphi(v))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

(c) $z=[x,y]+[y,y]$, $d(y)\in G_{(-1)}$ için $J_D(\varphi(z))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır

İspat

İspat Teorem 5.2.2 nin ispatı ile benzerdir, u elemanını f, v ve z ile değiştirirsek,

$$J_D(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_D(v)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_D(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 2 \end{pmatrix}$$

matrislerinin tersinir olması ispatı tamamlar.

Önerme 5.3.3

$d(x)=d(y)\in G_{(-1)}$ ise

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi tersinirdir.

İspat

$d(x) = d(y) \in G_{(-1)}$ ise $\varepsilon(d(x),d(y)) = -1$ dir ve B nin determinantı sıfırdan farklıdır.

Teorem 5.3.1

φ, L nin bir endomorfizmi ve $d(x) = d(\varphi(x))$, $d(y) = d(\varphi(y))$ olsun. φ nin bir otomorfizm olabilmesi için gerek ve yeter koşul $u = [x,y] + [x,x] + [y,y]$, $d(x) = d(y) \in G_{(-1)}$ için $J_D(\varphi(u))$ matrisinin $A(X)$ üzerinde tersinir olmasıdır.

İspat

(3) eşitliğini $u = [x,y] + [x,x] + [y,y]$ elemanı için düşünelim.

$$J_D(\varphi(v)) = J_r'(\varphi) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 2 \end{pmatrix} J_l(\varphi) \qquad (4)$$

φ bir otomorfizm ise, $a,b,c,d \in K$ için,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax + by \\ \varphi(y) &= cx + dy \end{aligned}$$

$d(x) = d(y)$ olup $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi tersinirdir. $\varepsilon(d(x),d(y)) = -1$ olup

$$J_D(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\varepsilon(d(x),d(y)) & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. O halde $J_D(u)$ matrisi tersinirdir. Teorem 5.2.1 den $J_r^I(\varphi)$ ve $J_I(\varphi)$ matrisleri tersinirdir. Sonuç olarak $J_D(\varphi(u))$ matrisi tersinirdir.

Diğer yönlü ispat için, $J_D(\varphi(u))$ matrisinin tersinir olduğunu kabul edelim. O zaman (4) ün sağ tarafındaki matrisler de tersinirdir ve Teorem 5.2.1 φ nin otomorfizm olmasını gerektirir.

6. SERBEST COLOR LİE SÜPERCEBİRLERİNDE BİR ELEMANIN RANKI

L bir K cismi üzerinde serbest üretici kümesi $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$, $n \geq 2$ olan serbest color Lie süpercebiri olsun. Bir $u \in L$ elemanının rankı, L nin otomorfizmleri altında u nun görüntülerinin bağlı olabileceği serbest üreteçlerin en küçük sayısı olarak tanımlanır.

(Shpilrain, 1995) de sonlu ranklı serbest Lie cebirlerinde verilen bir homojen elemanın rankını bulan bir kriter geliştirmiştir. Biz bu bölümün birinci kısmında benzeri çalışmayı sonlu ranklı serbest color Lie süpercebirleri için yaptık, ikinci kısmında ise verilen bir w-homojen elemanın rankını bulmak için bir kriter geliştirdik.

6.1 Serbest Color Lie Süpercebirlerinde Bir Elemanın Rankı

Tanım 6.1.1

Bir $u \in L$ için, L nin otomorfizmleri altında u nun görüntülerinin bağlı olabileceği serbest doğurayların en küçük sayısına *u elemanının rankı* denir.

S, L nin bir alt cebiri ve J de S tarafından üretilen ideal $(J = S \cdot U(L))$ olsun. $\sigma : U(L) \to K$, $\sigma(x_i) = 0$ olacak şekildeki genişletme homomorfizmi (bkz. Tanım 2.2.9) olmak üzere bu homomorfizmin çekirdeği bazı X olan bir serbest sol *A(X)*-modüldür, bu modülü Δ ile gösterelim.

Önerme 6.1.1

$u \in L$ olsun. $u \in J \cdot \Delta$ olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in J$ olmasıdır.

İspat

$u \in J \cdot \Delta$ ise $j \in J$ ve $f \in \Delta$ için $u = j \cdot f$ şeklindedir. $f \in \Delta$ olup

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n$$

olarak yazılabilir.

$$\Leftrightarrow u = j \cdot f = j \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} = j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \in J$$

dir.

Önerme 6.1.2

$u \in L$ olsun. $u \in S_2$, ise $u \in J \cdot \Delta$ dir.

İspat

$u \in S_2$ ise $u = [u_1, u_2] = u_1 u_2 - \varepsilon(d(u_1), d(u_2)) u_2 u_1$ yazabiliriz. $u_1 \in S$ olup $u_1 \in J$ dir. $u_2 \in S \subset \Delta$ olup $u_2 \in \Delta$ dır. O halde $u_1 u_2 \in J \cdot \Delta$ dır. $u_2 \in S$ ise $u_2 \in J$, $u_1 \in S \subset \Delta$ olup $u_1 \in \Delta$ dır. O halde $u_2 u_1 \in J \cdot \Delta$ dır. Bu durumda $u = [u_1, u_2] = u_1 u_2 - \varepsilon(d(u_1), d(u_2)) u_2 u_1 \in J \cdot \Delta$ elde edilir.

Önerme 6.1.3

$u \in L$ olsun. $u \in S_m$ ise $u \in J \cdot \Delta^{m-1}$ dir.

İspat

İspatı m-üzerinden tümevarım ile yapalım.

m=2 için: $u \in S_2$ olup Önerme 6.1.2 den $u \in J \cdot \Delta$ dır.

İddia k<m için doğru olsun.

$u \in S_m$ ise $f \in S_{m-1}$, $s \in S$ olmak üzere $u = [f, s]$ şeklindedir. $f \in S_{m-1}$ olup tümevarım hipotezinden $f \in J \cdot \Delta^{m-2}$ dır. $u = [f, s] = fs - \varepsilon(d(f), d(s))sf$, $f \in J \cdot \Delta^{m-2}$ ve $s \in S \subset \Delta$ olup $fs \in J \cdot \Delta^{m-1}$ dir.

$s \in J$ ve $f \in J \cdot \Delta^{m-2}$ olup $sf \in J \cdot J \cdot \Delta^{m-2}$ dir. $J = S \cdot U(L)$, $\Delta = L \cdot U(L)$ olup $J \subset \Delta$ dır. O halde, $sf \in J \cdot J \cdot \Delta^{m-2} \subset J \cdot \Delta \cdot \Delta^{m-2} \subset J \cdot \Delta^{m-1}$ olup $sf \in J \cdot \Delta^{m-1}$ dir ve $u = [f, s] = fs - \varepsilon(d(f), d(s))sf \in J \cdot \Delta^{m-1}$ elde edilir.

Önerme 6.1.4

$u \in S_m$ ise u nun *(m-1)* inci mertebeden bütün Fox türevleri $S \cdot U(L)$ nin bir elemanıdır.

İspat

$u \in S_m$ ise Önerme 6.1.3 den $u \in J \cdot \Delta^{m-1}$ dir. $J \cdot \Delta^{m-1} = J \cdot \Delta^{m-2} \cdot \Delta$ dir. Önerme 6.1.1 den $u \in J \cdot \Delta^{m-1} = J \cdot \Delta^{m-2} \cdot \Delta$ olup $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in J \cdot \Delta^{m-2}$ dir.

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{m-1}}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \left(\frac{\partial^{m-2} u}{\partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_{m-1}}} \right) \text{ olup } \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{m-1}}} \in J = S \cdot U(L) \text{ elde edilir.}$$

Temel Teoremimizi ispatlamadan önce serbest color Lie süpercebirlerinin elemanlarının bazı özelliklerini aşağıdaki önermelerle verelim.

Önerme 6.1.5

Bir $u \in L$ elemanı bir x_i serbest üreticisine bağlı ise u nun birleşmeli monomiallerin bir toplamı olarak herhangi bir yazılımında en az bir monomialin ilk terimi x_i dir.

Teorem 6.1.1

$u(x_1,\ldots,x_n) \in L$ ve $\deg u = m \geq 2$ olan w-homojen bir eleman olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

(a) $rank\, u = n \geq 2$

(b) L nin keyfi bir lineer otomorfizminin altında u nun görüntüsü en az n serbest doğraya bağlıdır.

(c) ϕ, L nin bir endomorfizmi ve $u \in (\phi(L))_m$ ise $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset \phi(L)$ dir.

İspat

$(b) \Rightarrow (c)$: İspatı çelişki ile yapacağız. Kabul edelim ki $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ m-inci dereceden w-homojen ve *rank* u = n olan bir eleman ve ϕ, L nin $u \in (\phi(L))_m$ olacak şekildeki bir endomorfizmi iken bazı x_i ler örneğin $x_1 \notin \phi(L)$ olsun. u yu asosyatif monomiallerin bir toplamı

$$u = \sum_{(m)} a_{(m)} x_{j_1} \cdots x_{j_m} \tag{6.1}$$

$a_{(m)} \in K$ ve *(m)* de $(j_1,\ldots,j_m)$ çoklu indeksini sağlayacak şekilde yazabiliriz.

$$u \in (\phi(L))_m \tag{6.2}$$

olup (6.2) nin *(m-1)* inci mertebeden keyfi bir Fox türevi, $b_j \in K$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \in \phi(L)U(L) \tag{6.3}$$

formundadır. Teorem 5.1.2 den $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \in \phi(L)$ dir. (6.2) nin *(m-1)* inci mertebeden bütün Fox türevlerini alarak aşağıdaki sistemi elde ederiz.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{(i)} x_j \in \phi(L).$$

$w_i = \sum_{j=1}^{n} b_j^{(i)} x_j$ diyelim ve w_i lerin bütün K-lineer kombinasyonlarını $K\langle w_i \rangle$ ile gösterelim. Eğer $x_1 \in K\langle w_i \rangle$ olsaydı $x_1 \in \phi(L)$ olurdu ki bu ise kabulumuz ile çelişir. O halde $x_1 \notin K\langle w_i \rangle$ dir. Bu durumda $K\langle w_i \rangle$ nin boyutu n den küçüktür. s<n için $\{w_1,\ldots,w_s\}$ kümesi $K\langle w_i \rangle$ nin bir bazı olsun. Bu küme L nin bir $\{w_1,\ldots,w_s,\ldots,w_n,\ldots\}$ bazına genişletilebilir.

Şimdi L nin

$$\alpha : x_i \to w_i$$

$i \geq 1$ otomorfizmini düşünelim.

$$\alpha(u) = \sum_{j=1}^{s} c_j x'_j u_j$$

$c_j \in K$, $x'_j = w_j$ ve $u_j \in L_{m-1}$ formundadır. Böylece $\alpha(u)$ herbiri $\{x'_1,\ldots,x'_s\}$ kümesinden gelen bazı x'_i ile başlayan monomiallerin bir toplamıdır. Fakat bu ise Önerme 6.1.5 den $\alpha(u)$ nun sadece $x'_1,\ldots,x'_s$ elemanlarına bağlı olacağı anlamına gelir, yani u nun rankı n den küçüktür. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

$(c) \Rightarrow (a)$: İspatı çelişki ile yapacağız. *rank* u<n olsun, yani L nin bazı α otomorfizmi için $\alpha(u) = v(x_1,\ldots,x_k)$, k<n olsun. L nin bir ψ_k endomorfizmini

$$1 \leq i \leq k \text{ için } \psi_k(x_i) = x_i$$

ve

$$i > k \text{ için } \psi_k(x_i) = 0$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\psi_k(\alpha(u)) = \alpha(u)$, ve $\alpha^{-1}\psi_k\alpha(u) = u$ endomorfizmi u yu sabit bırakır ve $u \in (\phi_k(L))_m$ dir. Bu ise (c) den dolayı $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \phi_k(L)$ olmasını gerektirir. Böylece L nin sadece $x_1,\ldots,x_n$ ye bağlı olan her elemanı $\phi_k(L)$ nin de bir elemanıdır.

$w = w(x_1,\ldots,x_n)$ keyfi bir eleman ve $w = \phi_k(s)$ olsun. O zaman $w = \alpha^{-1}\psi_k\alpha(s)$ dir ve $\alpha(w) = \psi_k\alpha(s)$ dir. Bu ise $\alpha(w)$ nun sadece sadece $x_1,\ldots,x_k$ ya bağlı olmasını gerektirir. Böylece α otomorfizmi $x_1,\ldots,x_n$ tarafından üretilen alt cebirin elemanlarını $x_1,\ldots,x_k$ tarafından üretilen $L_{(k)}$ alt cebirinin elemanlarına dönüştürür. Bu ise rankı k olan serbest color $L_{(k)}$ Lie süpercebirinin rankı k dan büyük olan $\alpha^{-1}(L_{(k)})$ serbest color Lie süpercebirine izomorfik olmasını gerektirir. $\alpha^{-1}(L_{(k)})$, serbest color L Lie süpercebirinin bir serbest alt cebiridir ve L nin en az n tane $x_1,\ldots,x_n$ serbest üreticisini içerir, yani $\alpha^{-1}(L_{(k)})$ nın rankı n den küçük olamaz. Bu çelişki ispatı tamamlar.

6.2 Algoritma

L, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ serbest üretici kümesi üzerinde serbest color Lie süpercebiri ve $u = u(x_1,\ldots,x_n) \in L$ m-inci dereceden bir w-homojen eleman olsun. Teorem 6.1.1 in yardımıyla u elemanının rankını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

1. Adım: u elemanı *U(L)* de monomiallerin bir toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$u = \sum_{(m)} a_{(m)} x_{j_1} \cdots x_{j_m}$$

$a_{(m)} \in K$, m de $(j_1,\ldots,j_m)$ çoklu indeksini sağlasın.

2. Adım: u nun *(m-1)* ıncı mertebeden bütün Fox türevleri alınır. Bu türevler $x_1,\ldots,x_n$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu olacaktır, bu elemanların oluşturduğu kümenin *K*-lineer kombinasyonlarının vektör uzayı olarak boyutu u nun rankını verecektir.

L nin w-homojen olmayan elemanları için Teorem 6.1.1 in (a) ve (b) şıkları birbirine denk olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnek ile açıklayabiliriz.

Örnek 6.2.1

$u=[x_1,x_2]+[[x_3,x_4],x_2]\in L$, *deg* $u=$ *m=3* ve w-homojen olmayan bir elemandır. u ya algoritmamızı uygularsak:

$$
\begin{aligned}
u &= [x_1,x_2]+[[x_3,x_4],x_2] \\
&= x_1x_2-\varepsilon_{12}x_2x_1+[x_3x_4-\varepsilon_{34}x_4x_3,x_2] \\
&= x_1x_2-\varepsilon_{12}x_2x_1+x_3x_4x_2-\varepsilon_{34}x_4x_3x_2\underbrace{-\varepsilon(d(x_3x_4-\varepsilon_{34}x_4x_3),d(x_2))}_{0\neq\alpha\in K}(x_2x_3x_4-\varepsilon_{34}x_2x_4x_3) \\
&= x_1x_2-\varepsilon_{12}x_2x_1+x_3x_4x_2-\varepsilon_{34}x_4x_3x_2+\alpha x_2x_3x_4-\alpha\varepsilon_{34}x_2x_4x_3
\end{aligned}
$$

birleşmeli monomiallerin bir toplamı olarak yazarız. Şimdi u nun *(m-1)=2* inci mertebeden bütün Fox türevlerinin oluşturduğu kümeye R dersek,

$$R=\{0,1,-\varepsilon_{12},x_3,-\varepsilon_{34}x_4,\alpha x_2,-\alpha\varepsilon_{34}x_2\}$$

kümesini elde ederiz. Kolayca görülebileceği gibi R nin gerdiği uzayın boyutu *3* dür.

Diğer taraftan; L nin

$$
\begin{aligned}
\phi &: x_1 \to x_1-[x_3,x_4] \\
&: x_i \to x_i,\ i\geq 2
\end{aligned}
$$

otomorfizmini düşünürsek,

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= \phi([x_1,x_2]+[[x_3,x_4],x_2]) \\
&= [\phi(x_1),\phi(x_2)]+[[\phi(x_3),\phi(x_4)],\phi(x_2)] \\
&= [x_1-[x_3,x_4],x_2]+[[x_3,x_4],x_2] \\
&= [x_1,x_2]-[[x_3,x_4],x_2]+[[x_3,x_4],x_2] \\
&= [x_1,x_2]
\end{aligned}
$$

Bulunur ki bu da $\phi(u)$ nun iki serbest doğraya bağlı olabileceği anlamına gelir.

KAYNAKLAR

BAKHTURİN, A., DRENSKİ, V. S., (1987). Identities of solvable color Lie superalgebras, Translated from Algebra i Logica, Vol. 26, No:4, 403-418.

BİRMAN, J. S., (1973). An inverse function theorem for free groups, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 41, 634-638.

BRENNAN, J. P., PINTO, M. V., VASCONCELOS, W. V., (1990). The Jacobian Module of a Lie Algebra, Transactions of the American Mathematical Society, Vol 321, 1, 183-196.

CHIRKOV, V., SHEVELIN M. A., (2000). Determination of Endomorphisms of Free Metabelian Lie Algebras, Siberian Mathematical Journal, Vol. 41, No: 6, 1205-1207.

CHIRKOV, V., SHEVELIN M. A., (2001). Ideals of Free Metabelian Lıe Algebras and Primitive Elements, Siberian Mathematical Journal, Vol. 42, No: 3, 610-612.

COHN, P. M., (1964). Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc., 3, 618-632.

DRENSKY, V., (1990). Automorphisms of Relatively Free Algebras, Communications in Algebra, 18 (12), 4323-4351.

DRENSKY, V. And YU, J. T., (1998). Orbits in Free Algebras of Rank Two, Communications in Algebra, 26 (6), 1895-1906.

FOX, R. H., (1953). Free differential calculus I, Derivations in free group rings, Ann. of Math. 57, 547-560

KUKIN, G. P., (1970). Primitive Elements of Free Lie Algebras, Algebra i Logika, Vol 9, No:4, 458-472.

KUKIN, G. P., (1970). On the Cartesian Subalgebra of a Free Lie Sum of Lie Algebras, Algebra i Logika, Vol 9, No:6, 701-713.

KUKIN, G. P., (1972). Subalgebras of a Free Lie Sum of Lie Algebras with an Amalgamated Subalgebra, Algebra i Logika, No:1, 59-86.

MİKHALEV, A. A., (1984). The theorem on freenes of subalgebras of free color Lie süperalgebra. Summary of report at Sci. Res. Seminar of Chair of Higher Algebra of Moscow State Univ. Held May 7. Vestnik Moscow Univ. Ser. I Mat. Mekh. No 5, page 96.

MİKHALEV, A. A., (1985). Free color Lie süperalgebras. 18th All-Union Algebraic Conf. Abstracts of Reports. Kishinev. part 2, page 31.

MİKHALEV, A. A., (1985). Subalgebras of free colored Lie superalgebras, Mat. Zametki 37 No:5, 653-661. English translation Math Notes 37, 356-360

MİKHALEV, A. A., (1988). Subalgebras of free Lie p-superalgebras, Mat. Zametki 43, No:2, 178-191.

MİKHALEV, A. A., (1992). On right ideals of a free associative algebra generated by free color Lie superalgebras and p-superalgebras, Uspekhi Mat. Nauk 47, no: 5, 187-188. Eng. Trans.: Russian Math. Surveys 47, no: 5, 196-197.

MİKHALEV, A. A., and YU, J. T. (1997). Test Elements and Retracts of Free Lie Algebras Communications in Algebra, 25 (10), 3283-3289.

MİKHALEV, A. A., and YU, J. T. (2000). Primitive, Almost Primitive, Test, and Δ- Primitive, Elements of Free Algebras with the Nielsen-Schreier Property, Journal of Algebra, 228, 603-623.

MİKHALEV, A. A., ZOLOTYKH A. A., (1995). Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. CRC Press, New York.

MİKHALEV, A. A., SHPILRAIN, V. E., ZOLOTYKH A. A., (1996). Subalgebras of Free Algebras, Proc. Of The American Mathematical Soc., Vol. 124, 7, 1977-1984.

PETROGRADSKY, V. M., (1999). Exponential Schreier's Formula for Free Lie Algebras and its Applications, Journal of Mathematical Sci., 93, 6, 939-950.

ROMAN'KOV, V. A., (2001). Test Elements For Free Solvable Groups of Rank Two, Algebra and Logic, Vol. 40, No:2, 106-111.

SHIRSHOV, A. I., (1962). On bases of free Lie algebras. Algebra i Logika 1, 14-19.

SHPİLRAİN, V., (1994). Recognizing automorphism of the free groups, Archiv der Mathematik 62, 385-392.

SHPİLRAİN, V., (1995). Test elements for endomorphisms of free groups and algebras, Israel J. Math. 92, 307-316.

SHPİLRAİN, V., (1995). On the Rank of an element of a Free Lie Algebra, Proc. Of the American Math. Soc. Vol. 123, 5, 1303-1307.

SHTERN, A. S., (1986). Free Lie Superalgebras, Translated from Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol 27, No:1, pp. 170-174.

TOGO, S., (1967). Outer Derivations of Lie Algebras, Transactions of the Mathematical Soc., 128, 2, 264-276.

UMIRBAEV, U. U., (1990). Sixth All-Union School on the Theory of Manifolds and Algebraic Systems, Abstract of Communications, p 32, Magnitogorsk.

ZOLOTYKH A. A., MİKHALEV, A. A., (1993). An Endomorphism of a free Lie Algebra that Preserves the Property of Primitiveness of Elements is an Automorphism, Uspekhi Math. Nauk, 48, no. 6, 149-150.

ZOLOTYKH A. A., MİKHALEV, A. A., (1994). The Rank of an Element of a Free Lie (p-) Superalgebra, Doklady Akad. Nauk 334, No:6, 690-693.

ÖZGEÇMİŞ

1969 Adana doğumluyum. 1993 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olup aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans çalışmasına başlayıp, 1996 yılında tezimi tamamladım. 1997 yılında yine Matematik bölümünde doktora çalışmalarına başladım. Çukurova Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Ekonometri Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evliyim ve bir kızım var.