

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**FREUD POLİNOMLARINA DAYALI MATRİS METODU İLE
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

Gizem HAYTA

**Danışman
Prof. Dr. Ali KONURALP**



MANİSA-2021

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Gizem HAYTA



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TABLO DİZİNİ.....	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
ABSTRACT	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Freud Polinomlarının Özellikleri.....	2
2.2. Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler	5
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	8
3.1. Materyal	8
3.2. Birinci ve İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Doğrusal Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler.....	9
3.2.1 Değişken katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemleri için Freud Matris-Sıralama Yöntemi.....	9
3.2.1.1 Çözüm Yöntemi.....	12
3.3. Rezidüel Fonksiyonuna Dayalı Hata Analizi.....	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	16
Örnekler	16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	23
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ.....	28

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Bilinmeyen Katsayılar Matrisi
B	Standart Geçiş Matrisi
$ e(t_i) $	Gerçek Mutlak Hata Fonksiyonu
$Fr_n(t)$	n. dereceden Freud Polinomu
$R_N(t)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
S	Freud Polinomlarının Geçiş Matrisi
t_i	Sıralama Noktaları
$[U; \lambda]$	Koşulların Arttırılmış Matrisi
$y_N(t)$	Yaklaşık Çözüm
$y(t)$	Tam çözüm
β_n	n. dereceden Freud Polinomu katsayısı
$[W; G]$	Temel Denklemin Arttırılmış Matrisi
$[\tilde{W}; \tilde{G}]$	Koşulların Kullanımıyla Elde Edilen Yeni Arttırılmış Matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. İlk beş Freud polinomunun grafiği	4
Şekil 4.1 Örnek 4.1.1'in $N=3$ için yaklaşık çözümün mutlak hata grafiği	17
Şekil 4.2 Örnek 4.1.4'ün $N=7$ için yaklaşık çözümün grafiği	20
Şekil 4.3 Örnek 4.1.4'ün $N=7$ için yaklaşık çözümün mutlak hata grafiği.....	21
Şekil 4.4 Örnek 4.1.5'in $N = 3$ için hata grafiği.....	22



TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1 Örnek 4.1.1'in $N=3$ için nümerik çözümleri	17
Tablo 4.2 Örnek 4.1.3'ün $N=6$ için nümerik çözümleri	19
Tablo 4.3 Örnek 4.1.3'ün $N=10$ için nümerik çözümleri.....	20
Tablo 4.4 Örnek 4.1.4'ün $N=7$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve rezidüel hata değerleri.....	21
Tablo 4.5 Örnek 4.1.4'ün $N = 5, N = 7, N = 10$ için rezidüel hata değerleri.....	21
Tablo 4.6 Örnek 4.1.5'in $N=3$ için mutlak hata ve rezidüel hata değerleri.....	22



TEŞEKKÜR

Yaptığım çalıőmamın her adımında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, lisans ve yüksek lisans eğitimlerimde yoluma ışık tutan, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali KONURALP'e ve hayatımın her anında beni maddi ve manevi olarak destekleyen, her koőulda yanımda olan aileme, özellikle anneme sonsuz teşekkür ederim.

Gizem HAYTA
Manisa, 2021



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Freud Polinomlarına Dayalı Matris Metodu ile Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine

Gizem HAYTA

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali KONURALP

Bu çalışmada, birinci ve ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerden başlamak üzere birinci ve ikinci mertebeden Pantograf diferansiyel denklemlere kadar önemli bir diferansiyel denklem sınıfının tam veya yaklaşık çözümlerini bulmak için önerdiğimiz Freud Polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi verilmiştir. Analitik çözüm için yaklaşım fonksiyonu, tabanı Freud polinomları ve katsayıları da bilinmeyen değerler olarak alınmış kestirilmiş bir seri olup, diferansiyel denklemdeki her bir terimin matris formunda yazılmasıyla elde edilen matris denkleminde kolokasyon noktalarının yerine yazılmasıyla cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Denklem ile verilen şartların hesaba katılmasıyla birlikte elde edilen sistem çözülerek, yaklaşım fonksiyonunu oluşturan serinin terimlerindeki Freud polinomlarının katsayıları bulunur. Önerilen çözüm yöntemi ayrıntılı bir şekilde verildikten sonra, bu teorinin yukarıda bahsedilen denklemleri etkili ve verimli bir şekilde çözmek için uygunluğunu göstermek için çeşitli örnekler verilmiştir. Tez düzeninde, ilk olarak bu tez boyunca dikkate alacağımız diferansiyel denklem tipleri ve genel kullanım alanlarından ve bu denklemlerin çözümü için kullanılan bazı çözüm tekniklerinden bahsedilmiştir. Daha sonra gelen ikinci bölümde ise, Freud Polinomlarını ortaya çıkaran Macar matematikçi Gaze Freud'dan, yaptığı çalışmalardan ve Freud polinomlarının genel yapısından söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, birinci ve ikinci mertebeden değişken katsayılı doğrusal genelleştirilmiş pantograf diferansiyel denklemlerden, bu denklemler için ilk defa önerdiğimiz Freud Matris sıralama yönteminden ve çözüm yönteminden bahsedilmiştir. Son olarak verilen çeşitli örnekler bu metot ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar tablo ve grafik yardımıyla da detaylı bir şekilde aktarılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Freud Polinomları, Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Sıralama Metodu, Pantograf Denklemler

2021, 21 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

On Solutions of Differential Equations with The Matrix Method Based On Freud Polynomials

Gizem HAYTA

**Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Ali KONURALP

In this study, a matrix collocation method based on Freud Polynomials, which we propose to find the exact or approximate solutions of an important class of differential equations, starting from first and second order linear differential equations, to first and second order Pantograph differential equations, is given. The approximation function for the analytical solution is an estimated series with the base as Freud polynomials and the coefficients as unknown values. The algebraic equation system is reached by substituting the collocation points in the matrix equation obtained by writing each term in the differential equation in matrix form. By solving the system obtained by taking into account the conditions given by the equation, the coefficients of the Freud polynomials in the terms of the series forming the approximation function are found. After the proposed solution method is given in detail, various examples are given to show that this theory is suitable for solving the above-mentioned equations effectively and efficiently. In the layout of the thesis, first, the types of differential equations that we will consider throughout this thesis and their general usage areas and some solution techniques used for the solution of these equations are mentioned. In the second part, Hungarian mathematician Gaze Freud, who revealed Freud Polynomials, his studies and the general structure of Freud polynomials are given. In the third chapter, linear generalized pantograph differential equations with first and second order variable coefficients, the Freud matrix collocation method, which we proposed, for the first time, for these equations, are mentioned. Finally, various examples given were solved with this method and the results obtained were explained in detail with the help of tables and graphics.

**Keywords: Freud Polynomials, Delay Differential Equations, Collocation
Method, Pantograph Equation**

2021, 27 pages

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler ortaya çıktıkları ve kullanıldıkları alanlar itibariyle önemli bir matematiksel gösterge olarak ifade edilmektedirler. Bu denklemlerin modellediği problemlerin çözümleri ile gerçeğe yakın bilgiler elde edilmekte ve böylece ilgili problemler enine boyuna analiz edilmektedir. Ancak bazı durumlarda problemin doğasından ortaya çıkan kısıtlamalar ve kabuller altında modellenen problemler, içerisinde karmaşık yapılar içermektedir. Bu tarz problemlerde gerçek hayat problemini anlamak ve analiz etmek için ihtiyaç olan analitik çözümü bulma yollarından hareket etmek bizi çoğu zaman çözüme götürememektedir. Bu sebeplerle bu tarz problemlerin çözümlerine ulaşmak için sayısal metotlara ihtiyaç duyulmaktadır ve literatürde büyük çapta yer alan sayısal yöntemler dikkate alınmaktadır. Bazı sayısal yöntemler ilgili alınan problemlerin çözümlerini elde etmek için ortaya atılmakta, bazıları da mevcut metotların geliştirilmesiyle daha verimli halde ve etkili olarak çalışabilen çözümler elde edebilmek için önerilmektedir.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini bulmaya olan ilgi, son yıllarda gerçek hayat uygulamalarını analiz etmek için birçok alanda artış göstermiştir. Bunların arasında özellikle pantograf denklemleri modellediği problemler gereğince astrofizik, doğrusal olmayan dinamik sistemler, cebirsel yapılar üzerine olasılık teorisi, elektrodinamik, kuantum mekaniği, hücre büyümesi ve sayı teorisi gibi birçok uygulama alanında kullanılır [1-12]. Ayrıca pantograf denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin alt sınıfını oluşturur ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin özel bir halidir. Matematiksel modeli oluşturulmuş bazı problemlerde bu tezin de içerisinde konu olarak ele aldığımız ikinci dereceden doğrusal genelleştirilmiş pantograf denklemlerini literatürde görmekteyiz. Bu tarz denklem yapısı, Adomian ayrıştırma yöntemi [2-4], Taylor matris yöntemi [3], Bernoulli işlemsel matris yöntemi [5], Genocchi işlemsel matris yöntemi [6] gibi daha pek çok çözüm teknikleri kullanılarak çözüme ulaştırılır.

Bu tez çalışmamızda Freud polinomlarına ve bunların matris temsillerine dayanan bir sıralama yöntemi öneriyoruz ki bu yöntem ile, lineer değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemler sınıfından lineer değişken katsayılı pantograf denklemler sınıfına kadar olan geniş bir diferansiyel denklem sınıfı için sayısal çözümler elde edilebilmektedir. Burada sayısal çözümlere ulaşmak için birinci ve ikinci dereceden lineer genelleştirilmiş pantograf denklemleri ele alacağız.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Freud Polinomları ve Özellikleri

Bu bölümde matris sıralama yönteminde çözüm önerisi için taban olarak kullanılacak olan Freud Polinomlarından bahsedilecektir.

Freud Polinomları Macar matematikçi Geza Freud tarafından ortaya atılmıştır. 4 Ocak 1922 yılında Budapeşte`de doğan Geza Freud, 1950`de Budapeşte Teknoloji ve Ekonomi Üniversitesi makine mühendisliği alanında derece almıştır. Daha sonra Eötvös Lorand Üniversitesi Fen Fakültesi Enstitüsünde öğretim görevlisi olarak görev almıştır. Kısa süre sonra Fizik Enstitüsü Diferansiyel Denklemler bölüm başkanı tarafından araştırma görevlisi olarak atanmıştır. 1959`da matematiksel analizin teori ve pratik uygulamasındaki başarılarından dolayı Kossuth ödülünü almıştır. 1976`dan itibaren Ohio Eyalet Üniversitesinde misafir profesör olarak görev almış olup esas olarak klasik matematiksel analiz alanına ait olan enterpolasyon teorisi ve ortogonal polinom teorisi ile ilgilenmiştir. Aynı zamanda kısmi diferansiyel denklemler alanında da çeşitli sonuçlar elde etmiş ve yaklaşım teorisi alanında 130 kadar makalesi yayımlanmıştır [13].

Sonsuz aralıkta genel üstel tipten ağırlık fonksiyonlarına sahip ortogonal polinomlar üzerine yapılan çalışmalar 1960`larda Freud ile başlamıştır [14,15]. Bunun yanında Levin ve Lubinsky [16] ve Mhaskar [17] gibi çeşitli makalelerde çalışmalar giderek artmıştır. Özellikle Freud ağırlık fonksiyonuna 2006 yılında Gelb ve Tanner [18] Freud polinomlarının Gegenbauer polinomlarına kıyasla artan doğruluk değerine sahip yaklaşımlar verdiğini gösteren sayısal örnekler ortaya koymuşlardır. Yine bu çalışmada özellikle pozitif tanımlı ve yüksek değerlerde sifıra yakınsayan bir ağırlık fonksiyonuna sahip olan Freud polinomlarının reel eksen üzerinde sonsuz aralıkta tanımlı ve asimptotik yapıda olması, süreksizlik noktalarına kadar başarılı yakınsamalar verdiğini göstermektedir.

Bu çalışmada göz önüne alınan Freud polinomları, bütün reel eksen üzerinde tanımlı, ağırlık fonksiyonu yukarıdaki çalışmada da ifade edildiği gibi pozitif tanımlı ve sifıra yakınsayan özelliklerini sağlayan $w(t) = \exp(-t^4)$ olan ve $\{Fr_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterdiğimiz monik ortogonal polinomlar dizisinin elemanları olup, bu polinomların

sağladığı üç terimli rekürans bağıntısı, $Fr_{-1}(t)=0$, $Fr_0(t)=1$ başlangıç şartlarıyla birlikte

$$Fr_{n+1}(t) = t Fr_n(t) - \beta_n Fr_{n-1}(t) \quad , \quad 0 \leq n \quad (2.1.1)$$

denklemini ifade edilir. Burada β_n katsayısı için, lineer olmayan

$$4\beta_n (\beta_{n-1} + \beta_n + \beta_{n+1}) = n, \quad 1 \leq n \quad (2.1.2)$$

rekürans bağıntısı kullanılmakta olup, $\beta_0 = 0$ ve

$$\beta_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-t^4) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^4) dt} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

başlangıç koşulları altında tanımlaması yapılır [14]. Buna göre hesaplamaları yaptığımızda, bu tez boyunca kullanacağımız Gama fonksiyonu cinsinden ilk beş Freud Polinomu

$$Fr_0(t) = 1,$$

$$Fr_1(t) = t,$$

$$Fr_2(t) = t^2 - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},$$

$$Fr_3(t) = t^3 - \frac{t \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$Fr_4(t) = t^4 - \frac{2t^2 \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 12\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} \quad (2.1.3)$$

olarak ve ilk beş β_n katsayısı

$$\beta_0 = 0$$

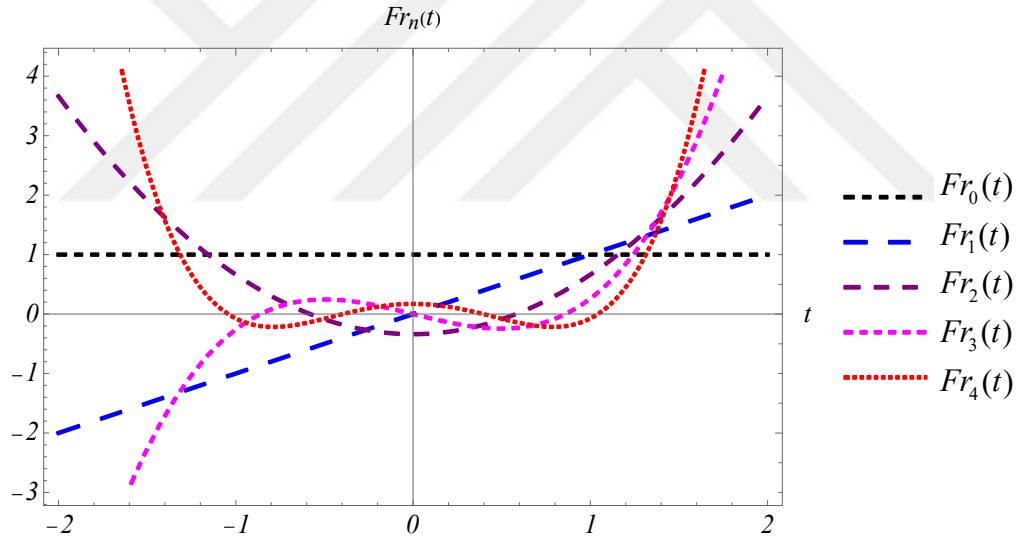
$$\beta_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \quad (2.1.4)$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\beta_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}{4\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - 16\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^3}$$

$$\beta_4 = -\frac{4\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4 - 16\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 48\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

olarak elde edilmektedir. Ayrıca $0 \leq n \leq 4$ için reel ekseninde tanımlı $Fr_n(t)$ Freud polinom fonksiyonlarının temsil ettiği eğrilerin grafikleri lejant tablosu ile Şekil 1.1’de verilmiştir.



Şekil 1.1. İlk beş Freud polinomunun grafiği

Freud’un çalışmalarının, Freud ağırlık fonksiyonlarının ve Freud denklemlerinin ortogonal polinomlar teorisi üzerine etkileri pek çok farklı makalelerde ele alınmıştır[19].Özellikle 2018 yılında Clarkson ve Jordaan çalışmalarında genelleştirilmiş Freud polinomlarının özelliklerinden bahsetmiştir. Bu tezde geçen Freud polinomları bu çalışmada ele alınan üç terimli rekürans bağlantısını sağlayan monik ortogonal polinomlardır. 2021 yılında son olarak yapılan çalışmada yine aynı

yazarlar [20] ağırlık fonksiyonunun değiştirilmesi ile farklı bir polinom ailesine geçiş yapmışlardır.

2.2. Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler

Fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi pek çok alandaki gerçek hayat durumları bir adi diferansiyel denklem ile birlikte verilmiş başlangıç değer problemi veya Cauchy problemi olarak modellenenbilmektedir. Bu problemlerin genel formu, t bağımsız zaman değişkeni, $y(t)$ zamana bağlı fiziksel veya sembolik bir niceliği göstermek üzere

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) , t_0 \leq t \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

şeklinde genel olarak alınabilir. Burada birinci mertebeden diferansiyel denklem yapısı ele alınmış olup, bu model daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere de kolayca benzer mantıkla genişletilebilmektedir. Çoğu uygulamalarda, birçok olgunun gelecekteki davranışının adi diferansiyel denklemin çözümleri ile tanımlandığı varsayılır. Buradaki varsayımda genel kabul gören yaklaşım gelecekteki davranışın tek olarak şimdiki zaman tarafından belirlendiği ve geçmişten bağımsız olduğudur. Diferansiyel fark denklemlerinde veya daha genel olarak fonksiyonel diferansiyel denklemlerde geçmiş, etkisini gelecek üzerinde önemli bir şekilde uygular [21].

Bu sebeple birçok model, adi diferansiyel denklemlerden ziyade fonksiyonel diferansiyel denklemlerle daha iyi temsil edilir. Matematiksel model oluşturulurken, yukarıdaki genel formdaki diferansiyel denklemin sağ tarafındaki fonksiyon bazen y 'nin geçmiş değerlerine de bağlı olabilir ki bu tarz denklemlere Retarded Fonksiyonel Diferansiyel denklem denir ve genel formda

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t+\theta)) , t_0 \leq t, \theta \in [-r, 0] \\ y(t_0 + \theta) &= \Phi(\theta) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

problemi olarak alınabilmektedir. Ayrıca özellikle

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t-\tau_1), y(t-\tau_2), \dots, y(t-\tau_n)) , t_0 \leq t \\ y(t) &= \phi(t), t \leq t_0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şeklinde denklem yapısı ile karşılaşılan durumlar ortaya çıkmaktadır ve bu tarz denklemlere de negatif olmayan τ_i gecikme terimlerine sahip gecikmeli diferansiyel denklemler denilmektedir. Bunun yanında denklemin sağ tarafında fiziksel niceliğin

türevinin gecikmeli değerine sahip bir fonksiyonunda yer aldığı denklem tipinden de bahsedilebilir ki bu denklem birinci mertebeden genel formda

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), y(t-\tau), y'(t-\tau)) , \quad t_0 \leq t \\ y(t) &= \phi(t), \quad t \leq t_0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

denklemleri ile verilebilir. Bu denklemlere de Neutral(nötral) tipli gecikmeli diferansiyel denklem denir. Eğer yukarıdaki genel formda gecikmeli olmayan türevli terim yok ise, yani

$$\begin{aligned} y'(t-\tau) &= f(t, y(t), y(t-\tau)) , \quad t_0 \leq t \\ y(t) &= \phi(t), \quad t \leq t_0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

şeklinde bir denklem yapısı var ise, buna da Advanced tipli fonksiyonel denklem denilmektedir.

Elbette yukarıdaki denklem formları belirli bir sınıfın daha küçük alt sınıflarını temsil etmektedirler. Bu tanımlarla birlikte orantılı gecikmelere sahip fonksiyonel denklemlerden de bahsedebiliriz. Diğer bir deyişle, burada ele alınacak denklem tipinde bilinmeyen fonksiyonun argümentlerinin gecikme terimine bağlı fonksiyonların olduğu durum gözlenmektedir. Aslında, argümentleri ölçeklendirme katsayıları ile verilmiş fonksiyonel denklemler ile modellenmiş denklem yapısını Pantograf denklem olarak adlandıracak ve 1971 yılında [22] ortaya atılmış olan ilk halini a ile b sabitler ve p pozitif bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} y'(t) &= ay(pt) + by(t), \quad 0 < t \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

şeklinde göstereceğiz. Bu denklem elektrikli bir tramvay için üstündeki akım toplama sisteminin dinamiklerini analiz etme problemi olarak modellenmiştir. Elbette üzerinde yapılan çalışmalar sonucu literatürde yer alan genel pantograf denklem halini de görmekteyiz. Böylece genel pantograf diferansiyel denklem veya orantılı gecikmeye sahip diferansiyel denklem, $0 < p, q < 1$ için

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), y(pt), y(qt)), \quad 0 \leq t \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ile verilebilir [23].

Böylece, bu çalışma boyunca sayısal olarak çözülmeye çalışılacak denklem yapılarından bahsetmiş olduk. Daha genel olarak ifade etmek istersek, göz önüne alacağımız denklem yapısı; değişken katsayılı, tercihen birinci veya ikinci mertebeden,

lineer, gecikmeli diferansiyel denklem veya genel pantograf diferansiyel denklem haline getirilebilen

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t) , \quad a \leq t \leq b \quad (2.2.8)$$

denklemini şeklindedir.

Literatürde yaygın olarak sayısal çözüm metotlarının tartışıldığı makaleler görebilmek mümkündür. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz [24-38].



3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Materyal

Bu tezde kullanılan metot esas olarak, Freud polinomlarının tabanı oluşturduğu kestirilmiş “Freud serisi” olarak adlandırdığımız bir çözüm fonksiyonuna, bu fonksiyonun çözümünü aradığımız denklemin matris formunda yazılmasına ve denklemin geçerli olduğu tanım bölgesi üzerinde alınan sıralama noktalarının bu matris denklemini sağlatılması ile elde edilen sistemden bilinmeyen seri katsayılarının bulunması üzerine dayalıdır. Önerdiğimiz bu metot, daha önce farklı polinomlar için geliştirilmiş [3,8,29,31,35,38] standart bir diferansiyel denklem çözme metodu olarak ele alınabilecektir. Bu metodun literatürde yer alan benzer yapıdaki çalışmalardan farklı olmasını sağlayan yanı; ele alınan baz ortogonal polinomunun bu alanda önemli bir yere sahip olmasıdır. Bununla birlikte polinomun asimtotik yapısı ve yakınsama avantajları ile Freud polinomları olarak ele alınması ve uygulandığı denklemlerin çözüme ulaşmasını kolaylaştıran orijinal algoritması olmuştur. Önerdiğimiz bu metodun kısaca prosedürü şöyle olacaktır: 1) Özel çözümünü aradığımız diferansiyel denklemi barındıran başlangıç, sınır şartlarına veya daha karışık şartlara sahip bir problemin bir matris denklemine dönüştüreceğiz, 2) Önerilen çözümü ve gerekli türevlerini matris formlarını da hesaba katarak kestirilmiş Freud serisi cinsinden matris formunda denkleme yerleştireceğiz. 3) Matris halinde yazılmış bu denkleme sıralama noktalarının yerleştirilmesi ile lineer denklem sistemi elde edilir ki problemin şartlarının etkisinin bu denkleme empoze edilmesiyle çözüm bulunur. 4) Bulunan bu katsayıları çözüm fonksiyonunda yerine yazdığımızda göz önüne alınan diferansiyel denklemin bir yaklaşık çözümünü elde etmiş olacağız. İstenen hassaslıkta yaklaşık çözümlerin bulunması gayesiyle, bazı iyileştirme araçları kullanılacak olup, hatanın minimize edilmesi sağlanacaktır. Üstelik bazı durumlarda, eğer istenirse, literatürde sıkça kullanılan rezidüel hata fonksiyonu ile etkin bir hata tahmini gerçekleştirmiş olacağız.

Bu bölümde, kullanacağımız denklem formunu ve bu yapıda olan denklemler için önereceğimiz çözüm yöntemini açıklayacağız.

3.2. Birinci ve İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Doğrusal Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemler

m ve k pozitif tam sayılar ve $0 \leq j \leq m$ ve $0 \leq i \leq k$ olacak şekilde problemin tanım aralığında $P_{ij}(t)$ katsayı fonksiyonu, $g(t)$ homojen olmayan fonksiyon, a_{ij} ve b_{ij} reel sabitler olmak üzere

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^k P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

şeklinde tanımlanan denklem, k . mertebeden lineer genelleştirilmiş pantograf diferansiyel denklem veya lineer gecikmeye sahip gecikmeli diferansiyel denklem olarak adlandırılabilir. $k=2$ için bu denklem ikinci mertebeden bir denklem olmaktadır. Eğer $k=1$ alınırsa, yukarıdaki denklem birinci mertebeden denkleme indirgenmektedir. Bu sebeple aşağıdaki kısımlarda verilecek teori aynı zamanda birinci mertebeden lineer genelleştirilmiş pantograf denklemler için de geçerli olmaktadır.

3.2.1 Değişken katsayılı Lineer Genelleştirilmiş Pantograf Diferansiyel Denklemleri için Freud Matris-Sıralama Yöntemi

Bu bölümde

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t) \quad , \quad a \leq t \leq b \quad (3.1)$$

m . mertebeden lineer değişken katsayılı pantograf diferansiyel denklemleri için

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ij} y^{(k)}(a) + b_{ij} y^{(k)}(b)) = \gamma_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

karışık koşulları altında;

$$y(t) \cong y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n Fr_n(t) \quad (3.3)$$

sonlu bir yaklaşık çözümün olduğunu kabul edelim.

Burada $Fr_n(t)$ Freud polinomu olmak üzere, Freud polinomunun matris formu

$$F^T(t) = S^T X^T(t) \Rightarrow F(t) = X(t)S \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. $F(t)$ ve $X(t)$ matrisleri

$$\mathbf{F}(t) = [Fr_0(t) \ Fr_1(t) \ Fr_2(t) \ \dots \ Fr_N(t)]$$

$$\mathbf{X}(t) = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^N]$$

olmak üzere S matrisi Freud polinomları ile Taylor polinomları arasındaki dönüşüm matrisidir. Yukarıda verilen matris formlarına göre çözüm ve birinci mertebeden türevi

$$y_N(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{A} \quad (3.5)$$

$$y'_N(t) = \mathbf{F}'(t) \mathbf{A} \quad (3.6)$$

matris formuna dönüştürebiliriz. \mathbf{A} matrisi

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$$

şekline ifade edilir. Buna göre yukarıda verilen (3.4) denklemini (3.5) ve (3.6) da yerine yazarak çözüm matrisi ve onun birinci türevi

$$y_N(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.7)$$

$$y'_N(t) = \mathbf{X}'(t) \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.8)$$

matris formları şeklinde elde edilir.

Burada $\mathbf{X}(t)$ cinsinden yüksek mertebeden türevleri bulmak için ve $\mathbf{X}'(t)$ ve $\mathbf{X}(t)$ arasında bir bağıntı elde etmek için

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{B} \quad (3.9)$$

iteratif formülü kullanılır. Burada \mathbf{B} matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Daha sonra (3.9) denklemini (3.8)'de yerine yazılırsa

$$y'_N(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (3.10)$$

elde edilir.

(3.5) denkleminde $a_{ij}t + b_{ij}$ dönüşümü uygulandığında;

$$y_N(a_{ij}t + b_{ij}) = F(a_{ij}t + b_{ij})A \quad (3.11)$$

ifadesi bulunur.

$X(t)$ ifadesinde t yerine $(a_{ij}t + b_{ij})$ konursa $X(a_{ij}t + b_{ij})$ 'nin matris formunu elde etmek için

$$X(a_{ij}t + b_{ij}) = X(t)\beta(a_{ij}, b_{ij}) \quad (3.12)$$

olduğunu varsayalım. Burada $\beta(a_{ij}, b_{ij})$ matris formu;

$$\beta(a_{ij}, b_{ij}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^0 & \binom{1}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^1 & \dots & \binom{N}{0} a_{ij}^0 b_{ij}^N \\ 0 & \binom{1}{1} a_{ij}^1 b_{ij}^0 & \dots & \binom{N}{1} a_{ij}^1 b_{ij}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} a_{ij}^N b_{ij}^0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.12) nin birinci mertebeden türevi

$$X'(a_{ij}t + b_{ij}) = X(t)\beta(a_{ij}, b_{ij})B \quad (3.14)$$

ve buradan

$$y_N'(a_{ij}t + b_{ij}) = X(t)\beta(a_{ij}, b_{ij})BSA \quad (3.15)$$

elde edilir.

Buna göre koşul (3.2) 'ye karşılık gelen koşul matrisi

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}y(a) + \beta_{1,1}y(b) + \beta_{1,2}y'(a) + \beta_{1,2}y'(b) &= \gamma_1 \\ \alpha_{2,1}y(a) + \beta_{2,1}y(b) + \alpha_{2,2}y'(a) + \beta_{2,2}y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklemleri bulunur.

3.2.1.1 Çözüm Yöntemi

Bu bölümde (3.1) temel matris denklemini elde etmek için (3.1)'de (3.12) denklemini daha sonra (3.15) denklemini yerine yazarak

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}_{ij}(t) \mathbf{X}(t) \boldsymbol{\beta}(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{g}(t) \quad (3.17)$$

matris denklemini elde edilir.

Bu aşamada genellikle sırlama noktaları

$$t_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad \text{ya da} \quad t_i = \frac{b-a}{2} + \frac{a-b}{2} \cos(\pi i / N) \quad (3.18)$$

olarak tanımlanır. Bizim çalışmamızda birinci formülü kullanarak eş aralıklı sırlama noktalarını alacağız.

Sırlama noktaları (3.17) denkleminde yerine yazılır ise;

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}_{ij}(t_i) \mathbf{X}(t_i) \boldsymbol{\beta}(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{g}(t_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.19)$$

ifadesi bulunur. Ya da daha kısa olarak temel matris denklemini

$$\left[\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}_{ij}(t_i) \mathbf{X}(t_i) \boldsymbol{\beta}(a_{ij}, b_{ij}) \mathbf{B}^i \mathbf{S} \right] \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.20)$$

olarak ifade edilebilir. Burada \mathbf{P}_{ij} , $\mathbf{X}(t)$ ve \mathbf{G} matris formları

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ij}(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{ij}(t_1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_{ij}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \mathbf{X}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^N \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_N & \dots & t_N^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t_0) \\ \mathbf{g}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(t_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

yukarıdaki (3.20) denklemi

$$WA = \mathbf{G} \text{ veya } [W; \mathbf{G}] \quad (3.21)$$

olarak elde edilebilir. Burada

$$W = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 P_{ij}(t_i) X(t_i) \beta(a_{ij}, b_{ij}) B^i S$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Diğer taraftan (3.2) koşulları için matris formu (3.16) ile elde edilir. Yani denklem;

$$UA = \gamma \text{ ya da } [U; \gamma] \quad (3.22)$$

tanımlanabilir. Burada

$$U = (\alpha X(a) + \beta X(b)) S = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_N]$$

olarak ifade edilir.

Daha sonra (3.1) denklemi (3.2) koşulları altında (3.21) matrisinin herhangi m.satırının yerine (3.22) satır matrisleri yerleştirilerek;

$$\tilde{W}A = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.23)$$

yani

$$[\tilde{W}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & g(t_0) \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} & ; & g(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(m-1)1} & w_{(m-1)2} & \dots & w_{(m-1)N} & ; & g(t_m) \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N & ; & \gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N+1)1} & w_{(N+1)2} & \dots & w_{(N+1)N} & ; & g(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (3.24)$$

arttırılmış matrisi kurulur.

Burada eğer $rank \tilde{W} = rank [\tilde{W}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$, ise

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.25)$$

yazılabilir.

Sonuç olarak burada (3.24) sisteminden Freud katsayıları belirlenir. Aynı zamanda (3.1) denklemi (3.2) koşulları altında yazılabiliyorsa tek bir çözüme sahiptir.

3.3. Rezidüel Fonksiyonuna Dayalı Hata Analizi

Burada üzerinde çalıştığımız Lineer değişken katsayılı Pantograf diferansiyel denklemleri;

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 P_{ij}(t) y^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) = g(t) \quad , a \leq t \leq b$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre (3.3) kesilmiş Freud serisi formunda elde edilen $y_N(t)$ çözümü verilen fonksiyonun denklemi yaklaşık olarak sağlanmaktadır. Yani buna göre;

$$t = t_r \in [a, b], \quad r = 0, 1, 2, \dots, N \text{ için}$$

$$R_N(t_r) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^2 P_{ij}(t) y_N^{(i)}(a_{ij}t + b_{ij}) - g(t) \cong 0$$

veya

$$R_N(t_r) \leq 10^{-k_r} \quad (k_r \in \mathbb{Z}^+)$$

Eğer maksimum $10^{-k_r} = 10^{-k}$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) önceden belirlenirse o halde N kesme sınırı noktaların her birinden $R_N(t_r)$ farkı önceden belirlenen 10^{-k} daha küçük oluncaya kadar arttırılır.

Bu duruma ek olarak N yeteri kadar büyük alındığında $R_N(t) \rightarrow 0$ ise bu durumda hata azalır. Diğer taraftan $R_N(t_r)$ olarak tanımlanan rezidüel(kalan) fonksiyon ile $[a, b]$ aralığında $|R_N(t)|$ fonksiyonun ortalama değeri ile çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve buradan hata tahmini yapılabilir.

Ayrıca ortalama hatanın üst sınırı \bar{R}_N değerini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz;

$$\left| \int_a^b R_N(t) dt \right| \leq \int_a^b |R_N(t)| dt$$

ve

$$\int_a^b R_N(t) dt = (b-a) R_N(c), \quad a \leq c \leq b$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b R_N(t) dt \right| = (b-a) |R_N(c)|$$

$$\Rightarrow (b-a) |R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(t)| dt$$

$$\Rightarrow |R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(t)| dt}{b-a} = \bar{R}_N$$



4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda yöntemin doğruluğunu göstermek amacıyla bazı örnekler çözülmüştür. Daha sonra çözümün doğruluğunu bulmak için Rezidüel Hata analizi yapılmış bunlar tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

Örnek 4.1.1 Tam çözüm $y(t) = t$ olan $y' \left(\frac{t}{2} \right) + y(t) = 1 + t$ Pantograf denklemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında, $y(0) = 0$ koşulu altında $N = 3$ için Freud Sıralama yöntemi ile çözelim.

Burada çözümü $y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n Fr_n(t)$ şeklinde bulmak için $N = 3$ alındığında sıralama noktaları; $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1$ şeklinde elde edilir.

$$g(t) = 1 + t, P_{00}(t) = 1, P_{10}(t) = 1, a_{00} = 1, a_{10} = \frac{1}{2}, b_{00} = 0, b_{10} = 0$$

. Bu değerler

$$\{P_{00}(t_0)X(t_0)\beta(a_{00}, b_{00})B^0S + P_{10}(t_1)X(t_1)\beta(a_{10}, b_{10})B^1S\} = G$$

temel matris denkleminde yerine yazıldığında;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 & 0.015625 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 & 0.421875 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 5/3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta(1/2,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix},$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.40168 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -0.284397 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri belirlenir. Oluşan denklem sisteminin arttırılmış matris formu;

$$[W;G] = \begin{bmatrix} 1. & 1. & -0.4016796597635174 & -0.28439738603734865 & 1 \\ 1. & 1.3333333333333333 & 0.04276478468092704 & -0.2588261443460945 & \frac{4}{3} \\ 1. & 1.6666666666666665 & 0.7094314513475937 & 0.1556339862340485 & \frac{5}{3} \\ 1. & 2. & 1.5983203402364827 & 1.1812052279253027 & 2 \end{bmatrix}$$

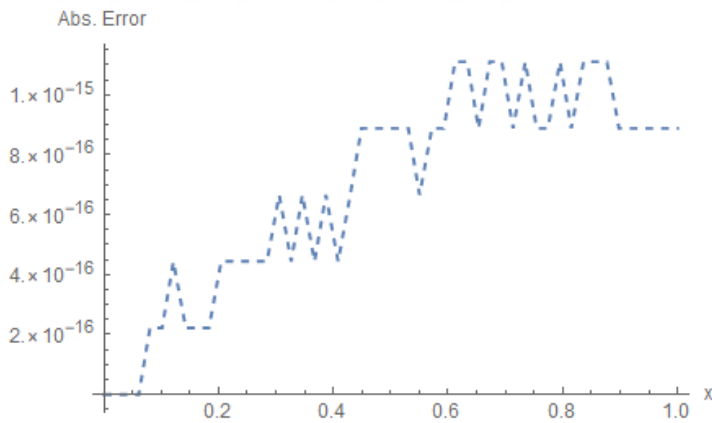
şeklinde elde edilir. Başlangıç koşulu matris formunda

$$[U;\gamma] = [1 \ 0 \ -0.40168 \ 0 \ ; \ 0]$$

olup, bu matrisi $[W;G]$ matrisinin herhangi bir satırını silip yerine yazarak elde ettiğimiz arttırılmış matris ; $[\tilde{W};\tilde{G}]$ 'dir. Bu matrisin rankı ile katsayılar matrisinin rankı birbirine eşit olup denklem sisteminin (a_0, a_1, a_2, a_3) şeklinde bir tek çözümü vardır.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.1'in N=3 için nümerik çözümleri

t_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Rezidüel Hata $R_N(t_i)$
0	0	0	0	0
0.2	0.2	0.20000000000000007	$5.551115123125783 \times 10^{-17}$	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$
0.4	0.4	0.40000000000000002	$1.665334536937734 \times 10^{-16}$	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$
0.6	0.6	0.60000000000000004	$3.330669073875469 \times 10^{-16}$	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$
0.8	0.8	0.80000000000000004	$3.330669073875469 \times 10^{-16}$	$1.110223024625156 \times 10^{-15}$
1	1	1.00000000000000002	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$



Şekil 4.1. N=3 için yaklaşık çözümün mutlak hatası

Örnek 4.1.2 Tam çözümü $y(t) = t$ olan $y'(t) - 3y(t-3) = 1 - t^2 + 3t$ Pantograf denklemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında, $y(0) = 0$ koşulu altında $N = 3$ için Freud Sıralama yöntemi ile çözelim.

Burada çözümü $y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n Fr_n(t)$ şeklinde bulmak için $N = 3$ alındığında sıralama noktaları $t_0 = 0, t_1 = 0.25, t_2 = 0.75$ ve $t_3 = 1$ şeklinde elde edilir.

$$g(t) = 1 - t^2 + 3t, P_{00}(t) = -3, P_{10}(t) = 1, a_{00} = 1, a_{10} = 1, b_{00} = -3, b_{10} = 0, b_{01} = 1$$

Bu değerler

$$\{P_{00}(t_0)X(t_0)\beta(a_{00}, b_{00})B^0S + P_{10}(t_1)X(t_1)\beta(a_{10}, b_{10})B^1S\} = G$$

temel matris denkleminde yerine yazıldığında;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 & 0.015625 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 & 0.421875 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P_{00} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, P_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.6875 \\ 2.6875 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta(1, -3) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & -6 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri belirlenir. Oluşan denklem sisteminin arttırılmış matris formu;

$$[W; G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -0.284397 & ; & 1 \\ -0.25 & 1.6875 & -1.29021 & 4.9068 & ; & 1.6875 \\ -0.75 & 2.6875 & -1.99562 & 9.46615 & ; & 2.6875 \\ -1 & 3 & -1.53832 & 10.1468 & ; & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç koşulu matris formunda

$$[U; \gamma] = [1 \ 0 \ -0.40168 \ 0 \ ; \ 0]$$

olup, bu matrisi $[W; G]$ matrisinin herhangi bir satırını silip yerine yazarak elde ettiğimiz arttırılmış matris ; $[\tilde{W}; \tilde{G}]$ 'dir. Bu matrisin rankı ile katsayılar matrisinin rankı birbirine eşit olup denklem sisteminin (a_0, a_1, a_2, a_3) şeklinde bir tek çözümü vardır.

Örnek 4.1.3 Tam çözüm $y(t) = e^t$ olan

$$y'(1+t) - 3y(1+t) + 2e^{1+t} = 0 \quad (4.1.3)$$

Pantograf denkleminin bölüm 4.1'de verdiğimiz çözüm yöntemine göre $N = 6$ için çözümü

$$y_6(t) = 1 + 0.998301656238x + 0.507038751965t^2 + 0.152993612175t^3 \\ + 0.0551800371964t^4 + 0.00071812248t^5 + 0.003487375122t^6$$

olarak bulunmuştur. Bu yaklaşım fonksiyonunun farklı t noktalarındaki değerleri ve bu noktalarda yapılan mutlak hata ve rezidüel hata değerleri Tablo 4.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2. Örnek 4.1.3'ün $N = 6$ için nümerik çözümleri

t_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Rezidüel Hata $R_N(t_i)$
0	1	1.0000000000000044	$4.4408920985 \times 10^{-15}$	$1.59872115546 \times 10^{-14}$
0.2	1.2214027581601	1.221254571274436	0.00014818688573381	$3.271896336087 \times 10^{-7}$
0.4	1.4918246976412	1.4916727008040598	0.00015199683721056	$8.184420625667 \times 10^{-7}$
0.6	1.8221188003905	1.8219314456791091	0.00018735471139996	$9.727415619664 \times 10^{-7}$
0.8	2.2255409284924	2.2252301077568863	0.00031082073558152	$529547184579 \times 10^{-7}$
1	2.7182818284590	2.7177195551791	0.00056227327994529	$1.669775429036 \times 10^{-13}$

(4.1.3) denkleminin $N=10$ için yaklaşım fonksiyonu ise

$$y_{10}(t) = 0.9999999 + 0.99999593t + 0.50001263t^2 + 0.16662901t^3 + 0.041726767t^4 \\ + 0.008261885t^5 + 0.001446309322155453t^6 + 0.000165116t^7 + 0.00003789t^8 \\ - 6.543 \times 10^{-7}t^9 + 7.6639 \times 10^{-7}t^{10}$$

olarak elde edilmiştir. Aşağıda yine bu yaklaşım fonksiyonu için oluşturulmuş Tablo 4.3 yer almaktadır. Hata analizinden görüldüğü üzere, $N=10$ için elde edilen yaklaşım fonksiyonunun hesaplanan mutlak hatası maksimum 10^{-6} hassasiyetinde, rezidüel hata ise maksimum 10^{-12} seviyelerindedir.

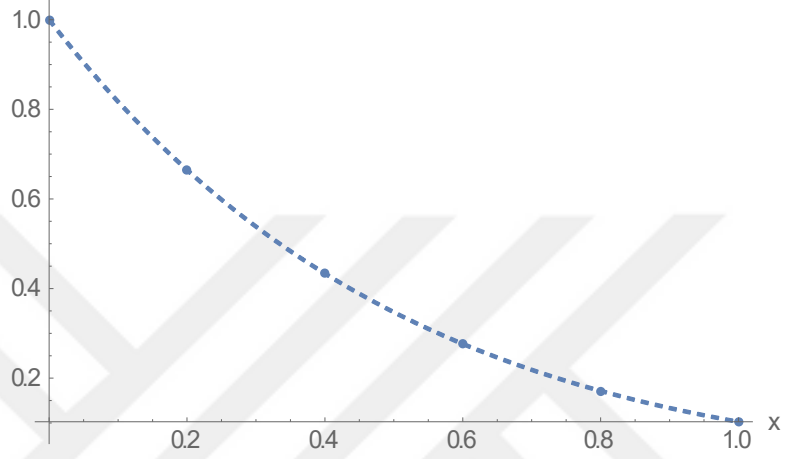
Tablo 4.3. Örnek 4.1.3'ün $N=10$ için nümerik çözümleri

t_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Mutlak Hata	Rezidüel Hata $R_N(t_i)$
0	1	0.9999999999999956	$4.4408920985 \times 10^{-15}$	$6.12843109593 \times 10^{-14}$
0.2	1.2214027581601699	1.2214022247471938	$5.33412976011 \times 10^{-7}$	$7.54951656745 \times 10^{-14}$
0.4	1.4918246976412703	1.2214022247471938	0.00000102167308368	$1.06581410364 \times 10^{-14}$
0.6	1.822118800390509	1.8221169404790984	0.00000185991141066	$2.55795384873 \times 10^{-13}$
0.8	2.225540928492468	2.2255375404856643	0.00000338800680355	$9.2903462700 \times 10^{-13}$
1	2.718281828459045	2.7182756551661753	0.00000617329286978	$2.2719603975 \times 10^{-12}$

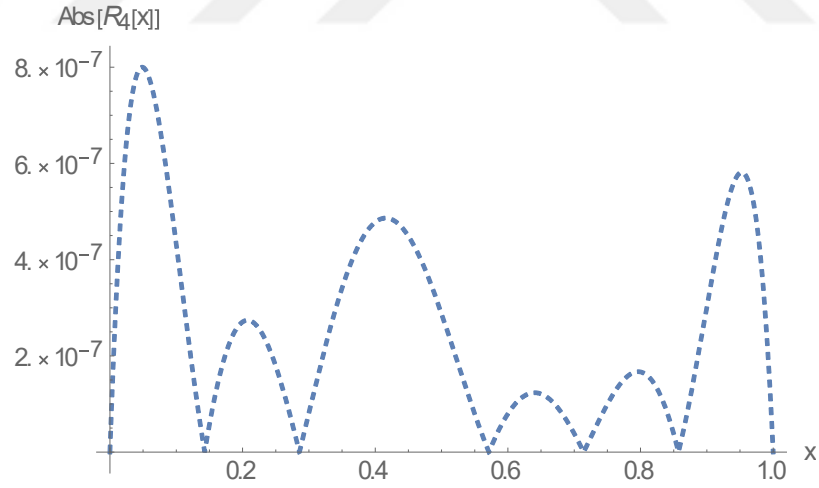
Örnek 4.1.4 Daha önce Bernoulli sıralama yöntemi ve Bernoulli Operasyonel Matris yöntemleri ile [5] sayısal olarak çözülmüş olan

$$y'(t) + y(t) + y(0.8t) = 0, y(0) = 1$$

denklemini göz önüne alalım. Denklemin Freud Polinomları ile çözümlerini 3. bölümde yer alan matris tanımları kullanılarak elde edeceğiz. Gerekli tanımlamalar ve hesaplamalar sonucunda, $N=7$ için elde edilen yaklaşık çözümün grafiği Şekil 4.2’de, yaklaşık çözümün mutlak hata grafiği de Şekil 4.3’te verilmiştir. Ayrıca $N=7$ değeri için elde edilen veriler Tablo 4.4’de bulunmaktadır.



Şekil 4.2. Örnek 4.1.4’ün $N=7$ için yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 4.3. $N=7$ için yaklaşık çözümün mutlak hata grafiği

Tablo 4.4. $N=7$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm, rezidüel hata değerleri

t_i	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Rezidüel Hata $R_N(t_i)$
0	1	0.999999999890079	$2.98152613709135 \times 10^{-11}$
0.2	0.66491	0.6646909568529564	$2.706151267517498 \times 10^{-7}$
0.4	0.43356	0.4335607306990325	$4.779743165705952 \times 10^{-7}$
0.6	0.276482	0.27648225522236897	$7.961016479374195 \times 10^{-8}$
0.8	0.1714841	0.1714840647298615	$1.666067193095699 \times 10^{-7}$
1	0.10267	0.10267013920571122	$6.209643910182194 \times 10^{-11}$

Ayrıca örnek 4.1.4'ün üç farklı N değeri için rezidüel hata tablosunu inceledik.

Tablo 4.5. $N = 5, N = 7, N = 10$ için rezidüel hata değerleri

x/N	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$
0	$8.257642576392499 \times 10^{-7}$	$2.98152613709135 \times 10^{-11}$	$2.524647157997606 \times 10^{-13}$
0.2	$6.730274713095952 \times 10^{-7}$	$2.706151267517498 \times 10^{-7}$	$2.668976151198876 \times 10^{-13}$
0.4	$5.018548616675389 \times 10^{-7}$	$4.779743165705952 \times 10^{-7}$	0.0002734141930764711
0.6	$2.843473829727827 \times 10^{-7}$	$7.961016479374195 \times 10^{-8}$	$2.762234885267389 \times 10^{-13}$
0.8	$2.905614021608826 \times 10^{-8}$	$1.666067193095699 \times 10^{-7}$	$2.633449014410871 \times 10^{-13}$
1	$5.114215034796032 \times 10^{-7}$	$6.209643910182194 \times 10^{-11}$	$2.399191956214963 \times 10^{-13}$

Örnek 4.1.5 Tam çözümünü $y(t) = t^2$ olan $y''(t) = \frac{3}{4}y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2$ Pantograf denklemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ koşulları altında $N = 3$ için Freud Sıralama yöntemi ile çözelim.

Burada çözümü $y_3(t) = \sum_{n=0}^3 a_n Fr_n(t)$ şeklinde bulmak için $N = 3$ alındığında sıralama

noktaları $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}$ ve $t_3 = 1$ şeklinde elde edilir.

$$g(t) = -t^2 + 2, P_{00}(t) = -\frac{3}{4}, P_{10}(t) = 0, P_{01}(t) = -1, P_{11}(t) = 0, P_{20}(t) = 1, P_{21}(t) = 0,$$

$$\alpha_{00} = 1, \alpha_{01} = \frac{1}{2}, \alpha_{10} = 0, \alpha_{11} = 0, \alpha_{20} = 1, b_{00} = 0, b_{01} = 0, b_{10} = 0, b_{11} = 0, b_{20} = 0$$

Bu değerler bölüm 3' te önerdiğimiz metotta yerine yazıldığında denklemin katsayıları

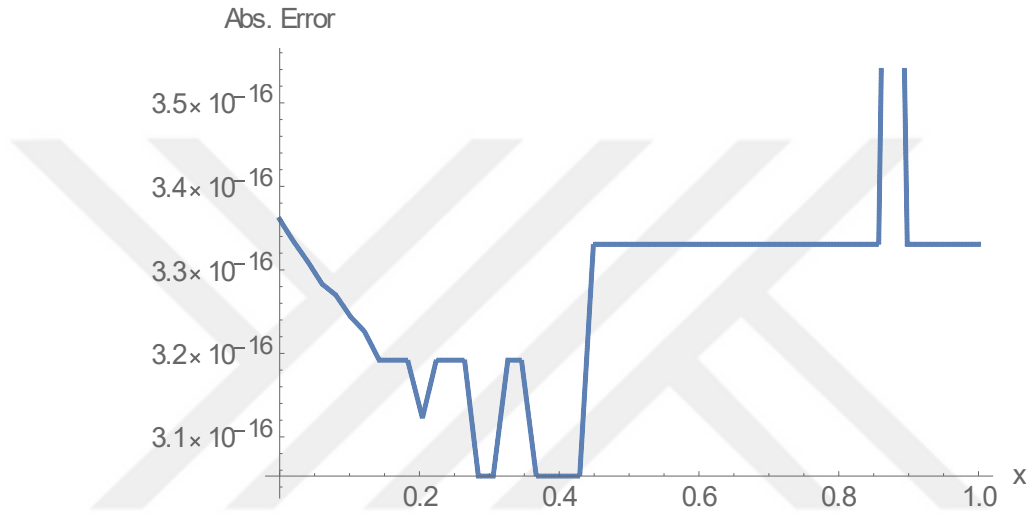
$$\begin{aligned} &P_{00}(t_0)X(t_0)\beta(a_{00}, b_{00})B^0S + P_{10}(t_1)X(t_0)\beta(a_{10}, b_{10})B^1S \\ &+ P_{01}(t_0)X(t_0)\beta(a_{01}, b_{01})B^0S + P_{11}(t_1)X(t_1)\beta(a_{11}, b_{11})B^1S \\ &+ P_{20}(t_2)X(t_2)\beta(a_{20}, b_{20})B^2S = G \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan gerekli tanımlamalar ve hesaplamalar sonucunda $N = 3$ için mutlak hata ve rezidüel hata tablo 4.6’da ve yine $N = 3$ alındığında buna bağlı olarak hata grafiği şekil 4.4 de gösterilmiştir.

Tablo 4.6. $N = 3$ için mutlak hata ve rezidüel hata değerleri

t_i	Tam Çözüm	Mutlak Hata	Rezidüel Hata $R_N(t_i)$
0	0	$3.360561827648134 \times 10^{-16}$	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.2	0.04	$3.122502256758253 \times 10^{-16}$	0
0.4	0.16	$3.05311331771918 \times 10^{-16}$	0
0.6	0.36	$3.330669073875469 \times 10^{-16}$	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$
0.8	0.64	$3.330669073875469 \times 10^{-16}$	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
1	1	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$



Şekil 4.4. Örnek 4.1.5’in $N = 3$ için hata grafiği

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Freud Polinomlarına dayalı orijinal bir matris yöntemi kullanılarak lineer gecikmeli diferansiyel denklemler, genelleştirilmiş pantograf denklemler, birinci veya yüksek mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılmıştır. Bu metot ile denklemlerin kesin veya yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Bu çalışmamızda hata oranının ölçülebilmesi için literatürde yer alan kalan fonksiyon yaklaşımını (rezidüel hata fonksiyonu) ele alarak çalışmamızda kullandığımız metottaki hata miktarını en aza indirgenmeye çalışılmıştır. Ayrıca bazı örneklerimizde mutlak hata analizide yapılmıştır.

Çalışmamızın temel amacı Freud polinomlarına dayalı matris sıralama yöntemi ile farklı tipte denklemlerin tam ya da yaklaşık çözüme ulaşmasını sağlamaktır. Çalışmamızı yürütürken, kullandığımız yöntemin doğruluğunu göstermek amacı ile birçok örnek üzerinde uygulandı. Bununla beraber henüz üzerinde çalışmadığımız farklı denklemler mevcuttur. Burada kullandığımız yöntem biraz daha geliştirilir ise çözüme ulaşabilecek denklemler çeşitlendirilebilir. Son yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen yeni polinom ailesi üzerine yapılacak çalışma ileri bir çalışma olduğundan bu tezde yer almamıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Çakır, M., Arslan, D. The Adomian decomposition method and the differential transform method for numerical solution of multi-pantograph delay differential equations. 2015, 11.
- [2] Evans DJ, Raslan KR (2005) The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. *Int. J. Comput. Math.* 82(1):49-54.
- [3] Sezer, M., Daşcıoğlu, AA. (2007) A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 200(1):217-225.
- [4] Dehghan, Mehdi, Shakeri, Fatemeh (2008). The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Physica Scripta (Online)*, 78(6), 11. doi:101088/0031-8949/78/06/065004.
- [5] Tohidi, E., Bhrawy, A.H., Erfani, K. (2013) A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, *Appl. Math. Model.*, 37:4283-4294.
- [6] Isah, A., Phang, C. (2017) Operational matrix based on Genocchi polynomials for solution of delay differential equations. *Ain Shams Eng J.* 2017.
- [7] Ockendon J R, Tayler A. B., Temple G F James. (1971) The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, 322, *Proc. R. Soc. Lond.*
- [8] A. Konuralp, S. Öner. (2020) Numerical Solutions Based on a Collocation Method Combined with Euler Polynomials for Linear Fractional Differential Equations with Delay, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 21(6), pp. 539-547.
- [9] Andre A. Keller. (2010) Generalized delay differential equations to economic dynamics and control. In *Proceedings of the 2010 American conference on Applied mathematics (AMERICAN-MATH'10)*, Stephen Lagakos, Leonid Perlovsky, Manoj Jha, Brindusa Covaci, Azami Zaharim, and Nikos Mastorakis (Eds.). World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, USA, 278-286.
- [10] Liu MZ, Li D (2004) Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. *Appl. Math. Comput.* 155:853-871.

- [11] Derfel G, Iserles A (1997) The pantograph equation in the complex plane. *J. Math. Anal. Appl.* 213:117-132.
- [12] Pinelas S (2014) Asymptotic Behavior of Solutions to Mixed Type Differential Equations. *Electronic Journal of Differential Equations* 2014(210):1-9.
- [13] Freud, G. Publications of Geza Freud in approximation theory. *Journal of approximation theory* 1986, 46, 9-15.
- [14] Clarkson, P.A., Jordaan, K. (2018) Properties of generalized Freud polynomials. *Journal of Approximation Theory* 225:148-175.
- [15] Bonan SS, Clark DS (1990) Estimates of the Hermite and the Freud Polynomials. *Journal of Approximation Theory* 63:210-224.
- [16] Levin, E., Lubinsky, D.S. *Orthogonal polynomials for exponential weights.* Springer, 2001.
- [17] Mhasker, H.N. Bound for certain Freud-type orthogonal polynomials. *Journal of approximation theory.* 1990, 63(2), 238-254.
- [18] Gelb, A., & Tanner, J. (2006). Robust reprojection methods for the resolution of the Gibbs phenomenon. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 20(1), 3-25.
- [19] Erdős, P., & Freud, G. (1974). On orthogonal polynomials with regularly distributed zeros. In *Proc. London Math. Soc.*(3) (Vol. 29, pp. 521-537).
- [20] Clarkson, P.A.; Jordaan, K., A generalized sextic Freud weight. *Integral Transforms and Special Functions*, 2021, 32.5-8: 458-482.
- [21] Arino, O., M. L. Hbid and E. A. Dads, *Delay Differential Equations and Applications*, Dordrecht, The Netherlands:Springer, 2006.
- [22] John R. Ockendon and Alan B. Tayler. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 322, pages 447–468. The Royal Society, 1971.
- [23] G. Derfel, Functional-differential and functional equations with rescaling, *Oper. Theory: Adv. Appl.* 8 (1995), 100-111.
- [24] M.Z. Liu, D. Li. Properties of analytic solution and numerical solution of multipantograph equation. *Appl. Math. Comput.*, 155 (2004), pp. 853-871.
- [25] Feist, A., Two problems in delay differential equations. Duke University, 2005.
- [26] Awawdeh, Fadi; Adawi, Ahmad; Al-Shara, Safwan. Analytic solution of multipantograph equation. *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, 2008, 2008.

- [27] Ali, I., Brunner, H., & Tang, T. (2009). A spectral method for pantograp-type delay differential equations and its convergence analysis. *Journal of Computational Mathematics*, 27(2/3), 254–265.
- [28] Yusufoglu, E. An efficient algorithm for solving generalized pantograph equations with linear functional argument. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217.7: 3591-3595.
- [29] Ş. Yüzbaşı, N. Şahin and M. Sezer, A Bessel collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations, *Numer. Meth. Part. D. E.*, 28 (2012),1105-1123.
- [30] Sedaghat, S., Ordokhani, Y., and Dehghan, M. “Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials.” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 12, pp. 4815–4830, 2012.
- [31] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 37, Issue 22, 2013, Pages 9160-9173.
- [32] Raja, M.A.Z. “Numerical treatment for boundary value problems of Pantograph functional differential equation using computational intelligence algorithms.” *Applied Soft Computing*, vol. 24, pp. 806–821, 2014.
- [33] Doha, E.H., Bhrawy, A.H., Baleanu, D., Hafez, R.M. A new Jacobi rational–Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. *Applied Numerical Mathematics*, Volume 77, 2014, Pages 43-54.
- [34] KE. Biçer, M. Sezer. Bernoulli matrix-collocation method for solving general functional integro-differential equations with hybrid delays. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 2017, 8.3: 85-99.
- [35] Yüzbaşı, Ş., Sezer, M. Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39.21: 6529-6542.
- [36] Saray, B.N., Manafian, J. (2018), "Sparse representation of delay differential equation of Pantograph type using multi-wavelets Galerkin method". *Engineering Computations*, Vol. 35 No. 2, pp. 887-903.

[37] J. AL-Nasrawy, H., Al-Jubor, A. K., & Hussain, K. (2020). On The Higher-Order Pantograph Type Delay Differential Equation Via Orthonormal Bernstein Polynomials. *Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics*, 12(3), Math Page 1.

[38] Izadi M, Yüzbaşı Ş, Ansari KJ. Application of Vieta–Lucas Series to Solve a Class of Multi-Pantograph Delay Differential Equations with Singularity. *Symmetry*. 2021; 13(12):2370.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gizem HAYTA

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Mersin Gazi Anadolu Lisesi, 2014

Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2018

Yüksek Lisans : Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü (2018-
devam ediyor)

Mesleki Deneyim

Manisa Kısayol Akademi 2018-2019

Manisa Büyükşehir Belediyesi Eğitim Merkezi 2019-2021(devam ediyor)