

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL
SINIRLILIK

Mithat KASAP

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

ŞUBAT 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ LACUNARY İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK VE LACUNARY İSTATİSTİKSEL
SINIRLILIK

Tez Yazarı

Mithat KASAP

Danışman

Prof. Dr. Hıfı ALTINOK

ŞUBAT 2022

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Başlığı: Genelleştirilmiş Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary İstatistiksel Sınırlılık
Yazarı: Mithat KASAP
İlk Teslim Tarihi: 04/01/2022
Savunma Tarihi: 02/02/2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

	<i>İmza</i>	
Danışman: Prof.Dr. Hıfı ALTINOK Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi		Onayladım
Başkan: Prof.Dr. Mehmet GÜNGÖR İnönü Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi		Onayladım
Üye: Prof.Dr. Mikail ET Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi		Onayladım
Üye: Prof.Dr. Yavuz ALTIN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi		Onayladım
Üye: Prof.Dr. Mahmut IŞIK Harran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi		Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20.... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Genelleştirilmiş Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary İstatistiksel Sınırlılık” Başlıklı Doktora tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

02/02/2022

Mithat KASAP

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof.Dr. Hıfı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Mithat KASAP

ELAZIĞ, 2022



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. β-DERECEDEN Δ^f-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	13
4. β-DERECEDEN Δ^f-LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK	22
5. SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Genelleştirilmiş Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary İstatistiksel Sınırlılık

Mithat KASAP

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Şubat 2022, Sayfa: ix + 39

Beş esas bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde tez konusuyla ilgili yapılan çalışmaların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiş olup ikinci bölümde, çalışmamızın içerisinde geçen bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Çalışmamızın üçüncü bölümünde, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı, bir (X_k) fuzzy sayı dizisi ve Δ fark operatörü verilmek üzere f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiş ve bu özelliğe sahip olan fuzzy sayı dizilerinden oluşan $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F)$ dizi sınıfı tanımlanmıştır. Ayrıca $W_{\theta}^{f,\beta}[\Delta_F, p]$, $W_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ ve $W_{\theta,f}^{\beta}(\Delta_F, p)$ dizi sınıfları tanımlanarak bunların bazı özellikleri incelenmiş ve aralarındaki kapsama bağıntıları verilmiştir. Dördüncü bölümde f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlılık tanımı verilmiş ve bu özelliğe sahip olan fuzzy sayı dizilerinden oluşan $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dizi sınıfı tanımlanmıştır. Bu kümenin literatürde daha önceden tanımlanmış kümelerle aralarında bazı kapsama bağıntıları verilmiş, ayrıca simetriklik, monotonluk gibi bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel sınırlılık, Modülüs fonksiyonu, Lacunary dizisi, Fark dizisi.

ABSTRACT

Generalized Lacunary Statistical Convergence and Lacunary Statistical Boundedness

Mithat KASAP

Ph.D Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

February 2022, Page: ix + 39

This study consists of the five main chapters. In the chapter 1 and 2, we give some informations about the historical development of studies which are related to thesis topic, and some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study. In the third chapter, we define the concept of Δ^f -lacunary statistical convergence of order β with respect to modulus f and sequence classes $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F)$, $W_{\theta}^{f,\beta}[\Delta_F, p]$, $W_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ and $W_{\theta,f}^{\beta}(\Delta_F, p)$ and examine some properties of them, where f is unbounded modulus, θ is a lacunary sequence, (X_k) is a sequence of fuzzy number, Δ is difference operator and $\beta \in (0, 1]$. In the fourth chapter, we define the concept of Δ^f -lacunary statistical boundedness of order β with respect to modulus f and sequence class $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ and give some inclusion relations between the other sequence classes existing in the literature. Also, we examine the topological properties like symmetricity, monotony, etc. In the fifth and last chapter, we give the results obtained from the thesis.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Statistical boundedness, Modulus function, Lacunary sequence, Difference sequence.

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4.1. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri	24
Şekil 4.2. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri	27
Şekil 4.3. (X_k) ve (ΔX_k) fuzzy dizilerinin terimleri	28
Şekil 4.4. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri	30
Şekil 4.5. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri	34



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
BK	: Banach Koordinatsal
$L(\mathbb{R})$: Reel fuzzy sayılar kümesi
A^α	: A fuzzy kümesinin α kesimi
$cl(A)$: A fuzzy kümesinin kapanışı
$\text{supp } A$: A fuzzy kümesinin desteği (support)
$h.h.k$: hemen hemen her k
$S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$: f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı fuzzy dizilerinin sınıfı
$S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F)$: f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy dizilerinin sınıfı
$W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$: f modülüsüne göre β -dereceden kuvvetli $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$ -toplanabilir fuzzy dizilerinin sınıfı
$W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$: f modülüsüne göre β -dereceden kuvvetli $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ -toplanabilir fuzzy dizilerinin sınıfı
$W_{\theta,f}^\beta(\Delta_F, p)$: f modülüsüne göre β -dereceden kuvvetli $W_{\theta,f}^\beta(\Delta_F, p)$ -toplanabilir fuzzy dizilerinin sınıfı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı esasen klasik yakınsaklığın bir genelleştirilmesi şeklinde olup bu kavrama ilk defa 1951 yılında Fast [1] ve 1959 yılında Schoenberg [2] 'in çalışmasında rastlanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık teorisi ve uygulamaları matematiğin farklı alanlarında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve günümüzde hala yoğun olarak çalışılmaktadır. Teori 1988 yılında Connor [3] tarafından toplanabilme teorisiyle de ilişkilendirilmiş ve bu iki kavram arasında bazı önemli bağlantılar verilmiştir. Daha sonraları Çakalılı [4] tarafından topolojik gruplara ve Caserta [5] tarafından fonksiyon uzaylarına uygulanmıştır.

Fuzzy küme kavramının temeli Zadeh [6] 'in 1960 'larda yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Klasik kümelerin gerçek dünyadaki matematiksel metotlara tam olarak yetmemesi bu kavramın ortaya çıkmasında etkili olmuştur. Klasik kümelerde bir elemanın kümeyle ait olup olmaması gibi sadece iki seçenek varken fuzzy kümelerde bu durum $[0,1]$ aralığına genişletilerek sadece iki değerden oluşan sistem sonsuz değerli bir sisteme dönüşmüş ve klasik kümelerde bazı durumlarda oluşabilecek belirsizlik yeni sistemle formüle edilmiştir. Klasik kümelerde herhangi bir eleman kümeyle ya üyedir ya da değildir, fakat fuzzy kümelerde hassasiyet artırıldığından dolayı elemanın kümeyle üyeliğinin derecesinden bahsedilmekte olup klasik kümelere nazaran daha uygun ve gerçekçi bir yaklaşım metodudur. Bu sebeple Zadeh [6] 'in 1965 'de yaptığı çalışmadan itibaren gerek mühendislik alanlarında gerekse matematiğin tüm dallarında en çok çalışılan konulardan biri olmuştur. 1986 yılında Matloka [7] fuzzy sayı dizilerini ve bu dizilerin yakınsaklığını tanımlarken 1989 'de Nanda [8] bu dizilerin sınırlılığında da bahsetmiş ve yakınsaklıkla aralarında bazı bağlantılar vermiştir. Nuray ve Savaş [9] istatistiksel yakınsaklık tanımını fuzzy sayı dizilerine uygulayarak bu alanda çalışan matematikçiler için çok önemli bir adım atmıştır. Daha sonra fuzzy sayı dizilerinin toplanabilme ile ilişkisi Kwon [10] tarafından çalışıldı. Fuzzy sayı dizilerine Çolak vd. [11], Altınok vd. [12], Altınok [13], Aytar [14] ve Et vd. [15] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

1981 yılında Kızmaz [16] reel sayı dizileri için fark dizisini tanımlamış ve bazı fark dizi uzaylarını tanımlayarak bu uzayların BK uzayı olduklarını göstermiştir. Daha sonra Kızmaz [16] 'ın tanımladığı fark dizi uzayları Et ve Çolak [17] tarafından m -yinci dereceden genelleştirilerek yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları elde edilmiş ve bunlar için de benzer özellikler verilmiştir.

Reel dizilerde tanımlanmış olan istatistiksel yakınsaklık kavramını daha hassas bir yakınsaklık türüne dönüştürmek amacıyla derecelendirme fikri ilk olarak Gadjiev ve Orhan [18] tarafından ortaya atılmış, zamanla bu fikir $\alpha \in (0,1]$ için Çolak [19] tarafından α -dereceden istatistiksel yakınsaklık ve bir pozitif p sayısı için α -dereceden kuvvetli p -Cesàro yakınsaklık kavramlarının verilmesiyle daha kullanışlı ve somut bir şekil almış olup toplanabilme alanında çalışan matematikçiler tarafından oldukça fazla çalışılan bir

konu haline gelmiştir. Aynı kavram Altınok vd. [20] tarafından fuzzy dizilerine de uygulanmış üçgenel fuzzy sayı örnekleri ve grafikleriyle daha açıklayıcı ve görsel bir çalışma elde edilmiştir.

Lacunary dizilerinin toplanabilme teorisine uygulamaları Freedman vd. [21] 'nin çalışması ile anlam kazanmış ve Fridy ve Orhan [22] tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramının tanımlanmasında yeni boyut getirmiştir. Bu konu o zamandan beri pek çok konuyla ilişkilendirilmiştir. 2009 yılına gelindiğinde Altınok ve Çolak [23] tarafından aynı kavramlar genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak daha genel sonuçlar ve farklı bağıntılar elde edilmiştir. Şengül ve Et [24], reel sayı dizileri için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını derecelendirerek bu yakınsaklık türünde $\alpha \in (0, 1]$ sayısını kullanarak güzel sonuçlara ulaşmıştır. Diğer yandan Altınok vd. [25] α -dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına Δ fark operatörünü uygulayarak elde ettiği dizi kümesinin solidlik ve simetriklik gibi farklı özelliklerini incelemiştir.

Fuzzy sayı dizilerinde istatistiksel sınırlılık kavramı ilk defa Aytar ve Pehlivan [26] tarafından verilmiştir. Daha sonra Altınok ve Mursaleen [27], bu tanımları farklı dizileri için vermiştir. Son zamanlarda Altınok ve Yağdıran [28] tarafından fuzzy sayı dizileri için istatistiksel sınırlılık kavramı genelleştirilerek Δ^m -istatistiksel sınırlılık tanımlanmıştır.

Modülüs fonksiyonuyla ilgili çalışmaların temeli Nakano'nun 1953 yılında yapmış olduğu "Concave modularity" isimli makalesine dayanmaktadır [29]. O zamandan itibaren gerek istatistiksel yakınsaklıkla gerekse farklı alanlarda bu konuya rastlanmaktadır. Son zamanlarda Aizpuru [30], sınırsız bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla f -istatistiksel yakınsaklığın tanımını vererek istatistiksel yakınsaklık konusuna yeni bir bakış açısı getirmiştir. Sonradan Bhardwaj ve Dhawan [31] bu kavramı bir $\alpha \in (0, 1]$ reel sayısını kullanarak derecelendirmiş ve tanımlamış olduğu yeni uzaylar arasında kapsama bağıntılarını vermiştir. Diğer yandan Bhardwaj ve Dhawan [31] tarafından tanımlanmış olan kavramlar Altınok ve Deniz [32] 'in Δ^m -genelleştirilmiş fark operatörünü de uygulamasıyla genel bir hal durumunu alarak daha zengin sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezin amacı fuzzy sayı dizileri için sınırsız bir f modülüs fonksiyonuna göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlılık kavramlarını tanımlamak, bunlarla ilgili kapsama bağıntılarını vermek ve bazı topolojik özelliklerini incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılacak konulardan olan istatistiksel yakınsaklık ve fuzzy sayı dizileriyle ilgili temel tanımlar yer almaktadır.

Tanım 2.1. $S \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

limitinin değeri bir S kümesinin doğal yoğunluğunu gösterir. Bu limitte verilen dikey çizgilerle gösterilmiş $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesiyle S kümesinin n sayısına eşit veya daha küçük olan elemanlarının sayısı gösterilmektedir [33].

Örnek 2.2. $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ şeklinde tanımlı bir A kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A) = \frac{1}{2}$ dir. Çünkü doğal sayılar kümesi olan \mathbb{N} nin eleman sayısının n olduğu kabul edilirse bu durumda çift sayıların (ve tek sayıların) toplam sayısı $\frac{n}{2}$ olacağından doğal yoğunluk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$$

biçiminde basit bir limit işlemiyle $\frac{1}{2}$ olarak bulunabilir.

Tanım 2.3. A kümesi sıfır yoğunluklu herhangi bir küme olsun. Eğer kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri herhangi bir S özelliğini A kümesinin haricinde k indisleri için sağlıyorsa, verilen (x_k) kompleks terimli dizisi hemen hemen her k için S özelliğini sağlıyor denir ve bu durum *h.h.k* biçiminde yazılır [34].

İstatistiksel yakınsaklık kavramının temeli doğal yoğunluk kavramına dayalı olup tanımını aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.4. Terimleri kompleks sayılardan oluşan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa veya aynı şey demek olan *h.h.k* için $|x_k - \gamma| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir γ sayısı varsa bu durumda $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama çeşidi kısaca *st-lim* $x_k = \gamma$ şeklinde gösterilir. S ile genellikle tüm istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı gösterilecektir [34].

Teorem 2.5. Eğer $x = (x_k)$ dizisi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır ve limitler korunur [35].

Yukarıdaki teoremin tersi olan “istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsaktır” ifadesine her zaman doğru diyemeyiz. Gerçekten $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq m : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{m}$$

olduğundan gerekli limit işlemi yapıldığında eşitsizliğin solunda verilen kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu görülecektir. Buradan verilen dizinin sıfıra istatistiksel yakınsak yani $st - \lim x_k = 0$ olduğu anlaşılır. Diğer taraftan $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü dizinin yakınsayabileceği herhangi bir sayı yoktur. Eğer öyle bir s sayısı olsaydı s nin ε komşuluğunun dışında mutlaka diziye ait sonlu tane terim bulunması gerekirdi. Diğer taraftan yukarıda tanımlanmış olan (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak olmasına rağmen sınırlı bir dizi değildir. Ayrıca $x = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ şeklinde tanımlı dizi sınırlı bir dizidir, fakat rutin işlemler sonucunda bu dizinin istatistiksel yakınsak olmadığı kolayca görülebilir. Çünkü istatistiksel yakınsaklık tanımı gereği bir dizinin limitinin olabilmesi için ilgili kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olması gerekir. Halbuki burada dizinin terimleri göz önüne alındığında ne 1 ne de -1 sayısının istatistiksel limit olamayacağı açıktır. Bu sayıların dışında bir sayının da istatistiksel limit olamayacağı kolayca görülebilir. Bu örnekten yola çıkarak ℓ_∞ ile S uzaylarının birbirlerini kapsamadıkları fakat bu iki uzayın arakesitlerinin boş olmadığı söylenebilir.

Teorem 2.6. İstatistiksel yakınsak bir $x = (x_k)$ dizisinin limiti sadece bir tanedir [35].

Teorem 2.7. c bir reel sayı olmak üzere (x_k) dizisinin istatistiksel limiti γ_1 ve (y_k) dizisinin istatistiksel limiti γ_2 olsun. Bu taktirde (cx_k) dizisinin istatistiksel limiti $c\gamma_1$ ve $(x_k + y_k)$ dizisinin istatistiksel limiti de $\gamma_1 + \gamma_2$ dir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S nin bir vektör uzay olduğu anlaşılır [1].

Tanım 2.8. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin ve pozitif bir ε sayısını alalım. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_{k_0}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa yani *h.h.k* için $|x_k - x_{k_0}| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa verilen x dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [34].

Tanım 2.9. Pozitif bir p reel sayısı verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0$$

sağlanacak şekilde bir γ sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir. Bu şekildeki dizilerin uzayı kısaca w_p ile gösterilir [3].

Teorem 2.10. Bir $x = (x_k)$ dizisi ve bir $p \in \mathbb{R}^+$ sayısı verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(i) x dizisi γ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsak ise aynı γ sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(ii) x dizisi γ sayısına istatistiksel yakınsak ve sınırlı ise aynı γ sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır [3].

Teoremden verilen her iki yakınsaklık türünde de limitlerin korunduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 2.11. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir ancak ve ancak $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır [34].

Tanım 2.12. Pozitif tamsayıların kümesi olan Z^+ kümesinde bir $\theta = (k_r)$ artan dizisini göz önüne alalım. $k_0 = 0$ şartı sağlanacak şekilde eğer $r \rightarrow \infty$ için limit alındığında $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ oluyorsa $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir. Burada üzerinde çalışılacak olan $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ aralıkları $\theta = (k_r)$ dizisinin seçimine göre oluşmaktadır. Aralıklar üzerinden toplamlar genelde

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

şeklinde gösterilir. Lacunary dizileriyle ilgili işlemlerde bazen q_r terimi de kullanılmaktadır. Bu işlemlerde $q_1 = k_1$ olmak üzere $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ alınır [21].

Tanım 2.13. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - \gamma| = 0$$

limitinin sağlanması durumunda (x_k) dizisi γ sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve bu özelliğe sahip dizilerin uzayı N_θ sembolüyle gösterilecektir. Özel olarak limitin sıfır olması durumunda bu uzay N_θ^0 sembolüyle gösterilir [21].

Tanım 2.14. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limitinin sağlanması durumunda (x_k) dizisi γ sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsama genellikle $S_\theta - \lim x = \gamma$ veya $x_k \rightarrow \gamma(S_\theta)$ şeklinde bir gösterime sahiptir [22].

Teorem 2.15. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi ve bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin. Bu durumda (x_k) dizisi kuvvetli lacunary yakınsak ise lacunary istatistiksel yakınsaktır. Tersinin sağlanması için dizinin sınırlı olması gerekir. Her iki durumda da limitler korunur. Ayrıca $\ell_\infty \cap N_\theta = \ell_\infty \cap S_\theta$ eşitliği sağlanır [22].

Tanım 2.16. $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > u\}) = 0$ olacak şekilde bir u reel sayısı mevcut ise bu diziye üstten istatistiksel sınırlıdır denir. Bu tanımın benzeri olarak alttan istatistiksel sınırlılık şu şekilde tanımlanır. Eğer $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < v\}) = 0$ sağlanacak biçimde bir v reel sayısı mevcut ise (x_k) dizisi alttan istatistiksel sınırlıdır denir. Alttan ve üstten istatistiksel sınırlı bir diziye istatistiksel sınırlıdır denir [36].

Tanım 2.17. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin ve Δ fark operatörü $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta) &= \{(x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta) &= \{(x_k) : \Delta x \in c\}\end{aligned}$$

dizi uzayları $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer BK uzayıdır [16]. $m \in \mathbb{N}$ ve $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ uzayları birer BK uzayıdır [17].

Aşağıda fuzzy kümelerle ilgili Zadeh [6] 'in vermiş olduğu bazı temel bilgiler yer almaktadır.

Tanım 2.18. Herhangi bir X kümesinin bir A alt kümesinin $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyonu

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre A kümesi sadece karakteristik fonksiyonun kullanılmasıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

biçiminde de gösterilebilir. Sonuç olarak karakteristik fonksiyonun kullanılmasıyla herhangi bir $x \in X$ elemanı verildiğinde bu elemanın A kümesinin bir elemanı olup olmadığı kolaylıkla anlaşılabilir.

Tanım 2.19. χ herhangi bir küme olarak verilsin. χ kümesindeki bir A kümesinin bir fuzzy küme olabilmesi için, $X_A : \chi \rightarrow [0, 1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyonun mevcut olması gerekir. Bu fonksiyon, x ler A kümesinin elemanı olduğunda $X_A(x) \in (0, 1]$, ve x ler A kümesinin elemanı olmadığında $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Eğer bir karakteristik fonksiyon burada olduğu gibi tanımlanmışsa bu fonksiyona üyelik fonksiyonu denir.

Bir A fuzzy kümesi yukarıdaki X_A üyelik fonksiyonunun tanımından faydalanılarak

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0, 1]\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Şimdi bir fuzzy sayının tanımında kullanılacak bazı tanımları vermeye başlayalım.

Tanım 2.20. Eğer $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \chi$ sayısı varsa A fuzzy kümesine normal fuzzy küme denir.

Tanım 2.21. A bir fuzzy kümesi ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. A fuzzy kümesinin α -kesim (veya α -seviye) kümesi

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

biçiminde tanımlanır. 0-kesim kümesinde özel bir durum oluşacağından dolayı kümenin kapanışı alınır ve $cl \{x \in \mathbb{R} : X_A(x) \geq 0\}$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.22. Bir A fuzzy kümesi verilsin.

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A fuzzy kümesinin support'u yada desteği denir. Bu küme üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktalardan oluşan bir kümedir.

Tanım 2.23. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\alpha \in (0, 1]$ için A^α kümesi konveks ise A fuzzy kümesi konvektir.

Şimdi bu tanıma denk olan farklı bir konvekslik tanımını verelim.

Tanım 2.24. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min \{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A kümesine konveks fuzzy küme denir.

Tanım 2.25. Eğer bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıda verilen dört şartı sağlarsa bu X fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir.

(i) X normaldir.

(ii) X fuzzy konvektir.

(iii) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı olan $cl \{x \in \mathbb{R} : X_A(x) \geq 0\}$ kümesi kompakttır.

(iv) X üst-yarı süreklidir.

Bütün reel fuzzy sayılar kümesi kısaca $L(\mathbb{R})$ sembolüyle gösterilecektir [37].

Tanım 2.26. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde seçilen herhangi iki $X = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve $Y = [\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha]$ fuzzy sayısı için kısmi sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır ve bu bağıntı " \leq " sembolüyle gösterilir:

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \text{ için } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha \text{ ve } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha$$

Eğer ne $X \leq Y$ ne de $Y \leq X$ oluyorsa X ve Y fuzzy sayılarına kıyaslanamaz denir ve bu durum $X \approx Y$ şeklinde gösterilir [38].

Tanım 2.27. $L(\mathbb{R})$ kümesi üzerinde bir A fuzzy kümesini göz önüne alalım. Eğer A fuzzy kümesindeki her X fuzzy sayısı için $X \leq s$ sıralama bağıntısı sağlanacak biçimde

bir s fuzzy sayısı mevcut ise A fuzzy kümesine üstten sınırlı bir küme denir. Buradaki s fuzzy sayısı A fuzzy kümesi için bir üst sınırdır. Eğer A kümesinin bir s üst sınırı yine aynı kümenin tüm üst sınırlarından küçük eşit kalıyorsa s fuzzy sayısı A 'nın supremumu olarak adlandırılır. A fuzzy kümesinin alttan sınırlılığı ve bu tanım yardımıyla yapılan infimum tanımı yukarıda verilen üstten sınırlılık ve supremum tanımına benzer şekilde yapılabilir [8].

Tanım 2.28. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde verilen bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini alalım. Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin tüm terimleri alttan ve üstten en az birer tane fuzzy sayı tarafından sınırlanmış ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlı dizi denir. Bu şekilde verilen tüm $X = (X_k)$ dizilerinin kümesi kısaca $\ell_\infty(F)$ ile sembolize edilecektir [8].

Tanım 2.29. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta X_k : k \in \mathbb{N}\}$ biçiminde tanımlanmış bir fuzzy sayı kümesi sınırlı bir küme ise (X_k) fuzzy sayı dizisine Δ -sınırlıdır denir. Bu durumda (ΔX_k) fark dizisinin her terimi için $K \leq \Delta X_k \leq M$ eşitsizliği sağlanacak biçimde alttan ve üstten sınırlayan birer K ve M fuzzy sayıları vardır.

Eğer (ΔX_k) fark dizisinin sonlu sayıda terimi hariç $\varepsilon > 0$ olmak üzere $d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa (X_k) fuzzy sayı dizisi, X_0 fuzzy sayısına Δ -yakınsaktır denir. Burada $\ell_\infty(\Delta, F)$ ile tüm Δ -sınırlı, $c(\Delta, F)$ ile tüm Δ -yakınsak ve $c_0(\Delta, F)$ ile tüm sıfıra Δ -yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sınıfları sembolize edilecektir [39].

$\ell_\infty(\Delta, F)$ fuzzy dizi sınıfı yapısı gereği sınırlı fark dizilerinden oluşmasına rağmen sınırsız (X_k) dizilerini de içinde barındırır. Benzer durum $c(\Delta, F)$ ve $c_0(\Delta, F)$ fuzzy dizi sınıfları için de geçerlidir. Örneğin $c(\Delta, F)$ fuzzy dizi sınıfı yapısı gereği yakınsak fark dizilerinden oluşmasına rağmen yakınsak olmayan (X_k) dizilerini de içine alır. Bu durumu aşağıdaki örnek üzerinde daha iyi anlayabiliriz:

Örnek 2.30. Üyelik fonksiyonu

$$X_k(x) = \begin{cases} x - k + 1, & x \in [k - 1, k] \text{ ise} \\ -x + k + 1, & x \in [k, k + 1] \text{ ise} \\ 0, & x \notin [k - 1, k + 1] \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde verilen fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Verilen bu dizinin Δ -yakınsak ve Δ -sınırlı olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Yani burada (X_k) dizisinin fark işlemlerinden oluşan (ΔX_k) dizisi yakınsak ve sınırlıdır. Halbuki (X_k) dizisinin kendisi yakınsak değildir. Diğer taraftan bu dizi sınırlı da değildir. Gerçekten, $\alpha \in (0, 1]$ için α -kesim kümesi işlemleri sonucunda

$$[X_k]^\alpha = [k - 1 + \alpha, k + 1 - \alpha]$$

elde edilir, bundan faydalanarak fark işlemleri yapıldığında ise

$$[\Delta X_k]^\alpha = [-3 + 2\alpha, 1 - 2\alpha]$$

elde edilir. Bu takdirde $[X_0]^\alpha = [-2(1-\alpha), 2(1-\alpha)]$ olmak üzere (ΔX_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizinin sınırlılık tanımı göz önüne alındığında alttan ve üstten sınırlı olması sebebiyle sınırlı olacağı da açıkça görülür.

Ayrıca $c_0(\Delta, F) \subset c(\Delta, F) \subset \ell_\infty(\Delta, F)$ olup bu kapsama kesindir. Bu kapsamının kesinliğiyle ilgili olarak aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 2.31. Üyelik fonksiyonu

$$X_k(x) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x-2, \quad x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x+4, \quad x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k \text{ tek ise} \\ \left. \begin{array}{l} x-5, \quad x \in [5, 6] \text{ ise} \\ -x+7, \quad x \in [6, 7] \text{ ise} \\ 0, \quad \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde verilen (X_k) fuzzy sayı dizisini ele alalım. Bu dizinin fark dizisi olan (ΔX_k) fuzzy dizisinin sınırlı olması nedeniyle (X_k) dizisinin kendisi Δ -sınırlıdır. Halbuki (ΔX_k) fuzzy dizisi yakınsak olmadığı için (X_k) dizisi Δ -yakınsak olamaz. Şimdi bu durumlarla ilgili işlemlerimizi yapmak için ilk olarak $\alpha \in (0, 1]$ için (X_k) fuzzy sayı dizisinin α -kesim kümesini bulalım. Gerekli işlemler sonucunda kesim kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [2 + \alpha, 4 - \alpha], & k \text{ tek ise} \\ [5 + \alpha, 7 - \alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. (X_k) dizisinin α -kesim kümesinden faydalanılarak (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin α -kesim kümesi de

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [-(5 - 2\alpha), -(1 + 2\alpha)], & k \text{ tek ise} \\ [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde bulunur. Sınırlılık ile ilgili işlemler sonucunda hem alt sınır hem de üst sınır bulunabileceğinden dolayı (ΔX_k) dizisi sınırlı olur. Diğer yandan yakınsaklık tanımını sağlamaması sebebiyle (ΔX_k) dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz. Bunun sonucu olarak $c(\Delta, F) \subset \ell_\infty(\Delta, F)$ kapsamasının doğruluğu gösterilmiş olur.

$L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde metrik ile ilgili yapılacak işlemlerde birkaç metrik çeşidi vardır. Bunlardan en sık kullanılanı aşağıdaki gibi tanımlanan d_H Hausdorff metriğidir: Buna göre

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max\left(|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $L(\mathbb{R})$ uzayı verilen \bar{d} metriğine göre tamdır [40]. Bu metrik, \mathbb{R} üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

Tanım 2.32. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, doğal sayılar kümesini fuzzy sayı kümesine dönüştüren bir fonksiyondur. Buna göre bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin her bir terimi aslında birer fuzzy sayıdan başka bir şey değildir [7].

Tanım 2.33. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir X_0 fuzzy sayısını göz önüne alalım ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. X_0 m ε -komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimdeki X sayılarından oluşan bir kümedir. Buna göre $K(X_0, \varepsilon)$ kümesi ile herhangi bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğundan bahsedilecektir [7].

Tanım 2.34. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $k > k_0$ doğal sayıları için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa bu takdirde (X_k) fuzzy dizisine yakınsak bir dizi denir ve bu dizinin yakınsadığı sayı yani limiti X_0 fuzzy sayısıdır [7].

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile gösterilecektir.

Aşağıda yakınsak bir dizi örneği verilmiştir:

Örnek 2.35. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k+2}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış bir dizi olarak verilsin. $X = (X_k)$ dizisinin limitinin gerekli aritmetik işlemlerden sonra aşağıdaki gibi üçgensel bir fuzzy sayı olduğu kolayca görülebilir:

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in [2, 3] \\ -x + 4, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

Tanım 2.36. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k, k_0 > N$ sağlandığında $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir fuzzy Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi tıpkı reel sayı dizilerinde olduğu gibi bir fuzzy Cauchy dizisidir [7].

Tanım 2.37. $L(\mathbb{R})$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti sağlanacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama kısaca $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0(S(F))$ biçiminde yazılır [9].

Tanım 2.38. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir:

- (i) $f(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır,
- (ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ eşitsizliği her $x, y \geq 0$ için sağlanır,
- (iii) f artan bir fonksiyondur,
- (iv) f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir [29].

Tanım 2.39. Bir f modülüs fonksiyonu, bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, bir $\Lambda = (\lambda_k)$ çarpım dizisi ve pozitif reel sayıların bir (p_k) dizisi verilsin. Bu takdirde $\ell_\infty^f(\Lambda, \Delta_F^m, p)$ dizi sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\ell_\infty^f(\Lambda, \Delta_F^m, p) = \left\{ X = (X_k) : \sup_k (f(d(\Delta^m(\lambda_k X_k), \bar{0})))^{p_k} < \infty \right\}$$

$\ell_\infty^f(\Lambda, \Delta_F^m, p)$ dizi sınıfında özel olarak her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = 1$, $p_k = 1$ ve $m = 1$ alınırsa f modülüsüne göre Δ^f -sınırlı dizilerin sınıfı elde edilir [41].

Tanım 2.40. Doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin β -yoğunluğu $d_\beta(A)$ sembolüyle gösterilir ve

$$d_\beta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in A\}| \quad (2.1)$$

şeklinde verilen limit yardımıyla hesaplanır. Burada β sayısı $(0, 1]$ aralığının herhangi bir elemanıdır. (2.1) ifadesinde β sayısının özel olarak 1 olması halinde β -yoğunluk, doğal yoğunlukla denk olur [19].

Tanım 2.41. β yukarıdaki gibi bir reel sayı ve f fonksiyonu da sınırsız bir modülüs olmak üzere \mathbb{N} doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin f_β -yoğunluğu

$$d_\beta^f(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \leq n : k \in A\}|) \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır [31].

Uyarı 2.42. Eğer (2.2) ifadesinde $\beta = 1$ ve $f(x) = x$ alınrsa bu durumda bir kümenin f_β -yoğunluğu doğal yoğunluğa indirgenir. Sadece $\beta = 1$ alınrsa f -yoğunluğa ve yine sadece $f(x) = x$ alınması durumunda da β -yoğunluğa indirgenmiş olur [31].



3. β -DERECEDEN Δ^f -LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı ve bir (X_k) fuzzy sayı dizisi verilmek üzere f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiş ve bu özelliğe sahip olan fuzzy sayı dizilerinden oluşan $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F)$ dizi sınıfı tanımlanmıştır. Ayrıca $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$, $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ ve $W_{\theta,f}^\beta(\Delta_F, p)$ dizi sınıfları tanımlanarak bunların bazı özellikleri incelenmiş ve aralarındaki kapsama bağıntıları verilmiştir.

Tanım 3.1. Sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, bir (X_k) fuzzy sayı dizisi ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Bu durumda

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) = 0$$

limiti sağlanıyorsa (X_k) dizisine β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olup $f(h_r)^\beta$ ile $f(h_r)$ nin β -dereceden kuvveti gösterilmektedir. Yani $(f(h_1)^\beta, f(h_2)^\beta, \dots, f(h_r)^\beta, \dots)$ dir. Tüm β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerin sınıfı $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F))$ yazılır.

Tanım 3.2. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, pozitif reel sayıların bir (p_k) dizisi ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

limiti sağlanıyorsa (X_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$ toplanabilir denir ve bu şekildeki (X_k) dizilerinin sınıfı $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$ ile gösterilecektir. Bu yakınsama türü için $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p] - \lim X_k = X_0$ ifadesi kullanılır.

Tanım 3.3. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, pozitif reel sayıların bir (p_k) dizisi ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} = 0$$

limiti sağlanıyorsa (X_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ toplanabilir denir ve bu şekildeki (X_k) dizilerinin sınıfı $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ ile gösterilecektir. Bu yakınsama türü için $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p) - \lim X_k = X_0$ ifadesi kullanılır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ durumunda $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ yerine $W_\theta^{f,\beta}[\Delta_F, p]$ yazılır.

Tanım 3.4. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, pozitif reel sayıların bir (p_k) dizisi ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} (d(\Delta X_k, X_0))^{p_k} = 0$$

limiti sağlanıyorsa (X_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli $W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ -toplantılardır denir ve bu şekildeki (X_k) dizilerinin sınıfı $W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ ile gösterilecektir. Bu yakınsama türü için $W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ durumunda $W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ yerine $W_{\theta, f}^\beta[\Delta_F, p]$ yazılır.

Aşağıdaki önerme ve teoremlerde $p = (p_k)$ hem sınırlı bir dizidir hem de $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ şartını sağlar.

Önerme 3.5. f bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \delta \leq 1$ olsun. Bu takdirde her bir $\|u\| \geq \delta$ için $f(\|u\|) \leq 2f(1)\delta^{-1}\|u\|$ yazılabilir [42].

Teorem 3.6. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Buna ilaveten $p > 1$ olsun. Eğer $\lim_{u \rightarrow \infty} \inf \frac{f(u)}{u} > 0$ ise bu takdirde $W_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, p) = W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ dir.

İspat. $p > 1$ reel sayı ve $X \in W_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, p)$ olsun. Eğer $\lim_{u \rightarrow \infty} \inf \frac{f(u)}{u} > 0$ ise $u > 0$ için $f(u) > cu$ şartını sağlayan bir $c > 0$ sayısı mevcuttur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^p &\geq \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [c \cdot d(\Delta X_k, X_0)]^p \\ &= \frac{c^p}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta X_k, X_0)]^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $W_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, p) \subset W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ bulunur. Şimdi $X \in W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ olsun. Bu takdirde $r \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta X_k, X_0)]^p \rightarrow 0$$

olur. $0 < \delta \leq 1$ olsun. Önerme 3.5'den

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta X_k, X_0)]^p &\geq \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \delta}} [d(\Delta X_k, X_0)]^p \\ &\geq \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \delta}} \left[\frac{f(d(\Delta X_k, X_0))}{2f(1)\delta^{-1}} \right] \\ &\geq \frac{1}{f(h_r)^\beta} \frac{\delta^p}{2^p f(1)^p} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^p \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $X \in W_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ olup

$$W_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, p) = W_{\theta,f}^{\beta}(\Delta^f, p) \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

$\lim_{u \rightarrow \infty} \inf \frac{f(u)}{u} = 0$ olması durumunda (3.1) eşitliği sağlanmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz:

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x - \sqrt{h_r} + 1, & x \in [\sqrt{h_r} - 1, \sqrt{h_r}] \\ -x + \sqrt{h_r} + 1, & x \in [\sqrt{h_r}, \sqrt{h_r} + 1] \\ 0, & \text{d.d} \end{cases} & k = k_r \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d} \end{cases}$$

fuzzy sayı dizisini gözönüne alalım. (X_k) fuzzy sayı dizisinin α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + \sqrt{h_r} - 1, -\alpha + \sqrt{h_r} + 1], & k = k_r \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{d.d} \end{cases}$$

ve (X_k) fuzzy sayı dizisinin (ΔX_k) fark dizisi

$$\Delta X_k = \begin{cases} \begin{cases} x - \sqrt{h_r} + 1, & x \in [\sqrt{h_r} - 1, \sqrt{h_r}] \\ -x + \sqrt{h_r} + 1, & x \in [\sqrt{h_r}, \sqrt{h_r} + 1] \\ 0 & \text{d.d} \end{cases} & k = k_r \text{ ise} \\ \begin{cases} x + \sqrt{h_r} + 1, & x \in [-\sqrt{h_r} - 1, -\sqrt{h_r}] \\ -x - \sqrt{h_r} + 1, & x \in [-\sqrt{h_r}, -\sqrt{h_r} + 1] \\ 0 & \text{d.d} \end{cases} & k + 1 = k_r \text{ ise} \\ 0 & \text{d.d} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. (ΔX_k) fark dizisinin α -seviye kümesi ise

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + \sqrt{h_r} - 1, -\alpha + \sqrt{h_r} + 1], & k = k_r \text{ ise} \\ [\alpha - \sqrt{h_r} - 1, -\alpha - \sqrt{h_r} + 1], & k + 1 = k_r \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{d.d} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

$f(x) = x$, $X_0 = \bar{0}$, $\beta = \left(\frac{3}{4}\right)$, $p = \left(\frac{5}{2}\right)$ için

$$\frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, \bar{0}))]^p = \frac{\left((\sqrt{h_r} + 1)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{5}{2}}}{(\sqrt{h_r})^{\frac{3}{4}}} = \frac{(\sqrt{h_r} + 1)^{\frac{5}{8}}}{(\sqrt{h_r})^{\frac{3}{4}}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Böylece $X_k \in W_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, p)$ dir. Fakat

$$\frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta X_k, \bar{0})]^p = \frac{\left((\sqrt{h_r} + 1)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{5}{2}}}{(\sqrt{h_r})^{\frac{3}{4}}} = \frac{(\sqrt{h_r} + 1)^{\frac{5}{4}}}{(\sqrt{h_r})^{\frac{3}{4}}} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty)$$

olacağından $X_k \notin W_{\theta, f}^\beta(\Delta_F, p)$ dir.

Teorem 3.7. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Buna ilaveten her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. Eğer $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)^\beta}{u^\beta} > 0$ ise bu takdirde $W_\theta^{f, \beta}[\Delta_F, p] \subset S_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, p)$ dir.

İspat. $X \in W_\theta^{f, \beta}[\Delta_F, p]$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)^\beta}{u^\beta} > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r^\beta} \sum_{k \in I_r} f(d(\Delta X_k, X_0)) &\geq \frac{1}{h_r^\beta} f\left(\sum_{k \in I_r} d(\Delta X_k, X_0)\right) \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} f\left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} d(\Delta X_k, X_0)\right) \\ &\geq \frac{1}{h_r^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \varepsilon) \\ &\geq \frac{c}{h_r^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) f(\varepsilon) \\ &= \frac{c}{h_r^\beta} \frac{f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(h_r)^\beta} f(h_r)^\beta f(\varepsilon) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle $X \in W_\theta^{f, \beta}[\Delta_F, p]$ olması $X \in S_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, p)$ olmasını gerektirir. Burada limitler korunur yani her iki durumda limit X_0 'dır.

Teorem 3.8. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu verilsin, ayrıca β_1 ve β_2 sayıları da $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ şartını sağlayan iki reel sayı olsun. Bu takdirde $W_\theta^{f, \beta_1}(\Delta_F, p) \subset S_\theta^{f, \beta_2}(\Delta_F, p)$ dir.

İspat. $X \in W_\theta^{f, \beta_1}(\Delta_F, p)$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin. Ayrıca \sum_1 ve \sum_2 sembolleri sırasıyla $k \in I_r, d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon$ ve $k \in I_r, d(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$ şartlarını sağlayan k 'lar üzerinden

alınan toplamları gösterebiliriz. Her bir r için $f(h_r)^{\beta_1} \leq f(h_r)^{\beta_2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f(h_r)^{\beta_1}} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&= \frac{1}{f(h_r)^{\beta_1}} \left[\sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right] \\
&\geq \frac{1}{f(h_r)^{\beta_2}} \left[\sum_1 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} + \sum_2 [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \right] \\
&\geq \frac{1}{f(h_r)^{\beta_2}} \left[\sum_1 [f(\varepsilon)]^{p_k} \right] \geq \frac{1}{f(h_r)^{\beta_2}} f \left[\sum_1 [\varepsilon]^{p_k} \right] \\
&\geq \frac{1}{f(h_r)^{\beta_2}} \left[f \left(\sum_1 \min([\varepsilon]^h, [\varepsilon]^H) \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{f(h_r)^{\beta_2}} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) \min([\varepsilon]^h, [\varepsilon]^H) \\
&\geq \frac{c}{f(h_r)^{\beta_2}} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) f \left(\min([\varepsilon]^h, [\varepsilon]^H) \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X \in S_{\theta}^{f, \beta_2}(\Delta_F)$ dir.

Teorem 3.9. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Bu durumda eğer $\liminf_r q_r > 1$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)^\beta}{u^\beta} > 0$ ise $S^{f, \beta}(\Delta_F) \subset S_{\theta}^{f, \beta}(\Delta_F)$ dir.

İspat. İlk olarak farz edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda yeterince büyük r 'ler için $q_r \geq 1 + \lambda$ şartını sağlayan bir $\lambda > 0$ sayısı mevcuttur. Buradan

$$\left(\frac{h_r}{k_r} \right)^\beta \geq \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^\beta$$

eşitsizliğinin mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Eğer $S^{f, \beta}(\Delta_F) - \lim X_k = X_0$ ise her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r 'ler için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k_r^\beta} f(|\{k \leq k_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) \geq \frac{1}{f(k_r)^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&= \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)^\beta} \frac{1}{f(h_r)^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&= \frac{f(h_r)^\beta}{h_r^\beta} \frac{k_r^\beta}{f(k_r)^\beta} \frac{h_r^\beta}{k_r^\beta} \frac{f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(h_r)^\beta} \\
&\geq \frac{f(h_r)^\beta}{h_r^\beta} \frac{k_r^\beta}{f(k_r)^\beta} \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^\beta \frac{f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(h_r)^\beta}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.10. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi ile bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin. f modülüs fonksiyonu sınırsız olsun ve $x \geq 0$, $y \geq 0$ için

$$|f(x) - f(y)| = f(|x - y|)$$

şartını sağlasın. Ayrıca $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı verilsin. Eğer $X_k \in S^f(\Delta_F) \cap S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F)$ ise $S^f(\Delta_F) - \lim X_k = S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) - \lim X_k$ dir.

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemi ile yapacağımız için $S^f(\Delta_F) - \lim X_k = X_0$ ve $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) - \lim X_k = X_0'$ olduğunu kabul edelim ve bu limitler birbirinden farklı olsun. $0 < \varepsilon < \frac{d(X_0, X_0')}{2}$ diyelim. Böylece $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq I_r : d(\Delta X_k, X_0') \geq \varepsilon\}|)}{f(I_r)^\beta} = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \frac{f(|\{k \leq n : d(X_0, X_0') \geq 2\varepsilon\}|)}{f(n)} \\ & \leq \frac{f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} \\ & + \frac{f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0') \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} \end{aligned}$$

olur. n sonsuza giderken limit işlemi alınırsa

$$1 \leq 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n)} \leq 1$$

ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0') \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} = 1$$

olur. Şimdi

$$\frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X_0') \geq \varepsilon\}|)$$

dizisinin

$$\frac{1}{f(k_m)} f(|\{k \leq k_m : d(\Delta X_k, X_0') \geq \varepsilon\}|)$$

alt dizisini gözönüne alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f(k_m)} f(|\{k \leq k_m : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&= \frac{1}{f(k_m)} f(|\{k \in \cup_{r=1}^m I_r : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&= \frac{1}{f(k_m)} f\left(\sum_{r=1}^m |\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|\right) \\
&\leq \frac{1}{f(k_m)} \sum_{r=1}^m f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&= \frac{1}{f(k_m)} \sum_{r=1}^m f(h_r)^\beta \frac{1}{f(h_r)^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^m f(h_r)^\beta &= f(h_1)^\beta + f(h_2)^\beta + \dots + f(h_m)^\beta \\
&= f(k_1 - k_0)^\beta + f(k_2 - k_1)^\beta + \dots + f(k_m - k_{m-1})^\beta \\
&= f(|k_1 - k_0|)^\beta + f(|k_2 - k_1|)^\beta + \dots + f(|k_m - k_{m-1}|)^\beta \\
&= |f(k_1) - f(k_0)|^\beta + |f(k_2) - f(k_1)|^\beta + \dots + |f(k_m) - f(k_{m-1})|^\beta \\
&\leq |f(k_1) - f(k_0)| + |f(k_2) - f(k_1)| + \dots + |f(k_m) - f(k_{m-1})| \\
&= f(k_1) - f(k_0) + f(k_2) - f(k_1) + \dots + f(k_m) - f(k_{m-1}) \\
&= f(k_m)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur. (3.2) ve (3.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f(k_m)} f(|\{k \leq k_m : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|) \\
&\leq \frac{\sum_{r=1}^m f(h_r)^\beta}{\sum_{r=1}^m f(h_r)^\beta} \frac{1}{f(h_r)^\beta} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\frac{1}{f(k_m)} f(|\{k \leq k_m : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|) \rightarrow 0$$

elde edilir, fakat bu sonuç

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n : d(\Delta X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} = 1$$

olması ile çelişir. O halde $X_0 = X'_0$ dır.

Şimdi Teorem 3.10 'un bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.11. $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, (X_k) bir fuzzy sayı dizisi, ve $0 < \beta \leq 1$ olsun. Eğer $X_k \in S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) \cap (S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) \cap S_{\theta'}^{f,\beta}(\Delta_F))$ ise bu takdirde $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F) - \lim X_k = S_{\theta'}^{f,\beta}(\Delta_F) - \lim X_k$ dır.

Teorem 3.12. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0, 1]$ verilsin. Eğer $\lim p_k > 0$ şartı sağlanıyorsa $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p) - \lim X_k = X_0$ limiti tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$ olsun. Farz edelim ki $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p) - \lim X_k = X'_0$ ve $W_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, p) - \lim X_k = X''_0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_r \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X'_0))]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_r \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X''_0))]^{p_k} = 0$$

yazabiliriz. f 'nin tanımını gereğince

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(X'_0, X''_0))]^{p_k} \\ & \leq \frac{D}{f(h_r)^\beta} \left(\sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X'_0))]^{p_k} + \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X''_0))]^{p_k} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dır. Böylece

$$\lim_r \frac{1}{f(h_r)^\beta} \sum_{k \in I_r} [f(d(X'_0, X''_0))]^{p_k} = 0$$

bulunur. $\lim_k p_k = s$ olduğundan $d(X'_0, X''_0) = 0$ olup $X'_0 = X''_0$ olacağından limit tektir.

Teorem 3.13. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizi, $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ dizileri her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ şartını sağlayan iki lacunary dizisi ve β_1 ile β_2 de $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_r \inf \frac{f(h_r)^{\beta_1}}{f(l_r)^{\beta_2}} > 0 \tag{3.4}$$

ise $W_{\theta'}^{f,\beta_2}(\Delta_F, p) \subset W_\theta^{f,\beta_1}(\Delta_F, p)$ dir.

Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$, $J_r = (s_{r-1}, s_r]$, $l_r = s_r - s_{r-1}$ dir.

İspat. $X \in W_{\theta'}^{f, \beta_2}(\Delta_F, p)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f(l_r)^{\beta_2}} \sum_{k \in J_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&= \frac{1}{f(l_r)^{\beta_2}} \sum_{k \in J_r - I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} + \frac{1}{f(l_r)^{\beta_2}} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{f(l_r)^{\beta_2}} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\geq \frac{f(h_r)^{\beta_1}}{f(l_r)^{\beta_2}} \frac{1}{f(h_r)^{\beta_1}} \sum_{k \in I_r} [f(d(\Delta X_k, X_0))]^{p_k}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $X \in W_{\theta}^{f, \beta_1}(\Delta_F, p)$ elde edilir.

Sonuç 3.14. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizi, $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ dizileri her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ şartını sağlayan iki lacunary dizisi ve β_1 ile β_2 de $0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Eğer (3.4) sağlanırsa bu takdirde

- (i) Eğer $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ise $W_{\theta'}^{f, \beta}(\Delta_F, p) \subset W_{\theta}^{f, \beta}(\Delta_F, p)$ dir.
- (ii) Eğer $\beta_2 = 1$ ise $W_{\theta'}^f(\Delta_F, p) \subset W_{\theta}^{f, \beta_1}(\Delta_F, p)$ dir.
- (iii) Eğer $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ise $W_{\theta'}^f(\Delta_F, p) \subset W_{\theta}^f(\Delta_F, p)$ dir.

4. β -DERECEDEN Δ^f -LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı ve bir (X_k) fuzzy sayı dizisi verilmek üzere f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlılık tanımı verilmiş ve bu özelliğe sahip olan fuzzy sayı dizilerinden oluşan $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dizi sınıfı tanımlanmıştır. Bu kümenin literatürde daha önceden tanımlanmış kümelerle aralarında bazı kapsama bağıntıları verilmiş, ayrıca simetriklik, monotonluk gibi bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Her bir r için $k'_r \in I_r$ olacak şekilde $\lim X_{k'_r} = L$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$d(\Delta X_k, \Delta X_{k'_r}) < \varepsilon \text{ h.h. } k_r(\beta)$$

yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r^\beta)} f(|\{k \in I_r : d(\Delta X_k, \Delta X_{k'_r}) \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak şekilde X in bir $X_{k'_r}$ alt dizisi varsa $X = (X_k)$ dizisine f modülüs fonksiyonuna göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\beta \in (0, 1]$ bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r^\beta)} f(|\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}|) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcutsa $X = (X_k)$ dizisine f modülüsüne göre üstten β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır denir.

Benzer şekilde eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r^\beta)} f(|\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}|) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı mevcutsa $X = (X_k)$ dizisine f modülüsüne göre alttan β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır denir.

Burada $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $h_r^\beta = (h_r^\beta) = (h_1^\beta, h_2^\beta, \dots, h_r^\beta, \dots)$ dir.

Bütün fuzzy sayıların kümesi olan $L(\mathbb{R})$ kısmi sıralı bir küme olduğundan dolayı bu kümedeki kıyaslanamayan elamanların da göz önünde bulundurulması gerekir. Bundan dolayı yukarıdaki tanımı verirken $\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\}$ ve $\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\}$ kümelerinin

yanına $\{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}$ kümesini de ekledik.

Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi f modülüsüne göre hem üstten β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı hemde alttan β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı olursa (X_k) dizisine f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır diyeceğiz.

Tüm f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ ile gösterilecektir.

$\theta = (2^r)$ ve $f(x) = x$ özel durumlarında $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ yerine $S^\beta(\Delta_F, b)$ yazılacaktır. $\beta = 1$, $f(x) = x$ ve $\theta = (2^r)$ özel durumlarında $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ yerine $S(\Delta_F, b)$ yazılır. $\beta = 1$, $f(x) = x$ özel durumlarında ise $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ yerine $S_\theta(\Delta_F, b)$ yazılacaktır.

Aşağıda β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlık ile ilgili bir örnek verilmiştir:

Örnek 4.3. Aşağıdaki şekilde tanımlı bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini alalım

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x - 3k + 1, & x \in \left[k - \frac{1}{3}, k \right] \\ -3x + 3k + 1, & x \in \left[k, k + \frac{1}{3} \right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k = n^4 \text{ ise } (n = 1, 2, \dots)$$

$$\left. \begin{array}{ll} 3x - 2, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \\ -3x + 4, & x \in \left[1, \frac{4}{3} \right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} = X_0 \text{ diğer durumlarda}$$

sınırsız f modülüs fonksiyonu $f(x) = x$ şeklinde olsun. Buna göre (X_k) dizisinin α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} \left[k + \left(\frac{\alpha-1}{3} \right), k - \left(\frac{\alpha-1}{3} \right) \right], & k = n^4 \text{ ise} \\ \left[\frac{\alpha+2}{3}, \frac{-\alpha+4}{3} \right], & k \neq n^4 \text{ ise} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Şimdi (X_k) dizisinin (ΔX_k) fark dizisi

$$\Delta X_k = \left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{ll} \frac{3(x-k)+5}{2}, & x \in \left[k - \frac{5}{3}, k - 1 \right] \\ \frac{-3(x-k)+5}{2}, & x \in \left[k - 1, k - \frac{1}{3} \right] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & k = n^4 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} \frac{3(x+k)+1}{2}, & x \in \left[-k - \frac{2}{3}, -k \right] \\ \frac{-3(x+k)+1}{2}, & x \in \left[-k, -k + \frac{2}{3} \right] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & k + 1 = n^4 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} \frac{3x+2}{2}, & x \in \left[-\frac{2}{3}, 0 \right] \\ \frac{-3x+2}{2}, & x \in \left[0, \frac{2}{3} \right] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & d.d \end{array} \right.$$

yukarıdaki gibi elde edilir. (ΔX_k) dizisinin α -seviye kümesi

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \left(\frac{2\alpha-5}{3}\right), k - \left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)], & k = n^4 \text{ ise} \\ [-k + \left(\frac{2\alpha-2}{3}\right), -k - \left(\frac{2\alpha-2}{3}\right)], & k+1 = n^4 \text{ ise} \\ \left[\frac{2\alpha-2}{3}, \frac{-2\alpha+2}{3}\right], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

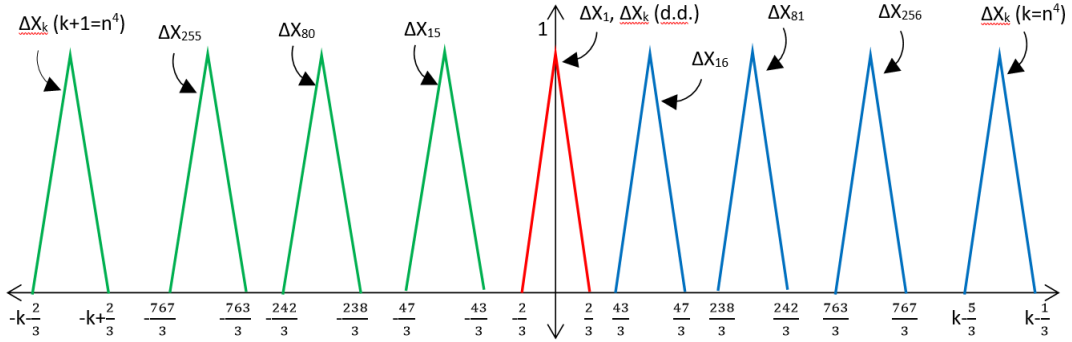
şeklinde olup buradan $\beta > \frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned} & \delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) \\ &= \delta^{f,\beta} (\{16, 81, 256, \dots\} \cup \{\emptyset\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) \\ &= \delta^{f,\beta} (\{\emptyset\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $X = (X_k)$ dizisi $f(x) = x$ modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat Δ -sınırlı bir dizi değildir (Bkz. Şekil 4.1).



Şekil 4.1. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri

Literatürde mevcut bulunan rutin işlemlerin ve standart tekniklerin kullanılmasıyla kolayca ispatı yapılabilecek olan aşağıdaki önermeleri ispatsız vereceğiz.

Önerme 4.4. f sınırsız modülüsüne göre her Δ -yakınsak fuzzy sayı dizisi Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Önerme 4.5. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ verilsin. Bu takdirde f modülüsüne göre her β -dereceden Δ^f -lacunary yakınsak bir fuzzy sayı dizisi, f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

Önerme 4.6. $0 < \beta \leq 1$ reel sayı, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde f modülüsüne göre bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel Cauchy dizisi ise bu takdirde f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Önerme 4.7. Bir $E \subset \mathbb{N}$ kümesi verilsin. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $\alpha \leq \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in (0, 1]$ reel sayıları verilsin. Bu takdirde $\delta_\theta^{f,\beta}(E) \leq \delta_\theta^{f,\alpha}(E)$ dir.

Teorem 4.8. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ verilsin. Bu takdirde f modülüsüne göre her Δ^f -sınırlı fuzzy sayı dizisi, f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat. İspatın ilk kısmı, her sınırsız f modülüsü için boş kümenin f^β -lacunary yoğunluğu sıfır olduğundan dolayı kolayca yapılabilir. Kapsamanın kesinliğini göstermek için modülüs fonksiyonu $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) ve $\theta = (2^r)$ olarak alalım. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{3} - \left(\frac{k-3}{3}\right), & x \in [k-3, k] \\ -\frac{x}{3} + \left(\frac{k+3}{3}\right), & x \in [k, k+3] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k = n^3 \text{ ise } n = 1, 2, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{3}, & x \in [0, 3] \\ -\frac{x}{3} + 2, & x \in [3, 6] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k \neq n^3 \text{ ise}$$

(X_k) dizisinin α -seviye kümesini

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [k + 3\alpha - 3, k - 3\alpha + 3], & k = n^3 \text{ ise} \\ [3\alpha, -3\alpha + 6], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{array} \right.$$

şeklinde bulabiliriz. Buradan (X_k) dizisinin (ΔX_k) fark dizisini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\Delta X_k = \left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{ll} \frac{x-k+9}{6}, & x \in [k-9, k-3] \\ \frac{-x+k+3}{6}, & x \in [k-3, k+3] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & k = n^3 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} \frac{x+k+4}{6}, & x \in [-k-4, -k+2] \\ \frac{-x-k+8}{6}, & x \in [-k+2, -k+8] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{ll} \frac{x}{6} + 1, & x \in [-6, 0] \\ \frac{-x}{6} + 1, & x \in [0, 6] \\ 0 & d.d \end{array} \right\} & d.d. \end{array} \right.$$

(ΔX_k) fark dizisinin α -seviye kümesi

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + 6\alpha - 9, k - 6\alpha + 3], & k = n^3 \text{ ise} \\ [-k + 6\alpha - 4, -k - 6\alpha + 8], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [6\alpha - 6, -6\alpha + 6], & \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Böylece $\beta > \frac{1}{3}$ için

$$\begin{aligned} & \delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) \\ &= \delta^{f,\beta} (\{8, 27, 64, \dots\} \cup \{\emptyset\}) \\ &= \sqrt[3]{n} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\})}{f(n^\beta)} \\ & \leq \frac{(\sqrt[3]{n})^p}{[n^\beta]^p} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

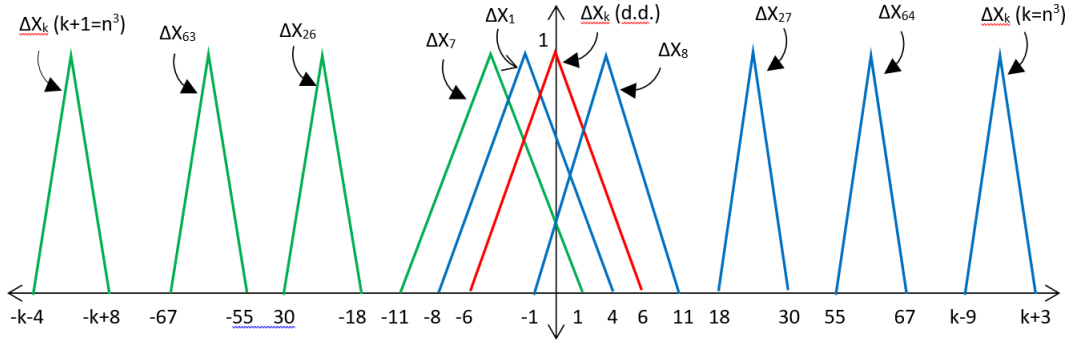
elde edilir. Buna göre $X = (X_k)$ dizisi f modülüsüne göre üstten β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) \\ &= \delta^{f,\beta} (\{7, 26, 63, \dots\} \cup \{\emptyset\}) \\ &= \sqrt[3]{n} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^{f,\beta} (\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\})}{f(n^\beta)} \\ & \leq \frac{(\sqrt[3]{n})^p}{[n^\beta]^p} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden (X_k) dizisi f modülüsüne göre alttan β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Böylece verilen dizi f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı olup Δ -sınırlı değildir (Bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri

Sonuç 4.9. Eğer bir fuzzy sayı dizisi sınırsız bir f modülüsüne göre Δ^f -sınırlı ise bu takdirde $X = (X_k)$ dizisi f modülüsüne göre Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Tersisi doğru değildir.

Teorem 4.10. f bir sınırsız modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ verilsin. f sınırsız modülüsüne göre her β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizisi aynı sınırsız f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Önerme 4.5 gereğince bu dizi f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir. Ayrıca Önerme 4.6'dan dolayı bu dizinin f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı bir dizi olduğu anlaşılır.

Kapsamanın kesinliğini göstermek için $\theta = (2^r)$ lacunary dizisini ve $f(x) = x$ modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} := \ell_1, k \text{ tek ise}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x - 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 4, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} := \ell_2, k \text{ çift ise}$$

şeklinde tanımlayalım. (X_k) α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [\alpha, -\alpha + 2], & k \text{ tek ise} \\ [\alpha + 2, -\alpha + 4], & k \text{ çift ise} \end{array} \right.$$

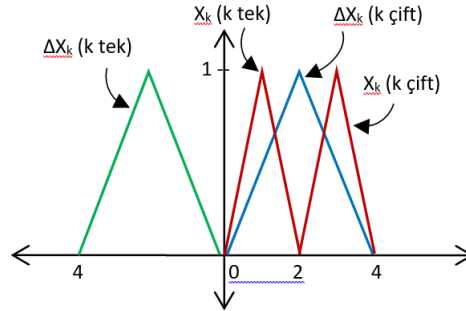
şeklinde bulunur. (X_k) dizisinin (ΔX_k) fark dizisi

$$\Delta X_k = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} + 2, \quad x \in [-4, -2] \\ \frac{-x}{2}, \quad x \in [-2, 0] \\ 0, \quad d.d \end{array} \right\} & k \text{ tek ise} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 2] \\ \frac{-x}{2} + 2, \quad x \in [2, 4] \\ 0, \quad d.d \end{array} \right\} & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. (ΔX_k) fark dizisinin α -seviye kümesi ise

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [2\alpha - 4, -2\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [2\alpha, -2\alpha + 4], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

bulunur. α -seviye kümelerinden $f(x) = x$, $\beta = 1$, $\theta = (2^r)$ özel durumları için $X = (X_k)$ dizisinin f modülüs fonksiyonuna göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı olduğu f modülüsüne göre β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak olmadığı anlaşılır (Bkz. Şekil 4.3).



Şekil 4.3. (X_k) ve (ΔX_k) fuzzy dizilerinin terimleri

Sonuç 4.11. Eğer bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi sınırsız bir f modülüsüne göre Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsak ise aynı f modülüsü için Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Teorem 4.12.

- (i) $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ simetrik değildir.
- (ii) $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ normaldir ve böylece monotondur.
- (iii) $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ bir dizi cebiridir.

İspat. (i) $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x - k - 2, & x \in [k + 2, k + 3] \\ -x + k + 4, & x \in [k + 3, k + 4] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} & k = n^3 \text{ ise} \\ 0, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

$f(x) = x$ sınırsız modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. (X_k) fuzzy sayı dizisinin α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \alpha + 2, k - \alpha + 4], & k = n^3 \text{ ise} \\ [0, 0], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

ve (X_k) dizisinin (ΔX_k) fark dizisi

$$\Delta X_k = \begin{cases} \begin{cases} x - k - 2, & x \in [k + 2, k + 3] \\ -x + k + 4, & x \in [k + 3, k + 4] \\ 0 & d.d \end{cases} & k = n^3 \\ \begin{cases} x + k + 5, & x \in [-k - 5, -k - 4] \\ -x - k - 3, & x \in [-k - 4, -k - 3] \\ 0 & d.d \end{cases} & k + 1 = n^3 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. (ΔX_k) fark dizisinin α -seviye kümesini ise

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \alpha + 2, k - \alpha + 4], & k = n^3 \text{ ise} \\ [-k + \alpha - 5, -k - \alpha - 3], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [0, 0], & d. d. \end{cases}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. $X = (X_k)$ dizisi $\beta > \frac{1}{3}$ ve $\theta = (2^r)$ lacunary dizisi için $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dizi sınıfına aittir.

$Y = (Y_k)$ dizisi (X_k) dizisinin terimlerinin yeniden düzenlenmiş hali, yani

$$(Y_k) = (X_1, X_2, X_8, X_3, X_{27}, X_4, X_{64}, X_5, X_{125}, X_6, X_{216}, X_7, \dots)$$

şeklinde ve bunun fark dizisi

$$(\Delta Y_k) = (X_1 - X_2, X_2 - X_8, X_8 - X_3, X_3 - X_{27}, X_{27} - X_4, \dots).$$

şeklinde yazılabilir.

Buna göre $\beta = 1$ ve $\theta = (2^r)$ özel durumlarında herhangi bir X_0 fuzzy sayısı için

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta Y_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx X_0\}) \neq 0$$

dır. Böylece $(Y_k) \notin S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olacağından $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dizi sınıfının simetrik olmadığı anlaşılır.

(ii) $(X_k) \in S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$d(\Delta Y_k, \bar{0}) \leq d(\Delta X_k, \bar{0})$$

olacak şekilde bir (Y_k) dizisini alalım.

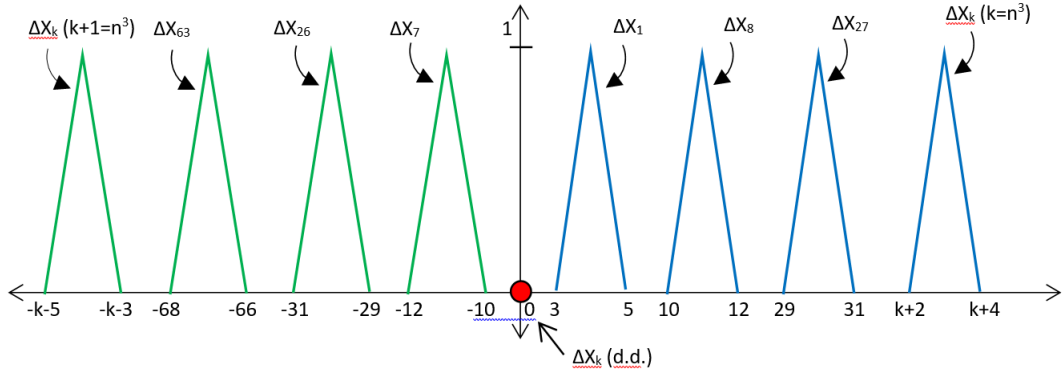
(X_k) dizisi $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dizi sınıfının elemanı olduğundan dolayı

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) = 0$$

şartını sağlayan bir X_0 fuzzy sayısı bulunabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \{k \in I_r : \Delta Y_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx X_0\} \\ & \subset \{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden dolayı $(Y_k) \in S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olduğu anlaşılır. Böylece $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ normaldir ve dolayısıyla monotondur (Bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri

(iii) $(X_k), (Y_k) \in S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olsun. Tanım gereği

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) = 0$$

ve

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta Y_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx X_0\}) = 0$$

benzer şekilde

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}) = 0$$

ve

$$\delta_{\theta}^{f,\beta}(\{k \in I_r : \Delta Y_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx X_0\}) = 0$$

olacak şekilde X_0 ve Y_0 fuzzy sayıları mevcuttur. Buna göre

$$\begin{aligned} & \{k \in I_r : \Delta(X_k \otimes Y_k) > X_0 \otimes Y_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta(X_k \otimes Y_k) \approx X_0 \otimes Y_0\} \\ & \subset \{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\} \\ & \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k > Y_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx Y_0\} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \{k \in I_r : \Delta(X_k \otimes Y_k) < X_0 \otimes Y_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta(X_k \otimes Y_k) \approx X_0 \otimes Y_0\} \\ & \subset \{k \in I_r : \Delta X_k < X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\} \\ & \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k < Y_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta Y_k \approx Y_0\} \end{aligned}$$

kapsamalarından $X_k \otimes Y_k \in S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ bulunur. Böylece $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ bir dizi cebiridir.

Teorem 4.13. f sınırsız bir modülüs fonksiyon olsun. Eğer $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ise $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta}^{f,\gamma}(\Delta_F, b)$ dır.

İspat. Önerme 4.7 'den kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4.13 'ün bir sonucu olarak aşağıdaki verilebilir.

Sonuç 4.14. f sınırsız modülüs fonksiyonu için eğer bir fuzzy sayı dizisi β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı ise aynı f modülüsü için Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 4.15. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $0 < \beta \leq 1$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $\liminf_r q_r > 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)^{\beta}}{t^{\beta}} > 0$ ise $S^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subset S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{h_r}{k_r}\right)^{\beta} \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\beta}$$

sağlanacak şekilde yeterince büyük r ler için $q_r \geq 1 + \delta$ şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. $X_k \in S^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ şeklinde fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde

herhangi bir X_0 fuzzy sayısı ve yeterince büyük r' ler için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{f(k_r)^\beta} f(|\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}|) \\
& \geq \frac{1}{f(k_r)^\beta} f(|\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}|) \\
& = \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)^\beta} \frac{1}{f(h_r)^\beta} f(|\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}|) \\
& = \frac{f(h_r)^\beta}{h_r^\beta} \frac{k_r^\beta}{f(k_r)^\beta} \frac{h_r^\beta}{k_r^\beta} \frac{f(|\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}|)}{f(h_r)^\beta} \\
& \geq \frac{f(h_r)^\beta}{h_r^\beta} \frac{k_r^\beta}{f(k_r)^\beta} \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^\beta \frac{f(|\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}|)}{f(h_r)^\beta}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X_k \in S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.16. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu , $0 < \beta \leq 1$, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer $\limsup_r q_r < \infty$ ise $S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subset S^f(\Delta_F, b)$ dir.

İspat. Aşıkardır.

Uyarı 4.17. Sınırsız bir f modülüsüne göre Δ -sınırlı bir fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi Δ -sınırlı olmasına rağmen bu kural β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı fuzzy sayı dizisinin alt dizisi için geçerli değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.18. $\theta = (k_r)$ dizisi $\liminf_r q_r > 1$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun. $f(x) = x$ sınırsız modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. (X_k) fuzzy sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$X_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x - k + 3, & k - 3 \leq x \leq k - 2 \\ -x + k - 1, & k - 2 \leq x \leq k - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\} \quad k = n^4 \text{ ise}$$

$$0, \quad k \neq n^4 \text{ ise}$$

(X_k) fuzzy sayı dizisinin α -seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} [k + \alpha - 3, k - \alpha - 1], & k = n^4 \text{ ise} \\ [0, 0], & k \neq n^4 \text{ ise} \end{array} \right.$$

ve (X_k) dizisinin (ΔX_k) fark dizisini

$$\Delta X_k = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} x - k + 3, \quad x \in [k - 3, k - 2] \\ -x + k - 1, \quad x \in [k - 2, k - 1] \\ 0 \quad \quad \quad d.d \end{array} \right\} & k = n^4 \text{ ise} \\ \left. \begin{array}{l} x + k, \quad x \in [-k, -k + 1] \\ -x - k + 2, \quad x \in [-k + 1, -k + 2] \\ 0 \quad \quad \quad d.d \end{array} \right\} & k + 1 = n^4 \text{ ise} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. (ΔX_k) fark dizisinin α -seviye kümesi

$$[\Delta X_k]^\alpha = \begin{cases} [k + \alpha - 3, k - \alpha - 1], & k = n^4 \text{ ise} \\ [-k + \alpha, -k - \alpha + 2], & k + 1 = n^4 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{d. d.} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada $\liminf_r q_r > 1$ olduğunda göz önüne alınırsa $(X_k) \in S^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subset S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olduğu yani (X_k) dizisinin $\beta > \frac{1}{4}$ değerleri ve $f(x) = x$ modülüs fonksiyonu için β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı olduğu anlaşılır.

Diğer taraftan (X_k) 'nın bir (Y_k) fuzzy alt dizisini

$$Y_k(x) = \begin{cases} x - k^2 + 3, & k^2 - 3 \leq x \leq k^2 - 2 \text{ ise} \\ -x + k^2 - 1, & k^2 - 2 \leq x \leq k^2 - 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. (Y_k) fuzzy sayı dizisinin α -seviye kümesi

$$[Y_k]^\alpha = [k^2 + \alpha - 3, k^2 - \alpha - 1]$$

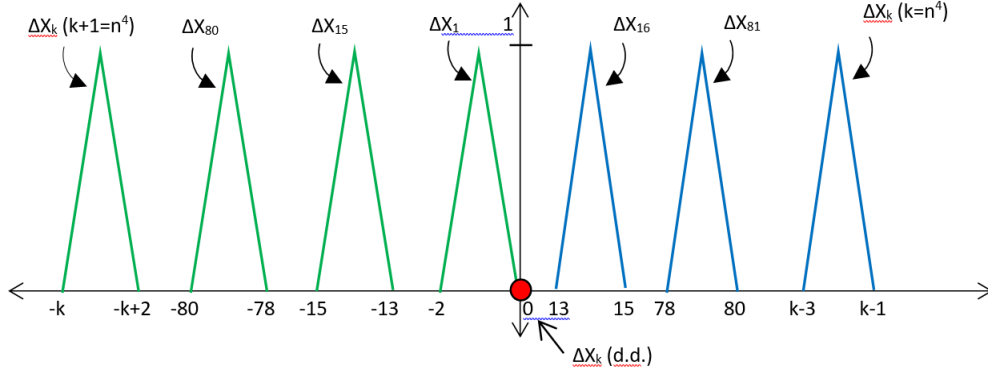
ve (Y_k) dizisinin (ΔY_k) fark dizisini

$$\Delta Y_k = \begin{cases} \frac{x}{2} + k + \frac{3}{2}, & -2k - 3 \leq x \leq -2k - 1 \text{ ise} \\ \frac{-x}{2} - k + \frac{1}{2}, & -2k - 1 \leq x \leq -2k + 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. (ΔY_k) fark dizisinin α -seviye kümesi ise

$$[\Delta Y_k]^\alpha = [-2k + 2\alpha - 3, -2k - 2\alpha + 1]$$

şeklinde. Burada (Y_k) alt dizisinin aynı f modülüs fonksiyonuna göre Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlı olmadığı kolayca görülür (Bkz. Şekil 4.5).



Şekil 4.5. (ΔX_k) fuzzy fark dizisinin terimleri

Teorem 4.19. Sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan bir β sayısı, bir (X_k) fuzzy sayı dizisi ve bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin. Buna göre

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)} > 0 \quad (4.1)$$

ise bu durumda $S^f(\Delta_F, b) \subset S^{f, \beta}(\Delta_F, b)$ dir.

İspat. Herhangi bir X_0 fuzzy sayısı için

$$\begin{aligned} & \{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\} \\ & \supset \{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(k_r)} |\{k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & \geq \frac{1}{f(k_r)} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & = \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)} \frac{1}{f(h_r)^\beta} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \end{aligned}$$

olup r sonsuza giderken limit işlemi yapılır ve (4.1) kullanılırsa $X_k \in S^f(\Delta_F, b)$ ve dolayısıyla $X_k \in S^{f, \beta}(\Delta_F, b)$ elde edilir.

Teorem 4.20. Bir (X_k) fuzzy sayı dizisi, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu, her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ şartını sağlayan $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ lacunary dizileri ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olacak şekilde β ve γ sayılarını göz önüne alalım. Bu durumda

- (i) Eğer $\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)} > 0$ ise $S_{\theta'}^{f, \gamma}(\Delta_F, b) \subset S_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, b)$,
- (ii) Eğer $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(l_r)}{f(h_r)} = 1$ ise $S_\theta^{f, \beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta'}^{f, \gamma}(\Delta_F, b)$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun ve

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{f(h_r)^\beta}{f(k_r)} > 0 \quad (4.2)$$

bağıntısı sağlansın. Herhangi bir X_0 fuzzy sayısı için

$$\begin{aligned} & \{k \leq J_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \leq J_r : \Delta X_k \approx X_0\} \\ & \supseteq \{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\} \end{aligned}$$

ve buradan da f fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k \in J_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in J_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & \geq \frac{f(h_r)^\beta}{f(l_r)^\gamma} \frac{1}{f(h_r)^\beta} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılabilir. Burada $I_r = (k_r, k_r]$, $J_r = (s_{r-1}, s_r]$, $h_r = k_r - k_{r-1}$ ve $l_r = s_r - s_{r-1}$ dir.

Yukarıda verilen (4.3) eşitsizliğinde r sonsuza giderken limit işlemi yapılırsa ve (4.2) eşitsizliği kullanılırsa $S_\theta^{f,\gamma}(\Delta_F, b) \subset S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki $(X_k) \in S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olsun ve her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olacak şekilde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(l_r)}{f(h_r)} = 1 \quad (4.4)$$

sağlansın. f sınırsız modülüsü ve bir X_0 fuzzy sayısı için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k \in J_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in J_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & = \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{s_{r-1} < k \leq k_{r-1} : \Delta X_k > X_0\} \cup \{s_{r-1} < k \leq k_{r-1} : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & + \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k_r < k \leq s_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k_r < k \leq s_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & + \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k_{r-1} < k \leq k_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & \leq \frac{f(k_{r-1}) - f(s_{r-1})}{f(l_r)^\gamma} + \frac{f(s_{r-1}) - f(k_r)}{f(l_r)^\gamma} \\ & + \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & = \frac{f(l_r) - f(h_r)}{f(l_r)^\gamma} + \frac{1}{f(l_r)^\gamma} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \\ & \leq \left(\frac{f(l_r)}{f(h_r)^\gamma} - 1 \right) + \frac{1}{f(h_r)^\gamma} |\{k \in I_r : \Delta X_k > X_0\} \cup \{k \in I_r : \Delta X_k \approx X_0\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.4) 'den dolayı $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(l_r)}{f(h_r)} = 1$ olduğundan ilk terim $X \in S_\theta^{f,\beta}(\Delta_F, b)$ olduğundan $r \rightarrow \infty$ iken son eşitsizliğin sağ tarafı sifira gideceğinden

$S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta}^{f,\gamma}(\Delta_F, b)$ elde edilir.

Teorem 4.20 'nin bir sonucu olarak aşağıdakiler verilebilir.

Sonuç 4.21. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ şartını sağlayan $\theta = (k_r)$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizisi verilsin. Eğer (4.2) sağlanırsa

(i) Her bir $\beta \in (0, 1]$ için $S_{\theta'}^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$

(ii) Her bir $\beta \in (0, 1]$ için $S_{\theta}^f(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta'}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$

(iii) $S_{\theta'}^f(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta}^f(\Delta_F, b)$ dir.

Eğer (4.4) sağlanırsa

(i) Her bir $\beta \in (0, 1]$ için $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta'}^{f,\beta}(\Delta_F, b)$

(ii) Her bir $\beta \in (0, 1]$ için $S_{\theta}^{f,\beta}(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta'}^f(\Delta_F, b)$

(iii) $S_{\theta}^f(\Delta_F, b) \subseteq S_{\theta'}^f(\Delta_F, b)$ dir.

5. SONUÇLAR

Fuzzy sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel sınırlılık kavramları sırasıyla Nuray ve Savaş [9] ile Aytar ve Pehlivan [26] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Altınok ve Mursaleen [27] istatistiksel sınırlılığa Δ fark operatörünü uygulamıştır. Son zamanlarda istatistiksel sınırlılık kavramı Altınok ve Yağdıran [28] tarafından geliştirilerek Δ^m -istatistiksel sınırlılık tanımı verilmiş ve Δ^m -sınırlılık ile aralarında bağıntılar elde edilmiştir. Bhardwaj [31] reel sayı dizileri için f -yoğunluk kavramını kullanarak α -dereceden f -istatistiksel yakınsaklık ve α -dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramlarını vermiştir. Altınok vd. [43] bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini kullanarak fuzzy sayı dizileri için β -dereceden lacunary istatistiksel sınırlılığı tanımlamıştır. Tez çalışmamızın üçüncü bölümünde fuzzy sayı dizileri için sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve Δ fark operatörü yardımıyla β -dereceden Δ^f -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve β -dereceden kuvvetli Δ^f -lacunary toplanabilme kavramları verilerek bunlarla ilgili bazı dizi sınıfları tanımlanmış ve bu dizi sınıfları arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve Δ fark operatörü kullanılarak Altınok vd. [43] 'nin ve Bhardwaj [31] 'in elde ettiği sonuçlar geliştirilerek bazı yeni dizi sınıfları tanımlanmış ve daha zengin sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde pek çok açıklayıcı örnekler ve grafikleri yardımıyla Δ^f -istatistiksel sınırlılık ve Δ^f -lacunary istatistiksel sınırlılık kavramlarıyla ilgili bazı önemli kapsama bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, tanımlanmış olan dizi sınıflarının simetriklik, normallik ve monotonluk gibi önemli özellikleri de incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *Colloq Math.*, 2, 241–244.
- [2] Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *Am. Math. Mon.*, 66, 361–375.
- [3] Connor, J.S.(1988).The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, 8,47-63.
- [4] Çakallı, H. (1996). On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl. Math. Sci.*, 43, 27-31.
- [5] Caserta, A.; Maio, G.D.; Kocinac L.D.R. (2011). Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, 11, Article ID:420419.
- [6] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Inform Control*, 8, 338–353.
- [7] Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL*, 28, 28-37.
- [8] Nanda, S. (1989). On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 33, 123–126.
- [9] Nuray, F. and Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy real numbers, *Math. Slovaca*, 45(3), 269–273.
- [10] Kwon, J.S. (2000). On statistical and p -Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput. Appl. Math.*, 7(1), 195-203.
- [11] Çolak, R.; Altınok, H.; Et, M. (2009). Generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Chaos Solitons Fractals*, 40, 1106-1117.
- [12] Altınok, H.; Çolak, R.; Et, M. (2009). λ -Difference sequence spaces of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21), 3128-3139.
- [13] Altınok, H. (2014). Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Systems*, 26, 847–856.
- [14] Aytar, S. (2004). Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, *Inform. Sci.*, 165, 129-138.
- [15] Et, M.; Altınok, H.; Çolak, R. (2006). On λ -statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers, *Inform. Sci.*, 176(15), 2268-2278.
- [16] Kizmaz, H. (1981). On certain sequence spaces, *Canad. Math. Bull.*, 24(2), 169–176.
- [17] Et, M.; Çolak, R. (1995). On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, 21(4), 377-386.
- [18] Gadjiev, A. D.; Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.*, 32(1), 129-138.
- [19] Çolak, R. (2010). Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121-129.
- [20] Altınok, H.; Altın, Y.; Işık, M. (2012). Statistical Convergence and Strong p -Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 9(2), 65-75.
- [21] Freedman, A.R.; Sember, J.J.; Raphael, M. (1978). Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37(3), 508-520.
- [22] Fridy, J.A.; Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.*, 160(1), 43-51.
- [23] Altınok, H.; Çolak, R. (2009). Almost lacunary statistical and strongly almost lacunary convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, *J. Fuzzy Math.*, 17(4), 951-968.
- [24] Şengül, H.; Et, M. (2014). On lacunary statistical convergence of order α , *Acta Math. Sci.*, 34B(2), 473-482.

- [25] Altınok, H.; Et, M.; Çolak, R. (2014). Some remarks on generalized sequence space of bounded variation of sequences of fuzzy numbers, *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 11(5), 39-46.
- [26] Aytar, S.; Pehlivan, S. (2006). Statistically monotonic and statistically bounded sequences of fuzzy numbers. *Inform. Sci.*, 176(6), 734-744.
- [27] Altınok, H.; Mursaleen, M. (2011). Δ -Statistical boundedness for sequences of fuzzy numbers, *Taiwanese J. Math.*, 15(5), 2081-2093.
- [28] Altınok, H.; Yağdıran, D. (2016). Lacunary Statistical Convergence Of Order β in Difference Sequences Of Fuzzy Numbers, *J. Intell. Fuzzy Systems*, 31, 227-235.
- [29] Nakano, H. (1953). Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, 5, 29-49.
- [30] Aizpuru, A.; Listan-Garcia, MC and Rambla-Barreno, F. (2014). Density by moduli and statistical convergence. *Quaest. Math.*, 37, 525-530.
- [31] Bhardwaj, VK.; Dhawan, S. (2015). f -statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, *J. Inequal. Appl.* 2015:332 DOI 10.1186/s13660-015-0850-x.
- [32] Altınok, H.; Deniz, D. (2019). (Δ^m, f) -Statistical convergence for sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Systems*, 36, 3525-3533.
- [33] Niven, I.; Zuckerman, H.S. (1960). An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.
- [34] Fridy, J. (1985). On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301-313.
- [35] Tabib, K.K. (2012). The Topology of statistical convergence, master of sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.
- [36] Fridy, J.A.; Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125(12), 3625-3631.
- [37] Chang, S.S.L.; Zadeh, L.A. (1972). On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, 2, 30-34.
- [38] Diamond, P.; Kloeden, P. (1994). Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [39] Altin, Y.; Et, M.; Başarır, M. (2007). On some generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Kuwait J. Sci. Engrg.*, 34, (1A) 1-14.
- [40] Puri, M. L.; Ralescu, D.A. (1983). Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 91, 552-558.
- [41] Tripathy, B.C.; Debnath, S. (2013). On generalized difference sequence spaces of fuzzy numbers, *Acta Scientiarum. Technology*, 35(1), 117-121.
- [42] Pehlivan, S.; Fisher, B. (1995). Some sequence spaces defined by a modulus, *Math. Slovaca.*, 45(3), 275-280.
- [43] Altınok, H.; Et, M.; Altin, Y. (2018). Lacunary statistical boundedness of order β for sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Systems*, 35, 2383-2390.

