**T.C.**
**ADIYAMAN ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# BANACH UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ $\alpha$-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARA YAKLAŞIMI

**Öznur KORKUT**

**Matematik Anabilim Dalı**

**ADIYAMAN, 2022**

## ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**BANACH UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ α-GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARA YAKLAŞIMI**

**Öznur KORKUT**

Adıyaman Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Seyit TEMİR

YIL:2022, Sayfa sayısı: VIII+70

Jüri: Prof. Dr. Seyit TEMİR

Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY

Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Bu tez çalışmasında, genişlemeyen dönüşümlerin yeni bir sınıfı olan genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler incelenmektedir. Lineer olmayan dönüşümlerin bu yeni sınıfı genişlemeyen dönüşümleri ve Suzuki-tip genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını içermektedir. Bu tez çalışmasında kaynaklar kısmında verilen makaleler detaylı olarak incelenerek α-genişlemeyen dönüşümlerle diğer bazı lineer olmayan dönüşümler arasındaki ilişkilerin çalışması yapılmaktadır. Bu dönüşümlerin Noor iterasyon süreci kullanılarak sabit noktaya yaklaşımı incelenmektedir. Ayrıca genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümlerin yeni iterasyon süreci kullanılarak sabit noktalara yaklaşımları çalışılarak bu sabit nokta yaklaşımları ile ilgili örnekler verilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** α-Genişlemeyen Dönüşüm; Genelleşmiş α-Genişlemeyen Dönüşüm; İterasyon Süreçleri; Sabit Nokta; Düzgün Konveks Banach Uzayı.

## ABSTRACT

**MSc Thesis**

**APPROXIMATING FIXED POINTS OF GENERALIZED $\alpha$-NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES**

**Öznur KORKUT**

Adıyaman University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Seyit TEMİR
Year : 2022 , Number of pages:VIII+70

Jury : Prof. Dr. Seyit TEMİR
:Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
: Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

This thesis examines and focuses on generalized non-expansive mappings, which are a new type of a class of non-expansive mappings. This new class of nonlinear mappings includes non-expansive mappings, a class of Suzuki-type generalized non-expansive mappings. In this thesis, the articles provided in the references section, are examined in details and the relations between α-non-expansive mappings and some other nonlinear mappings are studied. The fixed point approach of these mappings is studied by using Noor iteration process. In addition, the approximation of generalized α-non-expansive mappings to fixed points is studied by a new iteration process and examples of these fixed point approximations are provided.

**Keywords:** α-Nonexpansive Mappings; Generalized α-Nonexpansive Mappings; Iteration Processes; Fixed Points; Uniformly Convex Banach Spaces.

## BEYAN

"Banach uzaylarında genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalara yaklaşımı" başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Öznur KORKUT

# TEŞEKKÜR

Tez çalışması titiz bir çalışma stratejisini, sürekli araştırmayı ve emek-yoğun bir raporlama sürecini gerektiren bir dönem olarak ifade edilebilir. Bu süreçte, gerek öğrenim sürecinde gerekse araştırmamın her aşamasının ve yürütülmesinde bana yol gösteren, beni yüreklendiren, bilgisi ve alan deneyimleri ile her zaman özveriyle yanımda olan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Seyit TEMİR'e, lisansüstü öğrenimim boyunca tecrübelerinden faydalandığım tüm değerli hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Verilerin analizi ve tablolaştırılması aşamasında her zaman yanımda olan, kıymetli zamanını ve dostluğunu paylaşan arkadaşım Elif Didem ÇELİK de içten bir teşekkürü hak ediyor. İyi ki varsınız!

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi lisansüstü öğrenim sürecinde de her zaman yanımda olup beni koşulsuz destekleyen annem Hediye EVREN'e, kıymetli kardeşlerim Feyza ve Ali'ye, varlıklarıyla yaşama gücü veren, her zaman değerli ve anlamlı hissettiren, araştırmamın tamamlanması ve raporlanmasında ve tüm koşuşturmalarımda yanımda olan, yorulduğum anlarda deneyim ve önerilerini esirgemeyen sevgili eşim Dr. Ali KORKUT ve biricik oğlum Ahmet Affan'a hayatımda oldukları ve hep olacakları için çok teşekkür ederim.

Öznur KORKUT

## İÇİNDEKİLER

## ÇİZELGELER DİZİNİ

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# SİMGELER

| | |
|---|---|
| (V,F,+, .) | : Lineer uzayı (vektör uzayı) |
| $(X, \|\|.\|\|)$ | : Normlu uzay |
| $R_A$ | : A' nın çapı |
| $\langle\ \rangle$ | : İç çarpım fonksiyonu |
| X* | : X'in normlu duali |
| *F(G)* | : *G* nin sabit noktalarının kümesi |
| $r_\alpha(u, \{u_n\})$ | : Asimptotik yarıçap |
| $Z_\alpha(K, \{u_n\})$ | : Asimptotik merkezlerinin sınıfı |
| $N_\alpha(K)$ | : $\alpha < 1$ için $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin kümesi |
| $u_n \to u$ | : $u_n$ 'nin $u$'ya kuvvetli yakınsaması |
| $u_n \rightharpoonup u$ | : $u_n$ 'nin $u$'ya zayıf yakınsaması |

# 1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, topoloji ve analizin uygun bir birleşimi olduğundan lineer olmayan denklemlerin çalışmasında çok önemli ve güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Bir dönüşümün değişmez noktalarını bulma, dönüşümün sabit noktalarını bulma problemi ile aynı anlamdadır. Tabii ki bu, dönüşüm özelliklerine ve tanımlı olduğu uzaya bağlı olarak çok geniş bir uygulama alanına sahip olur. Bu teori matematiğin bir çalışma alanı olmasının yanında mühendislik, tıp, kimya, ekonomi gibi farklı alanlarda uygulamaları olduğundan kullanışlı bir araç olmuştur. Sabit nokta teorisinde ele alınan bazı dönüşümlerin sabit noktasının varlığını ve değerini bulmak kolay olmadığından bunları hesaplamak için iteratif algoritma ve iterasyon süreçleri kullanılmaktadır. Çok iyi bilinen Banach daralma teoreminde, sabit noktaların yaklaşımı için Picard iterasyon süreci [1] kullanıldı. Ancak, Picard iterasyon sürecinin [1] genişlemeyen dönüşümler için gerekli olmadığı görüldükten sonra son altmış beş yılda, çok sayıda araştırmacı bu alana yönelmiş ve iterasyon süreçlerini geliştirmiş, yalnızca genişlemeyen dönüşümler için değil, aynı zamanda diğer bazı daha geniş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için de sabit noktayı tahmin etmek için araştırmalar yapmışlardır. Diğer bir iterasyon süreci 1953 yılında Mann [2] tarafından sunulmuştur. Fakat bu iterasyon süreci pseudo-daralma dönüşümlerinin sabit noktaya yakınsamalarında başarısız olduğundan 1974 yılında Ishikawa [3] tarafından yeni iterasyon süreci sunulmuştur. Son yirmi yıl içerisinde çok sayıda araştırmacı tarafından iterasyon şemalarının basitliği ve hızlılığı bağlamında iterasyon süreçleri incelenmiş ve geliştirilmiştir. Diğer bilinen iterasyon süreçleri, Noor [4] üç adım iterasyon süreci, Agarwal ve ark. [5] iterasyon süreci, Sahu [6] Normal S-Iterasyon süreci, Kadıoğlu ve Yıldırım [7] Picard Normal S-Iterasyon (PNS) süreci, Gürsoy ve Karakaya [8] Picard S-iterasyon süreci, Abbas ve Nazir [9] iterasyon süreci, Thakur ve ark. [10] iterasyon süreci sayılabilir. Son yıllarda ise, 2018 yılında Ullah ve Arshad [11], M iterasyon sürecini, yine 2018 yılında Hussain ve ark. [12], K iterasyon sürecini, 2020 yılında Ali ve ark. [13], JF iterasyon sürecini, 2021 yılında Hussain ve ark. [14], D iterasyon sürecini geliştirmişlerdir.

Diğer yandan, son zamanlarda matematikte sabit nokta teorisi alanında genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirilmesi çalışmaları yoğunlukla yapılmaktadır. Özellikle 2008 yılında Suzuki [15] tarafından genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sunulmasından sonra gerek genelleştirme ve gerekse daha hızlı iterasyon süreçleri sunularak bu dönüşümlerin sabit noktaya yakınsamaları ile ilgili çalışmalar artmıştır. Yine yakın zamanda Aoyama ve Kohsaka [16], genişlemeyen dönüşümlerin "$\alpha$-genişlemeyen dönüşümler" olarak adlandırılan yeni bir sınıfını sunmuşlardır. Pant ve Shukla [17], $\alpha$-genişlemeyen dönüşümler ile Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri birleştirerek genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin yeni sınıfını sunmuşlardır.

Bu tezde, $\alpha$-genişlemeyen dönüşümler ile diğer bazı lineer olmayan dönüşümler arasındaki ilişkilerin çalışmasını yapacağız ve bu dönüşümlerin Noor [4] iterasyon süreci ile sabit noktaya yaklaşımı inceleyeceğiz. Buna ilave olarak, Bulgular ve Tartışma bölümünün üçüncü kısmında, genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşümler için yeni iterasyon süreci kullanılarak sabit noktalarına yaklaşımları incelenerek bu sabit nokta yaklaşımları ile ilgili örnekleri vereceğiz.

# 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığının çalışılması 1965 yılından beri Browder [18], Göhde [19] ve Kirk'ün [20] bağımsız çalışmalarından başlamıştır. İlk olarak Browder [18], bir Hilbert uzayının sınırlı kapalı ve konveks bir altkümesi üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin bir sabit noktasını elde etmiştir. Kirk [20] ise benzer sonuçları genelleştirmek için yansımalı Banach uzaylarında normal yapı özelliğini kullanmıştır.

Son zamanlarda, birçok matematikçi genişlemeyen dönüşümlerin genelleşmesi ve genişlemesi üzerine çok sayıda çalışma ortaya koymuşlardır. Genellikle, dönüşümlerin tanımları içinde, tüm noktaların sağlanması için belli şartlar önerilir. Bu yüzden doğal olarak, teoremin sonucunu etkilemeksizin önemli ölçüde rahatlık sağlandığı görülmek istenir. Bu problemi çözmek için Tomara Suzuki önemli bir girişimde bulunmuştur. 2008'de Suzuki [15], genişlemeyen dönüşümlerin ilginç bir genellemesini sunmuş ve bazı yakınsaklık ve varlık sonuçlarını elde etmiştir. 2008'de Suzuki [15], Suzuki-genellemiş genişlemeyen dönüşümler (veya C şartı) olarak adlandırılan, tek-değerli dönüşümler sınıfını tanıtmıştır. Açıkça görülmektedir ki, her genişlemeyen dönüşüm (C) şartını sağlamaktadır; ancak bunun tersi doğru değildir, yani (C) şartı, genişlemeyen dönüşüm özelliğinden daha zayıf, quasi-genişlemeyen özelliğinden daha güçlüdür. Yakın zamanda Aoyama ve Kohsaka [16], genişlemeyen dönüşümlerin yeni bir sınıfını sunmuşlardır. Aoyama ve Kohsaka [16], $\alpha$-genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teoremi elde etmişlerdir. Bu sınıf, genişlemeyen dönüşümler sınıfını kapsamaktadır. Burada, $0-$genişlemeyen dönüşümler tam olarak genişlemeyen dönüşümler olduğu görülmektedir.

Genişlemeyen dönüşümler süreklidirler. Ancak, Suzuki'nin [15] sunduğu Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler ve Aoyama ve Kohsaka'nın [16] sunduğu $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin sürekli olmaları gerekmez. Bu yüzden, bu dönüşümler uygulamada ve teorikte önemlidir. Buradan, doğal olarak bir soru ortaya çıkmaktır. Suzuki-tip genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri ve $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin her ikisini kapsayan dönüşümler sınıfı var mıdır? Kısmi olarak bu sorunun cevabı olumludur. Pant ve Shukla'nın [17] bu soruya kısmi olarak olumlu cevap verdikleri gözlemlenmektedir. Pant ve Shukla [17], α-genişlemeyen dönüşümler ile Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümleri birleştirerek genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin yeni sınıfını sunmuşlardır. Pandey ve ark. [21], Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerinin genel bir sınıfının sabit nokta sonuçlarını incelemişler. Önemli belli başlı iterasyon yöntemlerini, farklı parametre tercihlerini karşılaştırmak için bazı açıklayıcı nümerik örnekler sunmuşlar ve buldukları sonuçların lineer olmayan denklemlere uygulamasını da vermişlerdir.

Diğer taraftan, 1922 yılında S.Banach, Picard iterasyon sürecini Picard [1] ile yaklaşılabilen daralma dönüşümlerinin sabit noktalarını bulmak için Banach daralma prensibi olarak bilinen metrik sabit nokta teorisinde temel sonucu verdi. Ancak, bir sabit noktaya yakınsayan genişlemeyen dönüşümler için Picard iterasyon sürecinin gerekli olmadığı kolayca görülebilir. Bu yüzden son altmış beş yılda, çok sayıda araştırmacı bu alana yönelmiş ve iterasyon süreçlerini geliştirmiş olup yalnızca genişlemeyen dönüşümler için değil, aynı zamanda genelleşmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için de sabit noktayı tahmin etmek için araştırmalar yapmışlardır. 1953 yılında Mann [2], Mann İterasyon sürecini, 1974'de Ishikawa [3], Ishikawa iterasyonunu tanıtmıştır. 2000 yılında Noor [4] üç adım iterasyon sürecini tanıttı. 2007 yılında Agarwal ve ark. [5], yakınsaklık oranı Picard iterasyonuna benzer diğer sabit nokta iterasyon işlemlerinden daha hızlı yeni bir iterasyon sürecini tanıtmıştır.

2011'de, Sahu [6] Normal S-Iterasyon sürecini sunmuştur. 2014 yılında Kadıoğlu ve Yıldırım [7], Picard Normal S-Iterasyon (PNS) sürecini tanıtmışlardır. 2014 yılında, Abbas ve Nazir [9], yeni bir iterasyon sürecini tanıtmış olup, Picard, Mann ve Agarwal ve ark. iterasyon süreçlerinden daha hızlı olduğunu ispatlamışlardır. 2016 yılında Thakur ve ark. [10], Suzuki-genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaya yakınsayan yeni iterasyon süreci sunmuşlardır . Daha sonra 2018 yılında Ullah ve Arshad [11], mevcut iterasyon süreçleri ile karşılaştırıldığında daha iyi yakınsaklık oranları sunan ve M iterasyonu olarak bilinen, üç aşamalı yeni bir iterasyon sürecini önermişlerdir. Hussain ve ark. [12], K iterasyon sürecini daralma dönüşümleri için ispatlayıp, buradaki Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Picard-S, Normal-S, Picard normal S-iterasyon süreçlerinden daha hızlı yakınsadığını göstermişlerdir. Ek olarak, Hussain ve ark. [12], K iterasyon işlemi yardımıyla, daralma dönüşümlerinin sabit noktası için veri bağımlılığı sonucunu kanıtlayıp ve düzgün konveks Banach uzaylarında, Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için bazı zayıf ve güçlü yakınsama teoremlerini de ayrıca ispatlamışlardır. 2020 yılında Ali ve arkadaşları [13] JF iterasyon sürecinin, Hardy ve Rogers'ın

$$( \|Gu - Gv\| \leq a\|u - v\| + (\|u - Gu\| + \|v - Gv\|) + c(\|u - Gv\| + \|v - Gu\|))$$

şartını sağlayan genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına bazı bilinen iterasyon süreçlerinden daha hızlı yakınsadığını da sayısal olarak ortaya koymuşlardır. Ayrıca, düzgün konveks Banach uzaylarında, genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için JF iterasyon sürecini kullanarak bazı yakınsaklık sonuçlarını kanıtlamışlardır. Bir uygulama olarak, gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümüne yaklaşmak için yeni tanımlanmış iterasyon sürecini kullanmışlardır. Yine, ana sonuçları desteklemek için, bazı açıklayıcı sayısal örnekler de sunmuşlardır. 2021 yılında Hussain ve ark. [14], Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için D iterasyon sürecini tanıtmış ve veri bağımlılığı sonucunu göstermişlerdir.

# 3. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlara, teoremlere ve kavramlara yer verilmiştir.

## 3.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar

**Tanım 3.1.1.(Metrik ve Metrik Uzay):** $X$ boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $x, y, z \in X$ için

**M1** $d(x, y) \geq 0$
**M2** $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
**M3** $d(x, y) = d(y, x)$
**M4** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona $X$ üzerinde bir metrik adı verilir. $(X, d)$ ikilisine de bir metrik uzay denir [22].

**Tanım 3.1.2 (Cauchy Dizisi ve Tamlık):** $(X, d)$ bir metrik uzay ve bu uzay içinde bir dizi $\{u_n\}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n, m$ olduğunda

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0$ doğal sayısı varsa $\{u_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [23].

Metrik uzay içinde yakınsak her dizi Cauchy dizisidir. $X$ ‘ de her Cauchy dizisi yakınsak ise $X$’ in tam olduğu söylenir.

**Tanım 3.1.3 (Yakınsak Dizi ve Limit):** $(X, d)$ metrik uzayı içinde $\{u_n\}$ bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$ olacak şekilde bir $u \in X$ bulunabiliyorsa $\{u_n\}$ dizisi $u$ noktasına yakınsaktır denir [24]. Ayrıca $u$ noktasına $\{u_n\}$ dizisinin limiti denir. $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ ya da $u_n \to u$ şeklinde gösterilir.

$(X, d)$ bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. Bir $u_0 \in X$ için $u_0$'ın her bir $u_0$'dan farklı en az bir $v \in K$ noktası içeriyorsa $u_0$ noktasına $K$ 'nın bir yığılma noktası denir. $K$'nın yığılma noktalarının kümesi $K'$ ile gösterilir [23].

$(X, d)$ bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. $K \cup K'$ kümesine $K$'nın kapanışı denir ve $\overline{K}$ ile gösterilir [22].

$\overline{K} = K$ ise $K$'ya kapalı küme denir [22].

**Tanım 3.1.4. (Kompakt Küme):** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bir $K \subset X$ kümesindeki her $\{u_n\}$ dizisi $K$'nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse $K$'ya bir kompakt küme denir [25].

**Tanım 3.1.5. (Lineer Uzay)**: V$\neq \emptyset$ bir küme ve $\boldsymbol{F}$ bir cisim olsun. +:VxV→V ve . :$\boldsymbol{F}$xV→V işlemi tanımlansın. Eğer + ve . işlemleri aşağıdaki özellikleri şartları sağlarsa (V,$\boldsymbol{F}$,+, .) dörtlüsüne lineer uzay (vektör uzayı) denir [22].

1. Her u, v, w ∈ V için (u+v)+w = u+(v+w )' dir.

2. Her u, v ∈ V için u+v=v+u' dir.

3. Her u ∈ V için u+$\theta$=$\theta$+u=u olacak şekilde $\theta$ ∈ V vardır.

4. Her u ∈ V için u+v = v+u = $\theta$ olacak şekilde v∈V vardır.

5. Her $\alpha \in \boldsymbol{F}$ ve her u,v∈ V için $\alpha$.(u+v)=$\alpha$.u+$\alpha$.v'dir.

6. Her $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ ve her u∈V için $(\alpha + \beta)$.u =$\alpha$.u +$\beta$.u'dur.

7. Her $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ ve her u∈V için $(\alpha\beta)$ u=$\alpha(\beta$ u)'dir.

8. Her u∈V için 1.u=u olacak şekilde 1∈$\boldsymbol{F}$ vardır.

**Tanım 3.1.6. (Normlu uzay )** : $X$ , $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|.\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $u$'daki değerini $\|u\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon,

$\forall u, v \in X$ için

N1. $\|u\| \geq 0$ ve $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

N2. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $(\alpha \epsilon \boldsymbol{F})$

N3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna $X$' de ($X$ üzerinde) bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [23,24].

$X$ normlu bir lineer uzay olmak üzere, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ $d(u, v) = \| u - v \|$ şeklinde tanımlanan $d$ dönüşümü $X$ uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Şimdi aşağıdaki ifadeleri verelim:

i) $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi $A$ olsun. Eğer

$$R_A = sup\{\|u - v\|: u \in A, v \in A\}$$

$R_A$'ya $A$ kümesinin çapı denir. [23].

ii) $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir [23].

iii) $A$ sınırlıdır ancak ve ancak her $u \in A$ için $\|u\| \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ vardır [24].

**Tanım 3.1.7. (Tam Normlu Uzay (Banach Uzayı)):** Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi $X$ içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [23,24,25].

*X'* in reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre $X$ Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.8 (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı):** $X$, $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her u, v, w $\in X$ ve her α$\in \boldsymbol{F}$ için $\langle\ \rangle : X \times X \to \boldsymbol{F}$ fonksiyonu

$\dot{\mathrm{I}}_1$. $\langle \mathrm{u}+\mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{u}, \mathrm{w}\rangle + \langle \mathrm{v}, \mathrm{w}\rangle$

$\dot{\mathrm{I}}_2$. $\langle \alpha \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \alpha\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle$

$\dot{\mathrm{I}}_3$. $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle = \overline{\langle \mathrm{v}, \mathrm{u}\rangle}$

$\dot{\mathrm{I}}_4$. $\langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle \geq 0$ ve $\langle \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{u} = \theta$

şartlarını sağlıyorsa, iç çarpım fonksiyonu denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı lineer uzaya iç çarpım uzayı denir ve $(X, \langle\ \rangle)$ biçiminde gösterilir [23]. Her iç çarpım uzayı aynı zamanda bir normlu uzaydır.

**Tanım 3.1.9. (Hilbert Uzayı):** $X$ bir iç çarpım uzayı ve $\|.\|$ iç çarpım normu olsun.

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

olarak tanımlanırsa $(X, d)$ bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu $d$ metriğine göre $X$ iç çarpım uzayı tam ise, $X$'e Hilbert uzayı denir. Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır [23,24].

**Tanım 3.1.10. (Düzgün Konveks Uzay):** $X$ bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1$ ve $\|u - v\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $u, v \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|u + v\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \geq 0$ sayısı varsa, $X$'e düzgün (*uniformly*) konveks uzay adı verilir [24].

**Tanım 3.1.11. (Konveks küme):** $K$, $X$ lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Her u, v $\in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)u + \lambda v \in K$ ise, $K$'ya konveks küme denir. Her vektör uzayı konvekstir. Her alt uzay konvekstir [24,26].

**Teorem 3.1.12.** $X$ Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta_u(\varepsilon) > 0$ olmasıdır [26].

**Örnek 3.1.13.** Her $X$ Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $u, v \in X$ için paralelkenar kuralından

$$\|u+v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u-v\|^2\text{'dir.}$$

$u \neq v$ ve $B_X = \{u \in X, \|u\| \leq 1\}$ olmak üzere $u, v \in B_X$ ve $\|u - v\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|u-v\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|u-v\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, $X$ bir düzgün konveks uzaydır [24, 26].

**Tanım 3.1.14. (Lineer dönüşüm)**: $X$ ve $Y$ aynı bir $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $G: X \to Y$ dönüşümü her $u, v \in X$ ve her $\alpha \in \boldsymbol{F}$ için

$$G(u+v) = G(u) + G(v)$$
$$G(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot G(u)$$

ya da buna denk olarak her $u, v \in X$ ve $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ için

$$G(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot G(u) + \beta \cdot G(v)$$

şartını sağlıyorsa $G$ dönüşümüne lineer dönüşüm denir [26].

Eğer $G$ dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse $G$ dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

**Tanım 3.1.15. (Normlu Duali):** $X$ bir normlu lineer uzay olsun. $X$' de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $B(X,\mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani

$B(X,\mathbb{R})=\{G: X\rightarrow\mathbb{R}$ lineer ve sürekli $\}$ olsun.

Her $u\in X$ ve $G_1,G_2\in B(X,\mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (G_1+G_2)(u)=G_1(u)+G_2(u) \\ (\alpha G_1)(u)=\alpha G_1(u) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $B(X,\mathbb{R})$ bir lineer uzaydır. Bu $B(X,\mathbb{R})$ uzayına $X$' in normlu duali denir ve $X^*$ ile gösterilir [26]. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için $X$ tam olmasa bile $X^*$ daima Banach uzayıdır.

**Tanım 3.1.16. (Kuvvetli Yakınsaklık):** $X$ normlu uzay ve $\{u_n\}$, $X$' de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|=0$ olacak şekilde $u\in X$ varsa bu $\{u_n\}$ dizisi $u$' ya yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır ) denir. Bu durum $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ ya da kısaca $u_n\overset{k}{\rightarrow}u$ ile gösterilir [25].

**Tanım 3.1.17. (Zayıf Yakınsaklık):** $X$ normlu uzay ve $\{u_n\}$, $X$ 'de bir dizi olsun. Eğer her $g\in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty}g(u_n)=g(u)$$

olacak şekilde $u\in X$ varsa bu $\{u_n\}$ dizisi $u$'ya zayıf yakınsaktır denir ve bu durum $u_n\overset{z}{\rightarrow}u$ ya da $u_n\rightharpoonup u$ şeklinde gösterilir [25].

**Teorem 3.1.18 (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık):** $X$ normlu uzay ve $\{u_n\}$, $X$'de bir dizi olsun. Bu durumda

i) $\{u_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsaksa aynı zamanda zayıf yakınsaktır. Fakat zayıf yakınsak olan bir dizi kuvvetli yakınsak olmak zorunda değildir.
ii) Sonlu boyutlu normlu uzayda zayıf yakınsaklık ile kuvvetli yakınsaklık denktir [25].

**Tanım 3.1.19. (Süreklilik) :** $(X, \|.\|_1), (Y, \|.\|_2)$, normlu lineer uzaylar, $u_0 \in X$ ve $X$ uzayından $Y$ uzayının içine bir $g$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|u - u_0\|_1 < \delta \Longrightarrow \|g(u) - g(u_0)\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$g\big(B(u_0, \delta)\big) \subset B\big(g(u_0, \varepsilon)\big)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $g$ fonksiyonuna $u_0$ noktasında süreklidir denir. Bir $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan $g$ fonksiyonuna $X$ üzerinde sürekli fonksiyon denir [25].

**Tanım 3.1.20. (Sınırlı dönüşüm):** $(X, \|.\|)$ ve $(Y, \|.\|)$ iki normlu uzay ve $G: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $u \in X$ için

$$\|G(u)\| \leq M \cdot \|u\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, $G$ dönüşümüne sınırlı dönüşüm denir [24].

## 3.2. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi

**Tanım 3.2.1. (Sabit Nokta):** $X$ boş olmayan bir küme ve $G{:}X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $G(u) = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa bu $u$ noktasına $G$'nin sabit noktası denir. $G$'nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(G)$ biçiminde gösterilir [23].

**Örnek 3.2.2.** $A$ boştan farklı bir küme $I{:}A \to A$ özdeş dönüşümünde $A$ kümesinin bütün elemanları için sabit noktadır.

**Örnek 3.2.3.** $X$=(0,1] ve $0 < a < 1$ olmak üzere $G$:$X \to X$ , $G(u)$=$\frac{u}{a}$ dönüşümü için sabit noktası yoktur.

**Örnek 3.2.4.** $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $G$:$X \to X$, $G(u)$=$u^3 - 2u^2 - u + 4$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(G)$={√2,−√2 ,2}'dir.

**Örnek 3.2.5.** $G$: (0,1]→ $(0,1]$ $G(u)$=$\cos u$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

**Örnek 3.2.6.** $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $G_1, G_2$: $X \to X$ dönüşümleri $G_1(u)$=$u^2 - 2$ ve $G_2(u)$=$u^2 - 2u + 2$ tanımlansın. Bu dönüşümlerin sabit noktalarının kümesi $F(G_1)$∩ $F(G_2)$={2}'dir.

**Örnek 3.2.7.** $X = \mathbb{Z}$ olmak üzere $G(u) = 1 - 2u$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. $u = \frac{1}{3}$ sabit nokta olabilirdi fakat $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan sabit nokta değildir.

**Örnek 3.2.8.** $G(u) = \begin{cases} 3u & 0 < u < \frac{1}{2} \\ 1 - u & \frac{1}{2} \leq u < \frac{3}{2} \end{cases}$ dönüşümünün sabit noktası $\frac{1}{2}$'dir.

**Örnek 3.2.9.** $G(u)$=ln $u$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

**Örnek 3.2.10.** $G(u)$=$3 - 2^u$ dönüşümünün sabit noktası 1'dir.

**Tanım 3.2.11. (Lipschitzan Dönüşüm):** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $G$:$X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer

**a)** $\forall\, u, v \in X$ için $d(Gu, Gv) \leq kd(u, v)$olacak şekilde bir $k$≥0 sabit sayısı varsa $G$' ye Lipschitzian dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük $k$ sayısına da Lipschitzian sabiti denir [27].

**b)** Eğer $\forall\, u, v \in X$ $d(Gu, Gv) \leq kd(u, v)$ olacak şekilde en az bir $k \in (0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa $G$' ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (*contraction mapping*) denir [27].

**Örnek 3.2.12**. $X = [0,1]$ olmak üzere $Gu = 2u^2$ şeklinde tanımlanan $G$ dönüşümü olsun.

$$\|Gu - Gv\| = \|2u^2 - 2v^2\| = 2\|u + v\|\|u - v\|$$
$$\leq 2.2\|u - v\| = 4\|u - v\|$$

$k = 4 > 0$ olduğundan $G$ dönüşümü Lipschitzian şartını sağlar.

**Örnek 3.2.13.** $G$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$G(a , b ) = \left(\frac{6a+6b}{7}, \frac{a+b}{14}\right)$ dönüşümü verilsin. $u = (u_1 , u_2)$, $v = (v_1 , v_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$d(u, v) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$ metriğini düşünelim.

$u = (u_1 , u_2),\ v = (v_1 , v_2) \in \mathbb{R}^2\ için$

$$d(Gu, Gv) = \left|\frac{6}{7}u_1 + \frac{6}{7}u_2 - \frac{6}{7}v_1 - \frac{6}{7}v_2\right| + \left|\frac{u_1}{14} + \frac{u_2}{14} - \frac{v_1}{14} - \frac{v_2}{14}\right|$$
$$= \frac{6}{7}|(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)| + \frac{1}{14}|(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)|$$
$$= \frac{13}{14}|(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)|$$
$$\leq \frac{13}{14}(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)$$

olur ki, bu da $G$'nin bir $\frac{13}{14}$ −daralma (*contraction*) olduğunu gösterir.

**Örnek 3.2.14.** $G$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$G(a , b ) = \left(\frac{2a+2b}{3}, \frac{a+b}{6}\right)$ dönüşümü verilsin. $u = (u_1 , u_2)$, $v = (v_1 , v_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\rho(u, v) = \max_{i=1,2}|u_i - v_i|$$

şeklinde tanımlanan metriğini düşünelim.

$$\rho\left(G\left(u_1, u_2\right), G\left(v_1, v_2\right)\right)$$
$$= max\left\{\frac{2}{3}|(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)|, \frac{1}{6}|(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)|\right\}$$
$$= \frac{2}{3}|(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)|$$
$$\leq \frac{2}{3}|u_1 - u_2| + \frac{2}{3}|v_1 - v_2|$$

$$\leq \frac{4}{3} max\{|u_1 - u_2|,|v_1 - v_2|\}$$
$$= \frac{4}{3} d\left(\left(u_1, u_2\right), \left(v_{1,} v_2\right)\right)$$

olduğundan $G$, $\rho$ metriğine göre bir daralma (contraction) değildir.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla $G$ sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın $G$ daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir $n$ için $G^n$ daralma bir dönüşümü olabilir.

**Örnek 3.2.15.** $G: [0, 2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$G(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ u - 1, & 1 < u \leq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $G(u)$, $u$=1 noktasında sürekli olmadığından daralma dönüşümü olamaz.

Fakat, $G^2: \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$ ve $G^2(u) = 1$ olup daralma dönüşümü olur. Aynı zamanda $u$ =1, $G$'nin tek sabit noktasıdır.

**c)** $\forall\ u, v \in X$ için $d(Gu, Gv) < kd(u, v)$ ise $G$'ye kesin daralma dönüşüm (*contractive mapping*) denir [27].

**Teorem 3.2.16.** $X \neq \emptyset$ olmak üzere $X = (X, d)$ tam metrik uzayında, $G: X \rightarrow X$ dönüşümü $X$ üzerinde bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $G$'nin tam olarak bir tek sabit noktası vardır [23].

**İspat:** Herhangi bir $u_0 \in X$ alınsın ve $\{u_n\}$ iterasyon dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$u_0, u_1 = Gu_0\ ,\ u_2 = Gu_1 = G^2u_0,\ u_3 = Gu_2 = G^3u_0\ , \dots ,\ u_n = Gu_{n-1} = G^nu_0$$

Açıkça görülmektedir ki, bu $G$'nin tekrarlanan uygulaması altında $u_0$'ın görüntüler dizisidir. Bu şekilde, $\{u_n\}$'nin Cauchy dizisi olduğu gösterilir.

$$d(u_1, u_2) = d(Gu_0, Gu_1) \leq k.d(u_0, u_1) = k.d(u_0, Gu_0)$$
$$d(u_2, u_3) = d(Gu_1, Gu_2) \leq k.d(u_1, u_2) = k^2.d(u_0, Gu_0)$$
$$d(u_3, u_4) = d(Gu_2, Gu_3) \leq k.d(u_2, u_3) = k^3.d(u_0, Gu_0)$$

...

...

...

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(Gu_{n-1}, Gu_n) \leq k.d(u_{n-1}, u_n) = k^n.d(u_0, Gu_0)$$

Herhangi bir *m* pozitif tam sayısı için,

$$\begin{aligned} d(u_n, u_m) &\leq d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + d(u_{m-1}, u_m) \\ &\leq k^n.d(u_0, Gu_0) + k^{n+1}.d(u_0, Gu_0) + \cdots + k^{m-1}.d(u_0, Gu_0) \\ &= (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})d(u_0, Gu_0) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k}.d(u_0, Gu_0) \\ &< \frac{k^n}{1-k}.d(u_0, Gu_0) \end{aligned}$$

Sağ tarafta, 0<$k$<1 ve $d(u_0, u_1)$ sabittir; böylece $n$'yi yeterince büyük alırsak (ve m$>n$), sağ tarafı istediğimiz kadar küçültebiliriz / azaltabiliriz. Bu da, $\{u_n\}$'nin Cauchy olduğunu ispatlar. *X* tam olduğundan, $\{u_n\}$ yakınsamaktadır, diğer bir deyişle, $u_n \to u$'dur. Burada limit $u$'nun $G$ dönüşümümün sabit bir noktası olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned} d(u, Gu) &\leq d(u, u_n) + d(u_n, Gu) \\ &\leq d(u, u_n) + d(Gu_{n-1}, Gu) \\ &\leq d(u, u_n) + k.d(u_{n-1}, u) \end{aligned}$$

$u_n \to u$ olduğundan, ikinci satırdaki toplamı önceden verilen herhangi bir $\varepsilon$>0 değerinden küçük yapabiliriz. Sonuç olarak, $d(u,Gu) = 0$ elde edilir. Metrik uzay tanımı kullanıldığında, $u = Gu$ sonucuna ulaşılır.

$u, G$'nin tek sabit noktasıdır; çünkü, $Gu = u$ ve $Gv = v$'den, daralma dönüşümü tanımından,

$$d(u, v) = d(Gu, Gv) \leq k.d(u, v)$$

elde ederiz. Burada, α <1 olduğundan, $d(u, v)$= 0'dır. Böylece, $u = v$'dir.

### 3.3. Genişlemeyen ve Genelleşmiş Genişlemeyen Dönüşümler

**Tanım 3.3.1. (Genişlemeyen dönüşüm):** $X$ düzgün konveks Banach uzayı ve $K$ da $X$'nin boş kümeden farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü, her $u, v \epsilon K$ için,

$$\| Gu - Gv \| \leq \| u - v \|$$

şartını sağlarsa $G$ genişlemeyen dönüşümdür [27].

**Örnek 3.3.2.** $G: [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $Gu = 1 - u^{\frac{2}{3}}$ dönüşümü verilsin.
$\forall\, u,v \in [0,1]$ için $\|Gu - Gv\| \leq \|u - v\|$ ifadesinde $u = 2^{-3}$ ve $v = 3^{-3}$ olarak alırsak $\| Gu - Gv\| = \frac{5}{36} > \frac{19}{216} = \|u - v\|$ olur. Dolayısıyla $G$ genişlemeyen dönüşüm değildir.

**Örnek 3.3.3.** $\mathbb{R}^2$ üzerinde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ile tanımlı öklidyen normunun olduğunu düşünelim.
$B = \{u: \| u \| < 1\}$, $\mathbb{R}^2$' deki birim yuvarı göstermek üzere, $G: B \to B$,
$G(u_1, u_2) = (-\frac{u_1}{2}, u_2)$ ile tanımlı $G$ dönüşümü

$$\begin{aligned} \| Gu - Gv \| &= \| \left(-\frac{u_1}{2}, u_2\right) - \left(-\frac{v_1}{2}, v_2\right) \| = \left\| \left(\frac{v_1 - u_1}{2}, u_2 - v_2\right) \right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{v_1 - u_1}{2}\right)^2 + (u_2 - v_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \leq \| u - v \| \end{aligned}$$

olup genişlemeyen (*nonexpansive*) dönüşüm olur. $u = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $G$'nin sabit noktasıdır.

**Örnek 3.3.4.** $B_0 = \{u = \{u_n\},\ u_n \to 0\}$ kümesi üzerinde $\| u \| = sup_i |u_i|$ tanımlansın. $K = \{u \in B_0 : \| u \| \leq 1\}$ olsun.
$G: K \to K$ dönüşümü $Gu = (\,2, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm

$$\| Gu - Gv \| = \| (2, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) - (2, v_1, v_2, \ldots, v_n \ldots) \|$$

$$=\| (0 , u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots .. u_n - v_n , \ldots ..) \|$$
$$= sup_i |u_i - v_i| = \| u - v \|$$

olduğundan, $G$ genişlemeyen dönüşümdür. Ayrıca, $G$'nin sabit noktası yoktur. Çünkü; $u = (u_1 , u_2 , \ldots .., u_n , \ldots) \in B_0$ olmak üzere $Gu = u$ eşitliğinden

$$(2 , u_1 , u_2 , \ldots .., u_n , \ldots \ldots)=(u_1 , u_2 , \ldots .., u_n , \ldots)$$

yazılır ve buradan

$$2 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n$$

olup (2,2,2,…) $B_0$ 'ın elemanı olmadığından $G$'nin sabit noktası yoktur.

**Tanım 3.3.5. (Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm):** $X$ bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme olsun ve $G: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(G) \neq \emptyset$ ve her $u \in K$ için

$$\|Gu - p\| \leq \|u - p\|$$

ise, $G$' ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir [27].

**Örnek 3.3.6.** $X$=ℝ olmak üzere $G$:$X \to X$ dönüşümü

$$G(u) = \begin{cases} 0, & (-\infty,2] \\ -\frac{1}{3}, & u > 2 \end{cases}$$

tanımlansın. $X$ üzerinde alışılmış mutlak değer normunun olduğunu düşünelim. $G$ dönüşümü sürekli değildir, dolayısıyla genişlemeyen dönüşüm değildir. Bu dönüşümün sabit noktası $u$=0'dır. Her $u \in X$ için $\|G(u) - 0\| \leq \|u - 0\|$ olup, $G$ dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşüm olur.

**Örnek 3.3.7.** $G$: $[0,2] \to [0,2]$ olmak üzere

$$G(u)=\begin{cases} u^2, & 0\le u<1 \\ \dfrac{u}{2}, & 1\le u\le 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm sürekli olmadığından genişlemeyen dönüşüm değildir. $u=0$ noktası bu dönüşüm için sabit noktadır. Her $u\in[0,2]$ için

$$\|G(u)-0\|\le\|u-0\|$$

olup $G$ dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşümdür.

Buradan da görüldüğü gibi; quasi-genişlemeyen dönüşümler genişlemeyen dönüşümlerden daha geneldir. Genişlemeyen dönüşümlerin en az bir sabit noktası varsa quasi-genişlemeyen dönüşüm olur.

**Tanım 3.3.8. (Suzuki (C) Şartı):** $K$, Banach uzayı $X$'in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $u,v\epsilon K$ için

$$\frac{1}{2}\parallel u-Gu\parallel\le\parallel u-v\parallel\Rightarrow\parallel Gu-Gv\parallel\le\parallel u-v\parallel$$

ise $G\colon K\to K$ dönüşümü, (C) şartını sağlar denir [15].

**Önerme 3.3.9.** Her genişlemeyen dönüşüm (C) şartını sağlar [15].

**Örnek 3.3.10.** $G\colon[0,3]\to[0,3]$ dönüşümü

$$Gu=\begin{cases} 0, & u\ne 3 \\ 1, & u=3 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $G$ dönüşümü (C) şartını sağlar, fakat genişlemeyen dönüşüm değildir. Eğer $u<v$ ve $(u\,,\ v)\in([0\,,3]x[0\,,3])\setminus\big((2\,,3)x\{3\}\big)$ alınırsa

$\parallel Gu-Gv\parallel\le\parallel u-v\parallel$ olur.

Eğer $u\in(2\,,3)$ ve $v=3$ alınırsa

$$\frac{1}{2}\parallel u - Gu \parallel = \frac{u}{2} > 1 > \parallel u - v \parallel \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2}\parallel v - Gv \parallel = 1 > \parallel u - v \parallel$$

olup (C) şartını sağlar. Fakat $G$ sürekli olmadığından, $G$ genişlemeyen değildir [15].

**Önerme 3.3.11.** Sabit noktaya sahip $G$ dönüşümü (C) şartını sağlarsa , $G$ dönüşümü quasi-genişlemeyen dönüşümdür [15].

**Örnek 3.3.12.** $G: [0,3] \to [0,3]$ dönüşümü

$$Gu = \begin{cases} 0, & u \neq 3 \\ 2, & u = 3 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $F(G) \neq \emptyset$'dır. $G$ quasi-genişlemeyen dönüşüm olup (C) şartını sağlamaz. $F(G) = \{0\} \neq \emptyset$ olup $G$ quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat

$$\frac{1}{2}\parallel 3 - G3 \parallel = \frac{1}{2} \leq 1 = \parallel 3 - 2 \parallel \quad \text{ve} \quad \parallel G3 - G2 \parallel = 2 > 1 = \parallel 3 - 2 \parallel$$

olduğundan (C) şartını sağlamaz.

**Örnek 3.3.13.** $G: [-1,1] \to [-1,1]$ dönüşümünü

$$Gu = \begin{cases} \dfrac{4u}{5} sin \dfrac{1}{2u}, & u \neq 0 \\ 0 \quad , & u = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $G$ sürekli ve quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat, $\mathbb{R}$'de alışılmış norm altında genişlemeyen dönüşüm değildir. Açıkça görülmektedir ki, $G$ süreklidir ve tek sabit noktası 0'dır. $u \neq 0$ ve $Gu = u$ ise, o zaman $u \in [-1,0) \cup (0,1]$ aldığımızda $u = \frac{4u}{5} \sin \frac{1}{2u}$ veya $\sin \frac{1}{2u} = \frac{5}{4}$ olup bu da imkansızdır. $|Gu - 0| = \left|\frac{4u}{5}\right| \left|\sin \frac{1}{2u}\right| \leq \left|\frac{4u}{5}\right|$ olduğundan her $u \in [-1,1]$ için $|Gu - 0| < |u - 0|$ gerçeklediğinden $G$ quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Ancak $G$ genişlemeyen dönüşüm değildir. $u = \frac{1}{\pi}$ ve $v = \frac{1}{3\pi}$ alınırsa,

$$|Gu - Gv| = \frac{16}{15\pi} \qquad |u - v| = \frac{2}{3\pi} \text{ ve } |Gu - Gv| > |u - v|$$

olup $G$'nin genişlemeyen dönüşüm şartını sağlamadığı görülür.

Ayrıca $u = \frac{1}{\pi}$ ve $v = \frac{1}{3\pi}$ değerleri için, $\frac{1}{2}|u - Gu| = \frac{1}{10\pi} < |u - v| = \frac{2}{3\pi}$ sağlanır. Ancak $|Gu - Gv| = \frac{16}{15\pi} > \frac{2}{3\pi} = |u - v|$ olduğundan $G$ dönüşümü (C) şartını da sağlamaz.

Suzuki [15] çalışmasında, (C) şartını sağlayan dönüşümlerin genişlemeyen dönüşümlerden daha zayıf quasi-genişlemeyen dönüşümlerden daha güçlü olduğunu göstermiştir.

# 4. MATERYAL ve YÖNTEM

## 4.1. İterasyon Süreçleri

Bir dönüşümün sabit noktaları bulunurken çeşitli iterasyon süreçleri kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir;

**Tanım 4.1.1. (Picard iterasyonu)** : Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi (*sequence of succesive approximations*) olarak da adlandırılır. $X$ bir düzgün konveks Banach uzayı, $K$ da $X'$in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $G: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $u_0 \in K, n \geq 1$ pozitif tamsayı için

$$u_{n+1} = Gu_n \tag{4.1}$$

$\{u_n\}$ dizisini oluşturalım. $(4.1)$ ile üretilen diziye Picard iterasyon süreci denir. 1955 yılında Krasnoselskij, $G$ sabit noktaya sahip olsa bile $G$ genişlemeyen dönüşümü için Picard iterasyonunun $G'$nin sabit noktasına yakınsamadığını gösterdi [1].

**Örnek 4.1.2**. $X$ = [0,1] olmak üzere $G$ : [0,1] → [0,1], $Gu = 1 - u$ dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(G)$=$\left\{\frac{1}{2}\right\}$'dir. Herhangi bir $u_0 = \alpha \neq \frac{1}{2}$ noktası için (4.1) ile verilen Picard iterasyonu,

$$u_1 = Gu_0 = 1 - \alpha$$
$$u_2 = Gu_1 = G^2(u_0) = \alpha$$
$$u_3 = Gu_2 = G^2(u_1) = G^3(u_0) = 1 - \alpha$$
.
.
.
$$u_n = Gu_{n-1} = G^2(u_{n-2}) = \cdots = G^n(u_0)$$

eklindedir. Bu ise $(\alpha, 1-\alpha, \alpha, 1-\alpha, \cdots)$ dizisini oluşturur. Bu dizi $\alpha \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz.

**Tanım 4.1.3. Mann iterasyonu:** 1953 yılında Mann [2] tarafından oluşturulmuştur. Banach daralma teoremini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarının bulunmasında kullanılmıştır. $X$ bir normlu uzay ve $K$, $X$'in boştan farklı konveks bir altkümesi olsun. $G: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $u_0 \in K$ olmak üzere Mann iterasyonu aşağıdaki gibi olur;

$$u_{n+1} = (1 - a_n)u_n + a_n G u_n \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{a_n\}$, $[0,1]$ aralığında bir dizidir [2].

**Tanım 4.1.4. Ishikawa iterasyonu**: Bu iterasyon 1974 yılında S. Ishikawa [3] tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt bir altkümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudo contractive dönüşümün sabit bir noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek için kullanıldı [3].

$X$ Banach uzayı, $K$, $X$' in konveks bir alt kümesi ve $G: K \rightarrow K$ dönüşüm olsun. Ishikawa iterasyonu

$$\begin{cases} u = u_0 \\ u_{n+1} = (1-a_n)u_n + a_n G v_n, \\ v_n = (1-b_n)u_n + b_n G u_n \end{cases} \tag{4.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $u_0 \in K$ keyfi elemanı ve $\{a_n\},\ \{b_n\} \in [0,1]$'dır.

Ishikawa iterasyonda $b_n$= 0 alınırsa, Mann iterasyonuna indirgenmiş olur. Buna rağmen Mann [2] ile Ishikawa [3] iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında bir bağ yoktur.

**Tanım 4.1.5. Noor iterasyonu**: Noor iterasyon metodu, 2000 yılında Noor [4] tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon, çözümler yineleyen değişik teknikler kullanarak Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu analiz etmiş ve tanıtmıştır. 2000 yılında Noor [4], $u_0 \in K$ keyfi elemanı ve [0,1] aralığında olan $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = (1-a_n)u_n + a_n G v_n, \\ v_n = (1-b_n)u_n + b_n G w_n, \\ w_n = (1-c_n)u_n + c_n G u_n \end{cases} \tag{4.4}$$

iterasyonunu tanımladı [4].

**Tanım 4.1.6. Agarwal ve ark. İterasyonu**: 2007 yılında Agarwal ve ark. [5] $u_0 \in K$ keyfi elemanı ve [0,1] aralığındaki $\{a_n\},\ \{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0\ , \\ u_{n+1} = (1-a_n)G u_n + a_n G v_n\ , \\ v_n = (1-b_n)u_n + b_n G u_n \end{cases} \tag{4.5}$$

iterasyon şemasını çalıştılar [5].

Agarwal ve ark. [5] bu şemanın Picard'ın şeması (4.1) ile aynı oranda yakınsadığı dönüşümler için Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını gösterdiler.

**Tanım 4.1.7. Abbas Nazir İterasyonu:** 2014 yılında Abbas ve Nazir [9] $u_0 \in K$, [0,1] aralığındaki $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = (1-a_n)Gv_n + a_n G w_n, \\ v_n = (1-b_n)Gu_n + b_n G w_n, \\ w_n = (1-c_n)u_n + c_n G u_n, \end{cases} \tag{4.6}$$

iterasyon süreçlerini sundular ve bu iterasyon sürecinin Agarwal ve ark. [5]' nın sunduğu iterasyon şemasına göre daha hızlı yakınsadığını gösterdiler.

**Tanım 4.1.8. Thakur ve ark. İterasyonu**: Thakur ve ark. [10], $u_0 \in K$, [0,1] aralığındaki $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = Gv_n, \\ v_n = G\big((1-a_n)u_n + a_n w_n\big), \\ w_n = (1-b_n)u_n + b_n G u_n \end{cases} \tag{4.7}$$

iterasyonunu oluşturdular ve bu iterasyonu kullanarak genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını ispatladılar.

**Tanım 4.1.9. M iterasyonu**: 2018 yılında Ullah ve Arshad [11] aşağıda yer alan ve mevcut iterasyon süreçleri ile karşılaştırıldığında daha iyi yakınsaklık oranları sunan, M iterasyonu olarak bilinen, üç aşamalı yeni bir iterasyon süreci önerdiler. Bu iterasyonu kullanarak genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için yakınsaklık sonuçlarını ispatladılar.

$u_0 \in K$ ve $\{a_n\} \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = Gv_n, \\ v_n = Gw_n, \\ w_n = (1-a_n)u_n + a_n Gu_n \end{cases} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımladılar.

**Tanım 4.1.10. K İterasyonu:** Hussain ve ark. [12], K iterasyon işlemi yardımıyla, daralma dönüşümlerinin sabit noktası için veri bağımlılığı sonucu ispatlamışlardır. Son olarak, düzgün konveks Banach uzaylarında, hem daralma hem de genişlemeyen dönüşümlerin genelleştirilmesini ifade eden, Suzuki genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için bazı zayıf ve güçlü yakınsama teoremlerini ispatlamışlardır.

$u_0 \in K$, $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = Gv_n, \\ v_n = G\big((1-a_n)Gu_n + a_n Gw_n\big), \\ w_n = (1-b_n)u_n + b_n Gu_n \end{cases} \tag{4.9}$$

iterasyonunu tanımladılar.

**Tanım 4.1.11. JF İterasyonu:** Ali ve ark. [13] düzgün konveks Banach uzaylarında, genelleşmiş genişlemeyen dönüşümler için JF iterasyon süreci kullanarak bazı yakınsaklık sonuçlarını ispatlamışlardır. Uygulama olarak, gecikmeli diferansiyel denkleminin çözümüne yaklaşmak için yeni tanımlanmış JF iterasyon sürecini kullanmış ve aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$u_0 \in K$ , $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = G\big((1-a_n)v_n + a_n G v_n\big), \\ v_n = G w_n, \\ w_n = G((1-b_n)v_n + b_n G v_n \end{cases} \tag{4.10}$$

**Tanım 4.1.12. D İterasyonu**: Hussain ve ark. [14] iterasyonunu $u_0 \in K$ , $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0 \\ u_{n+1} = G v_n \\ v_n = G\big((1-a_n)G u_n + a_n G w_n\big) \\ w_n = G\big((1-b_n)u_n + b_n G u_n\big) \end{cases} \tag{4.11}$$

tanımladılar. D iterasyon süreci için Suzuki'nin genelleşmiş genişlemeyen dönüşümlerde kullandığı zayıf ve kuvvetli yakınsak teoremlerini kanıtlamışlardır. Ayrıca (4.11)' deki hata birikiminin sınırlı olduğu da kanıtlanmıştır.

## 4.2. Bazı Önemli Tanımlar ve Notasyonlar

**Tanım 4.2.1. (Opial şartı):** $X$ bir Banach uzayı olsun. $u \in X$ ve bu $u$ elemanına zayıf yakınsayan herhangi bir $\{u_n\}$ dizisi ile her $u \neq v$ için

$$\liminf_{n\to\infty}\|u_n - u\| < \liminf_{n\to\infty}\|u_n - v\|$$

ise o zaman $X$ Opial şartını sağlar denir [28].

**Tanım 4.2.2. (Demi-closed (yarı kapalı)):** $X$ bir Banach uzayı, $K$ kümesi de $X$'in boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü tanımlansın. $K$ içinde $\{u_n\}$ sınırlı dizisi, $\{u_n\}$, $u^* \in K$ zayıf yakınsak ve $Gu_n$, 0'a kuvvetli yakınsak şartları $Gu^* = 0$ olmasını gerçeklerse $G$ dönüşümüne 0' da yarı kapalı (*demi-closed*) dönüşüm denir [26].

**Tanım 4.2.3. (Semi-compact (yarı kompakt)):** $X$ Banach uzayı $K$, $X$in kapalı bir alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü tanımlansın. $K$ içinde $\{u_n\}$ sınırlı dizisi ile $\lim_{n\to\infty}\|u_n - Gu_n\| = 0$ verilsin. $u_{n_i} \to u^* \in K$ (kuvvetli yakınsak) olacak şekilde $\{u_n\}$ 'in bir alt dizisi $\{u_{n_i}\}$ mevcutsa o zaman $G$ dönüşümüne yarı kompakt (*semi-compact*) denir [29].

**Tanım 4.2.4. (I Şartı):** $X$ düzgün konveks Banach uzayı ve $K$, $X$' in boştan farklı konveks alt kümesi ayrıca $G: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(G) \neq \emptyset$ olsun. Her $k > 0$ için $g(k) > 0$, $g(0) = 0$ olacak olacak şekilde azalmayan bir $g: [0\,,\infty) \to [0\,,\infty)$ fonksiyonu var ve her $u \in K$ için $\|u - Gu\| \geq g\left(d\big(u, F(G)\big)\right)$ ise, $G$ ye (I) şartını sağlar denir [30]. Burada $d\big(u, F(G)\big) = \inf_{v\in F(G)} d(u, v)$'dir. (I) şartı, $K$'nın kompaktlığından daha zayıftır.

**Lemma 4.2.5**. $X$ bir düzgün konveks Banach uzayı ve bütün pozitif tamsayılar için $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. Ayrıca $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ $X$ 'de bazı $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n\| \le r,\ \limsup_{n\to\infty}\|v_n\| \le r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\|t_n u_n + (1-t_n)v_n\| = r$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - v_n\| = 0 \text{ olur [31].}$$

**Tanım 4.2.6. (Asimptotik Yarıçap ve Asimptotik Merkez):** $K, X$ Banach uzayının bir alt kümesi ve $\{\mathrm{u_n}\}$, $X$' de sınırlı bir dizi olsun. $u \in X$ olmak üzere,

$$r_\alpha(u,\{u_n\}) = \lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|$$

kuralı ile verilen $r_\alpha(u,\{u_n\})$ fonksiyonunun infumumuna $\{u_n\}$ dizisinin $K'$ya göre asimptotik çapı denir ve $r_\alpha(K,\{u_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik yarıçap $r_\alpha(K,\{u_n\}) = inf\{r_\alpha(u,\{u_n\}): u \in K\}$'dir [33].

$z \in K$ olmak üzere

$$r_\alpha(z,\{u_n\}) = inf\{r_\alpha(u,\{u_n\}): u \in K\} = r_\alpha(K,\{u_n\})$$

oluyorsa $z \in K$ noktasına $\{u_n\}$ dizisinin $K'$ya asimptotik merkez denir [32]. $\{u_n\}$ dizisinin $K$'ya göre asimptotik merkezlerinin sınıfı $Z_\alpha(K,\{u_n\})$ ile gösterilir. Yani asimptotik merkez

$$Z_\alpha(K,\{u_n\}) = \{z \in K: r_\alpha(z,\{u_n\})\} = r_\alpha(K,\{u_n\})'\text{dir.}$$

$Z_\alpha(K,\{u_n\})$ boş küme olabildiği gibi tek ya da çok elemanlı da olabilir. Edelstein [32] da $K, X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $X$' deki her sınırlı $\{u_n\}$ dizisi için $Z_\alpha(K,\{u_n\})$ kümesinin tek elemana sahip olduğunu aşağıdaki teoremle gösterdi.

**Teorem 4.2.7.** $K, X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $X$'deki her sınırlı $\{u_n\}$ dizisi $K'$ya göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Yani

$$Z_\alpha(K,\{u_n\}) \ = \{z\}$$

ve $u \neq z$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} sup \, \|u_n - z\| < \lim_{n\to\infty} sup \, \|u_n - u\| \text{ 'dir [32].}$$

**Sonuç 4.2.8.**

1. Eğer $K$ zayıf kompakt ise $Z_\alpha(K,\{u_n\})$ boş olmayan bir kümedir.
2. Eğer $K$ kapalı ise $Z_\alpha(K,\{u_n\})$ de kapalıdır.
3. Eğer $K$ konveks ise $Z_\alpha(K,\{u_n\})$ de konvekstir [26].

**Teorem 4.2.9.** $K, X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{u_n\}$, $K$'da $Z_\alpha(K,\{u_n\}) = \{z\}$ olacak şekilde sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\{v_m\}$, $K$' de $\lim_{n\to\infty} r_\alpha(v_m,\{u_n\}) = r_\alpha(K,\{u_n\})$ şartını sağlayan bir dizi ise $\lim_{m\to\infty} v_m = z$ dir [26].

**Lemma 4.2.10.** $K, X$ Banach uzayının boş olmayan alt kümesi olsun. $G: K \to K$ genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşüm olsun. Her $u, v \in K$ için

$$\|u - G(v)\| \leq \frac{3+\alpha}{1-\alpha}\|u - G(u)\| + \|u - v\|$$

eşitsizliği vardır [17].

**Lemma 4.2.11.** $G$, $X$ Banach uzayının $K$ alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. (C) şartını sağladığını varsayalım. O zaman her $(u\,, v) \in K$ için

$$\| u - Gv \| \leq 3 \| Gu - u \| + \| u - v \|$$

sağlanır [15].

**Lemma 4.2.12.** $G$, $X$ Banach uzayının $K$ alt kümesi üzerinde bir dönüşüm olsun. (C) şartını sağladığını varsayalım. O zaman aşağıdaki durumlar söz konusudur [15]:

i)$\| Gu - G^2u \| \leq \| u - Gu \|$,
ii) $\frac{1}{2} \| u - Gu \| \leq \| u - v \|$ ya da $\frac{1}{2} \| Gu - G^2u \| \leq \| Gu - v \|$,
iii) $\| Gu - Gv \| \leq \| u - v \|$ ya da $\| G^2u - Gv \| \leq \| Gu - v \|$.

**Lemma 4.2.13.** $X$ düzgün konveks Banach uzayı ancak ve ancak
$\forall\, u, v \in B_r (r > 0$ için $B_r = \{u \in X: \|u\| \leq r\}$ tanımlansın.) ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\|^2 \leq \lambda\|u\|^2 + (1-\lambda)\|v\|^2 - \lambda(1-\lambda)g(\|u - v\|)$$

olacak şekilde sürekli, kesin artan ve konveks bir $g$:[0, ∞) → [0, ∞), $g(0) = 0$ fonksiyonu vardır [33].

# 5. BULGULAR ve TARTIŞMA

## 5.1. $\alpha$-Genişlemeyen Dönüşümlerle Diğer Lineer Olmayan Dönüşümler Arasındaki İlişkiler

Bu bölümün ilk kısmında, α-genişlemeyen dönüşümlerle diğer lineer olmayan dönüşümler arasındaki ilişkiler incelenmektedir. Bu konuda dönüşümlerle ilgili olarak farklı isimlendirmelere de rastlanmaktadır. Dönüşümlerle ilgili bu isimlendirmeler şu şekilde tanımlanabilir.

**Tanım 5.1.1.** $(X, \|.\|)$ Banach uzayı olsun. $G: K \subset X \to X$, her $u, v \in K$ için aşağıdaki dönüşümleri tanımlayabiliriz.

**λ-firmly genişlemeyen dönüşüm** [34] :

$$\lambda \in [0,1] \text{ için } \quad \|Gu - Gv\| \leq \|(1-\lambda)(u-v) + \lambda(Gu - Gv)\|$$

**Non –spreading dönüşüm** [35] :

$$2 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel v - Gu \parallel^2 + \parallel u - Gv \parallel^2$$

**Hybrid dönüşüm** [36]:

$$3 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel u - Gv \parallel^2 + \parallel v - Gu \parallel^2 + \parallel u - v \parallel^2$$

**TJ-1 dönüşümü** [37]:

$$2 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel u - v \parallel^2 + \parallel Gu - v \parallel^2$$

**TJ-2 dönüşümü** [37]:

$$3 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq 2 \parallel Gu - v \parallel^2 + \parallel Gv - u \parallel^2$$

**Tanım.5.1.2.** α <1 olsun. $G: K \to X$ dönüşümü, her $u, v \in K$ için

$$\parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \alpha \parallel Gu - v \parallel^2 + \alpha \parallel Gv - u \parallel^2 + (1 - 2\alpha) \parallel u - v \parallel^2$$

ifadesini sağlıyorsa α-genişlemeyen dönüşümdür [16].

Şimdi α-genişlemeyen dönüşümünü yukarıda verilen tanımlara göre karakterize edelim.

- $0 -$genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda genişlemeyen dönüşümdür.
- $\frac{1}{2} -$genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda nonspreading dönüşüm ve TJ-2 dönüşümdür.
- $\frac{1}{3} -$genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda hybrid dönüşümdür.
- $\frac{1}{4} -$genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda TJ-1 dönüşümdür.
- $G$, α-genişlemeyen olsun. α < 0 ⟺ $G$ birim dönüşüm olmasıdır.
- $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ aralığındaki her sabit dönüşüm $\alpha$-genişlemeyen dönüşümdür.

  $X$'in kapalı birim yuvarı $B_X$ olmak üzere, $G: B_X \to B_X$ $\alpha > \frac{2}{3}$ olduğunda her $\alpha$ değeri için $G_X = 0_X$ değilse α-genişlemeyen dönüşümdür.

**Önerme 5.1.3.** $G: K \to X$ olmak üzere her TJ1 dönüşümü $\frac{1}{4}$–genişlemeyen dönüşümdür [38].

**İspat:** Her $u, v \in K$ için

$$2 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel u - v \parallel^2 + \parallel Gu - v \parallel^2 \tag{5.1}$$

ve

$$2 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel u - v \parallel^2 + \parallel Gv - u \parallel^2 \tag{5.2}$$

olduğundan (5.1) ve (5.2) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$4 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq 2 \parallel u - v \parallel^2 + \parallel Gu - v \parallel^2 + \parallel Gv - u \parallel^2$$

elde edilir ve buradan

$$\parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \frac{1}{4} \parallel Gu - v \parallel^2 + \frac{1}{4} \parallel Gv - u \parallel^2 + (1 - 2\frac{1}{4}) \parallel u - v \parallel^2$$

sonucuna varılır.

**Önerme 5.1.4.** Her TJ-2 dönüşümü $\frac{1}{2}-$genişlemeyen dönüşümdür [38].

**İspat:** TJ-2 dönüşümü tanımından

$$3 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq 2 \parallel Gu - v \parallel^2 + \parallel Gv - u \parallel^2 \quad (5.3)$$
$$3 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq 2 \parallel Gv - u \parallel^2 + \parallel Gu - v \parallel^2 \quad (5.4)$$

yazalım. Daha sonra (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$6 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq 3 \parallel Gu - v \parallel^2 + 3 \parallel Gv - u \parallel^2$$

Buradan

$$\parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \frac{1}{2} \parallel Gu - v \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel Gv - u \parallel^2$$

$\frac{1}{2}-$genişlemeyen dönüşüm elde edilir.

**Örnek 5.1.5.** Herhangi iki α-genişlemeyen dönüşümün toplamı α-genişlemeyen dönüşümdür. Bunun için $\frac{1}{4}-$genişlemeyen ve genişlemeyen dönüşümlerini ele alalım.

$$4 \parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel Gu - v \parallel^2 + \parallel Gv - u \parallel^2 + 2 \parallel u - v \parallel^2 \quad (5.5)$$
$$\parallel Gu - Gv \parallel^2 \leq \parallel u - v \parallel^2 \quad (5.6)$$

(5.5) ve (5.6) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak, $\frac{1}{5}-$genişlemeyen elde edilir. Bu yöntemle $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $\frac{1}{7}-$genişlemeyen dönüşüm, $\frac{1}{8}-$genişlemeyen dönüşüm,…vb. bulunabilir.

**Örnek 5.1.6.** Herhangi iki α-genişlemeyen dönüşümün farkı α-genişlemeyen dönüşümdür.

$\frac{1}{6}$ −genişlemeyen dönüşüm ile $\frac{1}{4}$ −genişlemeyen dönüşümü sırasıyla yazalım.

$$6\| Gu - Gv \|^2 \leq \| Gu - v \|^2 + \| Gv - u \|^2 + 4 \| u - v \|^2 \qquad (5.7)$$
$$4\| Gu - Gv \|^2 \leq \| Gu - v \|^2 + \| Gv - u \|^2 + 2 \| u - v \|^2 \qquad (5.8)$$

Bu dönüşümlerin farkını aldığımızda $\frac{1}{5}$ −genişlemeyen dönüşümünü verir.

**Örnek 5.1.7.** $G: [0,3] \to [0,3]$ olmak üzere,

$$Gu = \begin{cases} \frac{5}{2}, & u = 3 \\ \frac{\mathrm{u}}{2}, & u \neq 3 \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} Gu = \frac{5}{2} \\ Gv = 1 \end{matrix}$$

değerlerini kullanarak $G$'nin $\frac{1}{2}$ −genişlemeyen ve $\frac{1}{3}$ −genişlemeyen dönüşüm olmadığı görülür; fakat $G$ $\frac{3}{4}$ −genişlemeyen dönüşümdür [38].

**Örnek 5.1.8.** $G: [-2,1] \to [-2,1]$ dönüşümünü,

$$G(u) = \begin{cases} \frac{|u|}{2}, & u \in [-2, 1) \\ \frac{-1}{2}, & u = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $u = -2$ için $Gu = 1$ ve $v = 1$ için $Gv = \frac{-1}{2}$ alınırsa

$2|Gu - Gv|^2 = 2\left|1 + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{9}{2}$ ve $|Gu - v|^2 + |u - Gv|^2 = \left|-2 + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{9}{4}$ olur.

$\frac{9}{4} < \frac{9}{2}$ olduğundan $G$ dönüşümü non-spreading dönüşüm değildir.

**Önerme 5.1.9.** $G: K \to K$ bir dönüşüm ve $u \in K$ olsun. $G^2(u) = u$ olursa o zaman [38]:

i) $u, G$ için sabit noktadır

ya da

ii) (0,1) aralığında olan her $\alpha$ değeri için $G$ $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm değildir.

**Örnek 5.1.10.** $X = \{(0,0),(2,0),(0,4),(4,0),(4,5),(5,4)\}$ kümesi üzerinde $\| (u_1, u_2) \| = |u_1| + |u_2|$ metriğini tanımlayalım. $(X, \|.\|)$ Banach uzayı olmak üzere $G: X \to X$

$$G: \begin{pmatrix} (0,0), (2,0), (0,4), (4,0) \\ (0,0), (0,0), (0,0), (2,0) \end{pmatrix}$$

dönüşümü olsun. $G^2\big((0,0)\big) = (0,0)$ olup gerçekten de (0,0) bu dönüşüm için sabit noktadır.

**Önerme 5.1.11.** $\|u - Gu\| = \|Gu - G^2u\| = \|G^2u - u\|$ şartını sağlayan $G: K \to K$ dönüşümü ve $u \in K$ olsun. O zaman,

i) $u, G$ için sabit noktadır,

ya da

ii) (0,1) aralığında olan her $\alpha$ değeri için $G$ $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm değildir [38].

Şimdi $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin bazı özelliklerini verelim:

**a)** $\alpha < 1$ için $N_\alpha(K) = \{G: K \to X / \ G \ \alpha - \text{genişlemeyen}\}$'dir.
$G \in N_{\alpha_1}(K) \cap N_{\alpha_2}(K)$ ve $\alpha_1 < \alpha_2$ olsun. $\forall\, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ için $G \in N_\alpha(K)$ 'dir.

**b)** Birim dönüşüm, $\bigcap_{\alpha \in [0,1)} N_\alpha([0,1])$ kümesinin elemanıdır [38].

**Örnek5.1.12.** $G: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $G(u_1, u_2) = (u_1, 0)$dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm $\bigcap_{\alpha \in [0,1)} N_\alpha[0,1]$ kümesinin elemanıdır. $\alpha_1 = \frac{1}{3} < \alpha_2 = \frac{2}{3}$ aldığımızda $G \in N_{\alpha_1}(K) \cap N_{\alpha_2}(K)$ 'dir. Şimdi $\alpha = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ için, $G \in N_\alpha(K)$ olduğunu gösterelim.

$\frac{1}{3}$ $-$genişlemeyen dönüşümünü

$\|Gu - Gv\|^2 \leq \frac{1}{3}\|Gu - v\|^2 + \frac{1}{3}\|Gv - u\|^2 + (1 - 2\frac{1}{3})\|u - v\|^2$'dir.

$$\|(u_1 - v_1, 0)\|^2 \leq \frac{1}{3}\|(u_1 - v_1, -v_2)\|^2 + \frac{1}{3}\|(v_1 - u_1, -u_2)\|^2 + \frac{1}{3}\|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\|^2 \quad (5.9)$$

şeklinde yazarız. $\frac{2}{3}-$genişlemeyen dönüşümü ise

$\|Gu - Gv\|^2 \leq \frac{2}{3}\|Gu - v\|^2 + \frac{2}{3}\|Gv - u\|^2 + (1 - 2\frac{2}{3})\|u - v\|^2$'dir.

$$\|(u_1 - v_1, 0)\|^2 \leq \frac{2}{3}\|(u_1 - v_1, -v_2)\|^2 + \frac{2}{3}\|(v_1 - u_1, -u_2)\|^2 - \frac{1}{3}\|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\|^2 \quad (5.10)$$

şeklinde yazarız. Buradan (5.1.9) ve (5.1.10) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\|(u_1 - v_1, 0)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|(u_1 - v_1, -v_2)\|^2 + \frac{1}{2}\|(v_1 - u_1, -u_2)\|^2$$

elde edilir ve buradan

$$\|Gu - Gv\|^2 \leq \frac{1}{2}\|Gu - v\|^2 + \frac{1}{2}\|Gv - u\|^2$$

$\frac{1}{2}-$genişlemeyen dönüşüm olduğu sonucuna ulaşılır.

## 5.2. $\boldsymbol{\alpha}$-Genişlemeyen Dönüşümlerin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri

**Lemma 5.2.1.** $K$, $X$ Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $F(G) \neq \emptyset$ olacak şekilde $G: K \to X$ bazı $\alpha < 1$ için $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. O zaman $G$ quasi-genişlemeyen dönüşümdür. Ayrıca $F(G)$ kapalıdır [39].

**Lemma 5.2.2.** $K, X$ Banach uzayının boştan farklı alt kümesi olsun. $G: K \to X$ dönüşümü bazı $\alpha < 1$ için $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. O zaman $\forall u, v \in K$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur [39].

(i) $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$\|u - Gv\|^2$

$\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\|u - Gu\|^2 + \frac{2}{1-\alpha}(\alpha\|u - v\| + \|Gu - Gv\|)\|u - Gu\| + \|u - v\|^2$' dir.

(ii) $\alpha < 0$ için

$\|u - Gv\|^2$

$\leq \|u - Gu\|^2 + \frac{2}{1-\alpha}((-\alpha)\|Gu - v\| + \|Gu - Gv\|)\|u - Gu\| + \|u - v\|^2$'dir.

**Önerme 5.2.3. (Yarı kapalılık ilkesi):** $K$, Opial şartını sağlayan $X$ Banach uzayının alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü bazı $\alpha < 1$ için $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. Eğer $\{u_n\}$, $p$ 'ye zayıf yakınsarsa ve $\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$, o zaman $Gp = p$'dir. Diğer bir ifade ile $I - G$, $I$'nın $X$ üzerinde birim dönüşüm olduğu sıfır noktasında yarı kapalıdır [39].

Yakın zamanda Aoyama ve Kohsaka [16] aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatladılar.

**Lemma 5.2.4.** $K$, $X$ Banach uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü $\alpha < 1$ için α-genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir.

(i) $u \in K$ *için* $\{G^n u\}_{n=1}^{\infty}$ sınırlıdır.

(ii) $F(G) \neq \emptyset$ [16].

**Lemma 5.2.5.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi, $G: K \to K$ dönüşümü $\alpha < 1$ için α-genişlemeyen dönüşüm olarak alalım. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\} \in [0,1]$ ve $u_1 \in K$ olmak üzere Noor iterasyonu (4.4) ile tanımlanan $\{u_n\}$ bir dizi ve $p \in F(G)$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $max\{\|u_{n+1} - p\|, \|v_n - p\|\} \leq \|u_n - p\|$  $n = 1,2,\ldots$

(2) $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ vardır.

(3) $\lim_{n\to\infty} d(u_n, F(G))$ vardır. Burada $d(u, F(G))$, $u$'dan $F(G)'e$ olan uzaklığı göstermektedir.

**İspat:** (4.4)'den

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \|(1-c_n)u_n + c_n G u_n - p\| \\ &= \|(1-c_n)(u_n - p) + c_n(Gu_n - p)\| \\ &\leq (1-c_n)\|u_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. (4.4) ve (5.11)'den

$$\begin{aligned} \|v_n - p\| &= \|(1-b_n)u_n + b_n G w_n - p\| \\ &= \|(1-b_n)(u_n - p) + b_n(Gw_n - p)\| \\ &\leq (1-b_n)\|u_n - p\| + b_n\|Gw_n - p\| \\ &\leq (1-b_n)\|u_n - p\| + b_n\|w_n - p\| \\ &\leq (1-b_n)\|u_n - p\| + b_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.12}$$

bulunur. (4.4), (5.11) ve (5.12)'den

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &= \|(1-a_n)u_n + a_n G v_n - p\| \\ &= \|(1-a_n)(u_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| \\ &\leq (1-a_n)\|u_n - p\| + a_n\|Gv_n - p\| \\ &\leq (1-a_n)\|u_n - p\| + a_n\|v_n - p\| \\ &\leq (1-a_n)\|u_n - p\| + a_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Buradan da, $\|u_{n+1} - p\| \leq \|u_n - p\|$ olup $\{\|u_n - p\|\}$ monoton artmayan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ vardır. Yine aynı şekilde, $\{d(u_n, F(G))\}$'nin sınırlı artmayan reel dizi olduğu sonucuna ulaşılır.

**Teorem 5.2.6.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi ve $G: K \to K$ dönüşümü $\alpha < 1$ için α-genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\} \in [0,1]$ ve $u_1 \in K$ olmak üzere Noor iterasyonu (4.4) ile tanımlanan $\{u_n\}$ bir dizi olsun. O zaman aşağıdaki şartlar geçerlidir.

1. Eğer $\{u_n\}$ sınırlı ve $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ ise $F(G) \neq \emptyset$’ dur.
2. $F(G) \neq \emptyset$ , $\{u_n\}$ sınırlı olduğunda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

**1.Durum:** 0<$\alpha$<1 ise

**(a)** $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ olduğunda, $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$,

**(b)** $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ olduğunda, $\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olur.

**2.Durum:** $\alpha \leq 0$ ise

**(a)**

$$\begin{cases}\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0, \\ \liminf_{n\to\infty} b_n < 1\end{cases}$$

veya

$$\begin{cases}\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0, \\ \limsup_{n\to\infty} b_n < 1\end{cases}$$

olduğunda $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olur.

**(b)** $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ ve $\limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ olduğunda,

$\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olur.

**İspat:** $\{u_n\}'$nin sınırlı ve $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olduğunu kabul edelim. $\lim_{k\to\infty}\left\|Gu_{n_k} - u_{n_k}\right\|$=0 olacak şekilde $\{Gu_n\}$’nin $\{Gu_{n_k}\}$ bir sınırlı alt dizisi vardır. $A(K,\{u_{n_k}\}) = \{p\}$ olduğunu varsayalım. $M_1$ sayısı olarak

$$M_1 = sup\{\left\|u_{n_k}\right\|, \left\|Gu_{n_k}\right\|, \|p\|, \|Gp\|: k \in \mathbb{N}\} < \infty$$

alalım. Eğer $0 < \alpha < 1$ için Lemma 5.2.2 (i)’den

$$\begin{aligned}
&\left\|u_{n_k}-Gp\right\|^2\\
&\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{2}{1-\alpha}\left(\alpha\left\|u_{n_k}-p\right\|+\left\|Gu_{n_k}-Gp\right\|\right)\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|\\
&\quad+\left\|u_{n_k}-p\right\|^2\\
&\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{4M_1(1+\alpha)}{1-\alpha}\left\|Gu_{n_k}-u_{n_k}\right\|+\left\|u_{n_k}-p\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gp\right\|^2\\
&\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{4M_1(1+\alpha)}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\left\|Gu_{n_k}-u_{n_k}\right\|\\
&\quad+\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|^2\\
&=\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\alpha<0$ ise Lemma 5.2.2 (ii) kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\left\|u_{n_k}-Gp\right\|^2\\
&\leq \left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{2}{1-\alpha}\left((-\alpha)\left\|Gu_{n_k}-p\right\|+\left\|Gu_{n_k}-Gp\right\|\right)\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|\\
&\quad+\left\|u_{n_k}-p\right\|^2\\
&\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{4M_1(1+\alpha)}{1-\alpha}\left\|Gu_{n_k}-u_{n_k}\right\|+\left\|u_{n_k}-p\right\|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Tekrar buradan,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gp\right\|^2\\
&\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gu_{n_k}\right\|^2+\frac{4M_1(1+\alpha)}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\left\|Gu_{n_k}-u_{n_k}\right\|\\
&\quad+\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|^2\\
&=\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tüm durumlarda

$$\begin{aligned}
r\left(Gp,\{u_{n_k}\}\right)&=\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gp\right\|\\
&\leq \limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|\\
&=r\left(p,\{u_{n_k}\}\right)
\end{aligned}$$

sonucunu buluruz. Bu demektir ki, $Gp \in A(K, \{u_{n_k}\})$. $X$'in düzgün konveks olma özelliğinden $Gp = p$ elde edilir. Tam tersine, $F(G) \neq \emptyset$ ve $p \in F(G)$ olsun. Lemma 5.2.5'den $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ vardır ve dolayısıyla $\{u_n\}$ sınırlıdır. Lemma 5.2.1 ve Lemma 4.2.13 dikkate alındığında, $g(0) = 0$ şartını sağlayan sürekli kuvvetli artan konveks bir $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu elde ederiz ve buradan

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\|^2 &= \|(1-c_n)u_n + c_nGu_n - p\|^2 \\
&\leq (1-c_n)\|u_n - p\|^2 + c_n\|Gu_n - p\|^2 - c_n(1-c_n)g(\|Gu_n - u_n\| \\
&\leq \|u_n - p\|^2
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\|^2 &= \|(1-b_n)u_n + b_nGw_n - p\|^2 \\
&\leq (1-b_n)\|u_n - p\|^2 + b_n\|Gw_n - p\|^2 - b_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|) \\
&\leq b_n\|w_n - p\|^2 + (1-b_n)\|u_n - p\|^2 - b_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|) \\
&\leq b_n\|u_n - p\|^2 + (1-b_n)\|u_n - p\|^2 - b_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|) \\
&\leq \|u_n - p\|^2 - b_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|)
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - p\|^2 &= \|(1-a_n)u_n + a_nGv_n - p\|^2 \\
&\leq (1-a_n)\|u_n - p\|^2 + a_n\|Gv_n - p\|^2 - a_n(1-a_n)g(\|Gv_n - u_n\|) \\
&\leq a_n\|v_n - p\|^2 + (1-a_n)\|u_n - p\|^2 - a_n(1-a_n)g(\|Gv_n - u_n\|) \\
&\leq a_n(\|u_n - p\|^2 - b_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|)) + (1-a_n)\|u_n - p\|^2 \\
&\quad - a_n(1-a_n)g(\|Gv_n - u_n\|) \\
&\leq \|u_n - p\|^2 - a_nb_n(1-b_n)g(\|Gw_n - u_n\|) + (1-a_n)\|u_n - p\|^2 \\
&\quad - a_n(1-a_n)g(\|Gv_n - u_n\|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$a_n(1-a_n)g(\|Gv_n - u_n\|) \leq \|u_n - p\|^2 - \|u_{n+1} - p\|^2 \tag{5.14}$$

$$a_n b_n(1-b_n)g(\|Gw_n-u_n\|)\leq \|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2 \tag{5.15}$$

sonuçları bulunur. Buradan aşağıdaki durumları inceleyelim.

**i)** $0<\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n<1$ ise tüm $n\geq n_0$ için $0<\delta<a_n$ olacak şekilde $\delta\in(0,1)$ ve bir $n_0$ pozitif tamsayısı vardır. O zaman

$$\delta(1-\delta)g(\|Gv_n-u_n\|)\leq \|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2$$

yazılır. Böylece, $m\geq n_0$ için

$$\sum_{n=n_0}^{m} g(\|Gv_n-u_n\|)\leq \frac{1}{\delta(1-\delta)}\sum_{n=n_0}^{m}(\|u_n-p\|^2-\|u_{n+1}-p\|^2)$$
$$\leq \frac{1}{\delta(1-\delta)}\left\|u_{n_0}-p\right\|^2$$

yazılabilir. $m\to\infty$ için $\sum_{n=n_0}^{\infty} g(\|Gv_n-u_n\|)<\infty$ olur ve böylece $\lim\limits_{n\to\infty} g(\|Gv_n-u_n\|)=0$ elde edilir.

Burada $g(0)=0$ şartını sağlayan sürekli kuvvetli artan konveks bir $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\liminf_{n\to\infty}\|Gv_n-u_n\|=0 \tag{5.16}$$

bulunur.

**ii)** $0<\liminf\limits_{n\to\infty} b_n\leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n<1$ ve $\liminf\limits_{n\to\infty}\ a_n>0$ olduğunda, eşitsizlik (5.15)'de benzer yöntem kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}(\|Gw_n-u_n\|)=0 \tag{5.17}$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan (4.4)'den

$$Gu_n - v_n = Gu_n - \big((1-b_n)u_n + b_nGw_n\big) = (Gu_n - u_n) + b_n(Gw_n - u_n) \quad (5.18)$$

$$u_n - v_n = u_n - (b_nGw_n + (1-b_n)u_n) = b_n(Gw_n - u_n) \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.18) ve (5.19) baktığımızda $\alpha \leq 0$ durumu için yapılan çıkarımların (5.16) ve (5.17) izlediklerini görüyoruz.

Aşağıdaki işlemlerde $0 < \alpha < 1$ durumunu incelenmektedir. İlk olarak $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ olduğunu varsayıyoruz. Lemma 5.2.1 ve (5.16) kullandığımızda $M = sup\{\|Gu_n\|, \|Gv_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ olduğunu buluruz. $G$ α-genişlemeyen dönüşüm olduğundan, (5.18) ve (5.19) 'den yola çıkarak aşağıdaki sonuçları elde ediyoruz.

$$\begin{aligned}
\|Gu_n - u_n\|^2 &= (\|Gu_n - Gv_n\| + \|Gv_n - u_n\|)^2 \\
&\leq \|Gu_n - Gv_n\|^2 + \|Gv_n - u_n\|^2 + 2\|Gu_n - Gv_n\|\|Gv_n - u_n\| \\
&\leq \alpha\|Gu_n - v_n\|^2 + \alpha\|Gv_n - u_n\|^2 + (1-2\alpha)\|u_n - v_n\|^2 + \|Gv_n \\
&\quad - u_n\| + 2\|Gu_n - Gv_n\|\|Gv_n - u_n\| \\
&\leq \alpha(\|Gu_n - u_n\|^2 + {b_n}^2\|Gw_n - u_n\|^2 + 2b_n\|Gu_n - u_n\|\|Gw_n \\
&\quad - u_n\|) + \alpha\|Gv_n - u_n\|^2 + (1-2\alpha){b_n}^2\|Gw_n - u_n\|^2 \\
&\quad + \|Gv_n - u_n\|^2 + 2\|Gu_n - Gv_n\|\|Gv_n - u_n\| \\
&= \alpha\|Gu_n - u_n\|^2 + \|Gw_n - u_n\|^2\left(\alpha {b_n}^2 + \left(1-2\alpha\right){b_n}^2\right) + (\alpha \\
&\quad + 1)\,\|Gv_n - u_n\| + 2\alpha b_n\|Gu_n - u_n\|\|Gw_n - u_n\| + 2M\|Gv_n - u_n\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Gu_n - u_n\|^2 &\leq \frac{(1-\alpha){b_n}^2}{1-\alpha}\|Gw_n - u_n\|^2 + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\|^2 \\
&\quad + \frac{2\alpha b_n}{1-\alpha}\|Gu_n - u_n\|\|Gw_n - u_n\| + \frac{2M}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\|
\end{aligned}$$

$$\|Gu_n - u_n\|^2 \leq {b_n}^2\|Gw_n - u_n\|^2 + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\|^2 + \frac{2\alpha b_n}{1-\alpha}\|Gu_n - u_n\|$$

$$\times \|Gw_n - u_n\| + \frac{2M}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\|$$

bulunur. Buradan da $n \to \infty$ için

$$\|Gu_n - u_n\|^2 \le \|Gw_n - u_n\|^2 + \tfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\|^2$$
$$+ \tfrac{2\alpha b_n}{1-\alpha}\|Gu_n - u_n\|\|Gw_n - u_n\| + \tfrac{2M}{1-\alpha}\|Gv_n - u_n\| \to 0 \quad (5.20)$$

elde edilir.

Son olarak, $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ olduğunu varsayıyoruz. (5.17)'den $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$'nin sırasıyla $\{u_{n_k}\}$ ve $\{v_{n_k}\}$ olmak üzere iki alt dizisini buluruz. Öyleyse $\lim_{k\to\infty}\|Gv_{n_k} - u_{n_k}\| = 0$'dır. $M$ yerine

$$M = sup\{\|Gu_{n_k}\|, \|Gv_{n_k}\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

alırsak ve (5.20) deki $\{u_{n_k}\}$ ve $\{v_{n_k}\}$ alt dizilerini kullanırsak $\lim_{k\to\infty}\|Gu_{n_k} - u_{n_k}\| = 0$ sonucuna ulaşılır. Bu da $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olduğunu verir.

**Teorem 5.2.7.** $K$, Opial şartını sağlayan $X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı ve konveks bir altkümesi olsun. $\alpha < 1$ için $F(G)$ boş olmayan sabit noktalar kümesi olmak üzere $G: K \to K$ dönüşümü α-genişlemeyen bir dönüşümü alalım. $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in [0,1]$ olmak üzere ve $u_1 \in K$ için $\{u_n\}$ Noor İterasyonu (4.4) ile tanımlanan bir dizi olsun. Eğer $\alpha \le 0$ ise $\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$ ve ek olarak $\lim_{n\to\infty} b_n < 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\{u_n\}$, $G$'nin sabit noktasına zayıf yakınsar.

**İspat:** Teorem 5.2.6'dan $\{u_n\}$ sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$'dır. $X$ bir düzgün konveks Banach uzayı olduğundan $X$ yansımalıdır. O zaman, $\{u_n\}$ dizisinin $m_1 \in K$'ya zayıf yakınsak olacak şekilde bir $\{u_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Önerme 5.2.3 gereği, $m_1 \in F(G)$'dir. $\{u_n\}$ dizisinin $m_1$'e zayıf yakınsak olduğunu iddia ediyoruz.

Bunu göstermek için $\{u_n\}$ dizisinin $m_2 \in K'$ ya zayıf yakınsak olacak şekilde bir $\{u_{n_k}\}$ alt dizisinin varlığını ve $m_1 \neq m_2$ olduğunu varsayalım. Yine Önerme 5.2.3 gereği $m_2 \in F(G)$'dir. Lemma 5.2.5'den, tüm $p \in F(G)$ için $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ vardır. O halde, Opial şartından

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|u_n - m_1\| &= \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - m_1\right\| < \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - m_2\right\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - m_2\| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left\|u_{n_k} - m_2\right\| < \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_k} - m_1\right\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - m_1\|\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $m_1 = m_2$ olur. Dolayısıyla $\{u_n\}$, $G'$nin sabit noktasına zayıf yakınsar. İspat burada tamamlanır.

**Teorem 5.2.8.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı kompakt ve konveks alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü $\alpha < 1$ için α-genişlemeyen dönüşümü alalım. $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in [0,1]$ olsun. $0 < \alpha < 1$ olduğunda $\limsup_{n\to\infty} a_n(1 - a_n) > 0$ olduğunu kabul edelim. $\alpha \leq 0$ olduğunda ise

$$\begin{cases}\liminf_{n\to\infty} a_n(1 - a_n) > 0, \\ \liminf_{n\to\infty} b_n < 1\end{cases}$$

veya

$$\begin{cases}\limsup_{n\to\infty} a_n(1 - a_n) > 0, \\ \limsup_{n\to\infty} b_n < 1\end{cases}$$

olduğunu kabul edelim. (4.4 )'de Noor iterasyonu ile tanımlanan $u_1 \in K$ olmak üzere $\{u_n\}$ bir dizi olsun. O zaman $\{u_n\}$, $G$'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

**İspat:** $K$ sınırlı olduğundan, Lemma 5.2.4'ü izlersek $F(G) \neq \emptyset$ dır. Teorem 5.2.6'yi kullanarak $\{u_n\}$ dizisi sınırlıdır ve $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$. $K$'nın kompakt olma özelliğinden, $\{u_n\}'$ nin bazı $p \in K$ 'ya kuvvetli yakınsayan $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi vardır ve $\lim_{k\to\infty}\left\|Gu_{n_k} - u_{n_k}\right\| = 0$'dır.

$$M_3 = sup\{\|u_{n_k}\|, \|Gu_{n_k}\|, \|p\|, \|Gp\|: k \in N\} < \infty \quad 0 \le \alpha < 1$$

alıp Lemma 5.2.2(i) kullanırsak,

$$\begin{aligned}\|u_{n_k} - Gp\|^2 &\le \tfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \tfrac{2}{1-\alpha}(\alpha\|u_{n_k} - p\| + \|Gu_{n_k} - Gp\|)\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\| + \|u_{n_k} - p\|^2 \\ &\le \tfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 + \tfrac{4M_3(1+\alpha)}{1-\alpha}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\| + \|u_{n_k} - p\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın limsup alınırsa

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gp\|^2 &\le \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{4M_3(1+\alpha)}{1-\alpha}\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\| + \limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - p\|^2\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\alpha < 0$ ise Lemma 5.2.2 (ii) kullanarak,

$$\begin{aligned}\|u_{n_k} - Gp\|^2 &\le \|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 \\ &\quad + \tfrac{2}{1-\alpha}\left((-\alpha)\|Gu_{n_k} - p\| + \|Gu_{n_k} - Gp\|\right)\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\| \\ &\quad + \|u_{n_k} - p\|^2 \\ &\le \|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 + \frac{4M_3(1-\alpha)}{1-\alpha}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\| + \|u_{n_k} - p\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın limsup alınırsa,

$$\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gp\|^2 \le \limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|^2 + 4M_3\limsup_{k\to\infty}\|u_{n_k} - Gu_{n_k}\|$$

$$+\limsup_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-p\right\|^2$$

yazılır. Buradan $\lim_{k\to\infty}\left\|u_{n_k}-Gp\right\|$=0’dır. Böylece Teorem 5.2.6’ dan $Gp=p$ olur. Lemma 5.2.5’den $\lim_{n\to\infty}\|u_n-p\|$ vardır ve $\{u_n\}$ dizisi limiti $p$’ye kuvvetli yakınsar.

**Teorem 5.2.9** $K$, düzgün konveks $X$ Banach uzayının boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $\alpha<1$, $F(G)\neq\emptyset$ ve $\{b_n\},\{a_n\}\in[0,1]$ olmak üzere $G\colon K\to K$ α-genişlemeyen dönüşüm olsun.

$0<\alpha<1$ olduğunda, $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)>0$ olduğunu kabul edelim. $\alpha\leq 0$ ise

$$\begin{cases}\liminf_{n\to\infty} a_n(1-a_n)>0,\\ \liminf_{n\to\infty} b_n<1\end{cases}$$

veya

$$\begin{cases}\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n)>0,\\ \limsup_{n\to\infty} b_n<1\end{cases}$$

olduğunu kabul edelim. $u_1\in K$ için, $\{u_n\}$ Noor iterasyonu (4.4) ile tanımlanan bir dizi olsun. üzere $G\colon K\to K$ α-genişlemeyen dönüşümü (I) şartını sağlıyorsa, o zaman $\{u_n\}$, $G'$ nin sabit noktası $p$ ‘ye kuvvetli yakınsar.

**İspat:** Teorem 5.2.6’den $\liminf_{n\to\infty}\|Gu_n-u_n\|=0$ olduğu biliniyor. Bu nedenle

$$\lim_{k\to\infty}\left\|Gu_{n_k}-u_{n_k}\right\|=0$$

olacak biçimde $\{u_n\}'$ nin $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $G$, (I) şartını sağladığından $\{u_{n_k}\}$ dizisi ile ilgili olarak $\lim_{k\to\infty} d(u_{n_k},F(G))=0$ olduğu bulunur. O halde tüm $k\in\mathbb{N}$ için

$$d(u_{n_k},p_k)<\tfrac{1}{2^k} \qquad (5.21)$$

olacak şekilde $\{u_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{u_{n_k}\}$ ve $\{p_k\} \subset F(G)$ dizisini elde ederiz. O zaman, (5.13)'den

$$\|u_{n_{k+1}} - p_k\| \leq \|u_{n_k} - p_k\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

elde ederiz. Bu da

$$\begin{aligned} \|p_{k+1} - p_k\| &\leq \|p_{k+1} - u_{n_{k+1}}\| + \|u_{n_{k+1}} - p_k\| \\ &\leq \frac{1}{2^{(k+1)}} + \frac{1}{2^k} \\ &< \frac{1}{2^{(k-1)}}, \quad \forall k = 1,2,3 \ldots. \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, $\{p_k\}$, $F(G)$ içinde bir Cauchy dizisidir. $F(G)$, $X$ içinde kapalı olma özelliğine bağlı olarak (bkz. Lemma 5.2.1), bazı $p \in F(G)$ için $\lim_{k\to\infty} p_k = p$ olduğu görülür. (5.21)'den $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = p$ 'dir ve Lemma 5.2.5'den de $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ var olduğunu görürüz. Buradan $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$=0 sonucuna ulaşılır.

### 5.3. Genelleşmiş $\boldsymbol{\alpha}$-Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktaya Yaklaşımı

Pant ve Shukla [17], aşağıda tanımı verilen ve (C) şartını sağlayan dönüşümleri içeren genelleşmiş α- genişlemeyen dönüşümler sınıfını tanıtmışlardır.

**Tanım 5.3.1.** $K$, Banach uzayı $X$'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun, her $u, v \in K$ için bir $\alpha \epsilon [0, 1)$ varsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \parallel u - Gu \parallel \leq \parallel u - v \parallel \\ &\qquad \Rightarrow \parallel Gu - Gv \parallel \leq \alpha \parallel Gv - u \parallel + \alpha \parallel Gu - v \parallel + (1 - 2\alpha) \parallel u - v \parallel \end{aligned}$$

olup $G: K \to K$ dönüşümü genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olur [17].

Şimdi genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümlerin bazı temel özelliklerini verelim.

**Önerme 5.3.2**. (C) şartını sağlayan her dönüşüm genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümdür. Fakat bunun tersi doğru değildir. $\alpha$ = 0 olduğu zaman genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşüm, (C ) şartını sağlayan bir dönüşüme dönüşür [17].

**Örnek 5.3.3.** $K = [0,4]$ alışılmış norma sahip ℝ'nin bir alt kümesi olsun.
$G: K \to K$ dönüşümünü,

$$Gu = \begin{cases} 0, & u \neq 4 \\ 2, & u = 4 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.
$u \in (2,8/3]$ ve $v = 4$ alındığında

$$\frac{1}{2} \| u - Gu \| \leq \| u - v \| \text{ ve } \| Gu - Gv \| = 2 > \| u - v \|$$

olduğundan $G$, (C) şartını sağlamaz. Tekrar $u \in (2,3]$ ve $v$ =4 alındığında

$$\frac{1}{2} \| v - Gv \| \leq \| u - v \| \quad \text{ve} \quad \| Gu - Gv \| > \| u - v \|$$

olup yine $G$, (C) şartını sağlamaz. Fakat $\alpha \geq \frac{1}{2}$ için α-genişlemeyen dönüşüm ve $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş α–genişlemeyen dönüşüm olur [17].

**Örnek 5.3.4.** $G: [0, 2] \to [0,2]$ dönüşümü

$$Gu = \begin{cases} 0, & u \neq 2 \\ 1, & u = 2 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.
$u \in (1,1.33]$ ve $v = 2$ için

$$\frac{1}{2} \|u - Gu\| \leq \|u - v\| \text{ ve } \|Gu - Gv\| = 1 > 2 - u = \|u - v\|$$

olduğundan $G$ dönüşümü (C) şartını sağlamaz. Bununla birlikte $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşüm olur.

**Örnek 5.3.5.** $\mathbb{R}^2$'de $X = \{(0,0), (4,0), (0,8), (8,0), (8,9), (9,8)\}$ olsun. $\|.\|$ normu üzerinde

$\| (u_1, u_2) \| = |u_1| + |u_2|$ tanımlansın, $(X, \|.\|)$ Banach uzayı ve $G: X \to X$ dönüşümü

$$G: \begin{pmatrix} (0,0)\ , (4,0), (0,8), (8,0), (8,9), (9,8) \\ (0,0),\ (0,0),\ (0,0), (4,0), (8,0), (0,8) \end{pmatrix}$$

verilsin. $\alpha \geq \frac{3}{11}$ için,

$$\| Gu - Gv \| \leq \alpha \| Gu - v \| + \alpha \| Gv - u \| + (1 - 2\alpha) \| u - v \|$$

$(u, v) \neq \big((8,9), (9,8)\big)$ olduğu durumlarda $G$, α-genişlemeyen dönüşümdür.
Şimdi $u = (8,9)$ ve $v = (9,8)$ aldığımızda ise

$$\begin{aligned} \| Gu - Gv \|^2 = 256 > 154\alpha + 4 \\ = 81\alpha + 81\alpha + (1 - 2\alpha)4 \\ = \alpha \| Gu - v \|^2 + \alpha \| Gv - u \|^2 + (1 - 2\alpha) \| u - v \|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $G$'nin α-genişlemeyen dönüşüm olmadığını gösterir. $\alpha < 1$ için $u = (8,0)$ ve $v = (9,8)$ alalım.

$$\frac{1}{2} \| u - Gu \| = 2 < 9 = \| u - v \|$$

olur. Fakat;

$$\| Gu - Gv \| = 12 > 9 = \| u - v \|$$

olduğundan $G$, Suzuki tipi genelleşmiş genişlemeyen dönüşümü de değildir.

**Örnek 5.3.6.** $G: [0, 8] \to [0,8]$ dönüşümü

$$Gu = \begin{cases} 0, & u \neq 8 \\ 4, & u = 8 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.
$u \in (4,5.33]$ ve $v = 8$ için

$$\frac{1}{2}\|u - Gu\| \leq \|u - v\| \text{ ve } \|Gu - Gv\| = 4 > 8 - u = \|u - v\|$$

olduğundan $G$ dönüşümü (C) şartını sağlamaz. Bununla birlikte $\alpha \geq \frac{1}{3}$ için genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olur.

**Önerme 5.3.7.** $K$, $X$ Banach uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. $G: K \to K$ dönüşümü $v \in K$ sabit noktası olan genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. O zaman $G$ quasi-genişlemeyen dönüşümdür [17].

**İspat**: $v \in F(G)$ ve $u \in K$ aldığımızda $\frac{1}{2} \| u - Gv \| = 0 \leq \| u - v \|$'dir.

$$\| Gu - Gv \| \leq \alpha \| Gu - v \| + \alpha \| Gv - u \| + (1 - 2\alpha) \| u - v \|$$
$$\| Gu - v \| \leq \alpha \| Gu - v \| + \alpha \| v - u \| + (1 - 2\alpha) \| u - v \|$$

buradan

$$(1 - \alpha) \| Gu - v \| \leq (1 - \alpha) \| u - v \|$$

elde edilir. $(1 - \alpha) > 0$ olduğundan $\| Gu - Gv \| \leq \| u - v \|$ sonucuna varılır.

Aşağıda verilen yeni iterasyon yardımıyla genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yaklaşımları incelenmektedir.

$u_0 \in K$, $[0,1]$ aralığındaki $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri için

$$\begin{cases} u = u_0, \\ u_{n+1} = G\big((1 - a_n)Gw_n + a_n Gv_n\big), \\ v_n = G\big((1 - b_n)Gu_n + b_n Gw_n\big), \\ w_n = G((1 - c_n)u_n + c_n Gu_n) \end{cases} \tag{5.22}$$

iterasyonunu tanımlayalım. Bu iterasyona göre genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları incelenecektir.

**Lemma 5.3.8.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(G) \neq \emptyset$ olmak üzere $G: K \to K$ genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ dizisi (5.22) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman tüm $p \in F(G)$ için $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ mevcuttur.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \left\|G\big((1-c_n)u_n + c_n G u_n\big) - p\right\| \\ &\le \left\|\big((1-c_n)u_n + c_n G u_n\big) - p\right\| \\ &= \|(1-c_n)(u_n - p) + c_n(Gu_n - p)\| \\ &\le (1-c_n)\|u_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} \|v_n - p\| &= \left\|G\big((1-b_n)Gu_n + b_n G w_n\big) - p\right\| \\ &\le \|(1-b_n)Gu_n + b_n G w_n - p\| \\ &= \|(1-b_n)(Gu_n - p) + b_n(Gw_n - p)\| \\ &\le (1-b_n)\|Gu_n - p\| + b_n\|Gw_n - p\| \\ &\le (1-b_n)\|u_n - p\| + b_n\|w_n - p\| \\ &\le (1-b_n)\|u_n - p\| + b_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &= \left\|G\big((1-a_n)Gw_n + a_n G v_n\big) - p\right\| \\ &\le \|(1-a_n)Gw_n + a_n G v_n - p\| \\ &= \|(1-a_n)(Gw_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| \\ &\le (1-a_n)\|Gw_n - p\| + a_n\|Gv_n - p\| \\ &\le (1-a_n)\|w_n - p\| + a_n\|v_n - p\| \\ &\le (1-a_n)\|u_n - p\| + a_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir ve buradan $\|u_{n+1} - p\| \le \|u_n - p\|$ olup $\{\|u_n - p\|\}$ monoton artmayan ve sınırlıdır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \|u_n - p\|$ vardır.

**Teorem 5.3.9.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $G: K \to K$ genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ dizisi (5.22) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman
$F(G) \neq \emptyset$'dir ancak ve ancak $\{u_n\}$ sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty} \|u_n - Gu_n\| = 0$ olur.

**İspat:** $\{u_n\}$ sınırlı bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} \|Gu_n - u_n\| = 0$ olduğunu varsayalım. $X$ düzgün konveks bir Banach uzayı olduğundan $A(K, \{u_n\}) \neq \emptyset'$ dir. $p \in A(K, \{u_n\})$ olsun. Asimptotik yarıçap tanımından,

$$r(G(p),\{u_n\} = \limsup_{n\to\infty}\|u_n - G(p)\|$$

elde edilir. Lemma 4.2.10’dan,

$$\begin{aligned} r(G(p),\{u_n\} &= \limsup_{n\to\infty}\|u_n - G(p)\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)\|Gu_n - u_n\| + \|u_n - p\|\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} sup\|u_n - p\| = r(p,\{u_n\}) \end{aligned}$$

yazarız. $\{u_n\}$ asimptotik merkezin tekliğinden $G(p) = p$ elde edilir. Yani $F(G) \neq \emptyset$’dır.

Şimdi $F(G) \neq \emptyset$ ve $p \in F(G)$ olsun. Lemma 5.3.8 gereği, $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ vardır. Kabul edelim ki

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\| = r \tag{5.26}$$

olsun. (5.23), (5.24) ve (5.25) kullanırsak,

$$\limsup_{n\to\infty}\|w_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty}\|u_n - p\| \leq r,$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty}\|v_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty}\|u_n - p\| \leq r$$

elde edilir. Önerme 5.3.7, Lemma 5.3.8 ve (5.26)’den

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} sup\|Gu_n - p\| &\leq \limsup_{n\to\infty}\|u_n - p\| \leq r, \\ \lim_{n\to\infty} sup\|Gw_n - p\| &\leq \limsup_{n\to\infty}\|w_n - p\| \leq r, \\ \lim_{n\to\infty} sup\|Gv_n - p\| &\leq \limsup_{n\to\infty}\|v_n - p\| \leq r, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &= \left\|G\big((1-a_n)Gw_n + a_nGv_n\big) - p\right\| \\ &\leq \|(1-a_n)Gw_n + a_nGv_n - p\| \\ &= \|(1-a_n)(Gw_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| \\ &\leq (1-a_n)\|Gw_n - p\| + a_n\|Gv_n - p\| \\ &\leq (1-a_n)\|w_n - p\| + a_n\|v_n - p\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1-a_n)\|u_n - p\| + a_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \,, \end{aligned}$$

$$\|u_{n+1} - p\| \leq \|(1-a_n)(Gw_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| \leq \|u_n - p\|$$
$$r \leq \lim_{n\to\infty} \|(1-a_n)(Gw_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| \leq r,$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|(1-a_n)(Gw_n - p) + a_n(Gv_n - p)\| = r$ bulunur.

Lemma 4.2.5 gereği, $\lim_{n\to\infty} \|Gw_n - Gv_n\| = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - Gw_n\| &= \left\|G\big((1-a_n)Gw_n + a_nGv_n - Gw_n\big)\right\| \\ &\leq \|(1-a_n)Gw_n + a_nGv_n - Gw_n\| \\ &= \|a_nGw_n - a_nGv_n\| \\ &\leq a_n\|Gw_n - Gv_n\|. \end{aligned}$$

Buradan $\lim_{n\to\infty} \|u_{n+1} - Gw_n\| = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - p\| &\leq \|u_{n+1} - Gw_n\| + \|Gw_n - p\| \\ &\leq \|u_{n+1} - Gw_n\| + \|w_n - p\| \end{aligned}$$

olduğundan

$$r \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|w_n - p\|$$
$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - p\| = r$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|w_n - p\| &= \left\|G\big((1-c_n)u_n + c_nGu_n\big) - p\right\| \\ &\leq \left\|\big((1-c_n)u_n + c_nGu_n\big) - p\right\| \\ &= \|(1-c_n)(u_n - p) + c_n(Gu_n - p)\| \\ &\leq (1-c_n)\|u_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\ &= \|u_n - p\| \end{aligned}$$
$$r \leq \lim_{n\to\infty} \|(1-c_n)(u_n - p) + c_n(Gu_n - p)\| \leq r$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|(1-c_n)(u_n - p) + c_n(Gu_n - p)\| = r$ bulunur. Lemma 4.2.5'den, $\lim_{n\to\infty} \|Gu_n - u_n\| = 0$ elde edilir.

**Teorem 5.3.10.** $K$, $X$ düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan, kompakt konveks bir altkümesi ve $F(G) \neq \emptyset$ olmak üzere $G: K \to K$ genelleşmiş

$\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$, (5.22) iterasyon süreci ile tanımlanan bir dizi olsun. O zaman, $\{u_n\}$ $G$'nin bir sabit noktasına yakınsar.

**İspat:** Teorem 5.3.9'den $\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$ olduğu biliniyor. $K$, kompakt olduğundan, $\{u_n\}$'in $\{u_{n_k}\}$ alt dizisi vardır ve $\{u_{n_k}\}$ $p \in K$ olacak biçimde, $p$'ye yakınsar. Lemma 4.2.10'u kullanırsak, her $k \geq 0$ için

$$\|u_{n_k} - Gp\| \leq \left(\frac{3+\alpha}{1-\alpha}\right)\|Gu_{n_k} - u_{n_k}\| + \|u_{n_k} - p\|$$

elde ederiz. Bu durumda, $\{u_{n_k}\}$, $Gp$'ye yakınsar. Teorem 5.3.9'dan $Gp = p$ olur. $G$, quasi-genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan, tüm $n \in N$ için $\|u_{n+1} - p\| \leq \|u_n - p\|$ elde ederiz. Dolayısıyla $\{u_n\}$, $p$'ye yakınsamaktadır.

**Teorem 5.3.11.** Teorem 5.3.10 şartları sağlanmış olsun. Aynı zamanda, $G$, (I) şartını sağlıyorsa, o zaman (5.22)'te tanımlanan $\{u_n\}$, $G$'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

**İspat:** Lemma 5.3.8'den $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ mevcuttur. Böylece tüm $p \in F(G)$ için $\lim_{n\to\infty} d(u_n, p)$ elde ediyoruz. Yine, Teorem 5.3.10'den, $\lim_{n\to\infty}\|u_n - Gu_n\| = 0$'dır. (I) şartından yola çıkarak

$$\lim_{n\to\infty} g\left(d\big(u_n, F(G)\big)\right) \leq \lim_{n\to\infty}\|u_n - Gu_n\|$$

sonucuna varılır. Yani, $\lim_{n\to\infty} g\left(d\big(u_n, F(G)\big)\right) = 0$ $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$, tüm $r \in (0,\infty)$ için $g(0) = 0$ ve $g(r) > 0$ şartlarını sağlayan azalmayan bir fonksiyon olduğundan, $\lim_{n\to\infty} d\big(u_n, F(G)\big) = 0$ sonucuna varırız. Böylece tüm $j \in \mathbb{N}$ için $\left\|u_{n_j} - p_j\right\| < \frac{1}{2^j}$ olacak şekilde $\{u_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\left\{u_{n_j}\right\}$ ve $\{p_j\} \subset F(G)$ dizisini elde ederiz. O zaman, (5.25)'den

$$\left\|u_{n_{j+1}} - p_j\right\| \leq \left\|u_{n_j} - p_j\right\| < \frac{1}{2^j}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\|p_{j+1} - p_j\| &\leq \left\|p_{j+1} - u_{n_{j+1}}\right\| + \left\|u_{n_{j+1}} - p_j\right\| \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}} \to 0, \quad j \to \infty\,.\end{aligned}$$

Böylece $\{p_j\}$ dizisi $F(G)$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu görülür ve dizi bir $p$ noktasına yakınsar. $F(G)$ kapalı olduğundan $p \in F(G)$ olur ve $\{u_{n_j}\}$, $p$ ye kuvvetli yakınsar. $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ mevcut olduğundan $\{u_n\} \to p \in F(G)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Son olarak, Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir Banach uzayında genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşüm için (5.22) iterasyon sürecinin zayıf yakınsamasını ispatlayacağız.

**Teorem 5.3.12.** $X$, Opial şartını sağlayan reel düzgün konveks bir Banach uzayı ve $K$, $X$'in boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi ve $F(G) \neq \emptyset$ olmak üzere $G\colon K \to K$ genelleşmiş $\alpha$-genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ dizisi (5.22) iterasyon süreci ile tanımlanan ve Teorem 5.3.10'nin tüm şartlarını sağlayan bir dizi olsun. O zaman, $\{u_n\}$ $G$'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

**İspat:** Teorem 5.3.10'den $\{u_n\}$ sınırlıdır ve $\lim_{n\to\infty}\|Gu_n - u_n\| = 0$'dır. $X$ düzgün konveks Banach uzayı olduğundan $X$ yansımalıdır. O halde $m_1 \in K$'ya zayıf yakınsak olacak şekilde $\{u_n\}$'nin $\{u_{n_j}\}$ alt dizisi bulunabilir. Önerme 5.3.7 gereği $m_1 \in F(G)$ elde edilir. Bu $\{u_n\}$ dizisinin $m_1$'e zayıf yakınsadığını iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $\{u_n\}$ $m_2 \in K$'ya zayıf yakınsak olacak şekilde bir $\{u_{n_k}\}$ alt dizisinin varlığını ve $m_1 \neq m_2$ olduğunu varsayalım. Yine Önerme 5.3.7 gereği $m_2 \in F(G)$ elde edilir. Lemma 5.3.8'den, tüm $p \in F(G)$ için $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\|$ mevcuttur. Opial şartından

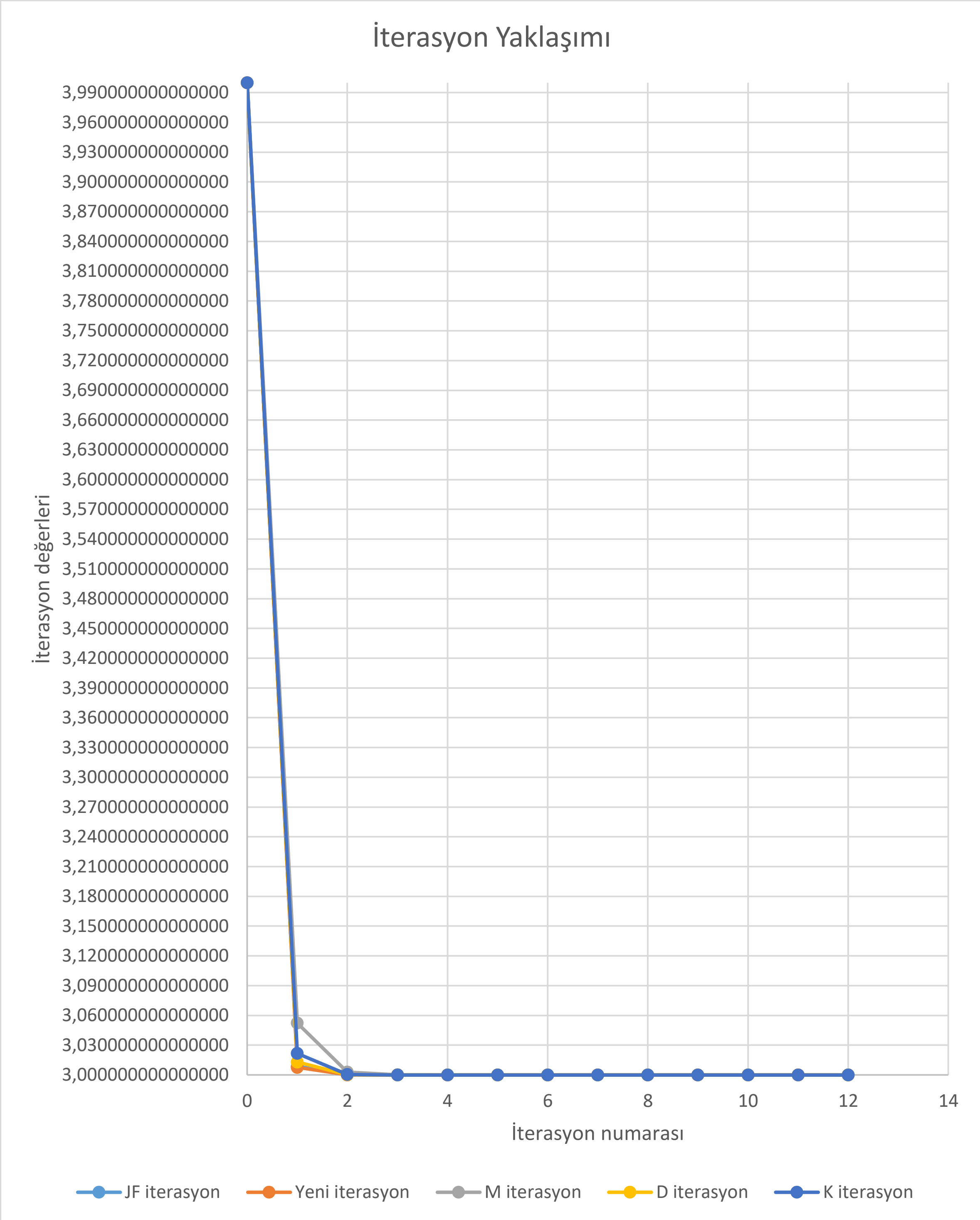
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|u_n - m_1\| &= \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - m_1\right\| < \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_j} - m_2\right\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - m_2\| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left\|u_{n_k} - m_2\right\| < \lim_{j\to\infty}\left\|u_{n_k} - m_1\right\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - m_1\|\end{aligned}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $m_1 = m_2$ bulunur. Dolayısıyla $\{u_n\}$, $G'$nin sabit noktasına zayıf yakınsar. İspat burada tamamlanır.

**Örnek 5.3.13.** $u_0 = 4, a_n = b_n = c_n = 0{,}75, Gu = \sqrt{2u + 3}$ contraction dönüşümünü alalım. M iterasyonu [11], K iterasyonu [12], D iterasyonu [14], JF iterasyonu [13] ve bu çalışmada verilen yeni iterasyon şemasının dönüşüm sabit noktasına ($u^* = 3$) yakınsaklık davranışları incelenmiştir (Çizelge 5.1).

**Çizelge 5.1**. İterasyon şeması yakınsaklık davranışı -1

| | **JF İterasyonu** | **Yeni İterasyon** | **M İterasyonu** | **D İterasyonu** | **K İterasyonu** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4,000000000000000 | 4,000000000000000 | 4,000000000000000 | 4,000000000000000 | 4,000000000000000 |
| 1 | 3,008693915461030 | 3,007610137898890 | 3,052314661098260 | 3,013040940695370 | 3,021672987313060 |
| 2 | 3,000080451743680 | 3,000061624571290 | 3,002896573464040 | 3,000180964031370 | 3,000500919608460 |
| 3 | 3,000000744919480 | 3,000000499271070 | 3,000160890546550 | 3,000002513358440 | 3,000011594949010 |
| 4 | 3,000000006897400 | 3,000000004045020 | 3,000008938270490 | 3,000000034907750 | 3,000000268401380 |
| 5 | 3,000000000063860 | 3,000000000032770 | 3,000000496570300 | 3,000000000484830 | 3,000000006212990 |
| 6 | 3,000000000000590 | 3,000000000000270 | 3,000000027587240 | 3,000000000006730 | 3,000000000143820 |
| 7 | 3,000000000000010 | 3,000000000000000 | 3,000000001532620 | 3,000000000000090 | 3,000000000003330 |
| 8 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000085150 | 3,000000000000000 | 3,000000000000080 |
| 9 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000004730 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 |
| 10 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000000260 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 |
| 11 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000000010 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 |
| 12 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 | 3,000000000000000 |




**Şekil 5.1** İterasyon Yaklaşımı -1

**Örnek 5.3.14.** $X$=$[-1,1]$, $G$:$X \to X$

$$G(u) = \begin{cases} \frac{3u}{4}, & u \in [-1,0) = A \\ -u, & u \in [0,1] \backslash \left\{\frac{1}{4}\right\} = B \\ 0, & u = \frac{1}{4} \end{cases}$$

dönüşümü verilsin. $G$ dönüşümü,

a) (C) şartını sağlamaz

b) genelleşmiş α-genişlemeyen dönüşümdür.

a) $u = \frac{1}{4}$ ve $v = \frac{1}{2}$ aldığımızda

$\frac{1}{2}\|u - Gu\| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4} = \|u - v\|$ fakat $\|Gu - Gv\| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \|u - v\|$

olduğundan (C) şartını sağlamaz.

b) $\alpha = \frac{1}{2}$ için aşağıdaki şartları inceleyelim.

**i)** $u, v \in A$ için

$$\begin{aligned} \alpha\|Gu - v\| + \alpha\|Gv - u\| + (1 - 2\alpha)\|u - v\| &= \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - v\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{3v}{4} - u\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - v\right| + \frac{1}{2}\left|u - \frac{3v}{4}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - v + u - \frac{3v}{4}\right| \\ &= \frac{7}{8}|u - v| \geq \frac{3}{4}|u - v| = \|Gu - Gv\| \end{aligned}$$

olur.

**ii)** $u \in A$ , $v \in B$ için $u < 0$ ve $v \geq 0$ için

$$\|Gu - Gv\| = \left|\frac{3u}{4} + v\right| = \begin{cases} \frac{3u}{4} + v, & \frac{3|u|}{4} < v \\ -\frac{3u}{4} - v, & \frac{3|u|}{4} \geq v \end{cases}$$

iki durum söz konusudur:

**1.Durum**

$$\alpha\|Gu - v\| + \alpha\|Gv - u\| + (1-2\alpha)\|u - v\| = \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - v\right| + \frac{1}{2}|-v-u|$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(v - \frac{3u}{4}\right) + \frac{1}{2}(v+u)$$

$$= v + u \geq \frac{3u}{4} + v = \|Gu - Gv\|$$

**2. Durum**

$$\alpha\|Gu - v\| + \alpha\|Gv - u\| + (1-2\alpha)\|u - v\| = \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - v\right| + \frac{1}{2}|-v-u|$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(v - \frac{3u}{4}\right) + \frac{1}{2}(-v-u)$$

$$= -\frac{7u}{8} \geq -\frac{3u}{4} - v = \|Gu - Gv\|$$

**iii)** $u \in A \quad v = \frac{1}{4}$ için

$$\alpha\|Gu - v\| + \alpha\|v - u\| + (1-2\alpha)\|u - v\| = \frac{1}{2}\left|\frac{3u}{4} - \frac{1}{4}\right| + \frac{1}{2}|0-u|$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{3u}{4}\right) - \frac{1}{2}u$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{7u}{8} \geq -\frac{3u}{4} = \|Gu - Gv\|$$

elde edilir.

**iv)** $u, v \in B$ için $u < v$ alalım

$$\alpha\|Gu - v\| + \alpha\|Gv - u\| + (1-2\alpha)\|u - v\| = \frac{1}{2}|-u-v| + \frac{1}{2}|-v-u|$$

$$\geq \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(v+u)$$

$$= v + u \geq v - u = \|Gu - Gv\|$$

elde edilir.

**v)** $u \in B, v = \frac{1}{4}$ için

$$\alpha\|Gu - v\| + \alpha\|Gv - u\| + (1 - 2\alpha)\|u - v\| = \frac{1}{2}\left|-u - \frac{1}{4}\right| + \frac{1}{2}|o - u|$$

$$= \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}u$$

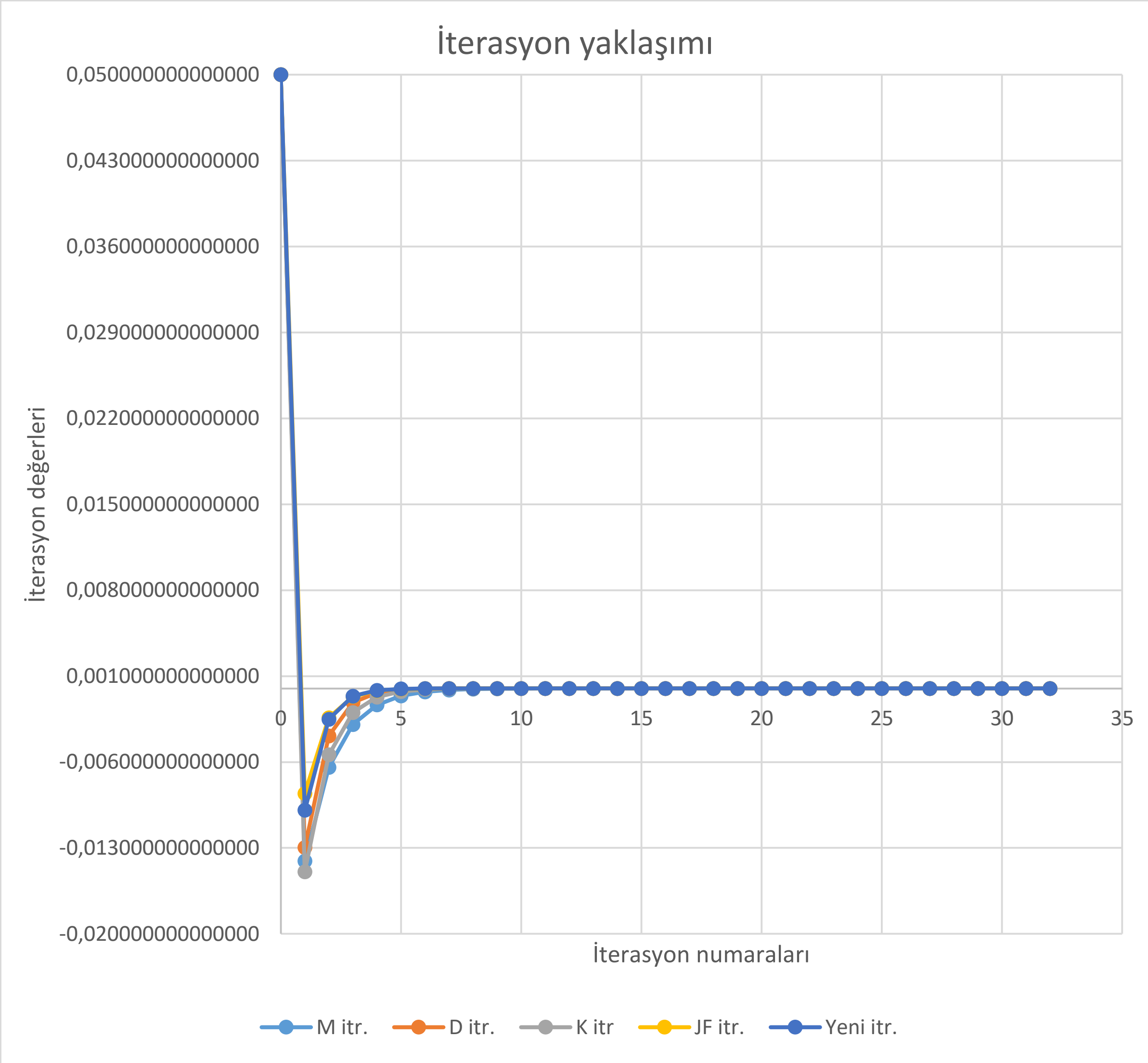
$$= u + \frac{1}{8} \geq u = \|Gu - Gv\|$$

elde edilir.

Çizelge 5.2'de çalışmada verilen yeni iterasyon ile dönüşümün sabit noktasına $(u^* = 0)$ yakınsaklık davranışları incelendi. $u_0 = 0.05,\ a_n = b_n = c_n = 0{,}75$ olarak alındı.

**Çizelge 5.2**. İterasyon süreci yakınsaklık davranışı - 2

| | M- iterasyon | D- iterasyon | K- iterasyon | JF- iterasyon | Yeni iterasyon |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,050000000000000 | 0,050000000000000 | 0,050000000000000 | 0,050000000000000 | 0,050000000000000 |
| 1 | -0,014062500000000 | -0,012963867187500 | -0,014941406250000 | -0,008569335937500 | -0,009928894042969 |
| 2 | -0,006427001953125 | -0,003866846859455 | -0,005416989326477 | -0,002386589348316 | -0,002516728296177 |
| 3 | -0,002937340736389 | -0,001153398474253 | -0,001963923132280 | -0,000664673290794 | -0,000637928181061 |
| 4 | -0,001342456508428 | -0,000344034322734 | -0,000712018030136 | -0,000185113783319 | -0,000161698966396 |
| 5 | -0,000613544576117 | -0,000102618147900 | -0,000258141302430 | -0,000051554821367 | -0,000040986676102 |
| 6 | -0,000280409044554 | -0,000030608818896 | -0,000093588826686 | -0,000014358193964 | -0,000010389105480 |
| 7 | -0,000128155696144 | -0,000009129962033 | -0,000033930519441 | -0,000003998806095 | -0,000002633380477 |
| 8 | -0,000058571158003 | -0,000002723274198 | -0,000012301470061 | -0,000001113681165 | -0,000000667496615 |
| 9 | -0,000026768849556 | -0,000000812294983 | -0,000004459883555 | -0,000000310164011 | -0,000000169193831 |
| 10 | -0,000012234200774 | -0,000000242290380 | -0,000001616925556 | -0,000000086381737 | -0,000000042886438 |
| 11 | -0,000005591412072 | -0,000000072270086 | -0,000000586214466 | -0,000000024057609 | -0,000000010870648 |
| 12 | -0,000002555450049 | -0,000000021556635 | -0,000000212531368 | -0,000000006700126 | -0,000000002755440 |
| 13 | -0,000001167920530 | -0,000000006429887 | -0,000000077052998 | -0,000000001866008 | -0,000000000698436 |
| 14 | -0,000000533776180 | -0,000000001917899 | -0,000000027935474 | -0,000000000519690 | -0,000000000177036 |
| 15 | -0,000000243952395 | -0,000000000572069 | -0,000000010127973 | -0,000000000144735 | -0,000000000044874 |
| 16 | -0,000000111493868 | -0,000000000170636 | -0,000000003671885 | -0,000000000040309 | -0,000000000011375 |
| 17 | -0,000000050956182 | -0,000000000050897 | -0,000000001331238 | -0,000000000011226 | -0,000000000002883 |
| 18 | -0,000000023288567 | -0,000000000015182 | -0,000000000482639 | -0,000000000003127 | -0,000000000000731 |
| 19 | -0,000000010643603 | -0,000000000004528 | -0,000000000174980 | -0,000000000000871 | -0,000000000000185 |
| 20 | -0,000000004864459 | -0,000000000001351 | -0,000000000063439 | -0,000000000000243 | -0,000000000000047 |
| 21 | -0,000000002223210 | -0,000000000000403 | -0,000000000023000 | -0,000000000000068 | -0,000000000000012 |
| 22 | -0,000000001016076 | -0,000000000000120 | -0,000000000008339 | -0,000000000000019 | -0,000000000000003 |
| 23 | -0,000000000464379 | -0,000000000000036 | -0,000000000003023 | -0,000000000000005 | -0,000000000000001 |
| 24 | -0,000000000212236 | -0,000000000000011 | -0,000000000001096 | -0,000000000000001 | 0,000000000000000 |
| 25 | -0,000000000096998 | -0,000000000000003 | -0,000000000000397 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 26 | -0,000000000044331 | -0,000000000000001 | -0,000000000000144 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 27 | -0,000000000020261 | 0,000000000000000 | -0,000000000000052 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 28 | -0,000000000009260 | 0,000000000000000 | -0,000000000000019 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 29 | -0,000000000004232 | 0,000000000000000 | -0,000000000000007 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 30 | -0,000000000001934 | 0,000000000000000 | -0,000000000000002 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 31 | -0,000000000000884 | 0,000000000000000 | -0,000000000000001 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |
| 32 | -0,000000000000404 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 | 0,000000000000000 |




**Şekil 5.2** İterasyon yaklaşımı - 2

# SONUÇ ve ÖNERİLER

Literatürde matematik araştırmacıları tarafından sıkça üzerinde çalışılan konulardan birisi olarak sabit noktaların varlığı ve hesaplanabilirliği, popülerliğini sürdürmektedir. Buradan, dönüşümlerin sabit noktalarının varlığının ispatı ve değer(ler)inin belirlenebilmesi önemli bir gereksinim alanı olarak durmaktadır. Bununla birlikte, 'sabit noktaların bulunması' probleminin çözümüne yönelik iterasyon süreçlerine başvurulmakta ve yeni/farklı iterasyon süreçleri geliştirilmeye çalışılmaktadır. Daha hızlı yakınsayan iterasyon süreçlerinin geliştirilmesi, sabit nokta araştırmalarına da gelişme ve bilgi birikimi sağlayacak bir araştırma konusudur.

Bu tez çalışması kapsamında, literatürde yer alan iterasyon süreçleri incelenmiş, $\alpha$–genişlemeyen dönüşümlerin Noor iterasyonu aracılığıyla zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları ispatlanmıştır. Daha sonraki aşamada, bu tez kapsamında geliştirilen 'yeni iterasyon metodu' kullanılarak M iterasyonu, D iterasyonu, K iterasyonu ve JF iterasyonlarının genelleşmiş $\alpha$–genişlemeyen dönüşümlerde sabit noktalara yakınsama hızları karşılaştırılmıştır. Bulgulara bakıldığında, 'yeni iterasyon metodunun' genelleşmiş $\alpha$–genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına, karşılaştırılan diğer iterasyon süreçlerinden, daha hızlı yakınsadığını ifade edebiliriz.

İleriki araştırmalarda, geliştirilen 'yeni iterasyon metodunun' diğer dönüşümlerde de sabit noktaya yakınsamaları araştırılabilir. Bu yeni iterasyonun farklı örnekler üzerinde sınanması da süreçlerin geliştirilmesine ve alana katkı sunacak bir çaba olarak düşünülebilir.

# KAYNAKLAR

[1] E. Picard, “Memorie sur la therie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives”.*J.Math. Pures Appl.* vol. 6, pp. 145-210, 1890.

[2] W. R. Mann, “Mean value methods in iteration”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, pp. 506–510, 1953.

[3] S. Ishikawa, “Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 59, no. 1, pp. 65-71, 1976.

[4] M. A. Noor, “New approximation schemes for general variational inequalities”, *Journal of Mathematical Analysis and applications*, vol. 251, no. 1, pp. 217-229, 2000.

[5] R. P. Agarwal, D. O’Regan, D. R. Sahu, “Iterative construction of fixed points ofnearly asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Nonlinear Convex Analysis*, vol. 8, no. 1, pp. 61–79, 2007.

[6] D. R. Sahu, “Applications of the S-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems”, *Fixed point theory*, vol. 12, no. 1, pp. 187-204, 2011.

[7] N. Kadioglu, I. Yıldırım, “Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process”, *arXiv preprint arXiv:1402.6530*, 2014 .

[8] F. Gürsoy, F., V. Karakaya, “A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument”, *arXiv preprint arXiv:1403.2546*, 2014.

[9] M. Abbas, T. Nazir, “A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems*”, Mat. Vesnik* vol. 66, no. 2, pp. 223–234, 2014.

[10] B.S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache,” A new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki’s generalized nonexpansive mappings”, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 275, pp. 147-155, (2016).

[11] K. Ullah and M. Arshad, “Numerical reckoning fixed points for Suzuki’s generalized nonexpansive mappings via new iteration process”, *Filomat* vol. 32, no. 1, pp. 187–196, 2018.

[12] N. Hussain, K. Ullah, M. Arshad, "Fixed point approximation of Suzuki generalized nonexpansive mappings via new faster iteration process", *arXiv preprint arXiv:1802.09888*, 2018.

[13] F. Ali, J. Ali, J. J. Nieto, "Some observations on generalized non-expansive mappings with an application", *Computational & Applied Mathematics*, vol. 39, no. 2, 2020.

[14] A. Hussain, D. Ali, E. Karapınar, "Stability data dependency and errors estimation for a general iteration method", *Alexandria Engineering Journal*, vol. 60, no. 1, pp.703-710, 2021.

[15] T. Suzuki, "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings", *Journal of Mathematical Applications*, vol. 340, no. 2, pp.1088-1095, 2008.

[16] K. Aoyama, F. Kohsaka, "Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 13, pp. 4387-4391, 2011.

[17] R. Pant, R. Shukla, "Approximating fixed points of generalized α-nonexpansive mappings in Banach spaces", *Numerical Function Analysis and Optimization*, vol. 38, no. 2, pp. 248-266, 2017.

[18] F. E. Browder, "Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 53, no. 6, pp. 1272 – 1276, 1965.

[19] D. Göhde, "Zum Prinzip def Kontraktiven Abbilding", *Mathematische Nachrichten*, vol. 30, pp. 251–258, 1965.

[20] W. A. Kirk, "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances", *The American Mathematical Monthly*, vol. 72, no .9, pp. 1004-1006, 1965.

[21] R. Pandey, R. Pant, V. Rakočević, R. Shukla, "Approximating fixed points of a general class of nonexpansive mappings in Banach spaces with applications", *Results in Mathematics*, vol. 74, no. 1, pp. 1-24, 2019.

[22] A. N. Kolmogorov, S. N. Fomin, *Introductory real analysis*, New York: Dover Publicaitons, 1975.

[23] E. Kreyszig, *Introductory Functionel Analysis with Applications*, USA. John Wiley &Sons, 1989.

[24] Y. Soykan, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

[25] I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Second Edition, 1989.

[26] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applicitions, series*, Topological Fixed Point Theory and its App., Springer, New York, 2009.

[27] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points*, Berlin: Springer, 2007.

[28] Z. Opial, "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings", *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 73, pp. 591–597, 1967.

[29] S. S. Chang, Y. J. Cho, Z. Haiyun, "Demi-closed principle and weak convergence problems for asymptotically nonexpansive mappings", *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 38, no. 6, pp. 1245-1260, 2001.

[30] H. F. Senter, W. Dotson, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 44, no. 2, pp. 375-380, 1974.

[31] J. Schu, "Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings", *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 43, no. 1, pp. 153-159, 1991.

[32] M. Edelstein, "Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 44, no. 2, pp. 369-374, 1974.

[33] H. K. Xu, "Inequalities in Banach spaces with applications", *Nonlinear Anal.*, vol. 16, pp. 1127-1138, 1991.

[34] Y. M. Hong, Y. Y. Huang, "On λ-firmly nonexpansive mappings in nonconvex sets", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, vol. 21, pp. 35-42, 1993.

[35] F. Kohsaka, W. Takahashi, "Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces", *Archiv der Mathematik*, vol. 91, no. 2, pp. 166-177, 2008.

[36] W. Takahashi, "Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space", *J. Nonlinear Convex Anal.* vol. 11, pp. 79-88, 2010.

[37] W. Takahashi, J.C. Yao,"Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces'', *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 15, no. 2, pp. 457-472, 2011.

[38] D. Ariza-Ruiz, C. H. Linares, E. Llorens-Fuster ve E. Moreno-Gálvez, "On α nonexpansive mappings in Banach spaces", *Carpathian Journal of Mathematics*, vol. 32, no. 1, pp. 13-28, 2016.

[39] E. Naraghirad, N. C. Wong, J. C. Yao, “Approximating fixed points of α-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces and CAT (0) spaces”. *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2013, no. 1, pp. 1-20, 2013.