ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BASRİ ÇALIŞKAN

GRUP TANIMLAYAN BAZI YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2002

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP TANIMLAYAN BAZI YARI GRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ

BASRİ ÇALIŞKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 02/09/2002 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

İmza........................	İmza........................	İmza........................
Yrd.Doç.Dr.Fikret KUYUCU	Yrd.Doç.Dr.Hayrullah AYIK	Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No 2031

T.C.

Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu Çalışma Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir.
Proje No:FBE.2002.YL.66

İÇİNDEKİLER **Sayfa No**

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRUP TANIMLAYAN BAZI YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ

BASRİ ÇALIŞKAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Fikret KUYUCU
Yıl: 2002, Sayfa: 64
Jüri : Yrd.Doç.Dr. Fikret KUYUCU
: Yrd.Doç.Dr. Hayrullah AYIK
: Yrd.Doç.Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Yarıgrup takdimleri uzun bir süredir çalışılan bir konudur. 1990 da E. F. Robertson ve Y. Ünlü Todd-Coxeter'ın gruplar için yapmış olduğu algoritmanın benzeri bir bilgisayar programını yarıgruplar için yazdılar. 1990 yılından sonra yarıgruplar üzerinde yoğun bir şekilde çalışıldı ve bu alanda bir çok çalışma yayınlandı.

Hesaplanabilir yarıgrup teoride uygulanan iki temel metot vardır. Birincisi, verilen takdimin tanımladığı yarıgrubu bulmaktır. İkincisi ise, verilen bir yarıgrubu temsil eden bir takdim bulmaktır. Biz bu çalışmamızda ilk metodu uyguladık. Her grup bir yarıgrup olduğundan bir G grubunun yarıgrup veya monoid takdimini G nin grup takdimi olarak alabiliriz.

Ayrıca bazı yarıgrup veya monoid takdimlerinin grup tanımlayıp tanımlamadığını araştırdık. Bunlardan bazıları iki doğuraylı bir bağıntılı veya iki doğuraylı iki bağıntılı yarıgrup ve monoid takdimleridir. Bu takdimlerden bazıları litaratürde iyi bilinen gruplardır.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup, Monoid, Takdim, Rewriting Sistemler, Knuth-Bendix Yöntemi.

ABSTRACT

MSc THESIS

SOME SEMIGROUP AND MONOID PRESENTATIONS DEFINING A GROUP

BASRİ ÇALIŞKAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Fikret KUYUCU
Year: 2002, Pages:64
Jury : Assoc.Prof.Dr. Fikret KUYUCU
: Assoc.Prof.Dr. Hayrullah AYIK
: Assoc.Prof.Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Semigroup presentations have been studied for a long time. In 1990, E. F. Robertson and Y. Ünlü wrote a computer program for semigroups similar to the Todd-Coxeter algorithm for groups. After 1990, this subject has been worked extensively and many works have been published in this area.

There are two methods in combinatorial semigroup theory. First, to find the semigroup defined by a given presentation. Second, to find the presentation representing a given semigroup. In this thesis, we applied the first. Since every group is a semigroup, we can consider either the semigroup or monoid presentation of a group G as the group presentation of G.

We also searched whether semigroup or monoid presentations define a group. Some of these presentations have either two generators and one relation or two generators and two relations. It appeared that some of them are well-known groups in the literature.

Key Words: Semigroup, Monoid, Presentation, Rewriting Systems, Knuth-Bendix Procedure.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimi ile bana yardımcı olmasının yanında ilgisini, samimiyetini ve sıcaklığını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Fikret KUYUCU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Öğrenciliğimden bugüne kadar bilgi desteğinin yanında her türlü sorunumda bana değerli zamanını ayıran Matematik Bölümü Araştırma Görevlilerinden Sayın Ali Arslan ÖZKURT'a özellikle teşekkür ederim. Yardımlarından dolayı Matematik Bölümünün akademik personeline ve Karaisalı M.Y.O. daki tüm arkadaşlarıma, ayrıca manevi desteğini her zaman hissettiğim sevgili ailem ve nişanlıma teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Yarıgrup takdimleri uzun bir süredir çalışılan bir konudur. Sonlu takdim edilen yarıgruplar için 1967 de B. H. Neumann tarafından grup için bilinen Todd-Coxeter koset sayma yöntemine benzer bir sayma metodu geliştirildi. Daha sonra Neumann'ın bu sayma metodu (Jura,1978) tarafından ispatlandı. Yarıgrup ile ilgili çalışmalar (Robertson ve Ünlü,1990) tarafından geliştirilen ve Todd-Coxeter algoritması benzeri bir bilgisayar programı sayesinde daha hızlanmış ve bu yıldan itibaren bu konuda yayınlanan araştırmalarda büyük bir artış olmuştur.

Her grup bir monoid ve yarıgrup olduğundan bir grubun monoid ve yarıgrup takdimini düşünebiliriz.

Tezin ikinci bölümünde yarıgrup ve takdimleri ilgili temel bilgiler verilmiştir. Ayrıca bir yarıgrup ve monoid takdiminin ne zaman grup tanımladığı verilmiş ve eğer bir yarıgrup takdimi bir grup tanımlıyorsa o yarıgrup takdiminin aynı zamanda bir grup takdimi olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde bir monoid takdiminin grup tanımlayıp tanımlamadığını test eden yöntemlerden biri olan Knuth-Bendix Yöntemi verilmiştir. Bu yöntem yarıgrup takdiminde verilen bölüm yarıgrubunun elemanlarının seçimi ile ilgilidir.

Dördüncü bölümde ise iki doğuraylı bir bağıntılı, iki doğuraylı iki bağıntılı bazı monoid takdimlerinin grup tanımlayıp tanımlamadıkları ve litaratürde iyi bilinen bazı grupların yarıgrup takdimleri incelenmiştir.

2. YARIGRUP VE TAKDİMLERİ

Bu kısımda S bir yarıgrup, M bir monoid ve G bir grup olmak üzere, grup teorideki temel tanım ve teoremlerden bazılarını ve bunlarla ilgili örnekleri vereceğiz.

2.1 Yarıgrup Tanımı ve Örnekler

S boş olmayan bir küme ve o da S üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $x,y,z \in S$ için $xo(yo\,z) = (xo\,y)o\,z$ eşitliğinin sağlanması halinde o işlemine birleşmelidir denir. (S,o) ikilisinde o işlemi birleşmeli ise (S,o) ikilisine bir yarıgrup denir. Genellikle (S,o) ikilisi yerine sadece S ve her $x,y \in S$ için $xo\,y$ yerine de xy kullanılır.

Her $x,y \in S$ için $xy = yx$ ise S ye değişmeli yarıgrup denir. Her $x \in S$ için $ex = x$ $(xe = x)$ oluyorsa, S nin e elemanına sol (sağ) birim adı verilir. Bir S yarıgrubunun e elemanı hem sol hem de sağ birim oluyorsa e ye birim eleman denir. Bir yarıgrupta sol veya sağ birimler birden fazla olabilmesine rağmen birim eleman en fazla bir tane olabilir. $e \in S$ için $e^2 = e$ özelliğini sağlayan e elemanına idempotent eleman denir. S bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun. $xx'x = x$ ve $x'xx' = x'$ olması halinde $x' \in S$ elemanına x in tersi denir.

Birim elemanlı bir yarıgruba monoid denir. Bir monoidin birim elmanı genellikle 1 veya e ile gösterilir. M bir monoid ve $x \in M$ olsun. $x'x = 1$ $(xx' = 1)$ olacak şekilde bir $x' \in M$ elemanına x in sol (sağ) birimi denir.

G bir yarıgrup olmak üzere, her $x \in G$ için bir $x' \in G$ x in hem sağ hem de sol tersi oluyorsa G ye bir grup denir.

Tanım 2.1.1: $(S,.)$ birim elemanı olmayan bir yarıgrup olsun. S ye 1 birim elemanının ilave edilmesiyle $(S \cup \{1\},*)$ monoidi elde edilebilir. Burada $*$ işlemi her $x,y \in S$ için $x * y = xy$, $x * 1 = 1 * x = x$, $1 * 1 = 1$ olarak tanımlanır ve

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{Eger } S \text{ nin birimi varsa} \\ S \cup \{1\} & \text{Eger } S \text{ nin birimi yoksa} \end{cases}$$

olarak tanımlanan S^1 e, S ye, gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid denir (Howie, 1995).

Teorem 2.1.1: Eğer bir S yarıgrubu bir e sol (sağ) birime sahip ve her $x \in S$ için $x'x = e$ $(xx' = e)$ olacak şekilde en az bir $x' \in S$ var ise S, birimi e olan bir gruptur.

Teorem 2.1.2: Bir S yarıgrubunun bir grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $a \in S$ için $aS = S$ ve $Sa = S$ olmasıdır.

İspat : S bir grup ve $a \in S$ olsun. O zaman $aa' = a'a = 1$ olacak şekilde bir $a' \in S$ vardır ve her $s \in S$ için, $s = 1s = (aa')s = a(a's) \in aS$ dir ve buradan $S \subset aS$ bulunur. $aS \subset S$ olduğundan $aS = S$ elde edilir. Benzer şekilde $S = Sa$ olduğu da gösterilir

$a \in S$ ve $Sa = S$ olsun. O zaman $ea = a$ olacak şekilde bir $e \in S$ vardır. e nin sol birim olduğunu gösterelim. Herhangi bir $s \in S$ için bir $t \in S$ vardır öyle ki $at = s$ dir ve $es = e(at) = (ea)t = at = s$ dir. Bir $a \in S$ için, $Sa = S$ olduğundan bir $a' \in S$ vardır öyle ki $a'a = e$ dir. Teorem 2.1.1 den dolayı S bir gruptur.

Tanım 2.1.2: S ve T iki yarıgrup olsun. $S \text{x} T = \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}$ kümesine S ile T nin kartezyen çarpımı denir. $s_1, s_2 \in S$ ve $t_1, t_2 \in T$ olmak üzere

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 s_2, t_1 t_2)$$

çarpımı ile bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba S ve T nin direkt çarpım yarıgrubu denir.

Tanım 2.1.3: S bir yarıgrup ve T, S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

a) Her $t_1,t_2 \in T$ için $t_1t_2 \in T$, yani $T^2 \subseteq T$ oluyorsa, T ye S nin bir alt yarıgrubu denir.

b) $I \neq \phi$, S nin bir alt kümesi olmak üzere, $SI \subseteq I$ $(IS \subseteq I)$ oluyorsa, I ya sol (sağ) ideal denir. Eğer I hem sol hem de sağ ideal ise, I ya iki yanlı ideal yada kısaca ideal denir.

c) S bir yarıgrup ve U_i, S nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi ve $\{ U_i \mid i \in I\}$, S nin alt yarıgruplarının bir ailesi olsun. O zaman $U = \bigcap_{i\in I} U_i$ de S nin bir alt yarıgrubu olur.

A, S nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi olmak üzere A yı içeren S nin en küçük alt yarıgrubuna A nın doğurduğu yarıgrup denir ve bu alt yarıgrup $\langle A\rangle$ ile gösterilir. A ya bu yarıgrubun doğuray kümesi denir.

Teorem 2.1.3: S bir yarıgrup ve A, S nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi olsun. O zaman,

$$\langle A\rangle = \bigcap \{ U \mid A \subseteq U \text{ ve } U,\ S \text{ nin alt yarıgrubu}\}$$

dır.

İspat : $\bigcap \{ U \mid A \subseteq U \text{ ve } U,\ S \text{ nin alt yarıgrubu}\} = W$ olsun. $\langle A\rangle = W$ olduğu gösterilmelidir.

W bir alt yarıgrup olduğundan, $A \subset W$ dır ve $\langle A\rangle \subset W$ dır. $\langle A\rangle$, A yı içeren yarıgrup olduğundan $W \subset \langle A\rangle$ dır. Buradan $\langle A\rangle = W$ elde edilir.

Teorem 2.1.4: S bir yarıgrup ve A, S nin boş olmayan sonlu herhangi bir alt kümesi olsun. O zaman $\langle A\rangle = \{ a_1a_2.....a_n \mid a_i \in A,\ n \in \mathbb{N} \}$ dır.

İspat : $\{ a_1a_2.....a_n \mid a_i \in A,\ n \in \mathbb{N} \} = W$ olsun. O zaman $\langle A\rangle = W$ olduğu gösterilmelidir. W nun bir alt yarıgrup olduğunu gösterelim. Her $w_1 = a_1a_2.....a_n \in W$ ve $w_2 = b_1b_2.....b_m \in W$ için,

$$w_1w_2 = (a_1a_2.....a_n)(b_1b_2.....b_m) = (a_1a_2.....a_m)b_1(b_2b_3.....b_m) = (a_1a_2.....a_mb_1)(b_2b_3.....b_m)$$
$$= (a_1a_2.....a_nb_1)b_2(b_3b_4.....b_m) = ... = a_1a_2.....a_nb_1b_2.....b_m$$

elde edilir. Buradan, $w_1w_2 \in W$ olup, W bir alt yarıgruptur. Her $a_1a_2.....a_n \in W$ için $a_i \in A$ olup $A \subset W$ dır. W bir alt yarıgrup olduğundan $W \subset \langle A \rangle$ dır. $x \in \langle A \rangle$ ve U, A yı içeren başka bir yarıgrup olsun. Her U yarıgrubu için, $A \subset U$ olduğundan $x \in U$ dur ve W bir alt yarıgrup olduğundan $x \in W$ olur. Buradan da $\langle A \rangle \subset W$ dır ve $\langle A \rangle = W$ elde edilir.

Teorem 2.1.5: A bir küme, S bir yarıgrup ve $\langle A \rangle = S$ olsun. O zaman $S - S^2 \subseteq A$ dır.

İspat : $x \in S - S^2$ olsun. $\langle A \rangle = S$ olduğundan bir $a_1, a_2, ...a_n \in A$ vardır öyle ki, $x = a_1a_2.....a_n$ dır. $n \geq 2$ ise $x = (a_1a_2.....a_{n-1})a_n$ olarak yazılabilir. $a_1a_2.....a_{n-1} \in S$ ve $a_n \in S$ olduğundan $x \in S^2$ dır. Dolayısıyla $n = 1$ olmak zorundadır. Buradan $x = a_1$ ve $x \in A$ olup, $S - S^2 \subseteq A$ dır.

Tanım 2.1.4: S ve T iki yarıgrup, θ da S den T ye bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in S$ için θ çarpımları koruyorsa, yani $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ oluyorsa, θ ya S den T ye bir homomorfizm denir.

S ve T iki monoid olsun. S den T ye tanımlanan bir monoid homomorfizmi, birim elmanı koruyan, yani $\theta(1) = 1$ olan bir yarıgrup homomorfizmidir.

$\theta : S \to T$ bir yarı grup homomorfizmine, bire-bir ise monomorfizm, örten ise epimorfizm, hem bire-bir hem de örten ise izomorfizm denir. S ve T yarıgruplarına S den T ye bir izomorfizm olması durumunda izomorfik yarıgruplar denir ve $S \cong T$ ile gösterilir.

$\theta : S \to T$ bir yarıgrup homomorfizmi olsun. θ nın görüntü kümesi, $gör\theta = \{\ \theta(x) \mid x \in S\ \}$ ile, çekirdeği de, $çek\theta = \{\ (x, y) \in SxS \mid \theta(x) = \theta(y)\ \}$

olarak tanımlanır. Bazen $gör\theta$ yerine $\theta(S)$ notasyonu da kullanılır. $\theta(S)$, T nin bir alt yarıgrubudur.

t_1 ve $t_2 \in \theta(S)$ olsun. O zaman s_1 ve $s_2 \in S$ elemanları vardır öyle ki, $t_1 = \theta(s_1)$ ve $t_2 = \theta(s_2)$ dir. O zaman $t_1 t_2 = \theta(s_1)\theta(s_2) = \theta(s_1 s_2) = t_3 \in \theta(S)$ dır.

Örnek 2.1.1: X herhangi bir küme olsun. $P(X)$, X kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi olmak üzere $S = (P(X), \cap)$, $T = (P(X), \cup)$ olsun. Her $A \in P(X)$ için $f : S \to T$, $f(A) = X - A$ olarak tanımlanan f dönüşümü, S den T ye bir izomorfizma olduğunu gösterelim.

f homomorfizmdir.

Her $A, B \in P(X)$ için $A \cap B \in S$ dır.

$$f(A \cap B) = X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) = f(A) \cup f(B)$$

dır.

f bire-bir dir.

Her $A, B \in P(X)$ için $f(A) \neq f(B)$ olsun. O zaman, $X - A \neq X - B$ ve $A \neq B$ dır.

f örtendir

Her $B \in T$ için en az bir $A \in S$ olmalıdır. $A = X - B$ olarak alınırsa,

$$f(A) = f(X - B) = X - (X - B) = B \in T$$

dır. Buradan f izomorfizimdir ve $S \cong T$ dır.

2.2 Serbest Yarıgrup, Monoid ve Grup

Tanım 2.2.1: A boş olmayan bir alfabe olsun. A üzerindeki boş olmayan tüm sonlu kelimelerin kümesi A^+ ile gösterilir. $w = a_1 a_2 .....a_n \in A^+$ ise w ya uzunluğu n olan A üzerinde bir kelime denir ve w nun uzunluğu $|w| = n$ ile gösterilir.

$$A^+ = \{\ a_1 a_2 .....a_n \mid a_i \in A,\ n \in \mathbb{N}\ \}$$

dır. Her $a_1a_2.....a_n \in A^+$ ve $b_1b_2.....b_m \in A^+$ için,

$(a_1a_2.....a_n)(b_1b_2.....b_m) = a_1a_2.....a_nb_1b_2.....b_m$ kuralı ile A^+ bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba A üzerindeki serbest yarıgrup denir.

A^+, A üzerindeki serbest yarıgrup olsun. A^+ ya birim eleman $\{e\}$ eklenmesiyle elde edilen monoide A üzerindeki serbest monoid denir ve $A^* = A^+ \cup \{e\}$ ile gösterilir. Her $w \in A^+$ için $ew = we = w$ ve $e^2 = e$ dir (Howie, 1995).

Tanım 2.2.2: G bir grup ve $X \neq \phi$ G nin bir alt kümesi olsun.

$gp(X) = \{x_1^{\alpha_1}.....x_n^{\alpha_n} \mid x_i \in X,\ \alpha_i = \mp 1\}$ kümesi G nin bir alt grubudur.

$x_1^{\alpha_1}.....x_n^{\alpha_n}$ çarpımında $x_i \in X$ ve $\alpha_i = \mp 1$ olmak üzere, eğer $x_i = x_{i+1}$ iken $\alpha_i \neq -\alpha_{i+1}$ ise $x_1^{\alpha_1}.....x_n^{\alpha_n}$ çarpımına bir indirgenmiş $X-$çarpım denir.

Eğer G grubu aşağıdaki iki özelliği de sahip ise, G ye X kümesi tarafından serbest doğrulur denir.

i) $gp(X) = G$,

ii) İki farklı indirgenmiş $X-$çarpım G nin birim olmayan farklı iki elemanını tanımlar.

G nin doğuraylarının ii) nolu özelliğini sağlayan bir X kümesine G nin doğuraylarının bir serbest kümesi denir. Eğer bir G grubu doğurayların bir serbest kümesine sahip ise G ye serbesttir ya da X üzerinde serbesttir denir (Baumslag, Chandler, 1968).

Teorem 2.2.1: A bir alfabe, S bir yarıgrup ve $f: A \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. O zaman $\Phi: A^+ \rightarrow S$, $\Phi|_A = f$ olan bir tek Φ homorfizması vardır (Lallement, 1979).

İspat : Her $a_1 a_2 .....a_n \in A^+, a_i \in A$ için $(a_1 a_2 .....a_n)\Phi = (a_1 f)(a_2 f).....(a_n f)$ olarak tanımlanana Φ bir homomorfizm olup $\Phi|_A = f$ yi sağlar. Φ' gibi başka bir $\Phi' : A^+ \to S$ homomorfizması olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}(a_1 a_2 .....a_n)\Phi' &= (a_1 \Phi')(a_2 \Phi').....(a_n \Phi') \\ &= (a_1 f)(a_2 f).....(a_n f) \\ &= (a_1 \Phi)(a_2 \Phi).....(a_n \Phi) \\ &= (a_1 a_2 .....a_n)\Phi\end{aligned}$$

ise $\Phi' = \Phi$ elde edilir.

Teorem 2.2.2: Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür.

İspat : Yukarıdaki Teorem 2.2.1 de A, S nin doğuray kümesi ya da $A = S$ alınır ve f de, $f : A \to S$ bir doğal içerme dönüşümü olarak alınırsa, S yarıgrubu A üzerindeki serbest yarıgrup A^+ nın homomorfik görüntüsü olur.

2.3 Kongruanslar

Tanım 2.3.1: S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her $x, y, z, t \in S$ için $(x, y) \in \rho$ ve $(z, t) \in \rho$ iken $(xz, yt) \in \rho$ oluyorsa ρ ya S üzerinde bir kongruans denir.

ρ, S üzerinde bir kongruans olsun. O zaman $S/\rho = \{ a\rho \mid a \in S \}$ dir. S/ρ kümesi üzerinde $a, b \in S$ için $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ işlemi ile S/ρ bir yarıgruptur. Bu yarıgruba bölüm yarıgrubu denir.

Örnek 2.3.1: S üzerindeki en küçük kongruans $\Delta_s = \{ (s, s) \mid s \in S \}$ en büyük kongruans ise, $S \times S$ dir.

Tanım 2.3.2: S bir yarıgrup, R de S üzerinde bir bağıntı olsun. $x,y \in S^1$, $(a,b) \in R$ olmak üzere, $u,v \in S$ için $u = xay$ ve $v = xby$ ise u,v den R nin bir bağıntısı ile elde edilmiştir ya da $u = v$ R nin bir sonucudur denir.

R yi içeren S üzerindeki kongruansların arakesitine R yi içeren en küçük kongruans ya da R nin doğurduğu kongruans denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.1: S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. $(a,b) \in R^{\#}$ olması için gerek ve yeter koşul ya $a = b$ dir, ya da bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$a = z_1 \to z_2 \to ..... \to z_n = b$ dizisi vardır öyle ki, ya z_i, z_{i+1} den yada z_{i+1}, z_i den R nin bir bağıntısı ile elde edilmiştir (Howie, 1995).

Örnek 2.3.2: S bir yarıgrup ve $R = \{\ (aba,b)\ \mid a,b \in \mathrm{S}\ \}$ de $S \mathrm{x} S$ üzerinde bir bağıntı olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $u = a^n b a^n$ ve $v = b$ olacak şekilde alınırsa, $u = a^n b a^n \equiv a^{n-1}(aba)a^{n-1} = a^{n-1} b a^{n-1} = ... = aba = b = v$ olduğundan $(u,v) \in R^{\#}$ dır.

2.4 Takdimler

Bu kısımda yarıgrup, monoid ve grup takdimleri ile ilgili temel bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.4.1: A bir alfabe ve A^+, A üzerindeki serbest yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \mathrm{x} A^+$ olsun. $\langle A \mid R \rangle$ ikilisine bir yarıgrup takdimi denir ve $sp\langle A \mid R \rangle$ ile gösterilir. $A^+ / R^{\#}$ yarıgrubuna, $\langle A \mid R \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan yarıgrup denir. Eğer S bir yarıgrup ve $A^+ / R^{\#} \cong S$ ise $\langle A \mid R \rangle$ ye S nin bir takdimi denir

$P = \langle A \mid R \rangle$ takdiminde, A ya doğuray kümesi, R ye de tanımlayıcı ilişkiler (bağıntılar) kümesi denir. A ve R sonlu ise P takdimine sonlu takdim, S ye de sonlu takdim edilmiş denir. $|R| - |A|$ sayısına da P nin deficiency denir ve $def(P)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2: A bir alfabe, A^+ A üzerindeki serbest yarıgrup ve S herhangi bir $X \neq \phi$ kümesi tarafından doğrulan bir yarıgrup olsun. $\alpha : A \to X$ bire-bir ve örten fonksiyon, $i : A \to A^+$ içerme dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & A^+ \arrow[dl, "\pi"] \\ & S = \langle X \rangle & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\pi : A^+ \to S$ ye $(a)i\pi = (a)\alpha$ olarak tanımlanan homomorfizme doğal homomorfizma denir.

Örnek 2.4.1: $\pi : A^+ \to S$ doğal homomorfizma olmak üzere,

$çek\pi = \{ (x,y) \in A^+ x A^+ \mid (x)\pi = (y)\pi \}$ bir kongruanstır.

Her $x \in A^+$ için $(x)\pi = (x)\pi$ olduğundan $(x,x) \in çek\pi$ dir.

Her $x, y \in A^+$ için $(x,y) \in çek\pi$ olsun. $(x,y) \in çek\pi$ ise $(x)\pi = (y)\pi$ dir. Buradan $(y)\pi = (x)\pi$ ve $(y,x) \in çek\pi$ bulunur.

Her $x, y, z \in A^+$ ve $(x,y) \in çek\pi$, $(y,z) \in çek\pi$ olsun. $(x,y) \in çek\pi$ ise $(x)\pi = (y)\pi$ dir ve $(y,z) \in çek\pi$ ise $(y)\pi = (z)\pi$ dir. Buradan $(x)\pi = (z)\pi$ ve $(x,z) \in çek\pi$ elde edilir.Böylece $çek\pi$ nin denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş olur.

Kongruans olduğunu göstermek için,

Her $x, y, z, t \in A^+$ için $(x,y) \in çek\pi$ ve $(z,t) \in çek\pi$ olsun.

$(x,y) \in çek\pi$ ise $(x)\pi = (y)\pi$ dır ve $(z,t) \in çek\pi$ ise $(z)\pi = (t)\pi$

$$(xz)\pi = (x)\pi(z)\pi = (y)\pi(t)\pi = (yt)\pi \text{ ise } (xz, yt) \in çek\pi$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1: Her yarıgrubun bir takdimi vardır.

İspat : S bir yarıgrup, R, S üzerinde bir kongruans, $\langle A \rangle = S$ ve A^+, A üzerindeki serbest yarıgrup olsun. $\pi : A^+ \to S$ doğal homomorfizma olmak üzere, $s \in S, w \in A^+$ olsun.

$w = a_1 a_2 .....a_n$, $i = 1,2,.....,n$ ve $(w)\pi = s$ olarak tanımlanırsa, $(w)\pi = (a_1 a_2 .....a_n)\pi = (a_1)\pi(a_2)\pi.....(a_n)\pi = s$ dir. Dolayısıyla $R^\# = çek\pi \subseteq A^+ x A^+$ alınırsa $R^\# = çek\pi$ ve $S \cong A^+/R^\#$ dir (Howie, 1995).

Örnek 2.4.2: $S = (P(\{a,b\}) - \{\phi\}, \cup)$ bir yarıgruptur.

$\langle A | R \rangle = \langle a,b \mid a^2 = a,\ b^2 = b,\ ab = ba \rangle = \{a, b, ab\} = T$ dir. T, $\langle A | R \rangle$ nin tanımladığı yarıgrup ve $T \cong S$ olduğundan, $\langle A | R \rangle$ ikilisi S nin bir takdimidir.

$\langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, ρ R yi içeren en küçük kongruans yani $\rho = R^\#$ ve $S \cong A^+/R^\#$ olsun. $w_1, w_2 \in A^+$ için eğer w_1 ve w_2 özdeş kelimeler ise $w_1 \equiv w_2$ yazılır. w_1 ve w_2 S nin aynı elemanını temsil ediyorlarsa, yani $(w_1, w_2) \in \rho$ ise $w_1 = w_2$ yazılır.

Örnek 2.4.2 de, $w_1 = ab^2$, $w_2 = abb$ alınırsa $w \equiv w_2$ yazılır, $w_1 = ab^2, w_2 = b^2 a$ alınırsa da $w = w_2$ yazılır.

Tanım 2.4.3: S bir yarıgrup, $\langle A|R\rangle$ de S nin bir takdimi olsun. $\pi : A^+ \to S$, $R^\# = çek\pi$ olacak şekildeki doğal homomorfizma olmak üzere, $w_1, w_2 \in A^+$ için $(w_1)\pi = (w_2)\pi$ oluyorsa, $w_1 = w_2$, S de sağlanıyor denir.

Teorem 2.4.2: $P = \langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. $w_1, w_2 \in S$ için $w_1 = w_2$ S de sağlanması için gerek ve yeter koşul $w_2 = w_1$ R nin bir sonucu olmasıdır.

Teorem 2.4.3: $P = \langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. Eğer T, $X \subseteq T$ tarafından doğrulan bir yarıgrup, $f : A \to X$ bir örten fonksiyon, Φ, $\Phi : A^+ \to S$, $\Phi|_A = f$ olan homomorfizma olmak üzere R deki tüm ilişkiler T de sağlanıyorsa T, S nin homomorfik görüntüsüdür (Ruskuc, 1995).

İspat : Teorem 2.2.1 den dolayı, $\Phi : A^+ \to T$, $\Phi|_A = f$ olacak şekilde Φ homomorfizması mevcuttur.

$\rho = R^\#$ ve $\Psi : S \to T$, her $u \in A^+$ ve $u\rho \in S$ için $(u\rho)\Psi = u\Phi$ olsun.

$u, v \in A^+$ için $u\rho = v\rho$ ise $(u,v) \in \rho = R^\#$ dır. Buradan ,

$u \equiv z_1 \to z_2 \to ..... \to z_{n-1} \to z_n \equiv v$ olacak şekilde dizisi vardır öyle ki, z_{i+1}, z_i den $R^{-1} \cup R$ nin bir ilişkisi uygulanarak elde edilmiştir. Yani u, v nin bir sonucudur.

$z_{i+1}\Phi = z_i\Phi$, ve $R^\#$ geçişmeli olduğundan $u\Phi = v\Phi$ dir. Ψ iyi tanımlıdır.

Ψ nin örten olduğunu gösterelim,

$t \in T$ olsun. $T = \langle X\rangle$ olduğundan $t = x_1x_2.....x_n$ olacak şekilde bir $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ vardır. f örten olduğundan $f(a_i) = x_i$ olacak şekilde bir $a_1, a_2, ..., a_n \in A^+$ vardır.

$w \equiv a_1a_2.....a_n \in A^+$ olsun.

$$\begin{aligned}(w\rho)\Psi = (w)\Phi = (a_1a_2.....a_n)\Phi &= (a_1\Phi)(a_2\Phi).....(a_n\Phi)\\ &= (a_1f)(a_2f).....(a_nf) = x_1x_2.....x_n = t\end{aligned}$$

dir.

Ψ nin homomorfizma olduğunu gösterelim, $u,v \in A^+$ ve $u\rho, v\rho \in S$ için $(u\rho)\Psi(v\rho)\Psi = (u\Phi)(v\Phi) = (uv)\Phi = (uv\rho)\Psi = ((u\rho)(v\rho))\Psi$ dır.

Teorem 2.4.4: S, $A \subseteq S$ tarafından doğrulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ x A^+$ olsun. O zaman $\langle A | R \rangle$ nin S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

i) R deki tüm ilişkiler S de sağlanır,

ii) Eğer $u,v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor ise $u = v$ R nin bir sonucudur (Ruskuc, 1995).

İspat : $\langle A | R \rangle$, S nin bir takdimi ise, takdim tanımından i) ve ii) sağlanır.

T, $\langle A | R \rangle$ nin tanımladığı yarıgrup olsun. Teorem 2.4.3 den ve i) den dolayı S , T nin homomorfik görüntüsüdür. O zaman her $u,v \in A^+$, $u\rho, v\rho \in T$ $\left(\rho = R^{\#}\right)$ için $\Psi : T \to S$ örten homomorfizmadır.

$(u\rho)\Psi = (v\rho)\Psi$ olsun. Buradan $u = v$, S de sağlanıyor ve ii) den dolayı u,v nin bir sonucudur, yani $(u,v) \in \rho = R^{\#}$ olup Ψ bire-birdir. Dolayısıyla Ψ izomorfizmadır.

Örnek 2.4.3: $P = \langle a,b \mid a^2 = a,\ b^2 = b,\ ba = ab \rangle$, $\rho = R^{\#}$ ve S de P nin tanımladığı yarıgrup olsun. $S \cong A^+/\rho = \{a\rho, b\rho, ab\rho\}$ kısaca $S = \{a, b, ab\}$ olduğunu açıklayalım.

$u \in A^+$ olsun. u nun uzunluğu üzerinde tümevarım uygulayalım.

Eğer $|u| = 1$ ise $u = a$ ya da $u = b$ dir. $|u| > 1$ için $u = u'a$ ya da $u = u'b$ dir. Tümevarım yardımıyla ya $(u',a) \in \rho, (u',b) \in \rho$ yada $(u',ab) \in \rho$ dır. Buradan,

$$(u'a,a^2) \in \rho,\ (u'a,ba) \in \rho \text{ ya da } (u'a,aba) \in \rho,$$

$$(u'a,a) \in \rho,\ (u'a,ab) \in \rho \text{ ya da } (u'a,ab) \in \rho \text{ dır.}$$

Benzer durum $u \equiv u'b$ için de yapılır.

Dolayısıyla, $S = \{a, b, ab\}$ şeklinde 3 elemanlı bir yarıgruptur.

Tanım 2.4.4: A bir alfabe, A^* A üzerindeki serbest monoid, $R \subseteq A^* x A^*$, ρ da R nin doğurduğu kongruans olsun. $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir monoid takdimi denir ve $mp\langle A|R \rangle$ ile gösterilir. A^*/ρ bölüm monoidine de $\langle A|R \rangle$ takdiminin tanımladığı monoid denir. Eğer M bir monoid ve $M \cong A^*/\rho$ ise, $\langle A|R \rangle$ ye M nin bir takdimi denir.

M bir monoid ve $\langle A|R \rangle$ de M nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $e \notin A$ için $\langle A,e \,|\, \overline{R},\ ae = a,\ ea = a,\ e^2 = e,\ (a \in A) \rangle$ yarıgrup takdimi M yi bir yarıgrup gibi tanımlar. Burada $\overline{R}$, R den $r = 1$ yada $1 = s$ şeklindeki ilişkilerin $r = e$ yada $e = s$ ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Örnek 2.4.4: $M = mp\langle a \mid a^n = 1 \rangle$ M nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $\langle a,e \mid a^n = e,\ ae = a,\ ea = a,\ e^2 = e \rangle$ M nin bir yarıgrup takdimidir.

Her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. P herhangi bir S yarıgrubunu tanımlayan bir yarıgrup takdimi ise, P bir monoid takdimi olarak düşünüldüğünde P, $S \cup \{e\}$ gibi bir monoidi tanımlar. S nin içinde birim eleman varsa artık bu $S \cup \{e\}$ de birim eleman olmayacaktır (Howie, 1995).

Tanım 2.4.5: G bir grup ve S, G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ ve her $s \in S$ için $g^{-1}sg \in S$ oluyorsa, S ye G de normal alt grup denir. S, G nin herhangi bir alt grubu olsun. S yi içeren G nin tüm normal alt gruplarının arakesitine S nin normal kapanışı denir ve $\langle \{ g^{-1}sg \mid g \in G \text{ ve } s \in S \} \rangle$ S nin normal kapanışıdır.

A bir alfabe ve $A^{-1} = \{ a^{-1} \mid a \in A \}$ olsun. A üzerindeki serbest grup $F(A) = mp\langle A, A^{-1} \mid aa^{-1} = 1,\ \ a^{-1}a = 1\ \ (\text{her } a \in A) \rangle$ monoid takdimi ile tanımlanır.

$R \subseteq \left(A \cup A^{-1}\right)^{*} \mathrm{x} \left(A \cup A^{-1}\right)^{*}$ olmak üzere $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir grup takdimi denir ve $gp\langle A | R \rangle$ ile gösterilir.

$F(A)$, A üzerindeki serbest grup ve N de $\{ xy^{-1} \mid (x,y) \in R \}$ nin $F(A)$ daki normal kapanışı olsun. F/N bölüm grubuna, $\langle A | R \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan grup denir. Eğer G bir grup ve $G \cong F/N$ ise $\langle A | R \rangle$ ye G nin bir takdimi denir.

Teorem 2.4.5: $P = \langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $e \in A^{+}$ olsun. Eğer

i) Her $a \in A$ için $ea = a$ $(e \text{ sol birim})$ ise ve,

ii) Her $a \in A$ için $u_a a = e$ olacak şekilde bir $u_a \in A^{+}$ var ise

P yarıgrup takdimi bir grup tanımlar.(Bu teoremin sağ birim ve sağ tersler için bir duali vardır. Eğer P bir monoid takdimi ise sadece ii) yeterlidir.)

İspat : $au_a = e$ ve $ae = a$ olduğu gösterilmelidir. $u_a = a_1 a_2 .....a_m$, $a_i \in A, i = 1,2,.....,m$ olsun.

$(au_a)^2 \equiv a(u_a a)u_a = aea_1 a_2 .....a_m = aa_1 a_2 .....a_m \equiv au_a$ ise $(au_a)^2 = au_a$ dır.

$a_i \in A$ olduğundan ve ii) den dolayı $u_i a_i = e$ olacak şekilde $u_i \in A^{+}$ vardır.

$$\begin{aligned}
(u_m u_{m-1} .....u_1)(u_a a) a_1 a_2 .....a_m &= u_m u_{m-1} .....u_1 e a_1 a_2 .....a_m \\
&= u_m u_{m-1} .....u_1 a_1 a_2 .....a_m = u_m u_{m-1} .....u_2 e a_2 .....a_m \\
&= u_m u_{m-1} .....u_2 a_2 .....a_m = u_m a_m .... = e
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
au_a = eau_a &= (u_m u_{m-1} .....u_1) u_a a u_a a u_a \equiv (u_m u_{m-1} .....u_1) u_a (au_a)^2 \\
&= u_m u_{m-1} .....u_1 u_a a u_a = e
\end{aligned}$$

dir.

Buradan da $ae = a(u_a a) = (au_a)a = ea = a$ olduğu bulunur (Ayık, 1998).

Örnek 2.4.5: $M = mp\langle x, y \mid xyxyx = 1\rangle$ takdimi bir grup tanımladığını gösterelim.

$xyxyx = 1$ ise $yxyx$, x in sağ tersidir.

$yxyx = 1.yxyx = (xyxyx)yxyx = xyxy(xyxyx) = xyxy$ ve $xyxyx = 1$

bağıntısından, $yxyx.x = xyxy.x = 1$ ise xyx^2, y nin sağ tersidir. Teorem 2.4.5 den dolayı M bir grup tanımlar.

Tanım 2.4.6: $sp\langle A|R\rangle$ ve $gp\langle A|R\rangle$ sırasıyla S yarıgrubunu ve G grubunu tanımlayan takdimler, $sp\langle A|R\rangle = S$ ve $gp\langle A|R\rangle = G$ olsun. Eğer S nin grup olan bir K ideali var ve $K \cong G$ ise K ya S nin bir grup çekirdeği denir.

Teorem 2.4.6: $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $sp\langle A|R\rangle = S$, $gp\langle A|R\rangle = G$ olsun.

i) S nin bir grup çekirdeği olması için gerek ve yeter koşul Se bir grup ve ideal olacak şekilde bir e idempotent elemanının olmasıdır.

ii) S nin bir grup çekirdeği var ise tektir.

İspat : i) I, S nin bir grup çekirdeği $e \in I$ da I nın birim elemanı olsun. I bir ideal olduğundan, $Se \subseteq I$ dır. Aynı zamanda I grup olduğundan $I = Ie$ ve dolayısıyla $Ie \subseteq Se$ olup,

$$Se \subseteq I = Ie \subseteq Se \text{ ise } I = Se$$

dir.

Se bir grup ve ideal olacak şekilde bir e idempotent eleman bulunsun. Önce Se yi tanımlayan bir takdim bulunmalıdır.

$e \in S$ ve e idempotent eleman olduğundan $e.e = e^2 = e \in Se$ dir Se grup çekirdeği olduğundan e, Se nin birim elemanıdır. Buradan $u \in S$ için $ue \in Se$ ve $u \equiv a_1 a_2 .....a_n, a_i \in A$ ise $ue = (a_1 e)(a_2 e)....(a_n e)$ yazılabilir.

Dolayısıyla, $Ae = \{\ ae \ \mid \ a \in A\ \}$ Se için bir doğuraydır.

$w \in A^+$, $w = a_1 a_2 .....a_m$ ise $w_e = (a_1 e)(a_2 e).....(a_n e)$ olsun.

$R_e = \{r_e = s_e \mid r = s \in R\}$, $r = a_1 a_2 .....a_m$ ve $s = a'_1 a'_2 .....a'_n$ ise,

$$r_e \equiv (a_1 e)(a_2 e).....(a_m e) = a_1 a_2 .....a_m e = a'_1 a'_2 .....a' e$$
$$= (a'_1 e)(a'_2 e).....(a'_n e) \equiv s_e$$

dir ve $r_e = s_e$, Se de sağlanır. $u, v \in (Ae)^+$ için $u = v$ Se de sağlanıyorsa, $u = v$, Re nin bir sonucudur. Dolayısıyla, $\langle Ae \mid R_e \rangle = Se$ olup, $gp\langle A \mid R \rangle \cong gp\langle Ae \mid R_e \rangle$ dir ve $G \cong Se$ dir.

ii) S nin G_1 ve G_2 gibi iki tane grup çekirdeğinin olduğunu kabul edelim. i) den dolayı $G_1 = Se$, $G_2 = Sf$, Se ve Sf ideal olacak şekilde $e \in S$ ve $f \in S$ idempotent elemanları vardır. e ve f idempotent olduğundan $e \in G_1$ ve $f \in G_2$ dir.

$$e, f \in S \text{ ise } f.e \in G \ = Se,\ e.f \in G_2 = Sf$$

dir. Dolayısıyla, $f \in G_1$ ve $e \in G_2$ dir. e, Se nin birim elemanı ve f idempotent olduğundan $e = f$ dir. Buradan da $Se = Sf$ ise $G_1 = G_2$ elde edilir.

Teorem 2.4.7: $\langle A \mid R \rangle$ bir yarıgrup takdimi, $sp\langle A \mid R \rangle = S$ ve $gp\langle A \mid R \rangle = G$ olsun. Eğer S bir grup ise $S \cong G$ dir.

İspat : S bir grup ise $Se = S$, S nin bir grup çekirdeğidir. Teorem 2.4.6 dan dolayı $S \cong G$ dir.

Teorem 2.4.7, bir grubun yarıgrup takdiminin aynı zamanda bir grup takdimi olduğunu söyler (Howie,1995).

Teorem 2.4.8: S ve T iki yarıgrup $sp\langle A \mid R \rangle \cong S$ ve $sp\langle A \mid Q \rangle \cong T$ olsun. Eğer $R \subseteq Q$ ise T , S nin homomorfik görüntüsüdür (Ruskuc,1995).

2.5 Tietze Dönüşümleri

S bir yarıgrup ve $P = \langle A | R \rangle$ takdimi de S yi tanımlayan bir yarıgrup takdimi olsun. Bu bölümde $P = \langle A | R \rangle$ takdiminde bazı dönüşümler yaparak yine S yi tanımlayan değişik takdim bulma metotlarını göreceğiz. Aşağıdaki (T1), (T2), (T3) ve (T4) de Tietze Dönüşümleri denir.

(T1) Doğuray Eklemek : $w \in A^+$ ve $x \notin A$ olsun. O zaman $\overline{A} = A \cup \{x\}$ ve $\overline{R} = R \cup \{ x = w \}$ olmak üzere,

$$\langle \overline{A} | \overline{R} \rangle$$

S yi tanımlar.

Örnek 2.5.1: $S = \langle a,b \,|\, (ab)^2 = a^2, (ab)^3 = b^2 \rangle$ takdimi için (T1) kullanılarak,

$$S = \langle a,b,c \,|\, c = ab, (ab)^2 = a^2, (ab)^3 = b^2 \rangle$$
$$= \langle a,b,c \,|\, c = ab, c^2 = a^2, c^3 = b^2 \rangle$$

takdimi elde edilir. Burada $c = ab$ olarak ilave edildi.

(T2) Doğuray Çıkarmak : Bir $x \in A$ ve $w \in (A - \{x\})^+$ için $w = x$ R nin bir sonucu ve $\overline{R}$ da, R deki ilişkilerde x görüldüğünde yerine w yazarak elde edilen ilişkilerden meydana gelsin. O zaman $\overline{A} = A - \{x\}$ ise

$$\langle \overline{A} | \overline{R} \rangle$$

S yi tanımlar.

Örnek 2.5.2: $S = \langle a,b,c,d \,|\, a = bcd, abd = ba^2c, bd = ac \rangle$ takdimi için (T2) kullanılarak $\langle b,c,d \,|\, bcdbd = b^2cdbcdc, bd = bcdc \rangle$ takdimi elde edilir.

Çünkü $a = bcd \in R$ için $\overline{R}$ R de a görülen yere bcd yazılarak elde edilir. Burada

$$\underline{a}bd = \underline{bcd}bd$$

$$b\underline{a^2c} = b\underline{bcdbcd}c = b^2cdbcdc$$

$$\underline{a}c = \underline{bcd}c$$

dir.

(T3) İlişki Eklemek : $u, v \in A^+$ için $u = v$ R nin bir sonucu olsun. O zaman,

$$\langle A \mid R \cup \{\ u = v\ \} \rangle$$

S yi tanımlar.

Örnek 2.5.3: $S = \langle a, b \mid abababab = b \rangle$ takdimi için (T3) kullanılarak,

$$S = \langle a, b \mid abababab = b,\ ab^2 = bab \rangle$$

elde edilir.

Bunu göstermek için, $ab^2 = bab$ nin $abababab = b$ nin bir sonucu olduğu gösterilmelidir.

$ab(abababab) = ab.b$ ve $(abababab)ab = b.ab$ ile $(ab)^4 = b$ den dolayı ab, b ile değişmelidir. Buradan $ab \ \ = bab$ elde edilir.

(T4) İlişki Çıkarmak : $u, v \in A^+$ için $u = v \in R$ olsun. Eğer $u = v$ $R - \{u = v\}$ nin bir sonucu ise,

$$\langle A \mid R - \{\ u = v\ \} \rangle$$

S yi tanımlar.

Örnek 2.5.4: $S = \langle a, b \mid abababab = b,\ a^4b^4 = b \rangle$ için (T4) kullanılarak

$$S = \langle a, b \mid (ab)^4 = b \rangle$$

elde edilir.

Bunu yapmak için, $a^4b^4 = b$ nin $abababab = b$ nin bir sonucu olduğu gösterilmelidir. Örnek 2.5.3 den dolayı $ab^2 = bab$ nin $(ab)^4 = b$ nin bir sonucu olduğu elde edilmişti.

$$abababab \equiv a(bab)abab = a^2b(bab)ab = a^2bab(bab)$$

$$= a^2(bab)ab^2 = a^3b(bab)b = a^3(bab)b^2 = a^4b^4 \quad \text{elde edilir.}$$

Teorem 2.5.1: $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ iki yarıgrup takdimi olsun. Bu takdimlerin izomorfik yarıgrup tanımlamaları için gerek ve yeter koşul sonlu Tietze Dönüşümlerinin uygulanarak birinden diğerinin elde edilmesidir (Ruskuc, 1995).

Teorem 2.5.2: Eğer $P = sp\langle A|R\rangle$ takdimi bir grup tanımlıyorsa o zaman, $def(P) = |R| - |A| \geq 0$ dır.

İspat : $P = sp\langle A|R\rangle$ bir G grubu için bir sonlu yarıgrup takdimi olsun. Genelliği kaybetmeksizin, R de $w = w$ $(w \in A^+)$ ve $w = a$ $(a \in A,\ w \in (A - \{a\})^*)$ şeklinde bağıntıların bulunmadığını kabul edebiliriz. Aksi halde $def(P)$ yi artırmaksızın gereğinden fazla olan bu tür doğuray ve bağıntılar atılabilir. P takdimi bir G grubunu tanımladığı için Teorem 2.4.4 den dolayı, her $a \in A$ için $ea = a$ G de sağlanacak şekilde boş kelimeden farklı bir $e \in A^+$ vardır. Bu yüzden her $a \in A$ için $ea \equiv z_1 \to z_2 \to \ldots\ldots \to z_{k-1} \to z_k \equiv a$ olacak şekilde bir z_i, $(i = 1,2,\ldots\ldots k)$ kelimelerinin bir dizisi vardır öyle ki z_{i+1}, R nin bir bağıntısı uygulanarak z_i, $(i = 1,2,\ldots\ldots k-1)$ den elde edilmiştir. Böylece, $z_k \equiv a$, $w_a = a$ şeklindeki bir bağıntı uygulanarak z_{k-1} den elde edilmiştir. Kabulümüzden dolayı $w_a \notin A$ olduğundan en az $|A|$ kadar $(w_a = a)$ şeklinde bağıntı vardır.

Sonuç 2.5.1: $sp\langle A|R\rangle$ ve $|R| = 1$ olacak şekildeki bir yarıgrup takdiminin bir G grubunu tanımlaması için gerek ve yeter koşul G bir devirsel grup olmasıdır.

3. REWRITING

Bu kısımda sonlu takdim edilmiş bir M monoidinin elemanları üzerindeki bazı sıralamalar ve onlarla ilgili bazı örnekleri vereceğiz.

3.1 Serbest Monoidlerin Sıralaması

$M = mp\langle A | R \rangle$ sonlu takdim edilmiş bir monoid olsun. M nin elemanları kelimelerin denklik sınıflarıdır. M üzerinde çalışıldığında, aynı denklik sınıfına ait olan ve M nin aynı elemanını tanımlayan kelimelere sıklıkla rastlanır. Bu kelimelerden hangisinin daha basit olduğunun seçilmesi yararlı bir iş olacaktır. Buradaki basitlik kavramı takdime bağlı olabilir. Eğer A^* daki iki kelimeden herhangi birinin tercih edilmesi durumu varsa, o zaman kelimeler üzerinde bir sıralama söz konusudur. Bu konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Sims, 1994) den elde edilebilir.

Tanım 3.1.1: S bir küme olsun. S üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $<$ bağıntısına S üzerinde bir lineer sıralama denir.

i) $<$ geçiskendir,

ii) $<$ antisimetriktir,

iii) $r,s \in S$ ve $r \neq s$ ise $r < s$ yada $s < r$

dir.

S de kesin azalan sonsuz bir diziye sahip olmayan bir lineer sıralamaya S üzerinde iyi sıralama denir.

Örnek 3.1.1: S sonlu ise, S nin herhangi bir lineer sıralaması iyi sıralamadır.

Örnek 3.1.2: Alışılmış sıralama ile doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$ iyi sıralıdır. Yine alışılmış sıralama ile $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi lineerdir ama iyi sıralı değildir.

Tanım 3.1.2: S, $<$ ile lineer sıralı bir küme ve S^n, S nin n li elemanlarının oluşturduğu bir küme olsun. $1 \leq i \leq n$ için $(r_1,.....r_n) < (s_1,.....s_n)$ öyle ki $r_1 = s_1,.....,r_{i-1} = s_{i-1}$ ve $r_i < s_i$ olacak şekilde S^n üzerinde bir $<$ bağıntısına (soldan-sağa) alfabetik sıralama denir.

Tanım 3.1.3: A, $<$ ile lineer sıralı bir alfabe olsun. Aşağıdaki sıralamaya A^* üzerindeki alfabetik sıralama denir.

$r = r_1,.....,r_k \in A^*$ ve $s = s_1,.....,s_l \in A^*$ olmak üzere $r < s$ olması için ya,

i) r, s nin bir öneki ise, yani $k < l$, $r_1 = s_1,.....,r_k = s_k$, ya da,

ii) $1 \leq i \leq min(k,l)$ öyle ki $r_1 = s_1,.....,r_{i-1} = s_{i-1}$ ve $r_i < s_i$

dir.

Önerme 3.1.1: A^* üzerindeki alfabetik sıralama lineerdir. A iyi sıralı olduğu halde, $|A| \geq 2$ ise alfabetik sıralama iyi sıralı olmayabilir.

Örnek 3.1.3: $A = \{ a,b,.....,z \}$ ve $a < b < ..... < z$ olsun.

grup$>$grrup$>$grrrup$>$..... dizisi A^* da kesin azalan sonsuz bir dizidir.

Tanım 3.1.4: A bir alfabe olsun. Her $r,s \in A^*$ için, $r < s$ olması için ya, $|r| < |s|$, ya da $|r| = |s|$ iken r, s den alfabetik olarak daha küçük oluyorsa, $<$ sıralamasına uzunluk artı alfabetik (l-p-l) sıralama denir. l-p-l sıralama $<<$ ile gösterilir. Eğer A iyi sıralı ise A^*, l-p-l sıralaması ile lineer ve iyi sıralıdır.

Tanım 3.1.5: $<$, A^* üzerinde bir sıralama olsun. Eğer $r < s$ olması $|r| < |s|$ olmasını gerektiriyorsa $<$ sıralamasına uzunluk uyumlu denir. Eğer her $u,v \in A^*$ için $r < s$ olması $urv < usv$ olmasını gerektiriyorsa $<$ sıralamasına translation-invaryant denir. Bir translation-invaryant iyi sıralamaya indirgenmiş sıralama denir.

Önerme 3.1.2: Boş kelime ε indirgenmiş sıralamada en küçük elemandır. Eğer herhangi bir $r \in A^*$ için $\varepsilon > r$ olsaydı, sıralamanın translation-invaryant oluşundan $r > r^2$ ve $r^2 > r^3$ olurdu. Buradan $\varepsilon > r > r^2 > r^3$..... dizisi bir kesin azalan sonsuz bir dizi olurdu , bu ise bir çelişkidir.

3.2 Rewriting Sistemler

Bu kısımda sonlu takdim edilmiş bir M monoidinin elemanlarının kanonik formlarını ve rewriting sistemlerle, onların önemli özelliklerini ve örneklerini vereceğiz.

Sonlu takdim edilmiş bir M monoidi üzerinde çalıştığımızı kabul edelim. Kelime probleminin genel olarak çözülemez olmasına rağmen, M de bir çözüm aramak gayet doğaldır. $M = X^*/\sim$ bölüm monoidi olduğunu kabul edelim. Kelime problemine bir yaklaşım olarak, M nin her u elemanı için X^* daki tüm kelimelerin arasından u yu tanımlayan bir U kelimesini seçmek olacaktır. Böyle bir seçime u için bir kanonik form adı verilir. Genellikle u nun kanonik formu, u yu tanımlayan en basit kelime olarak söylenebilir, yani $u/\sim$ denklik sınıfındaki en küçük eleman u nun kanonik formudur. U, u nun kanonik formu ise, $\overline{U}$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\mathbb{C}$ ile kanonik formların kümesini göstereceğiz.

Bir X kümesi, $\sim$ için bir R doğuray kümesi ve $<$ indirgenmiş sıralaması verilsin. Bu durumda kanonik formları hesaplamak için bir yol yoktur. Eğer kanonik formları belirleyebilirsek, o zaman kelime problemini çözebiliriz.

Teorem 3.2.1: Bir kanonoik formun her alt kelimesi de kanoniktir.

İspat : U, M nin herhangi bir elemanı için bir kanonik form ve V de U nun alt kelimesi olsun. O zaman $U = AVB$ olarak alabiliriz.

V nin kanonik form olmadığını kabul edelim. O zaman $V > W$ ve $V \sim W$ olacak şekilde bir W elemanı vardır. Ama o zaman $AVB \sim AWB$ ve $<$ sıralaması translation-invaryant olduğundan $AVB > AWB$ dir. Bu yüzden U $\sim$ denklik sınıfındaki en küçük eleman olamaz, bu ise U yu kanonik form olarak kabul etmemizle çelişir.

Tanım 3.2.1: (P,Q), $\sim$ yı doğuran R kümesinin bir elemanı olsun. (P,Q) yerine (Q,P) yazmak $\sim$ yı değiştirmeyeceğinden $P > Q$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda (P,Q) ya $<$ ya göre bir rewriting bağıntısı denir. Eğer R nin her elemanı bir rewriting bağıntı ise, o zaman R ye, $<$ ya göre bir rewriting sistem denir. Bir rewriting sistem yerine kısaca RWS yazacağız.

R nin bir RWS olduğunu kabul edelim. $\wp$, R nin elemanlarının sol kısımlarının oluşturduğu küme olsun. N, $\wp$ tarafından doğrulan X^* ın ideali ve $\mathbb{C} = X^* - N$ olsun. Eğer $U \in N$ ise o zaman $U = APB$ ve $(P,Q) \in R$ olacak şekilde A, B, P ve Q kelimeleri vardır. $V = AQB$ olsun. O zaman $P \sim Q$ ise $U \sim V$ dır. Ayrıca $P > Q$ olduğundan $U > V$ dır. Eğer $V \in N$ ise o zaman bu yöntem tekrarlanarak $U \sim V \sim W$ ve $U > V > W$ olacak şekilde bir W kelimesi elde edilir. $<$ bir iyi sıralama olduğundan, bu yöntem sonsuza kadar devam etmeyecektir ve sonunda $U \sim C$ ve $U \geq C$ gibi bir $C \in \mathbb{C}$ kelimesini üretecektir.

$(P,Q) \in R$ rewriting bağıntısı genellikle $P \to Q$ ile gösterilir. Daha genel olarak V, U dan R kullanılarak bir adımda elde edilmiş ise, $U \to V$ yada $U \xrightarrow[R]{} V$ yazılır. Bu durumda A, B, P ve Q kelimeleri vardır öyle ki $P \to Q$, R nin bir elemanı, $U = APB$ ve $V = AQB$ dir. U dan V yi elde ederken birden fazla (sıfır defa dahil) rewriting bağıntısı kullanılıyorsa, o zaman $U \xrightarrow[R]{*} V$ yada $U \xrightarrow{*} V$ yazılır. Açık olarak $\xrightarrow{*}$, X^* üzerinde yansımalı ve geçişmeli bir bağıntıdır. Ayrıca $U \xrightarrow{*} V$ ise $U \sim V$ ve $U > V$ dir.

$U \xrightarrow[R]{*} V$ ile V yi elde ederken bazı sorunlarla karşılaşabiliriz. Mesela $\wp$ nin bir elemanı R de birden fazla kuralın sol kısmı olabilir. Bu durumda Q için çok sayıda seçim söz konusu olabilir. V nin değeri de rewritingi sırasındaki bu seçimlere bağlı olabilir.

Örnek 3.2.1: $X = \{ x, y \}$, $R = \{ xx^{-1} \to e,\ x^{-1}x \to e,\ yy^{-1} \to e,\ y^{-1}y \to e \}$ olsun. R, $x > y > x^{-1} > y^{-1}$ sıralaması ile X^* üzerinde bir RWS dir.

$U = xyx^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1}yxy$ olsun. R yi kullanarak U nun rewritngi değişik yollardan yapılabilir.

Birincisi,

$$xy\underline{x^{-1}x}y^{-1}x^{-1}y^{-1}yxy \to x\underline{yy^{-1}}x^{-1}y^{-1}yxy \to \underline{xx^{-1}}y^{-1}yxy$$
$$\to \underline{y^{-1}y}xy \to xy$$

ve ikincisi,

$$xyx^{-1}xy^{-1}x^{-1}\underline{y^{-1}y}xy \to xyx^{-1}xy^{-1}\underline{x^{-1}x}y \to xyx^{-1}x\underline{y^{-1}y}$$
$$\to xy\underline{x^{-1}x} \to xy$$

dir. Bu iki rewritingin sonucunda da aynı eleman xy elde edilir.

Örnek 3.2.2: : $X = \{ a, b \}, <,$ X^* ın l-p-l sıralaması olmak üzere $R = \{ a^2 \to e, b^3 \to e, (ab)^3 \to e \}$, $a << b$ ile X^* üzerinde bir RWS dir.

$U = a^2babab$ olsun. R yi kullanarak U nun rewritngi değişik yollardan yapılabilir.

Birincisi,

$$a\underline{ababab} \to a$$

ve ikincisi,

$$\underline{aa}babab \to babab$$

dir. Bu iki rewritingin sonucunda farklı elemanlar a ve $babab$ elde edildi.

Burada amaç, $U \xrightarrow[R]{*} V$ sırasında V nin değerinin sadece U ya bağlı olduğunu, rewriting sırasında yapılan seçimlere bağlı olmadığını garanti etmek için R RWS üzerinde bir koşul geliştirmek olacaktır.

Teorem 3.2.2: Eğer $U \xrightarrow[R]{*} V$ ise o zaman her $W \in X^*$ için $UW \xrightarrow[R]{*} VW$ ve $WU \xrightarrow[R]{*} WV$ dır.

Teorem 3.2.3: Eğer $U, V \in X^*$ ise o zaman $U \sim V$ olması için gerek ve yeter koşul $U = U_0, U_1, ...U_t = V$ olacak şekilde kelimelerin bir dizisi vardır öyle ki $0 \leq i < t$ için ya $U_i \xrightarrow[R]{*} U_{i+1}$, ya da $U_{i+1} \xrightarrow[R]{*} U_i$ dır.

$\xrightarrow[R]{}$ ve $\xrightarrow[R]{*}$ bağıntılarının sahip olabildiği bir takım yararlı özellikler vardır.

Church-Rosser Özelliği : Eğer $U \sim V$ ise o zaman $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır.

Kavşak : Eğer $W \xrightarrow[R]{*} U$ ve $W \xrightarrow[R]{*} V$ ise o zaman $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır.

Yerel Kavşak : Eğer $W \xrightarrow[R]{} U$ ve $W \xrightarrow[R]{} V$ ise o zaman $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır.

Teorem 3.2.4: Eğer Churh-Rosser Özelliği sağlanıyor ise o zaman her $\sim$ denklik sınıfı $\mathbb{C}$ nin bir tek elemanını içerir, bu da o sınıf için kanonik formdur.

İspat : Her $\sim$ denklik sınıfı için kanonik formun $\mathbb{C}$ de olduğu biliniyor. U ve V nin aynı $\sim$ denklik sınıfındaki $\mathbb{C}$ nın elemanları olduğunu kabul edelim. O zaman Churh-Rosser Özelliğinden $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır. U ve V $\mathbb{C}$ de olduklarından $U = Q = V$ elde edilir.

Teorem.3.2.5: Bir indirgenmiş sıralama $<$ ile alakalı bir RWS R için, Churh-Rosser Özelliği, Kavşak ve Yerel Kavşak denktirler.

İspat : (a) Churh-Rosser Özelliği, Kavşak'ı gerektirir;

$W \xrightarrow[R]{*} U$ ve $W \xrightarrow[R]{*} V$ olduğunu kabul edelim. O zaman $W \sim U$ ve $W \sim V$ dır. Bu yüzden $U \sim V$ ve Churh-Rosser Özelliğinden $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır.

(b) Kavşak, Yerel Kavşak'ı gerektirir,
Yerel Kavşak Kavşak'ın bir özel hali olduğu için bu açıktır.

(c) Yerel Kavşak, Kavşak'ı gerektirir.

W elemanında Kavşak sağlanmasın. Yani $W \xrightarrow[R]{*} U$ ve $W \xrightarrow[R]{*} V$ ise $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi bulunmasın. Δ Kavşak olmayan kelimelerin kümesi olsun ve Δ boş olmasın. $<$ iyi sıralama olduğundan Δ bir en küçük eleman W ya sahiptir. $W \xrightarrow[R]{*} U$ ve $W \xrightarrow[R]{*} V$ olduğunu kabul edelim. $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesinin var olduğunun gösterilmesi gereklidir. Eğer $U = W$ ise o zaman $Q = V$, eğer $V = W$ ise $Q = U$ olacak şekilde alınabilir. Bu yüzden $U \neq W$ ve $V \neq W$ olduğunu kabul edebiliriz.

$A \xrightarrow[R]{*} U$ ve $B \xrightarrow[R]{*} V$ olacak şekilde W dan bir adımda elde edilmiş A ve B kelimeleri vardır. Yerel Kavşaktan dolayı $A \xrightarrow[R]{*} C$ ve $B \xrightarrow[R]{*} C$ olacak şekilde bir C kelimesi vardır. $A < W$ olduğundan $A \notin \Delta$ dır. Bunun için $U \xrightarrow[R]{*} D$ ve $C \xrightarrow[R]{*} D$ olacak şekilde bir D kelimesi vardır. Bu yüzden $B \xrightarrow[R]{*} D$ dır. $B < W$ olduğundan $D \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır. Ama o zaman $U \xrightarrow[R]{*} Q$ olur ve Kavşak W sağlanır. Bunun için $\Delta = \phi$ ve Kavşak sağlanır.

(d) Kavşak, Churh-Rosser Özelliğini gerektirir,

$U \sim V$ olduğunu kabul edelim. Biz $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesinin var olduğunu göstermek istiyoruz. Teorem.3.2.3 den dolayı, $U = U_0, U_1, ...U_t = V$ dizisi vardır öyle ki, $0 \leq i < t$ için ya $U_i \xrightarrow[R]{*} U_{i+1}$, ya da $U_{i+1} \xrightarrow[R]{*} U_i$ dır. t üzeride tümevarım uygulayalım. Eğer $t = 0$ ise $Q = U = V$ alınabilir. Eğer $t = 1$ ise o zaman Q yu U ve V den daha küçük olacak şekilde alınabilir. $t \geq 2$ olduğunu kabul edelim. O zaman $U_1 \sim V$ ve tümevarımdan dolayı $U_1 \xrightarrow[R]{*} A$ ve $V \xrightarrow[R]{*} A$ olacak şekilde bir A kelimesi vardır. Eğer $U_0 \xrightarrow[R]{*} U_1$ ise o zaman Q yu A olarak alabiliriz. $U_1 \xrightarrow[R]{*} U_0$ olduğunu kabul edelim. Kavşaktan dolayı $U_0 \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $A \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q kelimesi vardır. Ama o zaman $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olur, bu zaten yapıldı.

Bu ispat yapılırken $<$ nın iyi sıralama olduğuna güvenildi. Genel olarak Yerel Kavşak, Kavşak'ı gerektirmek zorunda değildir.

Tanım 3.2.2: X herhangi bir küme ve X^*, X üzerindeki serbest monoid ve $U,V \in X^*$ olsun.

i) $U = ABC$ ve $V = B$ olacak şekilde A,B ve $C \in X^*$ kelimeleri varsa buna U ve V nin örtüşmesi denir.

ii) $U = AB$ ve $V = BC$ olacak şekilde A,B ve $C \in X^*$ kelimeleri varsa buna U ve V nin has örtüşmesi denir.

İndirgenmiş RWS lerde sadece has örtüşmeler vardır. Eğer R sonlu ise o zaman R de sol kısım olan kelimelerin kümesi Γ sonludur. Her $W \in \Gamma$ için W dan bir adımda elde edilen kelimelerin sonlu kümesi $\Re$ yi oluşturulabilir. Her $U \in \Re$ için rewriting kullanılabilir. Eğer birden fazla V değeri belirleniyorsa o zaman R ye göre indirgenemez ve M in aynı elemanını tanımlayan iki kelime bulduğundan R birleşen değildir. Eğer her U için aynı V değeri belirleniyorsa o zaman yerel kavşak W da sağlanır. Her $W \in \Gamma$ için bu test uygulandığından R nin birleşen olup olamayacağına karar verilebilir.

Örnek 3.2.3: $A = \{ a,b,c \}$ ve $R = \{ abc \to e,\ bca \to e,\ cab \to e \}$ olsun. R nin birleşen olduğunu kontrol etmek için sadece $abca, bcab, cabc, abcab, bcabc$ ve $cabca$ kelimelerinde Yerel Kavşak'ın test edilmesi gereklidir.

$a\underline{bca} \to a \qquad b\underline{cab} \to b \qquad c\underline{abc} \to c$

$\underline{abc}a \to a \qquad \underline{bca}b \to b \qquad \underline{cab}c \to c$

$ab\underline{cab} \to ab \qquad bc\underline{abc} \to bc \qquad ca\underline{bca} \to ca$

$\underline{abc}ab \to ab \qquad \underline{bca}bc \to bc \qquad \underline{cab}ca \to ca$

olduğundan R birleşendir.

Algoritma 3.2.1

X bir sonlu küme, R, X^* üzerinde indirgenmiş bir sıralamaya göre bir sonlu RWS olsun. R nin birleşen olup olmadığını kontrol etmek için genel olarak aşağıdaki gibi bir yol izlenir.

1.Adım: (P,Q) ve $(R,S)\in R$ bağıntıları alınır.

2.Adım: B, P nin bir boş olmayan soneki, U da B ve R nin ortak en uzun öneki yani $B=UD$ ve $R=UE$ olarak alınır.

3.Adım: Eğer D yada E boş ise o zaman $P=AB$ olarak alınır.

4.Adım: $ASD \xrightarrow[R]{*} V$, $QE \xrightarrow[R]{*} W$ olsun. $V\neq W$ ise R birleşen değildir.

Bu algoritma R nin sol kısımlarının tüm örtüşmeleri için uygulanır. Eğer hepside birleşen ise R birleşendir.

Örnek 3.2.4: $X=\{\ a,b\ \}$ ve $R=\{a^2\to e, b^3\to e, (ab)^3\to e\ \}$ olsun. $a<<b$ sıralaması ile R, X^* üzerinde bir RWS dir.

R nin birleşen olmadığını şöyle gösterebiliriz.

$(P,Q)=((ab)^3,e)$ ve $(R,S)=(b^3,e)$ olarak alınırsa,

$B=b$ ve $U=b$ olacak şekilde seçilirse $B=UD$ ise $B=be$ dir, $R=UE$ ise $R=bb^2$ dir. Burada $D=e$ olduğundan, $P=AB$ yani $P=ababab$ $A=ababa$ ve $B=b$ dir. O zaman,

$$ASD=ababaee\to ababa=V$$

$$QE=eb^2\to b^2=W$$

olur ve $V\neq W$ olduğundan R birleşen değildir.

Tanım 3.2.3: R bir rewriting sistem olsun. Her $n\geq 1$ için $w_n > w_{n+1}$ olacak şekilde bir sonsuz dizi bulunmuyorsa R sistemine sona eren bir rewriting sistem denir. Her $(v,u)\in R$ için $v<<u$ oluyorsa R sistemine alfabetik rewriting sistem denir. Burada şunu görmek mümkündür ki, eğer R alfabetik bir rewriting sistem ise

o zaman R bir sona eren rewriting sistemdir. R sistemi hem sona eren hem de birleşen ise R ye tam rewriting sistem denir.

Teorem 3.2.6. Eğer R, X^* üzerinde bir birleşen RWS ise, o zaman $U \xrightarrow[R]{*} V$ sonucunda V nin değeri sadece R ve U ya bağlıdır, rewritingi sırasındaki seçimlere bağlı değildir.

İspat : Teorem 3.2.5 den R birleşen ise Church-Rosser Özelliği sağlanır. Buradan Teorem 3.2.4. den V nin değeri U yu içeren $\sim$ denklik sınıfının kanonik formudur.

Tanım 3.2.4: R bir RWS olsun. Her $(P,Q) \in R$ için P ve Q nun her ikisi de $R-\{(P,Q)\}$ ya göre indirgenemez ise R ye indirgenmiş RWS denir.

Teorem 3.2.7: $<$, X^* üzerinde bir indirgenmiş sıralama olsun. X^* üzerindeki her kongruans, $<$ ya göre indirgenmiş tek bir birleşen RWS tarafından doğrulur.

İspat : $\sim$, X^* üzerinde bir kongruans ve $M = X^*/\!\sim$ bölüm monoidi olsun. $\mathbb{C} = \left\{\overline{U} \mid U \in X^*\right\}$, $<$ sıralamasına göre M nin elemanlarının kanonik formlarının kümesi ve $N = X^* - \mathbb{C}$ ideali olsun. $\wp$, N için tek minimal doguray kümesi ve $S = \left\{\left(P,\overline{P}\right) \mid P \in \wp\right\}$ olsun. S nin $<$ ya göre indirgenmiş birleşen RWS olduğu ve S nin bu özelliklere göre tek olduğu gösterilmelidir. Herhangi bir U için $U \geq \overline{U}$ dir. Eğer $P \in N$ ise o zaman $P \neq \overline{P}$ ve $P \geq \overline{P}$ dir. Bundan dolayı S, $<$ ya göre bir RWS dir. $\equiv$, S tarafından doğrulan kongruans olsun. Her $P \in \wp$ için $P \sim \overline{P}$ olduğundan $\equiv$ bağıntısı $\sim$ bağıntısında içerilir. Ama S ye göre indirgenemez olan bir kelime $\mathbb{C}$ dedir. Bundan dolayı bir V elemanı için V nin rewritingi $\overline{U}$ dir. Bu yüzden her U kelimesi için $U \equiv \overline{U}$ dir ve bu $\equiv$ ile $\sim$ bağıntılarının aynı olduklarını gerektirir. S nin tanımından dolayı S indirgenmiştir. Eğer $U \sim V$ ise o zaman $U \xrightarrow[S]{*} \overline{U}$ ve $V \xrightarrow[S]{*} \overline{V}$ dır. Ama $\overline{U} \equiv \overline{V}$ dır, böylece Church-Rosser Özelliği sağlandığından S birleşendir. T nin $\sim$ yı doğuran, $<$ ya göre indirgenmiş birleşen RWS olduğunu kabul edelim. $P \in \wp$ olsun. P nin T kullanılarak rewritingi $\overline{P}$ yi vermelidir. Bu yüzden P, T nin bir sol kısmını bir alt kelime olarak içerir. Ama P nin tüm öz alt kelimeleri $\mathbb{C}$ dedir. Böylece T, (P,Q) gibi bir bağıntı içerir. Ama T indirgenmiş olduğundan $Q \in \mathbb{C}$ dir, böylece $Q = \overline{P}$ elde edilir. Bundan dolayı $S \subseteq T$ dir. Eğer $(U,V) \in T - S$ gibi bir eleman olsaydı, o zaman $U \notin \mathbb{C}$ olurdu ve böylece U, $P \in \wp$ gibi bir alt kelime içerirdi. Ama P, S de bir sol kısımdır ve bu T nin indirgenmiş olduğunun kabul etmemizle çelişir.

$<$ nın X^* üzerinde bir indirgenmiş sıralama, $R \subseteq X^* \mathrm{x} X^*$ ve $\sim$ nında R tarafından doğrulan kongruans olduğunu kabul edelim. $RC(X,<,R)$ yada RC(X,<,~) ile $\sim$ yı doğuran $<$ ya göre indirgenmiş birleşen RWS göstereceğiz. Eğer R birleşen ise $RC(X,<,R)$ yi belirlemek kolaydır.

Teorem 3.2.8: R, X^* üzerindeki $<$ ya göre bir birleşen RWS olsun. $\wp$ kümesi de R deki bütün sol kısımların kümesi olsun öyle ki, sol kısımlar herhangi bir sol kısmı öz alt kelime olarak içermesin. $P \in \wp$ için $\overline{P}$, R kullanılarak P nin rewritingi olsun. O zaman $RC(X,<,R) = \left\{ \left(P,\overline{P}\right) \mid P \in \wp \right\}$ dır.

İspat : $\sim$, R tarafından doğrulan kongruans olsun. R birleşen olduğundan $\sim$ denklik sınıfında ilk sırada olmayan herhangi bir kelime, R de sol kısım olan bir alt kelimeyi içerir. Böylece $\wp$ kümesi kanonik olmayan formların ideali için bir minimal doğuray kümesidir ve $RC(X,<,R) = \left\{ \left(P,\overline{P}\right) \mid P \in \wp \right\}$ dır.

Teorem 3.2.9: X sonlu bir küme ve $\sim$ da X^* üzerinde bir kongruans öyle ki $\sim$ denklik sınıflarının kümesi sonlu olsun. X^* ın her indirgenmiş sıralaması için RC(X,<,~) sonludur.

İspat: (P,Q) elemanı $S =$ RC(X,<,~) in bir bağıntı olsun. $0 \leq i < |P|$ için P_i P in i uzunluğundaki öneki olsun. Her P_i bir kanonik formdur, böylece eğer $0 \leq i < j < |P|$ ise P_i ve P_j farklı $\sim$ denklik sınıflarındadır. Bunun için $|P|$ $\sim$ denklik sınıflarının sayısını geçemeyecektir. S de aynı sol kısma sahip ayrık iki bağıntı bulunmadığından S sonludur.

R nin birleşen olmadığını kabul edelim. Bundan dolayı yerel birleşen de değildir. Yerel kavşak bir W da sağlanmıyor dediğimizde, $W \xrightarrow[R]{} U$ ve $W \xrightarrow[R]{} V$ olacak şekilde $U,V \in X^*$ elemanları var ama $U \xrightarrow[R]{*} Q$ ve $V \xrightarrow[R]{*} Q$ olacak şekilde bir Q yoktur, anlamına gelecektir.

Teorem 3.2.10: Kabul edelim ki yerel kavşak bir W elemanında sağlanmasın ama W nun herhangi bir öz alt kelimesinde sağlansın. O zaman aşağıdaki koşullardan biri sağlanır;

i) W, R deki farklı iki bağıntının sol kısmıdır,

ii) W, R deki bir bağıntının sol kısmıdır ve W başka bir sol kısmı bir öz alt kelime olarak içerir.

iii) A,B ve C boş kelimeden farklı kelimeler, AB ve BC R de sol kısımlar olmak üzere $W = ABC$ olarak yazılabilir.

İspat: Kabulden dolayı $A_1, B_1, P_1, Q_1, A_2, B_2, P_2$ ve Q_2 kelimeleri vardır ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar;

1) $W = A_1P_1B_1 = A_2P_2B_2$

2) (P_1,Q_1) ve $(P_2,Q_2) \in R$

3) $U_1 = A_1Q_1B_1$ ve $U_2 = A_2Q_2B_2$ olmak üzere U_1 ve U_2 den elde edilen bir kelime yoktur.

İlk olarak P_1 ve P_2 de bir örtüşme olmadığını kabul edelim. O zaman $A_2 = A_1P_1C$ ve $B_1 = CP_2B_2$ olarak alınırsa $W = A_1P_1CP_2B_2$ olacak şekilde kabul edilebilir. Ama o zaman $U_1 = A_1Q_1CP_2B_2$ ve $U_2 = A_1P_1CQ_2B_2$ olur. Bu yüzden $A_1Q_1CQ_2B_2$ kelimesi U_1 ve U_2 den elde edilmiş olur. Bu ise kabul edilen durumla çelişir. Şimdi ise P_1 ve P_2 de örtüşme olduğunu kabul edelim. $B \neq \varepsilon$ olmak üzere $W = A_1ABCB_2$ olacak şekilde kabul edebiliriz ve aşağıdakilerden biri sağlanır.

(a) $P_1 = ABC$ ve $P_2 = B$

(b) $P_1 = AB$, $P_2 = AB$, A ve C her ikisi de boş kelimeden farklıdır.

$A_1B_2 = \varepsilon$ olduğunu kabul edilebilir. O zaman ABC, W nun bir alt kelimesi olup, kabulümüzden dolayı ABC de yerel kavşak sağlanır. (a) nın doğru olduğu kabul edilsin, o zaman Q_1 ve AQ_2C den elde edilen bir Q kelimesi vardır. Ama o zaman A_1QB_2 kelimesi $U_1 = A_1Q_1B_2$ ve $U_2 = A_1AQ_2CB_2$ den elde edilir. Bu ise kabul edilen durumla çelişir. Benzer şekilde (b) nin sağlandığı kabul edilirse çelişki elde edilir. Bu yüzden $A_1 = B_2 = \varepsilon$ dur. (a) nın sağlandığı kabul edilsin. Eğer $AC \neq \varepsilon$ ise, o zaman teoremin ii) nolu durumu sağlanır. Eğer $AC = \varepsilon$ ise, o zaman $P_1 = P_2$ dir ve $Q_1 \neq Q_2$ olmalıdır, aksi takdirde $U_1 = U_2$ olurdu. Bundan dolayı eğer $AC = \varepsilon$ ise teoremin i) nolu durumu sağlanır. Son olarak (b), teoremin iii) nolu durumunun sağlandığını gösterir.

3.3 Knuth-Bendix Yöntemi

$\langle X | R \rangle$ bir sonlu monoid takdimi, $<$ X^* üzerinde bir indirgenmiş sıralama ve τ da indirgenmiş, birleşen RWS $RC(X,<,R)$ yi göstersin. Bu bölümde eğer τ sonlu ise o zaman X, R ve $<$ nin etkili bir tanımından τ nun belirlenebileceği

gösterilecek. Burada $<$ nın etkili bir tanımından kasıt, verilen iki kelimeden hangisinin daha önce gelebileceğine karar vermektir.
Burada Knuth-Bendix Yönteminin basit bir versiyonunu tarif edilecek ve bu KBS ile gösterilecek. Daha genel tanım (Knuth-Bendix, 1970) tanımlandı.

KBS işlemindeki fikir gayet basittir. Verilen bağıntılar kümesinin birleşen olup olmadığı kontrol edilir. Bağıntılar birleşen ise yapacak bir şey yoktur. Aksi durumda R tarafından doğrulan $\sim$ kongruansı altında denk olan A ve B gibi iki tane indirgenemez kelime elde edilir. $A > B$ olduğu kabul edilip (A,B) bağıntısı bağıntılar kümesine dahil edilir. Burada her i ve j indisleri için sol kısım olan P_i ve P_j lerin tüm örtüşmelerinin kesin olarak yapıldığının anlaşılması önemli bir noktadır (Sims, 1994, Knuth-Bendix, 1970).

KBS işlemi uygulanırken izlenmesi gerekli adımlar aşağıdaki gibidir. X bir sonlu küme, $<$ bir indirgenmiş sıralama, $R \subseteq X^*\mathrm{x}X^*$ olsun. τ da KBS işlemi sonucundaki indirgenmiş, birleşen RWS, $RC(X,<,R)$ yi göstersin.

1.Adım: $R = \{\ (P_j,Q_j)\ |\ 1 \le j \le m\ \}$ olarak verilsin. R nin aşağıdaki gibi bir tablosu düzenlenir.

No	P_j	Q_j	Kaynak
1	P_1	Q_1	Bağıntı 1
2	P_2	Q_2	Bağıntı 2
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	Q_m	Bağıntı m

Tablo 3.3.1

2.Adım: R nin bağıntılarının birleşen olup olmadığı araştırılır. Birleşen ise yapılacak bir şey yoktur.

Eğer birleşen değilse, bu durumda, A ve B gibi indirgenemez kelimeler bulunur. $A > B$ olduğu kabul edilip (A,B) bağıntısı Tablo 3.3.1 deki R nin bağıntılarına dahil edilir. Elde edilen bu yeni bağıntılarda dahil olmak üzere tüm örtüşmeler düşünülerek aşağıdaki gibi bir tablo oluşturulur.

No	P_i	Q_i	Kaynak
1	P_1	Q_1	Bağıntı 1
2	P_2	Q_2	Bağıntı 2
⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	Q_m	Bağıntı m
$m+1$	P_{m+1}	Q_{m+1}	Örtüşme $\lambda\mu k$
$m+2$	P_{m+2}	Q_{m+2}	Örtüşme $\lambda\mu k$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	P_n	Q_n	Örtüşme $\lambda\mu k$

Tablo 3.3.2

Burada $1 \le i \le n$, $1 \le \lambda \le n-1$, $1 \le \mu \le n-1$, k P_i ve P_j gibi iki sol kısmın örtüşmelerindeki örtüşen kelimenin uzunluğu olup, P herhangi bir sol kısım olmak üzere, $1 \le k \le |P|$ dır.

3.Adım: Tablo 3.3.2 den $S = \{ (P_i, Q_i) \mid 1 \le i \le n \}$ kümesi oluşturulur. Buradan da S kümesinde bazı elemeler yapılarak bir $\wp$ kümesi oluşturulur. $\wp$ nin elemanları P_i lerden oluşur öyle ki, P_i lerin her öz alt kelimesi S ye göre indirgenemezdir.

Son olarak $P \in \wp$ için (P,Q) şeklindeki bağıntılar KBS nin bitirdiği τ nun elemanlarını verir.

Örnek 3.3.1: $X = \{ a,b \}$, $<$, X^* ın l-p-l sıralaması, $a << b$ ve $R = \{ a^2 \to e, b^3 \to e, (ab)^3 \to e \}$ olsun. KBS nin bitirdiği τ yu bulmak için,

1.Adım: R nin tablosu oluşturulur.

No	P_j	Q_j	Kaynak
1	a^2	e	Bağıntı 1
2	b^3	e	Bağıntı 2
3	$(ab)^3$	e	Bağıntı 3

Tablo 3.3.3

2.Adım : Bağıntıların birleşen olup olmadığı kontrol edilir.

Bağıntı 1 ile oluşan örtüşmeler,

a) $(P,Q) = (a^2, e)$ ve $(R,S) = (a^2, e)$ olarak alınırsa Algoritma 3.2.1 den; $P = aa$, $R = aa$ olduğundan $B = a$ ve $U = a$ olarak alınır. $B = ae$ ise $B = UD$ ve $R = aa$ ise $R = UE$ gibidir. Burada $D = e$ olduğundan $P = aa$ olup $A = a$ ve $B = a$ dır.O zaman,

$$ASD = aee \to a = V$$

$$QE = ea \to a = W$$

olup $W = V$ dir. Bundan sonra kolaylık sağlaması nedeniyle örtüşmeler daha kısa olarak yapılacak.

b) $(P,Q) = (a^2, e)$ ve $(R,S) = ((ab)^3, e)$ den oluşan örtüşme,

$P = aa$, $R = ababab$ olduğundan,

$$a\underline{ababab} \to a = V$$

$$\underline{aa}babab \to babab = W$$

olup $V \neq W$ olduğundan birleşen değildir.

$A = a$ ve $B = babab$ alınır ve $B > A$ olduğundan $(B, A) = (babab, a)$ bağıntısı 4 nolu bağıntı olarak tabloya dahil edilir.

Bu bağıntının kaynağı, Örtüşme 131 dir. Yani 1 ve 3 nolu bağıntı ve örtüşen kısmın uzunluğu 1 dir.

Bağıntı 2 kullanılarak oluşan örtüşmeler,

$(P,Q)=(b^3,e)$ ve $(R,S)=(b^3,e)$ olarak alınırsa,

i) $bb\underline{bbb} \to b^2 = V_1$ **ii)** $b\underline{bbb} \to b = V_2$

$\underline{bbb}bb \to b^2 = W_1$, $\underline{bbb}b \to b = W_2$

olup $W_1 = V_1$ ve $W_2 = V_2$ olduğundan bağıntı 2 nin kendisi ile örtüşmesi birleşendir.

Bağıntı 3 kullanılarak oluşan örtüşmeler,

$(P,Q)=((ab)^3,e)$ ve $(R,S)=(b^3,e)$ olarak alınırsa;

$$ababa\underline{bbb} \to ababa = V$$

$$\underline{ababab}bb \to b^2 = W$$

olup $W \neq V$ olduğundan, $A = ababa$, $B = b^2$ alınır ve $(A,B)=(ababa,b^2)$ bağıntısı 5 nolu bağıntı olarak tabloya ilave edilir. Bu bağıntının kaynağı Örtüşme 321 dir.

İlk üç bağıntı yardımıyla bulunan yeni bağıntıların ilave edilmesi ile oluşan tablo aşağıdaki gibidir.

No	P_j	Q_j	Kaynak
1	a^2	e	Bağıntı 1
2	b^3	e	Bağıntı 2
3	$(ab)^3$	e	Bağıntı 3
4	$babab$	a	Örtüşme 131
5	$ababa$	b^2	Örtüşme 321

Tablo 3.3.4

Bağıntı 4 ile oluşan örtüşmeler,

a) $(P,Q)=(babab,a)$ ve $(R,S)=(b^3,e)$ olarak alınırsa;

$$baba\underline{bbb} \rightarrow baba = V$$

$$\underline{babab}bb \rightarrow ab^2 = W$$

olup $W \neq V$ olduğundan, $(A,B) = (baba, ab^2)$ bağıntısı 6 nolu bağıntı olarak tabloya ilave edilir. Bu bağıntının kaynağı Örtüşme 421 dir.

b) $(P,Q) = (b^3, e)$ ve $(R,S) = (babab, a)$ olarak alınırsa;

$$bb\underline{babab} \rightarrow b^2a = V$$

$$\underline{bbb}abab \rightarrow abab = W$$

olup $W \neq V$ olduğundan, $(B,A) = (abab, b^2a)$ bağıntısı 7 nolu bağıntı olarak tabloya ilave edilir. Bu bağıntının kaynağı Örtüşme 241 dir.

c) $(P,Q) = (babab, a)$ ve $(R,S) = ((ab)^3, e)$ olarak alınırsa;

$$bab\underline{ababab} \rightarrow bab = V$$

$$\underline{babab}abab \rightarrow ab^2babab \rightarrow ab^3abab \rightarrow a\underline{abab} \rightarrow ab^2a = W$$

olup $W \neq V$ olduğundan, $(B,A) = (ab^2a, bab)$ bağıntısı 8 nolu bağıntı olarak tabloya ilave edilir. Bu bağıntının kaynağı Örtüşme 432 dir.

Bağıntı 5 ile oluşan örtişmeler,

$(P,Q) = (ababa, b^2)$ ve $(R,S) = (ababa, b^2)$ olarak alınırsa bağıntı 5 kendisi ile örtüşür . Buradan,

$$abab\underline{ababa} \rightarrow a\underline{babaa}b^2 \rightarrow \underline{aab}^2ab^2 \rightarrow b^2ab^2 = V$$

$$\underline{ababa}baba \rightarrow aba = W$$

olup $W \neq V$ olduğundan, $(A,B) = (b^2ab^2, aba)$ bağıntısı 9 nolu bağıntı olarak tabloya ilave edilir. Bu bağıntının kaynağı Örtüşme 551 dir.

Artık birleşen olmayan bağıntı kalmadığından, son olarak Tablo 3.3.5 oluşturulur.

No	P_j	Q_j	Kaynak
1	a^2	e	Bağıntı 1
2	b^3	e	Bağıntı 2
3	$(ab)^3$	e	Bağıntı 3
4	$babab$	a	Örtüşme 131
5	$ababa$	b^2	Örtüşme 321
6	$(ba)^2$	ab^2	Örtüşme 421
7	$(ab)^2$	b^2a	Örtüşme 241
8	ab^2a	bab	Örtüşme 432
9	b^2ab^2	aba	Örtüşme 551

Tablo 3.3.5

3.Adım: $\wp$ kümesi elde edilen bu son tablodaki 1,2,6,7,8 ve 9 nolu bağıntıları içerir. Çünkü,

4 nolu bağıntının sol kısmı $babab$ olup 3 nolu bağıntının sol kısmı $(ab)^3 = ababab$ nin bir öz alt kelimesidir.

6 nolu bağıntının sol kısmı $baba$ olup 4 nolu bağıntının sol kısmı $babab$ nin bir öz alt kelimesidir.

7 nolu bağıntının sol kısmı $abab$ olup 5 nolu bağıntının sol kısmı $ababa$ nin bir öz alt kelimesidir.

Böylece KBS nin bitirdiği τ nun bağıntılar kümesi,

$$RC(X,<,R) = \tau = \left\{ (a^2,e),(b^3,e),((ba)^2,ab^2),((ab)^2,b^2a),(ab^2a,bab),(b^2ab^2,aba) \right\}$$

dir.

Teorem.3.3.1: Eğer $RC(X,<,R)$ sonlu ise, Knuth-Bendix Yöntemi $\tau = RC(X,<,R)$ yi bitirir.

İspat : $S=\{\ (P_i,Q_i)\ \mid\ 1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}\ \}$ $RC(X,<,R)$ yi doğuran küme olsun. Herhangi bir $(U,V)\in R$ için, U ve V nin rewritingleri sırasıyla A ve B olsun. Bu durumda $U\xrightarrow[S]{*}A$ ve $V\xrightarrow[S]{*}B$ dır. O zaman $S\cup\{(U,V)\}$ ve $S\cup\{(A,B)\}$, X^* üzerinde aynı kongruansı doğururlar. Bu yüzden R ve S, X^* üzerinde aynı kongruans $\sim$ yı doğururlar. Buradan $U\sim V$ dır ve herhangi bir (U,V) nin rewritingleri elde edilse dahi S kümesi $\sim$ yı doğurur. Burada P_i kelimesinin $\{(P_j,Q_j)\mid 1\leq j<i\}$ göre indirgenemez olduğuna da dikkat edilmelidir.

KBS nin bitmediği kabul edilsin. O zaman KBS sona ermeyecek ve $(P_i,Q_i), i=1,2,.....$ olacak şekilde sonsuz bir rewriting bağıntılar dizisi üretecektir. Bu bağıntıların kümesi Ω olsun.

Teorem 3.3.2: Ω birleşendir ve $\sim$ yı doğurur.

İspat : Ω nın $\sim$ yı doğurduğu açıktır.

Ω nın birleşen olmadığını ve W nun da $<$ ya göre yerel kavşağın saglanmadığı ilk kelime olduğunu kabul edelim. Teorem 3.3.10.dan, $W=ABC$, $B\neq\varepsilon$ ve aşağıdakilerden biri sağlanır,

i) $W=P_j$ ve $B=P_i$ $j<i$ ve Ω kullanılarak AQ_iC ve Q_j den elde edilmiş bir kelime yoktur.

ii) $AB=P_i$, $BC=P_j$ ve AQ_j ile Q_iC den elde edilen bir kelime yoktur.

i) in sağlandığını kabul edilelim. Örtüşmelerden dolayı, S kullanılarak AQ_iC ve Q_j kelimelerinden elde edilen bir D kelimesi vardır. $S\subseteq\Omega$ olduğundan D AQ_iC ve Q_j den Ω kullanılarak elde edilmiş olur. bu yüzden i) sağlanamaz. Benzer şekilde ii) de sağlanamaz. Çünkü örtüşmelerden dolayı AQ_j ile Q_iC den Ω kullanılarak elde edilen bir kelime yoktur. Bu yüzden Ω birleşendir.

Teorem.3.3.1 in ispatına dönülürse,

$\mathbb{C}$, ~ için kanonik formların kümesi ve P de $P \in X^* - \mathbb{C}$ gibi öz alt kelimeleri $\mathbb{C}$ de olan olan kelimelerin kümesi olsun. Ω kullanılarak $P \in \wp$ nin rewritinginden $\overline{P} \in \mathbb{C}$ ve $P \sim \overline{P}$ dır. Ω da sol kısmı P olan bir tek bağıntı vardır. L, $P \in \wp$ ve $(P,Q) \in \Omega$ bağıntılarının kümesi olsun. Kabulden dolayı $RC(X,<,R)$ sonludur. Bu yüzden $\wp$ ve L sonludur. n $(P_n,Q_n) \in L$ olacak şekildeki en büyük tam sayı olsun. $i > n$ ise o zaman $P_i \notin \mathbb{C}$ ve $\{(P_j,Q_j) \mid 1 \leq j < i\}$ kümesine göre indirgenemezdir. Ama bu mümkün değildir. Bunun için Ω sonludur ve KBS işlemi biter.

Teorem 3.2.8. ve $\wp$ kümesi yardımıyla KBS nin $RC(X,<,R)$ yi bitirdiği gösterilir.

4. GRUP TANIMLAYAN YA DA TANIMLAMAYAN BAZI YARIGRUP VE MONOİD TAKDİMLERİ

Bu bölümde (Smith, 1998, Johnson, 1997) yayınlarından yararlanılarak bazı yarıgrup ve monoid takdimlerinin hangi durumlarda grup tanımlayıp tanımlamadıklarını göstereceğiz.

4.1 İki Doğuraylı ve Tek Bağıntılı Monoid Takdimleri

Bu kısımda bir $mp\langle X \mid r=1\rangle$ monoid takdiminin grup tanımlayıp tanımlamadığını göstermek için, r bağıntısının nasıl bir forma sahip olduğunu belirleyeceğiz.

Teorem 4.1.1: X en az iki elemanlı bir küme olsun. Eğer $M = mp\langle X \mid r=1\rangle$ monoid takdiminde r nin öz başlangıç kısmı yine r nin öz son kısmı ile uyuşmuyorsa o zaman M bir grup değildir.

İspat : Eğer r boş kelime ise yapılacak bir şey yoktur. r nin boş olmadığını ve $X = \{x, y, a_i \mid i = 1,2,\ldots..n\}$ sonlu kümesi için r nin $x \in X$ ile başladığını kabul edelim. X in elemanları üzerinde l-p-l sıralama ile r ye KBS işlemini uygulansın. Tek bağıntı r olduğu için KBS işlemi r nin kendisi ile oluşturduğu örtüşmeleri kontrol ederek başlar. Ama böyle bir örtüşme teoremdeki kabulden dolayı oluşmayacaktır ve $r \to 1$ rewriting bağıntısı M için bir tam RWS dir. Rewriting bağıntısının birbirini izleyen uygulamaları, monoidin aynı elemanını gösteren kelimeleri aynı indirgenmiş formun içine koyacaktır. Tersine, monoidin farklı elemanlarını temsil eden kelimeler ayrık indirgenmiş formların içine konulacaktır.

$r \to 1$ rewriting bağıntısı tek olduğundan, $r = xu$, $u \in X^*$ gibi alınabilir. $xu = 1$ ise, bu durumda $y \in X - \{x\}$ elemanının sağ tersi bulunamayacağından M, Teorem 2.4.5 den dolayı bir grup olamaz.

Teorem 4.1.2: $M = mp\langle x,y \mid r=1\rangle$ bir monoid takdimi öyle ki $r = x^a y^b x^c y^d$ ve $a,b,c,d>0$ olsun. M nin grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $d \le b, a \le c$ ve bu eşitsizliklerden en az birinin kesin eşitsizlik olmasıdır.

İspat : M bir grup olsun. KBS işlemi başladığında, $d \le b, a \le c$ eşitsizliklerinin her ikisi de aynı anda sağlanmadıkça r kendisi ile örtüşme oluşturmayacaktır. $a=c$ ve $b=d$ olduğunda tek bir örtüşme olacaktır. $x^a y^b x^a y^b \to 1$ bağıntısının kendisi ile örtüşmesi birleşendir. Çünkü,

$(P,Q) = (x^a y^b x^a y^b, 1)$ ve $(R,S) = (x^a y^b x^a y^b, 1)$ alınırsa,

$$x^a y^b \underline{x^a y^b x^a y^b} \to x^a y^b = V$$

$$\underline{x^a y^b x^a y^b} x^a y^b \to x^a y^b = W$$

olup $V=W$ dır. Buradan $x^a y^b x^a y^b \to 1$ rewriting bağıntısı M için bir tam RWS dir. Bu nedenden dolayı y nin sağ tersi yoktur.

$d \le b, a \le c$ ve bu eşitsizliklerden en az birinin kesin eşitsizlik olduğunu kabul edelim. KBS tamamlama işlemini $x^a y^b x^c y^d y^{b-d} x^c y^d$ nin hem $y^{b-d} x^c y^d$ hemde $x^a y^b x^{c-a}$ olduğunu bulmak için başlatılsın.

$x^a y^b x^c y^d \to 1$ ise $a \le c$ olduğundan $x^a y^b x^{c-a} x^a y^d \to 1$ (1)

$x^a y^b x^c y^d \to 1$ ise $d \le b$ olduğundan $x^a y^d y^{b-d} x^c y^d \to 1$ (2)

(1) ve (2) den elde edilen örtüşmeden,

$$x^a y^b x^{c-a} \underline{x^a y^d y^{b-d} x^c y^d} \to x^a y^b x^{c-a} = V$$

$$\underline{x^a y^b x^{c-a} x^a y^d} y^{b-d} x^c y^d \to y^{b-d} x^c y^d = W$$

olup $V \ne W$ olduğundan birleşen değildir. KBS tamamlama işleminden dolayı

$$\left(y^{b-d} x^c y^d, x^a y^b x^{c-a}\right) \tag{3}$$

gibi yeni bir bağıntı elde edilir.

(3) bağıntısının sağdan ve soldan $x^a y^d$ ile çarpımından sırasıyla $y^{b-d} x^c y^d x^a y^d = 1$ ve $x^a y^d x^a y^b x^{c-a} = 1$ bulunur. Buradan hem x hem y iki yanlı terse sahip olur ve M Teorem 2.4.5 den dolayı bir grup tanımlar.

Eğer iki kelimenin bir örtüşmesinde örtüşen kısım, her kelimenin hecelerinin bir topluluğundan meydana geliyorsa bu örtüşmeye heceli örtüşme, aksi durumda hecesiz örtüşme denir. Dikkat edilecek olunursa, teoremde sadece bağıntının kendisi ile hecesiz örtüşmesi durumunda bir grup ortaya çıkar. Bu durum $mp\langle x,y \mid x^2yxyx^2y=1\rangle$ takdiminin bir grup olmasından dolayı genellenemez. Bunu görmek için, $(x^2yxyx^2y,1)$ bağıntısının kendisi ile örtüşmesinden,

$$x^2yxy\underline{x^2yxyx^2y} \rightarrow x^2yxy \quad (4)$$

$$\underline{x^2yxyx^2y}xyx^2y \rightarrow xyx^2y \quad (5)$$

(4) ve (5) den x^2y ile xy nin değişmeli olduğu bulunur. $mp\langle x,y \mid x^2yxyx^2y=1\rangle$ monoidi $mp\langle x,y \mid xyx^2yx^2y=1\rangle$ nin bir homomorfik görüntüsü olup, Teorem 4.1.2 den dolayı bir gruptur.

Teorem 4.1.3: $M=mp\langle x,y \mid \mathrm{r}=1\rangle$ bir monoid takdimi $r=x^ay^bx^cy^dx^ey^f$ ve $a,b,c,d,e,f>0$ olsun. M nin bir grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartlardan herhangi birinin sağlanmasıdır.

i) $b=d,\ c=e,\ a\leq c,\ f\leq d$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizlik,

ii) $a\leq e,\ f\leq b$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizlik,

iii) $a=e,\ b=f,\ c\leq a,\ b\leq d$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizlik,

iv) $a=e,\ b=f,\ \mathrm{a}\leq c,\ d\leq b$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizliktir.

İspat : M bir grup olsun. Bağıntının kendisi ile oluşturduğu örtüşmenin dört heceli bir örtüşme olduğu kabul edilsin. O zaman

$$x^ay^bx^{c-a}x^ay^dx^ey^f=1 \quad (6)$$

$$x^ay^bx^cy^dy^{d-f}x^ey^f=1 \quad (7)$$

gibi bağıntıların olması için (6) dan dolayı $a\leq c$ ve (7) den dolayı $b=d,\ c=e,\ f\leq d$ olmalıdır. Bu durum i) i tarif eder. Bu örtüşme hecesiz olduğundan M bir gruptur. $a \leq c$ ve $f \leq d$ eşitsizliklerinden en az biri kesin eşitsizlik olmasaydı, örtüşme heceli olurdu ve $(x^a y^b)^3 = 1$ olacağından KBS tamamlama işleminden dolayı M bir grup değildir.

Bunun için herhangi bir örtüşmenin sadece iki hece içerdiği kabul edilebilir. Bu durumda örtüşme hecesiz ise ii) şartını tarif eder.

$$x^a y^b x^c y^d x^{e-a} x^a y^f = 1 \qquad (8)$$

$$x^a y^f y^{b-f} x^c y^d x^e y^f = 1 \qquad (9)$$

(8) ve (9) dan oluşan hecesiz örtüşmeden ve KBS tamamlama işleminden dolayı M bir gruptur.

Eğer örtüşme heceli olsaydı, bağıntı $x^a y^b x^c y^d x^a y^b = 1$ olur, $(x^a y^b x^c y^d x^a y^b, 1)$ bağıntısının kendisi ile örtüşmesi sonucu,

$$x^a y^b x^c y^d \underline{x^a y^b x^c y^d x^a y^b} \rightarrow x^a y^b x^c y^d \qquad (10)$$

$$\underline{x^a y^b x^c y^d x^a y^b} x^c y^d x^a y^b \rightarrow x^c y^d x^a y^b \qquad (11)$$

dir.

(10) ve (11) den $x^a y^b x^c y^d = x^c y^d x^a y^b$ elde edilir. Bu ise $x^a y^b$ ile $x^c y^d$ nin değişmeli olduğunu gösterir. Bağıntı,

$$x^c y^d (x^a y^b)^2 = 1 \qquad (12)$$

$$(x^a y^b)^2 x^c y^d = 1 \qquad (13)$$

durumlarından birine dönüşür. Teorem 4.1.2 den dolayı (12) ve (13) bağıntılarına sahip monoid takdiminin grup olabilmesi için (12) bağıntısının, teoremin iii) şartını ve (13) bağıntısının da, teoremin iv) şartını sağlaması gereklidir.

i) sağlansın, yani $b = d,\ c = e,\ a \leq c,\ f \leq d$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizlik olsun.

$b = d,\ c = e,$ ve $a \leq c$ olduğundan,

$$x^a y^d x^c y^d x^{c-a} x^a y^f = 1 \qquad (14)$$

$b = d,\ c = e,$ ve $f \leq d$ olduğundan,

$$x^a y^f y^{d-f} x^c y^d x^c y^f = 1 \qquad (15)$$

(14) ve (15) in örtüşmesinden,

$$x^a y^d x^c y^d x^{c-a} = y^{d-f} x^c y^d x^c y^f \quad (16)$$

elde edilir. (16) bağıntısının soldan ve sağdan $x^a y^f$ ile çarpılmasından, sırasıyla $x^a y^f x^a y^d x^c y^d x^{c-a} = 1$ ve $y^{d-f} x^c y^d x^c y^f x^a y^f = 1$ bulunur. Buradan x ve y iki yanlı terse sahip olup Teorem 2.4.5 den dolayı M bir grup olur.

ii) sağlansın, yani $a \le e,\ f \le b$ ve bu eşitsizliklerden ez az biri kesin eşitsizlik olsun. Benzer yolla, $a \le e$ olduğundan,

$$x^a y^b x^c y^d x^{e-a} x^a y^f = 1 \quad (17)$$

$f \le b$ olduğundan,

$$x^a y^f y^{b-f} x^c y^d x^e y^f = 1 \quad (18)$$

elde edilir. (17) ve (18) in örtüşmesinden,

$$x^a y^b x^c y^d x^{e-a} = y^{b-f} x^c y^d x^e y^f \quad (19)$$

bulunur. (19) bağıntısının soldan ve sağdan $x^a y^f$ ile çarpılmasından, sırasıyla $x^a y^f x^a y\ x\ y\ x^{-a} = 1$ ve $y^{-f} x\ y\ x\ y^f x^a y^f = 1$ bulunur. Buradan x ve y iki yanlı terse sahip olup Teorem 2.4.5 den dolayı M bir grup olur.

iii) ve **iv)** nin sağlandığı kabul edilsin.

$a = e,\ b = f$ olduğundan $x^a y\ x\ y\ x^a y\ = 1$ bağıntısının kendisi ile örtüşmesinden,

$$x^a y^b x^c y^d = x^c y^d x^a y^b \quad (20)$$

elde edilir. (20) bağıntısı $x^a y^b$ nin $x^c y^d$ ile değişmeli olduğunu gösterir. Buradan bağıntı, $x^c y^d (x^a y^b)^2 = 1$ olursa, $c \le a$, $b \le d$ olduğundan Teorem 4.1.2 deki hecesiz örtüşme durumundan dolayı M bir gruptur.

Eğer bağıntı, $(x^a y^b)^2 x^c y^d = 1$ olursa, $a \le c,\ d \le b$ olduğundan Teorem 4.1.2 deki hecesiz örtüşme durumundan dolayı M bir gruptur.

Tanım 4.1.1: $X \ne \phi$ bir küme, X^*, X üzerindeki serbest monoid ve $u \in X^*$ olsun. Eğer u tersinden okunduğunda yine u yu veriyorsa, u ya bir palindrom denir. Palindromun tanımı biraz daha genişletilebilir. Örneğin, *xxyx* bir palindromdur. Çünkü, x hecesiyle başlıyor, onu y hecesi takip ediyor ve yine x hecesi ile bitiyor.

Teorem 4.1.4: $n \geq 2$ bir doğal sayı olsun. n harfli palindrom olmayan bir bağıntı üzerinde bir tek bağıntılı grup olan M_n monoidi vardır.

İspat: Harfler $x, y, a_1, a_2 ....., a_n$ ve $w = a_1 a_2 ...... a_{n-3} a_{n-2} a_{n-3} ..... a_2 a_1$ palindrom kelimesi olsun. $r = xwy^2x^2wy$ bağıntısı $M_n = mp\langle x, y \mid r = 1 \rangle$ monoidini tanımlasın. Buradan,

$$xwy^2x = xwy^2x.1 = xwy^2x.xwy^2x^2wy = xwy^2x^2wy.yx^2wy = 1.yx^2wy = yx^2wy$$

Böylece $1 = r = (yx^2wy)xwy = xwy(xwy^2x)$ elde edilir ve x ile y iki yanlı terse sahiptir. Aynı yolla, x ve y nin uygun kuvvetleri ve tersleri yardımıyla w nun iki yanlı terse sahip olduğu görülür. w palindirom olduğundan w nun harfleri de iki yanlı terse sahiptir. M_n, Teorem 2.4.5 den dolayı bir gruptur.

Teorem 4.1.5: $A = \{ x, y \}$ $u, v \in A^*$ öyle ki, u x , v y ile başlayan iki kelime, m ve n de $1 \leq m \leq n$ eşitsizliğini sağlayan tamsayılar olsun. O zaman, $M = mp\langle x, y \mid u^m v u^n = 1 \rangle$ takdimi bir grup tanımlar.

İspat : $r = u^m v u^n$ ve u, x ile başladığından,

$$\begin{aligned} 1 = u^m v u^n &= u^m v u^{n-m} .u^m \\ &= u^m v u^{n-m} .(u^m v u^n)u^m \\ &= (u^m v u^{n-m} u^m) v u^{n+m} \\ &= r v u^{n+m} = v u^{n+m} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $1 = vu^{n+m} \in A^*$ ve $v = yw$ $w \in A^*$ olarak düşünüldüğünde $1 = ywu^{n+m}$ olduğundan, wu^{n+m} y nin sağ tersidir.

Benzer şekilde, $1 = u^m v u^n$ bağıntısında, $u = xs \quad s \in A^*$ olarak alındığında $1 = xsu^{m-1}vu^n$ olduğundan, $su^{m-1}vu^n$ x in sağ tersidir. Teorem 2.4.5 den dolayı, M takdimi bir grup tanımlar.

Teorem 4.1.6: k,l pozitif tamsayılar olsun. $M = mp\langle x,y \mid x^k y^l = 1\rangle$ takdimi bir grup tanımlamaz.

İspat : $Z = \{ f \mid f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ fonksiyon $\}$olsun. Z kümesi fonksiyonların bileşke işlemi ile bir monoid olur.

$\zeta,\eta \in Z$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın. $n \in Z$ için,

$$n\zeta = \begin{cases} n+l, & n \geq 0 \\ n\ , & n < 0 \end{cases}, \qquad n\eta = \begin{cases} n-k, & n \geq k \\ n\ , & n < k \end{cases}$$

$n \geq 0$ için, $n\zeta = n + l$ olduğundan $n\zeta > 0$ dır. Buradan $(n\zeta)\zeta = n + 2l$ olup böyle devam edilirse $n\zeta^k = n + kl > k$ elde edilir. $n + kl > k$ ise benzer mantıkla $(n\zeta^k)\eta^l = (n+kl)\eta^l = n + kl - kl = n = (n)1$ elde edilir.

$\Phi : M \to Z, \quad x \to \zeta, \quad y \to \eta$ olarak tanımlanırsa, Φ monoid homomorfizması olur.

Tanımlanan $\zeta \in Z$ fonksiyonu $l > 0$ olduğu için örten değildir. Bu nedenle ζ sol terse sahip değildir ve x in sol tersi yoktur. Teorem 2.4.5 den dolayı M bir grup değildir.

Teorem 4.1.7: $M = mp\langle x,y \mid x^k y^l = x^m y^n = 1\rangle$ öyle ki $k,l,m,n > 0$ olsun. M nin bir grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \neq 0$ olmasıdır.

İspat : $k.l.m.n \neq 0$ olduğu kabul edilsin. (k,l), $(m,n) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\mathbb{N}$ sıralı ikilileri aşağıdaki koşullardan birini sağlasın.

a) $k \leq m$ ve $l \leq n$,

b) $k \geq m$ ve $l \geq n$,

c) $k < m$ ve $l > n$.

(a) nın doğru olduğu kabul edilsin. $k = m$ ve $l = n$ olduğunda bağıntı $x^k y^l = 1$ olacaktır ve Teorem 4.1.6 dan dolayı M grup olamaz. Bu durum için $\det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = 0$ dır. Bu nedenden dolayı eşitsizliklerden herhangi birinin kesin eşitsizlik olduğu kabul edilsin. O zaman $\det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = kn - lm \neq 0$ olmak zorundadır. (a) nın sağlanmasından dolayı M takdimi, $M' = mp\langle x, y \mid x^k y^l = x^{m-k} y^{n-l} = 1 \rangle$ ile aynıdır. Buradan benzer şekilde (b) de sağlanır.

(c) durumunun sağlandığı kabul edilsin.

$$\det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = kn - lm < 0$$

dır.

$$\det\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ olsun.}$$

$x^k y^l = 1$ ise $y^l = x^{-k}$ ve $x^m y^n = 1$ ise $x^m = y^{-n}$ dir. O zaman,

$$x^{m-k} = x^m . x^{-k} = x^m y^l = y^{-n} y^l = y^{l-n}$$

elde edilir.Buradan

$$1 = x^m y^n = x^{m-k} x^k y^n = y^{l-n} x^k y^n$$

dır.

Teorem 2.4.5 den dolayı M bir gruptur.

Teorem 4.1.8: $(k_i, l_i) \in \mathbb{N}\text{x}\mathbb{N}$, $i = 1,2,.....m$ ve $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$, $\sum_{i=1}^{m} l_i = l$ olsun. $(k_1 + k_2 + ... + k_i)l \geq (l_1 + l_2 + ... + l_i)k$, $i = 1,2,.....m$ olduğu kabul edilsin. $M = mp\langle x, y \mid x^{k_1} y^{l_1} .....x^{k_m} y^{l_m} = 1 \rangle$ monoidi bir grup değildir.

İspat : ζ ve η dönüşümleri Teorem 4.1.6 daki gibi tanımlansın.

$n \geq 0$ olmak üzere $(n\zeta) > 0$ dır. Çünkü $n\zeta = n + l$ dir. Buradan $n\zeta^{k_1} = n + k_1 l > 0$ dır.

$(n\zeta^{k_1})\eta^{l_1} = (n + k_1 l)\eta^{l_1} = n + k_1 l - l_1 k > 0$ dır.

Çünkü $(k_1 + k_2 + ... + k_i)l \geq (l_1 + l_2 + ... + l_i)k$ dır.

Böyle devam edilirse en son;

$$\begin{aligned}(n)(\zeta^{k_1}\eta^{l_1}\zeta^{k_2}\mu^{l_2}.....\zeta^{k_m}\eta^{l_m}) &= n + (k_1 + k_2 + ... + k_m)l - (l_1 + l_2 + ... + l_m)k \\ &= n + kl - lk = n.1\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.1.6 dan dolayı M bir grup değildir.

4.2 İki Doğuraylı ve İki Bağıntılı Bazı Yarıgrup Takdimleri

Bu bölümün amacı, iki doğuraylı ve iki bağıntılı bir yarıgrup takdimindeki bağıntıların hangi formlarının grup tanımlayıp tanımlamayacağını belirlemek olacaktır. Teorem 2.5.2 den dolayı iki doğuraylı ve iki bağıntılı bir grubun yarıgrup takdiminin,

$$\langle a, b \mid u = a,\ v = b \rangle \qquad (u, v \in \{a, b\}^*)$$

şeklinde olabileceğini biliyoruz. Bu yüzden u ve v nin nasıl bir forma sahip olduğunu belirlemeye çalışacağız.

Teorem 4.2.1: $P = \langle A | R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve S de P tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. $a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$ ve $u, v \in A^*$ olduğunu kabul edelim.

i) Eğer $ua_1 = va_2$ bağıntısı S de sağlanır ise, o zaman $a_3 \in A,\ a_3 \neq a_1$ ve $r, s \in A^*$ olmak üzere, R de ya $(ra_1 = sa_3)$ yada $(sa_3 = ra_1)$ formunda bir bağıntı vardır.

ii) Eğer $a_1u = a_2v$ bağıntısı S de sağlanır ise, o zaman $a_3 \in A,\ a_3 \neq a_1$ ve $r,s \in A^*$ olmak üzere, R de ya $(a_1r = a_3s)$ yada $(a_3s = a_1r)$ formunda bir bağıntı vardır.

İspat : (i) nolu durum ispat edilecek, (ii) nolu durum (i) in dualidir.
$ua_1 = va_2$ bağıntısı S de sağlandığından,

$$ua_1 \equiv z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow ..... \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n \equiv va_2$$

gibi kelimelerin bir dizisi vardır öyle ki $(i = 1,2,.....n-1)$ olmak üzere z_{i+1} , z_i den R nin bir bağıntısı kullanılarak elde edilmiştir. ua_1 , a_1 ile va_2 , a_2 ile bittiğinden ve $a_1 \neq a_2$ olduğundan en azından bir $k \in \{1,2,.....n-1\}$ $a_3 \in A,\ a_3 \neq a_1$ ve $r,s \in A^*$ olmak üzere z_{k+1} , z_k dan R deki $(ra_1 = sa_3)$ yada $(sa_3 = ra_1)$ bağıntılarından biri kullanılarak elde edilmiştir (a_3 , a_2 ye eşit veya eşit olmayabilir).

Şimdi ise iki doğuraylı ve iki bağıntılı grup tanımlamayan yarıgrup takdimlerine göz atalım.

Teorem 4.2.2: $r,s \in \{a,b\}^*$ olmak üzere, eğer $u \equiv ara$ ve $v \neq asa$ yada eğer $u \neq brb$ ve $v \equiv bsb$ ise, o zaman $P = \langle a,b \mid u = a,\ v = b \rangle$ yarıgrup takdimi bir grup tanımlamaz.

İspat : $u \equiv ara$ ve $v \equiv asb$ olsun. P nin bir G grubunu tanımladığını kabul edelim. O zaman ra G nin birimini gösterir ve böylece $bra = b$ bağıntısı G de sağlanır. Teorem 4.2.1 in (i) den dolayı P de $u,v \in \{a,b\}^*$ olmak üzere $ua = vb$ yada $ub = va$ formunda bir bağıntı olmalıdır, ama böyle bağıntılara sahip değiliz. Bu yüzden P bir grup tanımlamaz.

u ve v nin diğer formları için benzer şekilde P nin grup tanımlamadığı gösterilir.

Şimdi ise iki doğuraylı ve iki bağıntılı grup tanımlayan bazı yarıgrup takdimlerini vereceğiz.

Teorem 4.2.3: $r,s \in \{a,b\}^*$ olmak üzere,

$P_1 = \langle a,b \mid arb = a,\ asa = b \rangle$, $P_2 = \langle a,b \mid bra = a,\ asa = b \rangle$

$P_3 = \langle a,b \mid brb = a,\ asa = b \rangle$, $P_4 = \langle a,b \mid brb = a,\ asb = b \rangle$

$P_5 = \langle a,b \mid brb = a,\ bsa = b \rangle$,

yarıgrup takdimleri grup tanımlarlar.

İspat : P_1 takdimini ele alalım. Eğer s boş kelime ise P_1 bir devirli grup tanımlar. Bu yüzden s boş kelimeden farklı olsun ve $e = aras$ olarak alalım. P_1 in birinci bağıntısından

$$ea = a$$

dır. P_1 in ikinci ve birinci bağıntıları kullanılarak,

$$eb = (aras)(asa) \equiv ar(asa)sa = (arb)sa = asa = b$$

elde edilir. Buradan e bir sol birimdir. Eğer $s \equiv wa$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ ise, o zaman $araw$ ve $arawar$ sırasıyla a ve b nin sol tersleridir.

$$(araw)a \equiv ara(wa) \equiv aras \equiv e$$

$$(arawar)b \equiv araw(arb) = arawa \equiv e$$

dır.

Eğer $s \equiv wb$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ ise, o zaman benzer şekilde $arawas$ ve $araw$ sırasıyla a ve b nin sol tersleridir. Teorem 2.4.5 den dolayı P_1 bir grup tanımlar.

Benzer şekilde,

P_2 için sağ birim $e \equiv sara$, a ve b nin sağ tersleri sırasıyla, $s \equiv aw$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $wara$ ve $rawara$, $s \equiv wb$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $bwawara$ ve $wara$ dır.

P_3 için sol birim $e \equiv bras$, a ve b nin sol tersleri sırasıyla, $s \equiv wa$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $braw$ ve $brawbr$, $s \equiv wb$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $brawawb$ ve $braw$ dır.

P_4 için sağ birim $e \equiv rbsb$, a ve b nin sağ tersleri sırasıyla, $r \equiv aw$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $wbsb$ ve $awbwbsb$, $r \equiv bw$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $sbwbsb$ ve $wbsb$ dır.

P_5 için sol birim $e \equiv bsbr$, a ve b nin sol tersleri sırasıyla, $r \equiv wa$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $bsbw$ ve $bswbwa$, $r \equiv wb$ $\left(w \in \{a,b\}^*\right)$ alındığında $bsbwbs$ ve $bsbw$ dır.

$P_i, (i = 2,...5)$ takdimleri Teorem 2.4.5 den dolayı grup tanımlarlar.

Teorem 4.2.4: $u,v,r,s \in \{\,a,b\,\}^*$ olmak üzere,

$Q_1 = \langle a,b \mid auba = a,\ asa = b \rangle$ $\quad Q_2 = \langle a,b \mid abua = a,\ asa = b \rangle$

$Q_3 = \langle a,b \mid brb = a,\ bavb = b \rangle$ $\quad Q_4 = \langle a,b \mid brb = a,\ bvab = b \rangle$

yarıgrup takdimleri grup tanımlarlar.

İspat: Q_1 i ele alalım. S, Q_1 yarıgrup takdimi tarafından tanımlanan yarıgrup olsun.

$e \equiv aub$ olarak alınırsa e S için bir sol birimdir.

$$(auas)a \equiv au(asa) = aub \equiv e$$

ve

$$(au)b \equiv e$$

olduğundan $auas$ ve au sırasıyla a ve b nin sol tersleridir. Bu yüzden Teorem 2.4.5 den dolayı S bir gruptur.

Benzer şekilde Q_2 için sağ birim $e \equiv bua$, a ve b nin sağ tersleri sırasıyla $saua$ ve ua, Q_3 için sağ birim $e \equiv avb$, a ve b nin sağ tersleri sırasıyla vb ve

$rbvb$, Q_4 için sol birim $e \equiv bva$, a ve b nin sol tersleri sırasıyla bv ve $bvbr$, alınırsa Q_2, Q_3 ve Q de Teorem 2.4.5 den dolayı grup tanımlarlar.

4.3 Bazı İyi Bilinen Grupların Yarıgrup Takdimleri

Bu kısımda literatürde iyi bilinen bazı gruplardan Dihedral, Quaternion ve Projektif Special Linear gruplarının tanımlarını ve yarıgrup takdimlerini vereceğiz.

Tanım 4.3.1: $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonları tarafından doğurulan gruba dihedral grup yada düzgün n-genin simetrileri grubu denir ve D_n ile gösterilir. $|D_n| = 2n$ dir. D_n dihedral grubunun bir grup takdimi,

$$gp\langle a,b \mid a^n = 1,\ b^2 = 1,\ a^{-1}ba = b^{n-1} \rangle$$

dir.

Teorem 4.3.1: D_n dihedral grubu,

$P = sp\langle a,b \mid a^3 = a,\ \ a^2 = b^n,\ \ ab^{n-1}a = b \rangle$ takdimi tarafından tanımlanır.

İspat : Birinci bağıntı $a^3 = a$ dan $a^2a = a = aa^2$ ve ikinci ve üçüncü bağıntıdan,

$$a^2b = a^2(ab^{n-1}a) \equiv a^3b^{n-1}a = ab^{n-1}a = b = ab^{n-1}a = ab^{n-1}a^3 = ba^2$$

elde edilir. Bundan dolayı a^2 elemanı P takdimi tarafından tanımlanan yarıgrubun birim elemanı olur.

Birinci bağıntı $aa = a^2$ olduğundan a nın tersi a dır. İkinci bağıntıdan $b^n = b^{n-1}b = a^2 = b^n = bb^{n-1}$ olduğundan b^{n-1}, b nin tersidir. Böylece Teorem 2.4.5

den dolayı P takdimi bir grup tanımlar. Ayıca Teorem 2.4.8 den P bir grup takdimidir. Şimdi ise P nin, D_n dihedral grubunu tanımladığını gösterelim.

$b^n = 1$ ve $a^2 = 1$ ise, $a^2 = b^n$ dir. $a^{-1}ba = b^{n-1}$ ise $b = ab^{n-1}a^{-1}$ dir. $a = a^{-1}$ olduğundan, $ab^{n-1}a = b$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.5.1, Tietze Dönüşümlerinden dolayı P, D_n i tanımlar.

Teorem 4.3.2: $P = \langle a,b \mid ababa = a,\ ab^{n-1}a^{n-2} = b \rangle$ yarıgrup takdimi G_n gibi bir grup tanımlar ve n nin tek olması durumunda D_n dihedral grubu G_n nin homomorfik görüntüsüdür. Ayrıca $n = 3,5,7,9$ için $G_n \cong D_n$ dir.

İspat : Birinci bağıntı $ababa = a$ dan $(ab)^2 a = a$ ve $(ab)^2 b = (ab)^2 (ab^{n-1}a^{n-2}) \equiv (ababa)b^{n-1}a^{n-2} = ab^{n-1}a^{n-2} = b$ dan $(ab)^2$ sol birim olur. $(aba^2b^{n-1}a^{n-3})a \equiv aba(ab^{n-1}a^{n-2}) = (ab)^2$ olduğundan $aba^2b^{n-1}a^{n-3}$, a nın sol tersidir. $abab = (aba)b = (ab)^2$ olduğundan aba, b nin sol tersidir. Teorem 2.4.5 den dolayı P takdimi G_n gibi bir grup tanımlar.

Şimdi ise P takdiminde bulunan $ab^{n-1}a^{n-2} = b$ ve $ababa = a$ bağıntılarının D_n de sağlandığının gösterilmesi gereklidir. Bunun için bu iki bağıntının Teorem 4.3.1 deki bağıntıların bir sonucu olduğunu göstermek yeterlidir.

n tek sayı ve $a^3 = a$ olduğundan, $ab^{n-1}a^{n-2} = ab^{n-1}a = b$ olduğu, $ababa = aba(ab^{n-1}a)a = aba^2b^{n-1}a^2 = abb^nb^{n-1}b^n \equiv ab^{3n} = a^7 = a$ ile de istenenler elde edilir. Bu da D_n dihedral grubunun G_n nin homomorfik görüntüsü olduğunu gösterir.

Koset sayma programı $n = 3,5,7,9$ için $|G_n| = |D_n|$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $n = 3,5,7,9$ için $G_n \cong D_n$ dir.

Tanım 4.3.2: $a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $i^2 = -1$ olmak üzere, 2x2 tipinde determinantı sıfırdan farklı kompleks matrisler olsun. O zaman a nın derecesi 4 ve $b \notin \langle a \rangle$ dir. $\{ a,b \}$ tarafından doğurulan gruba quaternion grubu denir ve Q ile gösterilir. $|Q| = 8$ dir. Q nun en önemli özelliği, tüm alt grupları normal alt grup olup, kendisi değişmeli değildir. Q nun bir grup takdimi,

$$gp\left\langle a,b \;\middle|\; a^4 = 1,\; a^n = b^2,\; b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

dir.

$n \geq 2$ tamsayı, w bir kompleks sayı, $\overline{w}$ de w nun eşleniği olmak üzere, $a = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $\{a,b\}$ tarafından doğurulan gruba genelleştirilmiş quaternion grubu denir ve Q_{2n} ile gösterilir. $|Q_{2n}| = 4n$ dir. Q_{2n} nin bir grup takdimi,

$$gp\left\langle a,b \;\middle|\; a^{2n} = 1,\; a^n = b^2,\; b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

dir.

Teorem 4.3.3: $P = sp\left\langle a,b \middle| aba = b,\; ba^{n-1}b = a \right\rangle$ takdimi genelleştirilmiş Q_{2n} quaternion grubunu tanımlar.

İspat Birinci bağıntıdan,

$$a^{n-1}ba^{n-1} \equiv a^{n-2}(aba)a^{n-2} = a^{n-2}ba^{n-2} = ... = aba = b \tag{21}$$

İkinci bağıntı ve (21) den,

$$a^n = (ba^{n-1}b)a^{n-1} \equiv b(a^{n-1}ba^{n-1}) = b^2 \tag{22}$$

elde edilir.

(22), ikinci bağıntı ve birinci bağıntıdan,

$$a^{2n}b \equiv aa^n a^{n-1}b = ab^2 a^{n-1}b \equiv ab(ba^{n-1}b) = aba = b$$

ve ayrıca, $a^{2n}b \equiv b^4 a \equiv b(b^2)ba = ba^n ba \equiv ba^{n-1}(aba) = ba^{n-1}b = a$ elde edilir. Buradan a^{2n} nin sol birim olduğu bulunur.

(22) den dolayı, yani $a^n = b^2$ den $a^{2n} = b^4$ ise b^3, b nin sol tersidir. $a^{2n}a = a$ olduğu biliniyor, buradan, $a^{2n-1}a^{2n}a = a^{2n}$ ise $a^{2n-1}a = a^{2n}$ elde edilir ki buradan da a^{2n-1} in a nın sol tersi olduğu bulunur. Teorem 2.4.5 den dolayı P takdimi birim elemanı a^{2n} olan bir grup tanımlar. a^{2n} bu grup için birim eleman ve $a^n = b^2$ bağıntısı bu grupta sağlandığından bu grup,

$$\langle a,b \mid aba = b, ba^{n-1}b = a, a^n = b^2, a^{2n} = 1\rangle \cong \langle a,b \mid b^{-1}ab = a^{-1}, ba^{n-1}b = a, a^n = b^2, a^{2n} = 1\rangle$$

grup takdimi tarafından tanımlanır.

$ba^{n-1}b = ba^n(b^{-1}ab)b = bb^2b^{-1}ab^2 = b^2ab^2 = a^{2n+1} = a$ bağıntısı Q_{2n} de sağlandığından, bu grup gerçekte Q_{2n} genelleştirilmiş quaternion grubudur.

Tanım 4.3.3: R bir halka olmak üzere, $GL(n,R)$ R halkası üzerindeki determinantı sıfırdan faklı $n \times n$ tipindeki matrisleri göstersin.

$$SL(n,R) = \{ A \in GL(n,R) \mid \det A = 1\}$$

ile verilen gruba Special Linear Grup denir. Özel olarak $n = 2$ alınırsa ve $GF(p)$ p elemanlı bir cisim olmak üzere,

$$SL(2,p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1,\ a,b,c,d \in GF(p) \right\}$$

ile tanımlanır. Buradan, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $PSL(2,p) = SL(2,p) / \langle \mp I \rangle$ olan gruba Projektif Special Linear Grup denir. $PSL(2,p)$ nin bir grup takdimi,

$$gp\left\langle x,y \,\middle|\, x^2 = 1,\ (xy)^3 = 1,\ \left(xy^4xy^{(p+1)/2}\right)^2 = 1,\ x^p = 1 \right\rangle$$

dir.

Teorem 4.3.4: p bir tek asal sayı olsun. O zaman,

$$G_p = \left\langle x,y \,\middle|\, x^3 = x, y^p = x^2, (xy)^3 = x^2, xy^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} = y \right\rangle$$ takdimi

$PSL(2,p)$ için bir yarıgrup takdimidir.

İspat : Birinci ve son bağıntılardan,

$$x^2y = x^3y^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} = xy^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} = y$$

ve $x^3 = x$ ise $x^2x = x$ olduğundan x^2, G_p tarafından tanımlanan yarıgrup S_p için sol birim elemandır. Ayrıca $xx = x$ olduğundan x in sol tersi x dir ve $y^p = x^2$ ise $y^{p-1}y = x^2$ olup y nin sol tersi y^{p-1} dir. Teorem 2.4.5 den dolayı S_p bir gruptur.

$G'_p = \left\langle x, y \,\middle|\, x^2 = 1, y^p = 1, (xy)^3 = 1, y^{-1}xy^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} = 1 \right\rangle$ takdimi S_p için bir grup takdimidir. G'_p nün ilk üç bağıntısından dolayı,

$y^{-1}xy^{p-1}xy^{-1} = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1} = x$ ve bunu G'_p nün son bağıntısının takip etmesi ile

$$\begin{aligned} 1 &= y^{-1}xy^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} \\ &= (y^{-1}xy^{p-1}xy^{-1})y^4xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} \\ &= (xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da G'_p nün tanımladığı $P(G,p)$ grubunun son bağıntıdır.

G'_p nün son bağıntısının $P(G,p)$ nin bağıntılarının bir sonucu olduğunu göstermek için $y^{p-1}x^2y = y^{p-1}y = 1$, $(xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 = 1$ ve $(xy)^3 = y^p = x^2 = 1$ olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} xy^{p-1}xy^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} &= xy^{p-1}x(y^{p-1}x^2y)y^3xy^{\frac{p+1}{2}}xy^4xy^{\frac{p+1}{2}} \\ &\equiv xy^{p-1}xy^{p-1}x(xy^4xy^{\frac{p+1}{2}})^2 = xy^{p-1}xy^{p-1}x \\ &= xy^{p-1}x(xyxyx)x \equiv xy^{p-1}x^2yxyx^2 = y \end{aligned}$$

Bunun için G_p ve $P(G,p)$ izomorfik grupları tanımlar ve böylece $S_p \cong PSL(2,p)$ elde edilir.

Teorem.4.3.5: $P = \langle a,b \mid a^7 = a, (a^3b)^2 = a^6, (a^2b)^2b^5 = b \rangle$ yarıgrup takdimi $PSL(2,2)\mathrm{x}PSL(2,2)$ yi tanımlar.

İspat : Birinci bağıntı $a^7 = a$ olduğundan $a^6a = a$ dır. Son bağıntı ve birinci bağıntıdan, $a^6b = a^6(a^2b)^2b^5 \equiv a^7(aba^2b)b^5 = (a^2b)^2b^5 = b$ elde edilir. Bu da a^6 nın sol birim eleman olduğunu gösterir.

$a^5a = a^6$ olduğundan a^5, a nın sol tersidir ve $a^3ba^3b = a^6$ olduğundan a^3ba^3, b nin sol tersi olup Teorem 2.4.5 den dolayı, P takdimi a birime sahip bir grup tanımlar. Böylece bu grup, $\langle a,b \mid a^6 = 1, (a^3b)^2 =, (a^2b)^2b^4 = 1 \rangle$ grup takdimi tarafından tanımlanabilir. Bu ise (Campbell, Robertson, Williams, 1990) dan dolayı P, $PSL(2,2)\mathrm{x}\,PSL(2,2)$ yi tanımlar.

Teorem 4.3.6: $P = \langle a,b \mid a^4 = a, b^3 = a^3, (ab)^6b = b, bab^2a^2ba = ab \rangle$ yarıgrup takdimi $PSL(2,3)\mathrm{x}\,PSL(2,3)$ yi tanımlar.

İspat : Birinci bağıntı $a^4 = a$ dan $a^3a = a$ dır. Birinci ve üçüncü bağıntıdan, $a^3b = a^3(ab)^6b \equiv a^4b(ab)^5b = ab(ab)^5b = b$ elde edilir. Buradan a^3 sol birim elemandır.

$a^2a = a^3$ olduğundan a^2, a nın sol tersi ve $b^3 = a^3$ ise $b^2b = a^3$ olduğundan da b^2, b nin sol tersidir. Teorem 2.4.5 den dolayı P takdimi birim elemanı a olan bir grup tanımlar. Böylece bu grup,

$P = gp\langle a,b \mid a^3 = 1, b^3 = 1,\ (ab)^6 = 1, bab^2a^2ba = ab \rangle$ grup takdimi tarafından tanımlanır. (Campbell, Robertson, Williams, 1990) dan dolayı P, $PSL(2,3)\mathrm{x}\,PSL(2,3)$ yi tanımlar.

KAYNAKLAR

AYIK, H., (1998). "*Presetations and Eficiency of Semigroups*", Ph. D Thesis, University of St. Andrews, 189s.

AYIK, H., CAMPBELL, C.M., O'CONNOR, J.J., RUSKUC, N., (1998) *"Minimal Presentations and Eficiency of Semigroups"* Semigroup Forum Vol 60 (2000) 231-242.

AYIK, H., KUYUCU, F., VATANSEVER, B., "*On Semigroup Presentations and Efficiency*" Semigroup Forum, basılacak.

BAUMSLAG, B., CHANDLER, B., (1968). "*Theory and Problems of Group Theory*", McGraw-Hıll Book Company, New-York. 279s.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F, RUSKUC, N., THOMAS, R.M., (1996). "*Groups, Semigroups and Finite Presentations*", Proc. Of The Conference on Geometric Group Theory

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F, RUSKUC, N., THOMAS, R.M., ÜNLÜ, Y., (1995). "*Certain One-Relator Products of Semigoups*", Communications in Algebra 23(14), 5207-5219.

CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., WILLIAMS, P.D., (1990). "*Efficient Presentations of The Groups PSL(2,p)*x*PSL(2,p), p prime*", J. London Math. Soc. (2) 41, 69-77.

GÜNGÖR, G., (1997). "*Yarı Grup Takdimleri*", Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Balcalı, Adana.

HOWIE, J.M., (1995). "*Fundamentals of Semigroup Theory*", Oxford University Press, Oxford.

JOHNSON, D.L., (1980). "*Topics in The Theory of Group Presentations*" Cambridge University Press,, Cambridge, 311s.

JOHNSON, D.L., (1990). "*Presentations of Groups*", " London Math. Soc. Student Texts 15 Cambridge University Press, Cambridge, 204s.

JOHNSON, D.L., (1997). "*Monoid Presentations Of Groups*" , Proc. Of The Royal Irish Academy,Vol. 97A, No.1,1-4.

JURA, A., (1978). "*Coset Enumaration in A Finitely Presented Semigroup*", Canad. Math. Bul. 21, 37-46.

KNUTH, D.E., BENDİX, P.B., (1970). "*Simple Word Problems*" in Universal Algebras In J. Leech ed., Computational Problems in Abstract Algebra, 263-97, Oxford/ New York.Pergoman.

LALLEMENT, G., (1979). "*Semigroups and Combinatorial Applications*" Jhon Wiley and Sons, New York.

NEUMANN, B.H., (1967). "*Some Remarks On Semigroup Presentations*",Canad. J. Math. 19, 1018-1026.

ROBERTSON, E.F., ÜNLÜ, Y., (1992) "*On Semigroup Presentations*", Proc. Of Edinburgh Soc. 36, 55-68

RUSKUC, N., (1995). "*Semigroup Presentations*" Ph. D Thesis, University of St. Andrews.

SIMS, C.C., (1994)."*Computation With Finitely Presentations Groups*", Cambridge University Press. Great Britain.

SMITH, G.C., (1998) "*On Monoids With A Single Defining Relator*", Proc. Of The Royal Irish Academy,Vol. 97A, No.2, 209-213.

TODD, J.A., COXETER, H.S.M., (1936). "A Practical Method For Enumarating Cosets in An Abstract Finete Group", Proceedings of The Edinbugh Math. Soc. 5, 25-36.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Adana'nın Gökçeler Köyü'nde doğdum. İlk öğrenimimi Malazgirt İlkokulunda, orta öğrenimimi 19 Mayıs Lisesi'nde tamamladım. 1994 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 1999 yılında bu bölümden mezun oldum. Aynı yıl içerisinde Çukurova Üniversitesi Karaisalı M.Y.O. da öğretim görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı görevde bulunmaktayım.