T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNVOLÜSYONLARIN GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hasan PENBEGÜL

DANIŞMAN
Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
İKİNCİ DANIŞMAN
Doç. Dr. Murat BEKAR

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 182342403 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Hasan PENBEGÜL tarafından hazırlanan "**İNVOLÜSYONLARIN GEOMETRİSİ**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Aksaray Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………………….

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL
Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………………….

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA
Aksaray Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ……………………………….

Tez Savunma Tarihi: 20 / 01 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………….
Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Hasan PENBEGÜL

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi esnasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen aynı zamanda engin bilgileriyle beni yönlendiren danışman hocam sayın Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a (Aksaray Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmamda bana yön gösteren ikinci danışman hocam sayın Doç. Dr. Murat BEKAR'a (Gazi Üniversitesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı), yüksek lisans çalışmam süresince beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve her zaman destekleyen sayın Dr. Öğr. Üyesi Sedat TEMEL'e (Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tüm hayatım boyunca aldığım her kararda maddi ve manevi desteklerini sunan kıymetli aileme teşekkür ederim.

Hasan PENBEGÜL
AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNVOLÜSYONLARIN GEOMETRİSİ

Hasan PENBEGÜL

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
İkinci Danışman: Doç. Dr. Murat BEKAR

ÖZET

Dört bölümden oluşan yüksek lisans tezinin birinci bölümünde; konunun tarihi gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümünde; reel kuaterniyonlar ve reel-split kuaterniyonlara ilişkin temel tanım ve cebirsel özelliklere yer verildi. Üçüncü bölümünde; reel-split kuaterniyonlar kullanılarak Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te dönme hareketleri tanımlandı. Dördüncü bölümünde; ikisi involüsyon diğer ikisi anti-involüsyon olmak üzere dört dönüşüm verildi. Ayrıca, bu dönüşümlerin vektörel kısımlarının 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ ya da Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ teki geometrik yorumlarına yer verildi. Son olarak ise; bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Reel kuaterniyon, reel-split kuaterniyon, involüsyon, anti-involüsyon

Ocak 2022; 52 sayfa

M.SC. THESIS

GEOMETRY OF INVOLUTIONS

Hasan PENBEGÜL

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tunçar ŞAHAN
Co-supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat BEKAR

ABSTRACT

This thesis is consisting of four chapters. In the first chapter; the historical background of the subject is expressed. In the second chapter; fundamental definitions and algebraic properties related to real quaternions and real-split quaternions are given. In the third chapter; rotations in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$ are given by using real-split quaternions. In the fourth chapter; two involution and two anti-involtion transformations are given. Moreover, the geometrical meanings of the vector parts of these transformations are given in three-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^3$ or in Minkowski space $\mathbb{E}_1^3$. Finally, the matrices corresponding to these transformations are obtained.

Keywords: Real quaternion, real-split quaternion, involution, anti-involution

January, 2022; 52 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$	2 −boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^{\boldsymbol{n}}$	n −boyutlu öklid uzayı
$\mathbb{E}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}$	2 −boyutlu Lorentz uzayı
$\boldsymbol{N}$	Norm
$\lVert\boldsymbol{u}\rVert$	Vektörün uzunluğu (boyu)
$\mathbb{H}$	Reel kuaterniyonların cümlesi
$\widehat{\mathbb{H}}$	Pür reel kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}_{\boldsymbol{b}}$	Birim reel kuaterniyonların cümlesi
$\overline{\boldsymbol{q}}$	Kuaterniyonun eşleniği
$\boldsymbol{q}^{-\mathbf{1}}$	Kuaterniyonun inversi
$\mathbb{H}_{\boldsymbol{s}}$	Reel-split kuaterniyonların cümlesi
$\widehat{\mathbb{H}}_{\boldsymbol{s}}$	Pür reel-split kuaterniyonların cümlesi
$(\mathbb{H}_{\boldsymbol{s}})_{\boldsymbol{b}}$	Birim reel-split kuaterniyonların cümlesi
$(\widehat{\mathbb{H}}_{\boldsymbol{s}})_{\boldsymbol{b}}$	Birim ve pür reel-split kuaterniyonların cümlesi
$\wedge$	Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır. Yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler (Müller, 1963). Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton (1805–1865) tarafından tanımlanmış ve kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli bir rol oynadığı birçok çalışmada ifade edilmiştir.

Kompleks (karmaşık) sayılar, 18. yüzyıldan itibaren araştırılan konuların başında yer almaktadır. William Rowan Hamilton, $\mathbb{E}^2$ Öklid 2-uzayındaki her bir noktaya bir kompleks sayı karşılık geldiğini bilmekte olup buradan hareketle $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayındaki her bir noktaya karşılık gelen sayıların cümlesini araştırmaya başlamıştır. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki her bir nokta bir sıralı reel sayı üçlüsü ile belirlidir. Hamilton, kompleks sayılardakine benzer çarpma işlemini bu sıralı reel sayı üçlüleri üzerinde denemiş ancak olumlu sonuç alamamıştır. Daha sonra ise, $\mathbb{E}^4$ Öklid 4-uzayında aynı deneme olumlu sonuç vermiş ve dördeyler olarak da adlandırdığı kuaterniyonları tanımlamıştır.

Kuaterniyonlar ile ilgili büyük buluş 16 Eylül 1843 tarihinde Hamilton tarafından Dublin'de gerçekleşmiştir. Hamilton, eşiyle birlikte İrlanda Kraliyet Akademisi'ndeki konsey toplantısına başkanlık yapmak için giderken, Kraliyet Kanalı boyunca yürüdükleri esnada kuaterniyonlar ile ilgili kavramlar zihninde aydınlanmaya başlamıştır. Broom Köprüsü'nde dinlenmek için durduklarında ise kuaterniyonların çarpımı ile ilgili

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1 \tag{1.1}$$

formülünü köprünün taşına yazmaktan kendisini alıkoyamamıştır. Hamilton, bu çarpım kuralı ile birlikte her bir sıralı sayı dörtlüsüne "kuaterniyon" adını vermiştir.

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca, dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir.

Rooney (1977) sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metotlar halinde ifade etmiştir. 3×3-Reel ortogonal matrisler, 2×2-Üniter matrisler, Pauli spin matrisleri ve 3×3-Özel üniter matrisler yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay kinematiğine uygulamalarını ifade etmişlerdir.

Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca, vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984) bir cismin genel vida hareketlerini noktalara ve doğrulara göre formülleştirmişlerdir. Her iki durum için de temel bağıntıları sağlayan ani vida hareketlerinin diferansiyel denklemlerini vermişler ve bu diferansiyel denklemlerin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmişlerdir. Bir doğrunun vida hareketi için gerekli dual vida tensörleri, dual matrisleri, vida koordinatları ve dual kuaterniyonların denklemlerini vermişlerdir.

Karger ve Novak (1985) reel kuaterniyonlar yardımıyla $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmişlerdir.

Agrawal (1987) dual kuaterniyonları Hamilton operatörleri ile formülleştirmiş ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özelliklerini ifade etmiştir. Bu özellikleri, bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır.

Hüseyin Tevfik Paşa (1892) İngilizce olarak yazdığı “Linear Algebra” adlı kitapta, kompleks sayılarla kuaterniyonlar arasında bir cebir inşa etmeye çalışmış ve birleşme ile değişme özelliğine sahip olmayan ancak sıfırdan farklı her elemanın tersinir olduğu 3-boyutlu bir cebir inşa edebilmiştir.

Ward (1997) 3 ve 4- boyutlu öklid uzaylarında dönme matrislerini, reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir. Levent Kula tarafından hazırlanan ‘’Bölüntülü Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları’’ doktora tezinde bölüntülü (split) kuaterniyonların Minkowski 3-uzayında dönme matrisleri tanımlanmıştır.

Inoguchi (1998) bölünmüş (split) kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-Uzayında sabit ortalama eğrilikli zamansı (timelike) yüzeylerin temel denklemlerini, bölünmüş kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formülleştirmiştir.

Knus vd. (1998) yazdıkları “The Book of Involutions” adlı kitapta iki çeşit involüsyon tanımlamışlar ve bu involüsyonların cebirsel özelliklerini ayrıntılı bir şekilde ele almışlardır.

Kula (2003) bölünmüş kuaterniyonları incelemiş ve Hamilton operatörlerini özellikleriyle birlikte vermiştir. Ayrıca, Minkowski 3-uzayında vida hareketini tanımlamıştır.

Ell ve Sangwine (2007) “Quaternion involutions and anti-involutions” adlı çalışmalarında reel kuaterniyonları kullanarak biri involüsyon diğeri anti-involüsyon olmak üzere iki dönüşüm tanımlamışlardır. Ayrıca, bu dönüşümlerin vektörel kısımlarının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki geometrik yorumlarının birer yansımaya karşılık geldikleri gösterilmiştir.

Bu tezde ilk olarak, reel kuaterniyonlar cebiri ile reel-split kuaterniyonlar cebiri ele alınmış ve temel cebirsel özelliklere yer verilmiştir. Minkowski uzayında genel dönme hareketleri reel-split kuaterniyonlar cinsinden ifade edilmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda reel-split kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğer ikisi anti-involüsyon olan dört dönüşüm tanımlanmıştır. Bu dönüşümlerin Minkowski uzayında meydana getirdikleri dönme hareketleri ele alınmıştır. Son olarak ise bu dönüşümlere karşılık gelen matrislere yer verilmiştir. Reel-split kuaterniyon timelike ve vektör kısmı spacelike olduğunda kuaterniyonun skaler kısmı sıfırdan farklı ise kutupsal formda yazılabilir. Ancak skaler kısmı sıfır ise kuaterniyon kutupsal formda yazılamaz. Timelike reel-split kuaterniyonun skaler kısmının sıfır olması durumunda geçerli bir dönme operatörü tanımladık.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanacağımız temel kavram ve teoremlere yer verilecektir. 2-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vektörlerini ele alalım. Bu durumda; $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörlerinin Öklid iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{2.1}$$

ile birlikte, 2–boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^2$ yi meydana getirir. Bu durum, $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle\,,\,\rangle)$ ile ifade edilir. $\mathbb{E}^2$ de herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vektörleri birbirlerine dik ise

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \tag{2.2}$$

dır. $\mathbb{E}^2$ de herhangi bir $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ vektörünün normu ve uzunluğu (boyu) sırası ile

$$N(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = u_1^2 + u_2^2 \tag{2.3}$$

ve

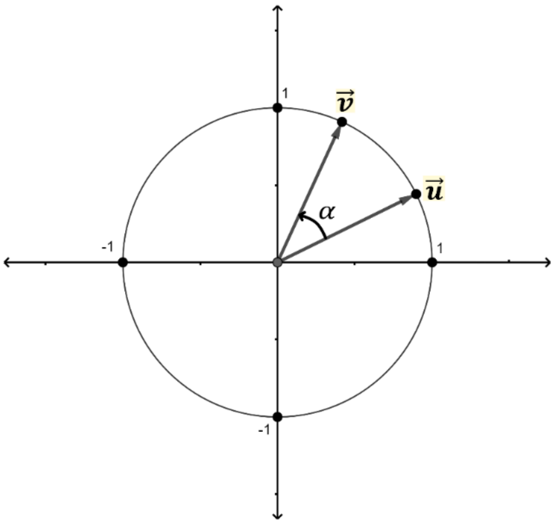
$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{N(\boldsymbol{u})} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlıdır. Normu 1 olan vektörlere birim vektörler denir.

$\mathbb{E}^2$ de herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ birim vektörlerini ele alalım. Bu durumda Şekil 2.1 de gösterildiği üzere

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

eşitliği sonucunda $\boldsymbol{u}$ vektörü $\mathbb{E}^2$ de $x^2 + y^2 = 1$ birim çember yayı boyunca pozitif yönde $\alpha \in \mathbb{R}$ açısı kadar döner ve $\boldsymbol{v}$ vektörünü meydana getirir.

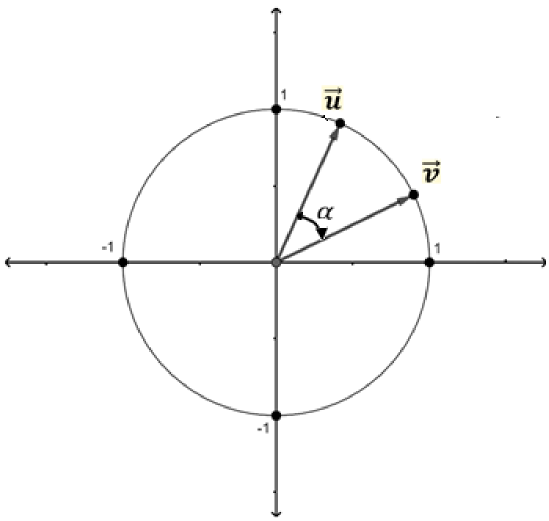


Şekil 2.1. Öklidyen çemberde pozitif yönlü dönme

Benzer şekilde, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ birim vektörleri için

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

eşitliği sağlandığında Şekil 2.2 de gösterildiği üzere $\boldsymbol{u}$ vektörü $\mathbb{E}^2$ de $x^2 + y^2 = 1$ birim çember yayı boyunca negatif yönde $\alpha \in \mathbb{R}$ açısı kadar döner ve $\boldsymbol{v}$ vektörünü meydana getirir.



Şekil 2.2. Öklidyen çemberde negatif yönlü dönme

$\mathbb{E}^2$ de ele aldığımız herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vektörleri için Öklid iç çarpımı yerine Lorentz iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{2.7}$$

kullanılırsa, 2-boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle_L)$ elde edilir. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vektörleri birbirlerine dik ise

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \tag{2.8}$$

dır. Bu diklik durumuna Lorentz anlamında diklik denir.

$\mathbb{E}_1^2$ de herhangi bir $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ vektörü için;

(i) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_L = -u_1^2 + u_2^2 > 0$ ya da $\boldsymbol{u} = O$ ise $\boldsymbol{u}$ ya spacelike (uzaysı) vektör denir.

(ii) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_L < 0$ ise $\boldsymbol{u}$ ya timelike (zamansı) vektör denir.

(iii) $\boldsymbol{u} \neq O$ olmak üzere

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_L = 0 \tag{2.9}$$

ise $\boldsymbol{u}$ ya lightlike (ışıksı) veya null vektör denir (O'Neill, 1983).

$\mathbb{E}_1^2$ de herhangi bir $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ vektörünün normu

$$N(\boldsymbol{u}) = -\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle_L = u_1^2 - u_2^2 \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu $\boldsymbol{u}$ vektörünün uzunluğu (boyu) ise;

(i) $\boldsymbol{u}$ spacelike ya da lightlike ise

$$\|\boldsymbol{u}\|_L = \sqrt{-N(\boldsymbol{u})} = \sqrt{-u_1^2 + u_2^2} \tag{2.11}$$

dir.

(ii) $\boldsymbol{u}$ timelike ise

$$\|\boldsymbol{u}\|_L = \sqrt{N(\boldsymbol{u})} = \sqrt{u_1^2 - u_2^2} \tag{2.12}$$

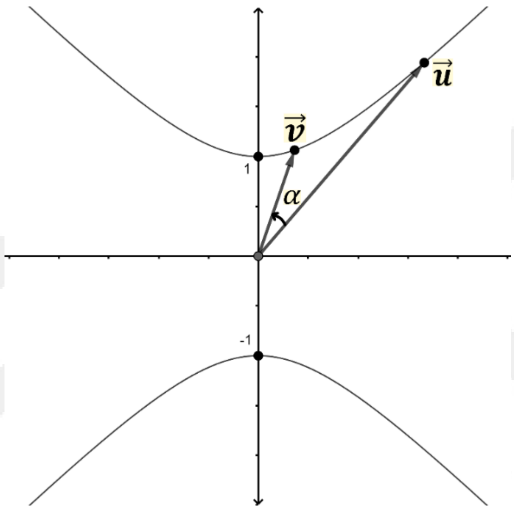
dir.

Normu ± 1 (yani, $\|\boldsymbol{u}\|_L = 1$) olan vektöre birim vektör denir (O'Neill, 1983).

$\mathbb{E}_1^2$ de herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ birim vektörlerini ele alalım. Bu durumda, Şekil 2.3'te gösterildiği üzere

$$\begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

eşitliği sonucunda $\boldsymbol{u}$ vektörü $\mathbb{E}_1^2$ de $-x^2 + y^2 = 1$ Lorentz birim çember yayı boyunca pozitif yönde hiperbolik $\alpha \in \mathbb{R}$ açısı kadar döner ve $\boldsymbol{v}$ vektörünü meydana getirir.

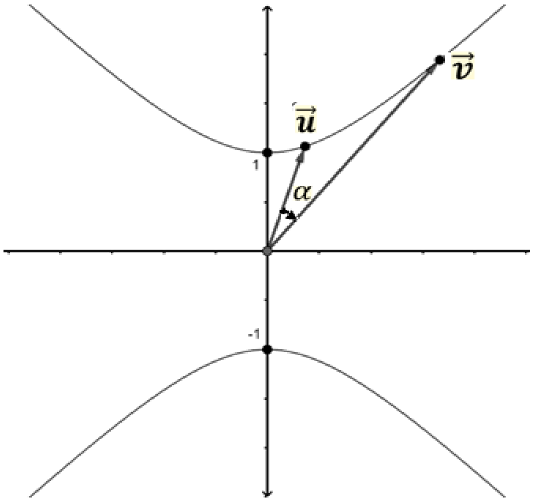


Şekil 2.3. Lorentzian çemberde pozitif yönlü dönme

Benzer şekilde, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ birim vektörleri için

$$\begin{bmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

eşitliği sağlandığında Şekil 2.4'te gösterildiği üzere $\boldsymbol{u}$ vektörü, $\mathbb{E}_1^2$ de $-x^2 + y^2 = 1$ Lorentz birim çember yayı boyunca negatif yönde hiperbolik $\alpha \in \mathbb{R}$ açısı kadar döner ve $\boldsymbol{v}$ vektörünü meydana getirir.



Şekil 2.4. Lorentzian çemberde negatif yönlü dönme

A, nxn −tipinde bir reel matris olsun. Eğer

$$A^{-1} = A^{T} \tag{2.15}$$

ise, A matrisine ortogonaldir denir (Hacısalihoğlu, 1996).

A, nxn − tipinde bir matris olsun. Eğer

$$A^{T} = \varepsilon A \varepsilon \tag{2.16}$$

ise, A matrisine yarı-ortgonaldir denir. Burada, $\varepsilon = diag(-1,1,1)$ dir (O'Neill, 1983).

2.1 Reel Kuaterniyonlar

3-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ te $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerini ele alalım. Bu durumda, $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörlerinin Öklid iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.17}$$

ile birlikte, 3–boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ ü meydana getirir. Bu durum, $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ ile ifade edilir.

Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \tag{2.18}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1998). Ayrıca, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere

$$\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle - \boldsymbol{w}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{2.19}$$

dir. Bu eşitlik Lagrange formülü olarak adlandırılır (Jeffreys, 1950). Buradan,

$$(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \wedge (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{u}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle - \boldsymbol{v}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle) = \boldsymbol{v}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle - \boldsymbol{u}\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$$

elde edilir.

Reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarına q reel kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ birimleri ise 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak ele alınabilir. Bu baz vektörleri

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}, \;\; \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \;\; \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \end{gathered} \tag{2.21}$$

eşitlikleri ile tanımlı çarpım kuralına sahiptir. Her bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonu $S(q) = q_0$ ve $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ olmak üzere

$$q = S(q) + \boldsymbol{V}(q) \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $S(q)$ ifadesine q reel kuaterniyonunun skaler kısmı, $\boldsymbol{V}(q)$ ifadesine ise vektörel kısmı denir. Sadece vektörel kısımdan oluşan reel kuaterniyonların cümlesine pür reel kuaterniyonların cümlesi denir ve bu cümle

$$\widehat{\mathbb{H}} = \{\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} : q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{2.23}$$

şeklinde gösterilir. Her bir pür reel kuaterniyon, $\mathbb{E}^3$ te bir vektör belirtir (Hamilton, 1844).

Herhangi iki reel kuaterniyon $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ ve $p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ olmak üzere, reel kuaterniyonların cümlesi üzerinde toplama işlemi;

$$\begin{array}{llll} \oplus: & \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ & (q,p) & \mapsto & q\oplus p = q+p \end{array} \tag{2.24}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} q+p &= \big(S(q)+\boldsymbol{V}(q)\big)+\big(S(p)+\boldsymbol{V}(p)\big) \\ &= (q_0+\ q_1\boldsymbol{i}+\ q_2\boldsymbol{j}+\ q_3\boldsymbol{k})+\ (p_0+\ p_1\boldsymbol{i}+\ p_2\boldsymbol{j}+\ p_3\boldsymbol{k}) \\ &= (q_0+\ p_0)+\ (q_1+\ p_1)\boldsymbol{i}+\ (q_2+\ p_2)\boldsymbol{j}+\ (q_3+\ p_3)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.25}$$

dir (Hamilton, 1844). Burada, $q+p=p+q$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, reel kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{H}$ üzerinde tanımlı toplama işlemi, değişme özelliğine sahiptir. Bu nedenle $\mathbb{H}$ kümesi, üzerinde tanımlı toplama işlemiyle birlikte bir Abel grubu belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H},\oplus)$ bir Abel grubudur. $\mathbb{H}$ nin $\oplus$ işlemine göre birim (etkisiz) elemanı $q=0+0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=O$ sıfır reel kuaterniyonudur.

Herhangi bir $q=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonunu ve herhangi bir λ reel sayısını ele alalım. Bu durumda, reel kuaterniyonların cümlesi üzerinde skalerle çarpma işlemi,

$$\begin{array}{llll} \odot: & \mathbb{R}\times\mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ & (\lambda,q) & \mapsto & \lambda\odot q = \lambda q \end{array} \tag{2.26}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} \lambda q &= \ \lambda(S(q)+\boldsymbol{V}(q)) \\ &= \lambda S(q)+\ \lambda\boldsymbol{V}(q) \\ &= \lambda q_0+\ \lambda(q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}) \\ &= \lambda q_0+\lambda q_1\boldsymbol{i}+\lambda q_2\boldsymbol{j}+\lambda q_3\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.27}$$

dir (Hamilton, 1844). Reel kuaterniyonların cümlesi, üzerinde tanımladığımız toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H},\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot)$ bir vektör uzayıdır.

Herhangi iki reel kuaterniyon $q=q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$ ve $p=p_0+p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}$ olmak üzere, reel kuaterniyonların cümlesi üzerinde çarpma işlemi;

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & \mathbb{H}\times\mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ & (q,p) & \mapsto & q\otimes p = qp \end{array} \tag{2.28}$$

ile tanımlı olup

$$qp = S(q)S(p) - \langle \boldsymbol{V}(q), \boldsymbol{V}(p)\rangle + S(q)\boldsymbol{V}(p) + S(p)\boldsymbol{V}(q) + \boldsymbol{V}(q)\wedge\boldsymbol{V}(p) \tag{2.29}$$

dir. Burada, $\langle , \rangle$ ile $\mathbb{E}^3$ te iki vektörün iç çarpımı, $\wedge$ ile de vektörel çarpımı gösterilmiştir. Bir diğer ifadeyle,

$$\begin{gathered} \langle \boldsymbol{V}(q), \boldsymbol{V}(p)\rangle = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 \\ \boldsymbol{V}(q)\wedge\boldsymbol{V}(p) = (q_2p_3 - q_3p_2)\boldsymbol{i} + (q_3p_1 - q_1p_3)\boldsymbol{j} + (q_1p_2 - q_2p_1)\boldsymbol{k} \end{gathered} \tag{2.30}$$

dir (Hamilton, 1844). Burada dikkat edilmelidir ki, $\mathbb{E}^3$ te vektörel çarpım değişme özelliğine sahip olmadığından, genel olarak

$$qp \neq pq \tag{2.31}$$

dur. Dolayısıyla, reel kuaterniyonlar cümlesi, üzerinde tanımladığımız toplama, skalerle çarpma ve çarpım işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde değişmeli olmayan bir cebir belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \otimes)$ değişmeli olmayan bir cebirdir.

Herhangi iki pür reel kuaterniyon $\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ nın çarpımı

$$\boldsymbol{qp} = -\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\rangle + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{p} \tag{2.32}$$

ile tanımlıdır.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{q} = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} = S(q) - \boldsymbol{V}(q) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlıdır (Hamilton, 1967; Kelland vd., 1904). λ_1, λ_2 herhangi iki reel sayı ve q ile p herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere, eşlenik kavramının aşağıdaki temel özellikleri verilebilir:

(i) $\overline{\lambda_1 q + \lambda_2 p} = \lambda_1 \bar{q} + \lambda_2 \bar{p}$,

(ii) $\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}$,

(iii) $\overline{(\bar{q})} = q$.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonun normu

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{2.34}$$

ile tanımlıdır. Burada dikkat edilmelidir ki, reel kuaterniyonların cümlesi üzerinde çarpma işlemi genel olarak değişme özelliğine sahip değilken, özel bir durum olarak herhangi bir reel kuaterniyonu eşleniği ile çarptığımızda, değişme özelliği sağlanır. Ayrıca $N(q) \in \mathbb{R}$ ve $N(q) \geqslant 0$ olduğuna dikkat ediniz. λ, herhangi bir reel sayı ve q ile p herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere, norm kavramı aşağıda verilen temel özelliklere sahiptir:

(i) $N(qp) = N(q)N(p)$,

(ii) $N(\lambda q) = \lambda^2 N(q)$.

Normu 1 br olan reel kuaterniyonlara birim reel kuaterniyonlar denir. Bu çalışmada, birim reel kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H}_b = \{q \in \mathbb{H} : N(q) = 1\} \tag{2.35}$$

ile gösterilecektir. Bir reel kuaterniyon birim ve pür ise (yani; $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ ve $N(q) = 1$ ise), karesi (kendisi ile çarpımı) -1 dir. Bir diğer ifadeyle, $\boldsymbol{q}^2 = -N(\boldsymbol{q}) = -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = -1$ dir (Ell ve Sangwine, 2007).

Sıfırdan farklı herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonunu

$$\frac{q}{\sqrt{N(q)}} \tag{2.36}$$

şeklinde birim kuaterniyona dönüştürebiliriz.

Sıfırdan farklı herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonunun çarpma işlemine göre tersi (bir diğer ifade ile inversi);

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \tag{2.37}$$

ile tanımlıdır. λ, herhangi bir reel sayı ve q herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere, invers kavramı aşağıda verilen temel özelliklere sahiptir:

(i) $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$,
(ii) $(\lambda q)^{-1} = q^{-1}/\lambda$.

Vektörel kısmı sıfırdan farklı olan herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonu

$$\begin{aligned} cos\alpha &= \frac{q_0}{\sqrt{N(q)}} \\ sin\alpha &= \frac{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}}{\sqrt{N(q)}} \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}} \end{aligned} \tag{2.38}$$

olmak üzere;

$$q = \sqrt{N(q)}\,(\,cos\alpha + \boldsymbol{\mu}sin\alpha) \tag{2.39}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir. Burada; $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\mu}^2 = -N(\boldsymbol{\mu}) = -1$ dir. q nun eşleniği ise:

$$\bar{q} = \sqrt{N(q)}(cos\alpha - \boldsymbol{\mu}sin\alpha) \tag{2.40}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca, vektörel kısmı sıfırdan farklı olan her $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel kuaterniyonu

$$\begin{aligned} a &= q_0 \\ b &= \sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2} \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{{q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}} \end{aligned} \tag{2.41}$$

olmak üzere,

$$q = a + \boldsymbol{\mu} b \tag{2.42}$$

şeklinde kompleks formda ifade edilebilir. Burada; $\boldsymbol{\mu}^2 = -1$ dir.

2.2 Reel-Split Kuaterniyonlar

Herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri için Öklid iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.43}$$

yerine Lorentz iç çarpımı

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.44}$$

kullanılırsa, 3-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski uzayı) $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle_L)$ elde edilir. Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te herhangi iki $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörleri birbirlerine dik ise

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_L = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0 \tag{2.45}$$

dır. Bu diklik durumuna Lorentz anlamında diklik denir (O'Neill, 1983).

Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{u} \wedge_L \boldsymbol{v} = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \tag{2.46}$$

dir (O'Neill, 1983). Ayrıca $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

$$\boldsymbol{u} \wedge_L (\boldsymbol{v} \wedge_L \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_L - \boldsymbol{v} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle_L \tag{2.47}$$

dir (Jeffreys, 1950). Buradan

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u} \wedge_L \boldsymbol{v}) \wedge_L \boldsymbol{w} &= -\boldsymbol{w} \wedge_L (\boldsymbol{u} \wedge_L \boldsymbol{v}) \\ &= -(\boldsymbol{v} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle_L - \boldsymbol{u} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle_L) \qquad (2.48) \\ &= \boldsymbol{u} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle_L - \boldsymbol{v} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle_L \end{aligned}$$

elde edilir.

Reel-split kuaterniyonlarının cümlesi

$$\mathbb{H}_s = \{q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} : q_0, q_1, q_2\,, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{2.49}$$

ile tanımlıdır. Burada; q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarına q reel-split kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ birimleri ise Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te dik koordinat siteminin baz vektörleri olarak ele alınabilir. Bu baz vektörleri

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = -1,\;\; \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1,\;\; \boldsymbol{ijk} = 1, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},\;\; \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i},\;\; \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \end{gathered} \tag{2.50}$$

eşitlikleri ile tanımlı çarpım kuralına sahiptir (Inoguchi, 1998). Her bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu $S(q) = q_0$ ve $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ olmak üzere

$$q = S(q) + \boldsymbol{V}(q) \tag{2.51}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; $S(q)$ ifadesine q reel-split kuaterniyonunun skaler kısmı, $\boldsymbol{V}(q)$ ifadesine ise vektörel kısmı denir. Sadece vektörel kısımdan oluşan reel-split kuaterniyonların cümlesine pür reel-split kuaterniyonlar denir ve bu cümle

$$\widehat{\mathbb{H}}_s = \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_s :\; \boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}\} \tag{2.52}$$

şeklinde gösterilir. Her bir pür reel-split kuaterniyonu $\mathbb{E}_1^3$ te bir vektör belirtir. (Kula ve Yaylı, 2007).

Herhangi iki reel-split kuaterniyon

$$q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \tag{2.53}$$

ve

$$p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k} \tag{2.54}$$

olmak üzere, reel-split kuaterniyonların cümlesi üzerinde toplama işlemi;

$$\begin{array}{rccl} \oplus_s: & \mathbb{H}_s \times \mathbb{H}_s & \to & \mathbb{H} \\ & (q,p) & \mapsto & q \oplus_s p = q + p \end{array} \tag{2.55}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} q + p &= \big(S(q) + \boldsymbol{V}(q)\big) + \big(S(p) + \boldsymbol{V}(p)\big) \\ &= (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) + (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) \\ &= \lambda(q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\boldsymbol{i} + (q_2 + p_2)\boldsymbol{j} + (q_3 + p_3)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.56}$$

dır (Inoguchi, 1998). Dolayısıyla, reel-split kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{H}_s$ üzerinde tanımlı toplama işlemi, değişme özelliğine sahiptir. Bu nedenle $\mathbb{H}_s$ kümesi, üzerinde tanımlı toplama işlemiyle birlikte bir Abel grubu belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H}_s, \oplus_s)$ bir Abel grubudur. $\mathbb{H}_s$ nin $\oplus_s$ işlemine göre birim (etkisiz) elemanı

$$q = 0 + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = O \tag{2.57}$$

sıfır reel-split kuaterniyonudur.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu ve herhangi bir λ reel sayısını ele alalım. Bu durumda; reel-split kuaterniyonların cümlesi üzerinde skalerle çarpma işlemi;

$$\begin{array}{rccl} \odot_s: & \mathbb{R} \times \mathbb{H}_s & \to & \mathbb{H}_s \\ & (\lambda,q) & \mapsto & \lambda \odot_s q = \lambda q \end{array} \tag{2.58}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} \lambda q &= \lambda\big(S(q) + V(q)\big) \\ &= \lambda S(q) + \lambda V(q) \\ &= \lambda q_0 + \lambda(q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ &= \lambda q_0 + \lambda q_1\boldsymbol{i} + \lambda q_2\boldsymbol{j}\, \lambda q_3\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{2.59}$$

dır (Inoguchi, 1998). Reel-split kuaterniyonların cümlesi, üzerinde tanımladığımız toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H}_s, \oplus_s, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot_s)$ bir vektör uzayıdır.

Herhangi iki reel-split kuaterniyon $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ ve $p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ olmak üzere, reel-split kuaterniyonların cümlesi üzerinde çarpma işlemi;

$$\begin{array}{rccc} \otimes_s: & \mathbb{H}_s \times \mathbb{H}_s & \rightarrow & \mathbb{H}_s \\ & (q,p) & \mapsto & q \otimes_s p = qp \end{array} \tag{2.60}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} qp = \; & S(q)S(p) + \langle \boldsymbol{V}(q), \boldsymbol{V}(p) \rangle_L + S(q)\boldsymbol{V}(p) \\ & + S(p)\boldsymbol{V}(q) + \boldsymbol{V}(q) \wedge_L \boldsymbol{V}(p) \end{aligned} \tag{2.61}$$

dır (Inoguchi, 1998). Burada; $\langle , \rangle_L$ ile $\mathbb{E}_1^3$ te iki vektörün Minkowski çarpımı

$$\langle \boldsymbol{V}(q), \boldsymbol{V}(p) \rangle_L = -q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 \, , \tag{2.62}$$

$\wedge_L$ ile de bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$\boldsymbol{V}(q) \wedge_L \boldsymbol{V}(p) = (q_3p_2 - q_2p_3)\boldsymbol{i} + (q_3p_1 - q_1p_3)\boldsymbol{j} + (q_1p_2 - q_2p_1)\boldsymbol{k} \tag{2.63}$$

gösterilmiştir. Burada dikkat edilmelidir ki $\mathbb{E}_1^3$ te vektörel çarpım değişme özelliğine sahip olmadığından, genel olarak

$$qp \neq pq \tag{2.64}$$

dır. Dolayısıyla, reel-split kuaterniyonların cümlesi, üzerinde tanımladığımız toplama, skalerle çarpma ve çarpım işlemleriyle birlikte, reel sayılar cismi üzerinde değişmeli olmayan bir cebir belirtir. Bir diğer ifadeyle $(\mathbb{H}_s, \oplus_s, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot_s, \otimes_s)$ değişmeli olmayan bir cebirdir.

Herhangi iki pür reel-split kuaterniyon $\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ nın çarpımı

$$\boldsymbol{qp} = \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \rangle_L + \boldsymbol{q} \wedge_L \boldsymbol{p} \tag{2.65}$$

ile tanımlıdır.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{q} = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} = S(q) - \boldsymbol{V}(q) \tag{2.66}$$

şeklinde tanımlıdır (Inoguchi, 1998). $\lambda_1,\ \lambda_2$ herhangi iki reel sayı ve q ile p herhangi iki reel-split kuaterniyon olmak üzere, eşlenik kavramının aşağıdaki temel özellikleri verilebilir:

(i) $\overline{\lambda_1 q + \lambda_2 p} = \lambda_1\bar{q} + \lambda_2\bar{p}$,
(ii) $\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}$,
(iii) $\overline{(\bar{q})} = q$.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonun normu

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \tag{2.67}$$

ile tanımlıdır (Kula, 2003). Reel-split kuaterniyonların cümlesi üzerinde tanımlı çarpma işlemi genel olarak değişme özelliğine sahip değilken, özel bir durum olarak herhangi bir reel-split kuaterniyonu eşleniği ile çarptığımızda değişme özelliği sağlanır. Burada dikkat edilmelidir ki, q reel kuaterniyon alındığında $N(q) \geq 0$ iken, q reel-split kuaterniyon alındığında $N(q) \in \mathbb{R}$ dir.

λ herhangi bir reel sayı ve q ile p herhangi iki reel-split kuaterniyon olmak üzere, norm kavramı aşağıda verilen temel özelliklere sahiptir:

(i) $N(qp) = N(q)N(p)$,
(ii) $N(\lambda q) = \lambda^2 N(q)$.

Bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu için

$$N(q) = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = \pm 1 \tag{2.68}$$

ise, q reel-split kuaterniyonuna birim reel-split kuaterniyon denir. Birim reel-split kuaterniyonların cümlesi

$$(\mathbb{H}_s)_b = \{q \in \mathbb{H}_s :\ N(q) = \pm 1\} \tag{2.69}$$

ile gösterilir (Kula, 2003). Bir reel-split kuaterniyon birim ve pür ise (yani; $\boldsymbol{q} \in \widehat{\mathbb{H}}_s$ ve $N(\boldsymbol{q}) = \pm 1$ ise) karesi ± 1 dir. Bir diğer ifadeyle, $\boldsymbol{q}^2 = -N(\boldsymbol{q}) = -(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)$

olduğundan $N(\boldsymbol{q}) = 1$ ise $\boldsymbol{q}^2 = -1$, $N(\boldsymbol{q}) = -1$ ise $\boldsymbol{q}^2 = 1$ dir. Birim ve pür reel-split kuaterniyonların cümlesi

$$(\mathbb{H}_s)_b = \{q \in \mathbb{H}_s : N(q) = \pm 1\} \tag{2.70}$$

ile gösterilir.

Normu sıfırdan farklı olan herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonun çarpma işlemine göre tersi (bir diğer ifade ile inversi):

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} \tag{2.71}$$

ile tanımlıdır (Kula, 2003). λ herhangi bir reel sayı ve q herhangi bir reel-split kuaterniyon olmak üzere invers kavramı aşağıda verilen temel özelliklere sahiptir:

(i) $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$,
(ii) $(\lambda q)^{-1} = q^{-1}/\lambda$.

Herhangi bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu için,

(i) $N(q) < 0$ ya da $q = O$ ise q ya spacelike (uzaysı) reel-split kuaterniyon,
(ii) $N(q) > 0$ ise q ya timelike (zamansı) reel-split kuaterniyon,
(iii) $q \neq O$ olmak üzere

$$N(q) = 0 \tag{2.72}$$

ise, q ya lightlike (ışıksı) veya null reel-split kuaterniyon denir (Kula, 2003).

Spacelike reel-split kuaterniyonu $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ için $q = O$ ya da $N(q) < 0$ dır. $q = O$ ise, q nun vektörel kısmı $\boldsymbol{V}(q)$ da sıfır olacağından $\boldsymbol{V}(q)$ pür reel-split kuaterniyonu spacelike olacaktır. $N(q) < 0$ ise, $N(\boldsymbol{V}(q)) < 0$ olacağından $\boldsymbol{V}(q)$ yine spacelike olacaktır. Dolayısıyla; herhangi bir spacelike reel-split kuaterniyonu $q = S(q) + \boldsymbol{V}(q)$ için $\boldsymbol{V}(q)$ da spacelikedır.

Timelike reel-split kuaterniyonu $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ için $N(q) > 0$ olduğundan $N(\boldsymbol{V}(q)) \in \mathbb{R}$ olacaktır. Dolayısıyla herhangi bir timelike reel-split kuaterniyonu $q = S(q) + \boldsymbol{V}(q)$ için $\boldsymbol{V}(q)$ spacelike, timelike ya da null olacaktır.

Lightlike reel-split kuaterniyonu $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ için $q \neq O$ ve $N(q) = 0$ olduğundan $N(\boldsymbol{V}(q)) \leq 0$ olacaktır. Dolayısıyla; herhangi bir lightlike reel-split kuaterniyonu $q = S(q) + \boldsymbol{V}(q)$ için $\boldsymbol{V}(q)$ spacelike ya da lightlike olacaktır.

Şimdi herhangi bir q reel-split kuaterniyonun spacelike ya da timelike olması durumunda kutupsal formda gösterimini ele alacağız.

Sıfırdan farklı herhangi bir spacelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu

$$\begin{aligned} sinh\theta &= \frac{q_0}{\sqrt{|N(q)|}} \\ cosh\theta &= \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{|N(q)|}} \\ \boldsymbol{\delta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{2.73}$$

olmak üzere;

$$q = \sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \tag{2.74}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilir. Burada; $\theta \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\delta}^2 = -N(\boldsymbol{\delta}) = 1$ dir. Ayrıca q nun eşleniği

$$\bar{q} = \sqrt{|N(q)|}(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \tag{2.75}$$

şeklindedir (Kula ve Yaylı, 2007).

Herhangi bir timelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu için aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

(i) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \neq O$ spacelike ve $q_0 > 0$ (sırasıyla, $q_0 < 0$) ise

$$cosh\beta = \frac{q_0}{\sqrt{N(q)}} \qquad (\text{sırasıyla}, cosh\beta = \frac{-q_0}{\sqrt{N(q)}})$$

$$sinh\beta = \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N(q)}} \tag{2.76}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

olmak üzere, q reel-split kuaterniyonu

$$q = \sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \tag{2.77}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir. Burada; $\beta \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\eta}^2 = -N(\boldsymbol{\eta}) = 1$ dir. Ayrıca q nun eşleniği

$$\bar{q} = \sqrt{N(q)}(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \tag{2.78}$$

şeklindedir.

(ii) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ timelike ise;

$$cos\gamma = \frac{q_0}{\sqrt{N(q)}}$$

$$sin\gamma = \frac{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}{\sqrt{N(q)}} \tag{2.79}$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}$$

olmak üzere, q reel-split kuaterniyonu

$$q = \sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \tag{2.80}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilir. Burada; $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\vartheta}^2 = -N(\boldsymbol{\vartheta}) = -1$ dir. Ayrıca, q nun eşleniği

$$\bar{q} = \sqrt{N(q)}(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \tag{2.81}$$

şeklindedir (Kula ve Yaylı, 2007).

Şimdi herhangi bir q reel-split kuaterniyonun spacelike ya da timelike olması durumunda kompleks formda gösterimini ele alacağız.

Sıfırdan farklı herhangi bir spacelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu

$$\begin{aligned} a &= q_0 \\ b &= \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ \boldsymbol{\delta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{2.82}$$

olmak üzere,

$$q = a + \boldsymbol{\delta} b \tag{2.83}$$

şeklinde kompleks formda ifade edilir. Burada; $\boldsymbol{\delta}^2 = -N(\boldsymbol{\delta}) = 1$ dir. Ayrıca q nun eşleniği

$$\bar{q} = a - \boldsymbol{\delta} b \tag{2.84}$$

şeklindedir (Bekar ve Yaylı, 2018).

Herhangi bir timelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu için aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

(i) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \neq O$ spacelike ise;

$$\begin{aligned} c &= q_0 \\ d &= \sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ \boldsymbol{\eta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{2.85}$$

olmak üzere, q reel-split kuaterniyonu

$$q = c + \boldsymbol{\eta} d \tag{2.86}$$

şeklinde kompleks formda ifade edilir. Burada; $\boldsymbol{\eta}^2 = -N(\boldsymbol{\eta}) = 1$ dir. Ayrıca q nun eşleniği

$$\bar{q} = c - \boldsymbol{\eta} d \tag{2.87}$$

şeklindedir.

(ii) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ timelike ise:

$$\begin{aligned} e &= q_0 \\ f &= \sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \\ \boldsymbol{\vartheta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \end{aligned} \tag{2.88}$$

olmak üzere, q reel-split kuaterniyonu

$$q = e + \boldsymbol{\vartheta} f \tag{2.89}$$

şeklinde kompleks formda ifade edilir. Burada; $\boldsymbol{v}^2 = -N(\boldsymbol{v}) = -1$ dir. Ayrıca q nun eşleniği

$$\bar{q} = e - \boldsymbol{\vartheta} f \tag{2.90}$$

şeklindedir (Bekar ve Yaylı, 2018).

3. MİNKOWSKİ UZAYINDA DÖNME HAREKETLERİNİN REEL-SPLİT KUATERNİYONLAR TÜRÜNDEN İFADESİ

Bu bölümde Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te bir eksen etrafında dönme reel-split kuaterniyonlar kullanılarak ifade edilecektir. Bir reel-split kuaterniyonun timelike olma durumunda dönme belirttiği, ancak spacelike olma durumunda dönme belirtmediği gösterilecektir. Reel-split kuaterniyon timelike olduğunda aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

(i) Vektörel kısmı $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \neq O$ spacelike ve $q_0 > 0$ (sırasıyla, $q_0 < 0$) olan herhangi bir timelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonun

$$\begin{aligned} cosh\beta &= \frac{|q_0|}{\sqrt{N(q)}} \ \left(\text{sırasıyla,} \frac{-q_0}{\sqrt{N(q)}}\right) \\ sinh\beta &= \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N(q)}} \\ \boldsymbol{\eta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

olmak üzere

$$q = \sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta); \quad \boldsymbol{\eta}^2 = 1 \tag{3.2}$$

şeklinde kutupsal formda yazılabileceğini belirtmiştik. Buradan

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\eta}q^{-1} &= \left(\sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta)\right)\boldsymbol{\eta}\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta)}{N(q)}\right) \\ &= (\boldsymbol{\eta} cosh\beta + sinh\beta)(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \\ &= \boldsymbol{\eta} cosh^2\beta - cosh\beta sinh\beta + sinh\beta cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh^2\beta \\ &= \boldsymbol{\eta}(cosh^2\beta - sinh^2\beta) \\ &= \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \tag{3.3}$$

dir. Şimdi ise

$$(\boldsymbol{\eta}_1)^2 = -1, \ (\boldsymbol{\eta}_2)^2 = 1 \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}_1 = -\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2,\ \ \boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_2 = -\boldsymbol{\eta}_2\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\eta},\ \ \boldsymbol{\eta}_2\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}_2 = -\boldsymbol{\eta}_1$$

olacak şekilde birim ve pür $\boldsymbol{\eta}_1$ve $\boldsymbol{\eta}_2$ reel-split kuaterniyonları ele alalım (burada dikkat edilmelidir ki $\boldsymbol{\eta}$ ve $\boldsymbol{\eta}_2$ birim spacelike vektörler iken, $\boldsymbol{\eta}_1$ birim timelike vektördür). Bu durumda, $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_1$ ve $\boldsymbol{\eta}_2$ vektörleriyle Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te ortonormal ve sağ-el kuralına sahip bir çatı tanımlanmış olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\eta}_1 q^{-1} &= \left(\sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta)\right)\boldsymbol{\eta}_1\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta)}{N(q)}\right) \\ &= (\boldsymbol{\eta}_1 cosh\beta + \boldsymbol{\eta}_2 sinh\beta)(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \\ &= \boldsymbol{\eta}_1 cosh^2\beta + \boldsymbol{\eta}_2 cosh\beta sinh\beta + \boldsymbol{\eta}_2 sinh\beta cosh\beta + \boldsymbol{\eta}_1 sinh^2\beta \\ &= (cosh^2\beta + sinh^2\beta)\boldsymbol{\eta}_1 + (2sinh\beta cosh\beta)\boldsymbol{\eta}_2 \\ &= (cosh(2\beta))\boldsymbol{\eta}_1 + (sinh(2\beta))\boldsymbol{\eta}_2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\eta}_2 q^{-1} &= \left(\sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta)\right)\boldsymbol{\eta}_2\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta)}{N(q)}\right) \\ &= (\boldsymbol{\eta}_2 cosh\beta + \boldsymbol{\eta}_1 sinh\beta)(cosh\beta - \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \\ &= \boldsymbol{\eta}_2 cosh^2\beta + \boldsymbol{\eta}_1 cosh\beta sinh\beta + \boldsymbol{\eta}_1 sinh\beta cosh\beta + \boldsymbol{\eta}_2 sinh^2\beta \\ &= (2cosh\beta sinh\beta)\boldsymbol{\eta}_1 + (cosh^2\beta + sinh^2\beta)\boldsymbol{\eta}_2 \\ &= \big(sinh(2\beta)\big)\boldsymbol{\eta}_1 + \big(cosh(2\beta)\big)\boldsymbol{\eta}_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir (Kula, 2003).

Sonuç olarak, vektörel kısmı spacelike olan

$$q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = \sqrt{N(q)}(cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta) \tag{3.7}$$

timelike reel-split kuaterniyonu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te, $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}\}$ çatısına göre $\boldsymbol{\eta}$ spacelike vektörü ile belirtilen eksen etrafında pozitif yönlü hiperbolik 2β açısı kadar dönme hareketi meydana getirir. Bir başka ifadeyle, $\boldsymbol{x}$ birim pür reel-split kuaterniyon olmak üzere, $q\boldsymbol{x}q^{-1}$ çarpımı sonucu $\mathbb{E}_1^3$ te $\boldsymbol{x}$ vektörü $\boldsymbol{\eta}$ ekseni etrafında pozitif yönde hiperbolik 2β açısı kadar döner.

(ii) Vektörel kısmı $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ timelike olan herhangi bir timelike

$q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda q reel-split kuaterniyonun

$$\begin{aligned} cos\gamma &= \frac{q_0}{\sqrt{N(q)}} \\ sin\gamma &= \frac{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}{\sqrt{N(q)}} \\ \boldsymbol{\vartheta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olmak üzere,

$$q = \sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma); \quad \boldsymbol{\vartheta}^2 = -1 \tag{3.9}$$

şeklinde kutupsal formda yazılabileceğini belirtmiştik. Buradan,

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\vartheta}q^{-1} &= \left(\sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)\right)\boldsymbol{\vartheta}\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)}{N(q)}\right) \\ &= (\boldsymbol{\vartheta} cos\gamma - sin\gamma)(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \\ &= \boldsymbol{\vartheta} cos^2\gamma + cos\gamma sin\gamma - sin\gamma cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin^2\gamma \\ &= \boldsymbol{\vartheta}(cos^2\gamma + sin^2\gamma) \\ &= \boldsymbol{\vartheta} \end{aligned} \tag{3.10}$$

dir. Şimdi ise

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{\vartheta_1})^2 = (\boldsymbol{\vartheta_2})^2 = 1 \\ \boldsymbol{\vartheta\vartheta_1} = -\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta_2}, \;\; \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2 = -\boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1 = -\boldsymbol{\vartheta}, \;\; \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta} = -\boldsymbol{\vartheta\vartheta}_2 = \boldsymbol{\vartheta}_1 \end{gathered} \tag{3.11}$$

olacak şekilde birim ve pür $\boldsymbol{\vartheta}_1$ ve $\boldsymbol{\vartheta}_2$ reel-split kuaterniyonları ele alalım (burada dikkat edilmelidir ki $\boldsymbol{\vartheta}_1$ ve $\boldsymbol{\vartheta}_2$ birim spacelike vektörler iken, $\boldsymbol{\vartheta}$ birim timelike vektördür). Bu durumda $\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}_1$ ve $\boldsymbol{\vartheta}_2$ vektörleriyle Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te ortonormal ve sağ-el kuralına sahip bir çatı tanımlanmış olur. Ayrıca,

$$q\boldsymbol{\vartheta}_1 q^{-1} = \left(\sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)\right)\boldsymbol{\vartheta}_1\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)}{N(q)}\right)$$

$$\begin{aligned} &= (\boldsymbol{\vartheta}_1 cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta}_2 sin\gamma)(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \\ &= \boldsymbol{\vartheta}_1 cos^2\gamma + \boldsymbol{\vartheta}_2 cos\gamma sin\gamma + \boldsymbol{\vartheta}_2 sin\gamma cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta}_1 sin^2\gamma \\ &= (\cos(2\gamma))\boldsymbol{\vartheta}_1 + (\sin(2\gamma))\boldsymbol{\vartheta}_2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

dir. Benzer şekilde,

$$q\boldsymbol{\vartheta}_2 q^{-1} = \left(\sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)\right)\boldsymbol{\vartheta}_2\left(\frac{\sqrt{N(q)}(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma)}{N(q)}\right)$$

$$\begin{aligned} &= (\boldsymbol{\vartheta}_2 cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta}_1 sin\gamma)(cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \\ &= \boldsymbol{\vartheta}_2 cos^2\gamma - \boldsymbol{\vartheta}_1 cos\gamma sin\gamma - \boldsymbol{\vartheta}_1 sin\gamma cos\gamma - \boldsymbol{\vartheta}_2 sin^2\gamma \\ &= (-\sin(2\gamma))\boldsymbol{\vartheta}_1 + (\cos(2\gamma))\boldsymbol{\vartheta}_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir (Kula, 2003). Sonuç olarak, vektörel kısmı timelike olan

$$q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = \sqrt{N(q)}(cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma) \tag{3.14}$$

timelike reel-split kuaterniyonu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ te, $\{\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta_1}, \boldsymbol{\vartheta_2}\}$ çatısına göre $\boldsymbol{\vartheta}$ timelike vektörü ile belirtilen eksen etrafında pozitif yönlü 2γ açısı kadar dönme hareketi meydana getirir. Bir başka ifadeyle, $\boldsymbol{x}$ birim pür reel-split kuaterniyon olmak üzere, $q\boldsymbol{x}q^{-1}$ çarpımı sonucu $\mathbb{E}^3$ te $\boldsymbol{x}$ vektörü $\boldsymbol{\vartheta}$ ekseni etrafında pozitif yönde 2γ açısı kadar döner.

Şimdi reel-split kuaterniyonun spacelike olma durumunu ele alalım. Sıfırdan farklı spacelike bir $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonun vektörel kısmı $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ nın da spacelike olduğunu belirtmiştik. Bu durumda,

$$\begin{aligned} sinh\theta &= \frac{q_0}{\sqrt{|N(q)|}} \\ cosh\theta &= \frac{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{|N(q)|}} \\ \boldsymbol{\delta} &= \frac{q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

olmak üzere

$$q = \sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta);\quad \boldsymbol{\delta}^2 = 1 \tag{3.16}$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\delta}q^{-1} &= \left(\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\right)\boldsymbol{\delta}\left(\frac{\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta)}{N(q)}\right) \\ &= -(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\ \boldsymbol{\delta}(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\ &= -(\boldsymbol{\delta} sinh\theta + cosh\theta)\ (sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\ &= -\boldsymbol{\delta} sinh^2\theta + sinh\theta cosh\theta - sinh\theta cosh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh^2\theta \\ &= \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \tag{3.17}$$

dir. Şimdi ise

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\delta}_1^2 = -1,\ \ \boldsymbol{\delta}_2^2 = 1 \\ \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}_1 = -\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_2,\ \ \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 = -\boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta},\ \ \boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta} = -\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}_2 = -\boldsymbol{\delta}_1 \end{gathered} \tag{3.18}$$

olacak şekilde birim ve pür $\boldsymbol{\delta}_1$ ve $\boldsymbol{\delta}_2$ reel-split kuaterniyonlarını ele alalım (burada dikkat edelmelidir ki $\boldsymbol{\delta}$ ve $\boldsymbol{\delta}_2$ birim spacelike vektörler iken, $\boldsymbol{\delta}_1$ birim timelike vektördür). Bu durumda $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\delta}_1$ ve $\boldsymbol{\delta}_2$vektörleriyle Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te ortonormal ve sağ-el kuralına sahip bir çatı tanımlanmış olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{\delta}_1q^{-1} &= \left(\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\right)\boldsymbol{\delta}_1\left(\frac{\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta)}{N(q)}\right) \\ &= -(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\boldsymbol{\delta}_1(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\ &= (-\boldsymbol{\delta}_1 sinh\theta - \boldsymbol{\delta}_2 cosh\theta)(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\ &= -\boldsymbol{\delta}_1 sinh^2\theta - \boldsymbol{\delta}_2 sinh\theta cosh\theta - \boldsymbol{\delta}_2 cosh\theta sinh\theta - \boldsymbol{\delta}_1 cosh^2\theta \\ &= -(cosh(2\theta))\boldsymbol{\delta}_1 - (sinh(2\theta))\boldsymbol{\delta}_2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

dır. Aynı şekilde;

$$
\begin{aligned}
q\boldsymbol{\delta}_2 q^{-1} &= \left(\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\right)\boldsymbol{\delta}_2\left(\frac{\sqrt{|N(q)|}(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta)}{N(q)}\right) \\
&= -(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta)\boldsymbol{\delta}_2(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\
&= (-\boldsymbol{\delta}_2 sinh\theta - \boldsymbol{\delta}_1 cosh\theta)(sinh\theta - \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \\
&= -\boldsymbol{\delta}_2 sinh^2\theta - \boldsymbol{\delta}_1 sinh\theta cosh\theta - \boldsymbol{\delta}_1 cosh\theta sinh\theta - \boldsymbol{\delta}_2 cosh^2\theta \\
&= -(sinh(2\theta))\boldsymbol{\delta}_1 - (cosh(2\theta))\boldsymbol{\delta}_2
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

elde edilir. Sonuç olarak sıfırdan farklı spacelike

$$
q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = \sqrt{|N(q)|}(sinh\theta + \boldsymbol{\delta} cosh\theta) \tag{3.21}
$$

reel-split kuaterniyonu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te $\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}\}$ çatısına göre $\boldsymbol{\delta}$ spacelike vektörü ile belirtilen eksen etrafında pozitif yönlü hiperbolik 2θ açısı kadar dönme, sonrasında ise orijine göre yansıma meydana getirir. Bir başka ifadeyle, $\boldsymbol{x}$ birim pür reel-split kuaterniyon olmak üzere, $q\boldsymbol{x}q^{-1}$ çarpımı sonucu $\mathbb{E}_1^3$ te $\boldsymbol{x}$ vektörü $\boldsymbol{\delta}$ ekseni etrafında pozitif yönde hiperbolik 2β açısı kadar döner ve sonrasında orijine göre yansır. Dolayısıyla, ele aldığımız space-like reel-split kuaterniyonu q bir dönme hareketi belirtmez.

4. REEL-SPLİT KUATERNİYONLARDA İNVOLÜSYONLAR VE ANTİ-İNVOLÜSYONLAR

Reel-sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı E cebirini ele alalım. Bu cebirden alınan herhangi iki elemanın toplama işlemini $\top$ ile, çarpma işlemini ise $\perp$ ile gösterelim. Bu durumda örten olacak şekilde

$$f: E \to E \tag{4.1}$$

dönüşümünü ele alalım. Eğer bu dönüşüm

(i) $\forall x \in E$ için $f\big(f(x)\big) = x$

(ii) $\forall x, y \in E$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$f(x \top \lambda y) = f(x) \top \lambda f(y) \tag{4.2}$$

(iii) $\forall x, y \in E$ için

$$f(x \perp y) = f(y) \perp f(x) \tag{4.3}$$

aksiyomlarını sağlarsa, bu dönüşüme E cebirinde bir involüsyon denir. Eğer f dönüşümü (i) ve (ii) aksiyomlarını sağlayıp, (iii) aksiyomu yerine

(iv) $\forall x, y \in E$ için

$$f(x \perp y) = f(x) \perp f(y) \tag{4.4}$$

aksiyomunu sağlarsa, bu durumda f dönüşümüne E cebirinde bir anti-involüsyon denir (Hamilton, 1848; Ell ve Sangwine, 2007)

Teorem 4.1. q bir reel-split kuaterniyon ve $\boldsymbol{v}$ birim pür ve timelike bir reel-split kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}} : \quad & \mathbb{H}_s \to \mathbb{H}_s \\ & q \mapsto f_{\boldsymbol{v}}(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\boldsymbol{v}}$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat. $q \in \mathbb{H}_s$ ve $\boldsymbol{v} \in \left(\widehat{\mathbb{H}}_s\right)_b$ olsun. $\boldsymbol{v}$ reel-split kuaterniyonu birim pür ve timelike olduğundan $\boldsymbol{v}^2 = -1$ dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}\big(f_{\boldsymbol{v}}(q)\big) &= f_{\boldsymbol{v}}(-\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}) \\ &= -\boldsymbol{v}\,(\overline{-\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{v}\left(\bar{\boldsymbol{v}}\,\bar{\bar{q}}\,(\overline{-\boldsymbol{v}})\right)\boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{v}(-\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}^2 q\boldsymbol{v}^2 \\ &= (-1)q(-1) \\ &= q \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (i) maddesi sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}_s$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(q + \lambda p) &= -\boldsymbol{v}\big(\,\overline{q + \lambda p}\big)\boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{v}(\bar{q} + \lambda\bar{p})\boldsymbol{v} \\ &= (-\boldsymbol{v}\bar{q}\boldsymbol{v}) + \lambda(-\boldsymbol{v}\bar{p}\boldsymbol{v}) \\ &= f_{\boldsymbol{v}}(q) + f_{\boldsymbol{v}}(p) \end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (ii) maddesi sağlanır.

Son olarak

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= -\boldsymbol{v}\,\overline{qp}\boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{v}\,\bar{p}\,\bar{q}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği $\boldsymbol{v}^2 = -1$ olduğundan

$$f_{\boldsymbol{v}}(qp) = -\boldsymbol{v}\,\bar{p}\,(-\boldsymbol{v}^2)\,\bar{q}\boldsymbol{v} \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= (-\boldsymbol{v}\bar{p}\boldsymbol{v})(-\boldsymbol{v}\bar{q}\boldsymbol{v}) \\ &= f_{\boldsymbol{v}}(p)f_{\boldsymbol{v}}(q) \end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (iii) maddesi sağlanır.

Teorem 4.2. q bir reel-split kuaterniyon ve $\boldsymbol{v}$ birim pür ve spacelike bir reel-split kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}} : \quad & \mathbb{H}_s \rightarrow \mathbb{H}_s \\ & q \mapsto f_{\boldsymbol{v}}(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\boldsymbol{v}}$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat. $q \in \mathbb{H}_s$ ve $\boldsymbol{v} \in \left(\widehat{\mathbb{H}}_s\right)_b$ olsun. $\boldsymbol{v}$ reel-split kuaterniyonu birim pür ve spacelike olduğundan $\boldsymbol{v}^2 = 1$ dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}\big(f_{\boldsymbol{v}}(q)\big) &= f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{v}\,(\overline{\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}\,(\bar{\boldsymbol{v}}\,\bar{\bar{q}}\,\bar{\boldsymbol{v}})\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}\big(-\boldsymbol{v}q(-\boldsymbol{v})\big)\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}^2 q \boldsymbol{v}^2 \\ &= q \end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (i) maddesi sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}_s$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(q + \lambda p) &= \boldsymbol{v}(\overline{q + \lambda p})\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}(\bar{q} + \lambda\bar{p})\boldsymbol{v} \\ &= (\boldsymbol{v}\bar{q}\boldsymbol{v}) + \lambda(\boldsymbol{v}\bar{p}\boldsymbol{v}) \\ &= f_{\boldsymbol{v}}(q) + f_{\boldsymbol{v}}(p) \end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (ii) maddesi sağlanır.

Son olarak

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= \boldsymbol{v}\,\overline{qp}\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}\,\bar{p}\,\bar{q}\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.14}$$

eşitliği $\boldsymbol{v}^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\boldsymbol{v}}(qp) = \boldsymbol{v}\,\bar{p}\,(\boldsymbol{v}^2)\,\bar{q}\boldsymbol{v} \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= (\boldsymbol{v}\bar{p}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\bar{q}\boldsymbol{v}) \\ &= f_{\boldsymbol{v}}(p) f_{\boldsymbol{v}}(q) \end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği gereğince involüsyon aksiyomlarından (iii) maddesi sağlanır.

Teorem 4.3. q bir reel-split kuaterniyon ve $\boldsymbol{v}$ birim pür ve timelike bir reel-split kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}} : \quad & \mathbb{H}_s \to \mathbb{H}_s \\ & q \mapsto f_{\boldsymbol{v}}(q) = -\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\boldsymbol{v}}$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat. $q \in \mathbb{H}_s$ ve $\boldsymbol{v} \in \left(\widehat{\mathbb{H}}_s\right)_b$ olsun. $\boldsymbol{v}$ reel-split kuaterniyonu birim pür ve timelike olduğundan $\boldsymbol{v}^2 = -1$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}\big(f_{\boldsymbol{v}}(q)\big) &= f_{\boldsymbol{v}}(-\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}) \\ &= -\boldsymbol{v}\,(-\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}^2 q \boldsymbol{v}^2 \\ &= (-1)q(-1) \\ &= q \end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (i) maddesi sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}_s$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{v}}(q + \lambda p\,) &= -\boldsymbol{v}(\,q + \lambda p)\boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{v}(q + \lambda p)\boldsymbol{v} \\ &= (-\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}) + \lambda(-\boldsymbol{v}p\boldsymbol{v}) \\ &= f_{\boldsymbol{v}}(q) + f_{\boldsymbol{v}}(p) \end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (ii) maddesi sağlanır.

Son olarak,

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= -\boldsymbol{v}qp\boldsymbol{v} \\
&= -\boldsymbol{v}qp\boldsymbol{v}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

eşitliği $\boldsymbol{v}^2 = -1$ olduğundan

$$
f_{\boldsymbol{v}}(qp) = -\boldsymbol{v}q(-\boldsymbol{v}^2)p\boldsymbol{v}
\tag{4.21}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{v}}(qp) &= (-\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v})(-\boldsymbol{v}p\boldsymbol{v}) \\
&= f_{\boldsymbol{v}}(q)f_{\boldsymbol{v}}(p)
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (iv) maddesi sağlanır.

Teorem 4.4. q bir reel-split kuaterniyon ve $\boldsymbol{v}$ birim pür ve spacelike bir reel-split kuaterniyon olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{v}} : \quad \mathbb{H}_s &\rightarrow \mathbb{H}_s \\
q &\mapsto f_{\boldsymbol{v}}(q) = \boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

şeklinde tanımlanan $f_{\boldsymbol{v}}$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat. $q \in \mathbb{H}_s$ ve $\boldsymbol{v} \in \left(\widehat{\mathbb{H}}_s\right)_b$ olsun. $\boldsymbol{v}$ reel-split kuaterniyonu birim pür ve spacelike olduğundan $\boldsymbol{v}^2 = 1$ dir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{v}}\big(f_{\boldsymbol{v}}(q)\big) &= f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{v}^2 q\boldsymbol{v}^2 \\
&= q
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (i) maddesi sağlanır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}_s$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f_v(q+\lambda p) &= \boldsymbol{v}(q+\lambda p)\boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{v}(q+\lambda p)\boldsymbol{v} \\
&= (\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}) + \lambda(\boldsymbol{v}p\boldsymbol{v}) \\
&= f_v(q) + f_v(p)
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (ii) maddesi sağlanır.

Son olarak,

$$
\begin{aligned}
f_v(qp) &= \boldsymbol{v}qp\boldsymbol{v} \\
&= \boldsymbol{v}qp\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

eşitliği $\boldsymbol{v}^2 = 1$ olduğundan

$$
f_v(qp) = \boldsymbol{v}q(\boldsymbol{v}^2)p\boldsymbol{v} \tag{4.27}
$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
f_v(qp) &= (\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}p\boldsymbol{v}) \\
&= f_v(q)f_v(p)
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

eşitliği gereğince anti-involüsyon aksiyomlarından (iv) maddesi sağlanır.

4.1 Reel-Split Kuaterniyonların İnvolüsyonlarının ve Anti-İnvolüsyonlarının Geometrik Yorumu

Herhangi bir birim timelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu ve $\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ birim pür reel-split kuaterniyonu için $q\boldsymbol{p}\bar{q}$ kuaterniyon çarpımının sonucu $\boldsymbol{p}' = q\boldsymbol{p}\bar{q}$ şeklinde bir birim pür reel-split kuaterniyondur. Dolayısıyla $q\boldsymbol{p}\bar{q}$ operatörü uzunluk ve açıyı koruyacağından bir dönme belirtir.

Herhangi bir birim timelike $q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ reel-split kuaterniyonu için Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ te bir dönme hareketi aşağıda verilen iki durumdan birisi ile tanımlıdır:

(i) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \neq O$ spacelike ve $q_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$q = cosh\beta + \boldsymbol{\eta} sinh\beta \tag{4.29}$$

birim timelike reel-split kuaterniyonu için

$$w = I_3 + sinh2\beta[\boldsymbol{\eta}] + (-1 + cosh2\beta)[\boldsymbol{\eta}]^2 \tag{4.30}$$

olmak üzere

$$w\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{p}\bar{q} \tag{4.31}$$

çarpımı sonucu $\boldsymbol{p}$ vektörü $\boldsymbol{\eta}$ spacelike vektörü ile belirtilen eksen etrafında pozitif yönde hiperbolik 2β açısı kadar döner. Burada

$$\begin{gathered} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{\eta}] = \begin{bmatrix} 0 & \eta_3 & -\eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.32}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{q_1}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ \eta_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ \eta_3 &= \frac{q_3}{\sqrt{-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \end{aligned} \tag{4.33}$$

olmak üzere $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ dir. Dolayısıyla, w yu bir hiperbolik dönme operatörü olarak ele alabiliriz (Kula, 2003).

(ii) $\boldsymbol{V}(q) = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ timelike olsun. Bu durumda

$$q = cos\gamma + \boldsymbol{\vartheta} sin\gamma \tag{4.34}$$

birim timelike reel-split kuaterniyonu için

$$w = I_3 + sin2\gamma[\boldsymbol{\vartheta}] + (1 - cos2\gamma)[\boldsymbol{\vartheta}]^2 \tag{4.35}$$

olmak üzere

$$w\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{p}\bar{q} \tag{4.36}$$

çarpımı sonucu $\boldsymbol{p}$ vektörü $\boldsymbol{\vartheta}$ timelike vektörü ile belirtilen eksen etrafında pozitif yönde 2γ açısı kadar döner. Burada

$$\begin{gathered} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\boldsymbol{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ \vartheta_3 & 0 & -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.37}$$

ve

$$\begin{gathered} \vartheta_1 = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \\ \vartheta_2 = \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \\ \vartheta_3 = \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}} \end{gathered} \tag{4.38}$$

olmak üzere $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ dir. Dolayısıyla, w yu $\mathbb{E}^3$ te bir dönme operatörü olarak ele alabiliriz (Kula, 2003).

Şimdi Teorem 4.1 ve 4.3'te vermiş olduğumuz involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinin geometrik yorumlarını ele alacağız. Teorem 4.1 ve 4.3 teki $\boldsymbol{v}$ birim pür reel-split kuaterniyonu timelike olduğundan bu teoremlerde verilen dönüşümlerin meydana getirdikleri hareketler (4.35) eşitliği kullanılarak verilebilir. Çünkü bu dönüşümlerdeki $\boldsymbol{v}$ birim pür reel-split kuaterniyonu timelike olduğundan kutupsal formda ifade edilebilir. Örneğin, Teorem 4.1'deki $f_v(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ involüsyon dönüşümünü ele alalım. Buradaki q reel-split kuaterniyonunu $q = m + \boldsymbol{\zeta}n$ şeklinde kompleks formda yazdığımızda

$$f_v(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\,\overline{(m + \boldsymbol{\zeta}n)}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}(m - \boldsymbol{\zeta}n)\boldsymbol{v} = m + \boldsymbol{v\zeta v}n \tag{4.39}$$

elde edilir. Bu demektir ki $f_v(q)$ involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı m yi invaryant bırakır ve vektörel kısmı $\boldsymbol{\zeta}n$ yi $\boldsymbol{v\zeta v}n$ ye dönüştürür. $\boldsymbol{v}$ birim pür ve timelike reel-split kuaterniyonu kutupsal formda

$$\boldsymbol{v} = cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{v}sin\frac{\pi}{2} \tag{4.40}$$

şeklinde yazılacağından, Eşitlik (4.35) de verilen dönme operatörü

$$w = I_3 + sin\pi[\boldsymbol{\zeta}] + (1 - cos\pi)[\boldsymbol{\zeta}]^2 = I_3 + 2[\boldsymbol{\zeta}]^2 \tag{4.41}$$

şeklinde olacaktır. Eşitlik (4.36) ya göre $\boldsymbol{\zeta}$ vektörü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döner ve sonrasında orjine göre yansır. Teorem 4.3 teki $f_v(q) = -\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}$ anti-involüsyon dönüşümünü ele aldığımızda ise q reel-split kuaterniyonunu $q = k + \boldsymbol{\varsigma}l$ şeklinde kompleks formda yazdığımızda

$$f_v(q) = -\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\,(k + \boldsymbol{\varsigma}l)\boldsymbol{v} = k - \boldsymbol{v\varsigma v}l \tag{4.42}$$

elde edilir. Bu demektir ki, $f_v(q)$ involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı k yı invaryant bırakır ve vektörel kısmı $\boldsymbol{\varsigma}l$ yi $-\boldsymbol{v\varsigma v}l$ ye dönüştürür. $\boldsymbol{v}$ birim pür ve timelike reel-split kuaterniyonu kutupsal formda

$$\boldsymbol{v} = cos\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{v}sin\frac{\pi}{2} \tag{4.43}$$

şeklinde yazılacağından, eşitlik (4.30) da verilen dönme operatörü

$$w = I_3 + sin\pi[\boldsymbol{\varsigma}] + (1 - cos\pi)[\boldsymbol{\varsigma}]^2 = I_3 + 2[\boldsymbol{\varsigma}]^2 \tag{4.44}$$

şeklinde olacaktır. Eşitlik (4.36) ya göre $\boldsymbol{\varsigma}$ vektörü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döner.

Şimdi Teorem 4.2 ve 4.4'te vermiş olduğumuz involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinin geometrik yorumlarını ele alacağız. Teorem 4.2 ve 4.4 teki $\boldsymbol{v}$ birim pür reel-split kuaterniyonu spacelike olduğundan bu teoremlerde verilen dönüşümlerin meydana getirdikleri hareketler (4.30) eşitliği kullanılarak verilemez. Çünkü bu dönüşümlerdeki $\boldsymbol{v}$ birim pür reel-split kuaterniyonu spacelike olduğundan kutupsal formda ifade edilemez. Örneğin, Teorem 4.2'deki $f_v(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ involüsyon dönüşümünü ele alalım. Buradaki q reel-split kuaterniyonunu $q = r + \boldsymbol{\xi}s$ şeklinde kompleks formda yazdığımızda

$$f_{\boldsymbol{v}}(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,\overline{(r + \boldsymbol{\xi}s)}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(r - \boldsymbol{\xi}s)\boldsymbol{v} = r + \boldsymbol{v\xi v}s \tag{4.45}$$

elde edilir. Bu demektir ki $f_{\boldsymbol{v}}(q)$ involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı r yi invaryant bırakır ve vektörel kısmı $\boldsymbol{\xi}s$ yi $\boldsymbol{v\xi v}s$ ye dönüştürür. $\boldsymbol{v}$ birim pür ve spacelike reel-split kuaterniyonunu kutupsal formda yazmak istediğimizde

$$\boldsymbol{v} = cosh\beta + \boldsymbol{v}sinh\beta \tag{4.46}$$

eşitliğinden $cosh\beta = 0$ ve $sinh\beta = 1$ olmalıdır. Ancak, $cosh\beta = 0$ olması mümkün olmadığından $\boldsymbol{v}$ yi kutupsal formda yazamayız. Dolayısıyla (4.30) eşitliğini kullanamayız. Benzer şekilde Teorem 4.4 teki $f_{\boldsymbol{v}}(q) = \boldsymbol{vqv}$ anti-involüsyon dönüşümünü ele alalım. Buradaki q reel-split kuaterniyonunu $q = t + \boldsymbol{\omega}z$ şeklinde kompleks formda yazdığımızda

$$f_{\boldsymbol{v}}(q) = \boldsymbol{vqv} = \boldsymbol{v}(t + \boldsymbol{\omega}z)\boldsymbol{v} = t + \boldsymbol{v\omega v}z \tag{4.47}$$

elde edilir. Bu demektir ki, $f_{\boldsymbol{v}}(q)$ anti-involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı t yi invaryant bırakır ve vektörel kısmı $\boldsymbol{\omega}z$ yi $\boldsymbol{v\omega v}z$ ye dönüştürür. $\boldsymbol{v}$ birim pür ve spacelike reel-split kuaterniyonunu kutupsal formda yazmak istediğimizde

$$\boldsymbol{v} = cosh\beta + \boldsymbol{v}sinh\beta \tag{4.48}$$

eşitliğinde $cosh\beta = 0$ olamayacağından $\boldsymbol{v}$ yi kutupsal formda yazamayız. Dolayısıyla Teorem 4.4'te verilen anti-involüsyon dönüşümünün geometrik yorumunu vermek için (4.30) eşitliğini kullanamayız.

Şimdi aşağıdaki teorem ile Teorem 4.1 – 4.4'te ele aldığımız dönüşümlerdeki $\boldsymbol{v}$ birim pür reel-split kuaterniyonun timelike ya da spacelike olmasından bağımsız bir dönme operatörü tanımlayacağız.

Teorem 4.5. Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda

$$\boldsymbol{vpv} = w\boldsymbol{p} \tag{4.49}$$

eşitliğni sağlayan w dönme operatörü için aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

(i) $\boldsymbol{p}$ spacelike ise

$$w = \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{vpv}\,\rangle_L - \boldsymbol{p} \wedge_L (\boldsymbol{vpv}) \tag{4.50}$$

dir.

(ii) $\boldsymbol{p}$ timelike ise

$$w = -\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{vpv}\,\rangle_L + \boldsymbol{p} \wedge_L (\boldsymbol{vpv}) \tag{4.51}$$

dir.

İspat. Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. Ayrıca $\boldsymbol{vpv} = \boldsymbol{r}$ olsun. Bu durumda

(i) $\boldsymbol{p}$ spacelike ve $w = \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{vpv}\,\rangle_L - \boldsymbol{p} \wedge_L (\boldsymbol{vpv}) = \langle \boldsymbol{p}\,,\ \boldsymbol{r}\rangle_L - \boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
w\boldsymbol{p} &= \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle \quad \boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r})\boldsymbol{p} \\
&= \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L\, \boldsymbol{p} - (\langle \boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}\rangle_L + (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}\,) \wedge_L \boldsymbol{p}) \\
&= \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L\, \boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}) \wedge_L \boldsymbol{p} \\
&= \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L\, \boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L - \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{p}\,\rangle_L) \\
&= \langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L + \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{p}\,\rangle_L \\
&= \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{p}\,\rangle_L \\
&= \boldsymbol{r} \\
&= \boldsymbol{vpv}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

dir. Burada $\boldsymbol{p}$ spacelike olduğundan $\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{p}\,\rangle_L = 1$ olduğuna dikkat ediniz.

(ii) $\boldsymbol{p}$ timelike ve $w = -\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{vpv}\,\rangle_L + \boldsymbol{p} \wedge_L (\boldsymbol{vpv}) = -\langle \boldsymbol{p}\,, \boldsymbol{r}\,\rangle_L + \boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
w\boldsymbol{p} &= -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r})\boldsymbol{p} \\
&= -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L \boldsymbol{p} + (\langle \boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}\rangle_L + (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}) \wedge_L \boldsymbol{p}) \\
&= -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p} \wedge_L \boldsymbol{r}) \wedge_L \boldsymbol{p} \\
&= -\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\rangle_L - \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle_L) \\
&= -\boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle_L \\
&= \boldsymbol{r} \\
&= \boldsymbol{vpv}
\end{aligned} \tag{4.53}
$$

dir. Burada $\boldsymbol{p}$ timelike olduğundan $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle_L = -1$ olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 4.5 teki dönme operatörü w nin geometrik yorumunu aşağıdaki iki teoremle verebiliriz.

Teorem 4.6. Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. $\boldsymbol{vpv} = w\boldsymbol{p}$ eşitliğini sağlayan w dönme operatörü için $\boldsymbol{V}(w) = \boldsymbol{w}sinh\alpha \neq 0$ spacelike ise $w = cosh\alpha + \boldsymbol{w}sinh\alpha$ dir. Bu durumda $w\boldsymbol{p}$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{p}$ vektörü $\boldsymbol{w}$ ekseni etrafında pozitif yönde hiperbolik α açısı kadar döner.

İspat 4.6 Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonları için $\boldsymbol{vpv} = w\boldsymbol{p}$ eşitliğindeki $w = cosh\alpha + \boldsymbol{w}sinh\alpha$ kuaterniyonu (4.30) eşitliği ile verilen $w = I_3 + sinh2\beta[\boldsymbol{\eta}] + (-1 + cosh2\beta)[\boldsymbol{\eta}]^2$ dönme operatörüne karşılık gelir ve (4.42) eşitliğinin geometrik yorumundan $\boldsymbol{p}$ vektörü $[\boldsymbol{\eta}]$ spacelike vektörü ile belirlenen eksen etrafında pozitif yönde hiperbolik 2β açısı kadar döner.

Teorem 4.7. Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. $\boldsymbol{vpv} = w\boldsymbol{p}$ eşitliğini sağlayan w dönme operatörü için $\boldsymbol{V}(w) = \boldsymbol{w}sin\alpha$ timelike ise $w = cos\alpha + \boldsymbol{w}sin\alpha$ dir. Bu durumda $w\boldsymbol{p}$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{p}$ vektörü $\boldsymbol{w}$ ekseni etrafında pozitif yönde α açısı kadar döner ve orjine göre yansır.

İspat 4.7 Herhangi iki $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{p}$ birim pür reel-split kuaterniyonları için $\boldsymbol{vpv} = w\boldsymbol{p}$ eşitliğindeki $w = cos\alpha + \boldsymbol{w}sin\alpha$ kuaterniyonu (4.35) eşitliği ile verilen

$$w = I_3 + sin2\gamma[\boldsymbol{\vartheta}] + (1 - cos2\gamma)[\boldsymbol{\vartheta}]^2$$

dönme operatörüne karşılık gelir ve (4.39) eşitliğinin geometrik yorumundan $\boldsymbol{p}$ vektörü $\boldsymbol{v}$ timelike vektörü ile belirlenen eksen etrafında pozitif yönde 2γ açısı kadar döner ve orjine göre yansır.

Örnek 4.1. $\boldsymbol{v} = (\sqrt{2}, 0{,}1)$ ve $\boldsymbol{q} = (1{,}0{,}0)$ pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. $N(\boldsymbol{v}) = N(\boldsymbol{q}) = 1$ olduğundan $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{q}$ birim pür timelikedır. $\boldsymbol{v}$ birim pür timelike olduğundan kutupsal formu $\boldsymbol{v} = cos\,\pi/2 + \boldsymbol{v} sin\,\pi/2$ şeklindedir. Dolayısıyla Teorem 4.7 ye göre $\boldsymbol{vqv}$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{q}$ vektörü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döner ve sonrasında orijine göre yansır.

Örnek 4.2. $\boldsymbol{v} = (1{,}1{,}1)$ ve $\boldsymbol{q} = (1{,}0{,}0)$ pür reel-split kuaterniyonlarını ele alalım. $N(\boldsymbol{v}) = -1$ olduğundan $\boldsymbol{v}$ birim pür spacelike ve $N(\boldsymbol{q}) = 1$ olduğundan $\boldsymbol{q}$ birim pür timelikedır. $\boldsymbol{v}$ birim pür spacelike olduğundan $\boldsymbol{v}$ yi $\boldsymbol{v} = cosh\alpha + \boldsymbol{v} sinh\alpha$ şeklinde kutupsal formda yazmak istediğimizde $cosh\alpha = 0$ olmalıdır. Ancak bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\boldsymbol{vqv}$ çarpımına karşılık gelen dönme hareketini tanımlamak için Teorem 4.5'te verilen $\boldsymbol{vqv} = w\boldsymbol{q}$ eşitliğindeki w reel-split kuaterniyonunu elde etmeliyiz. q timelike olduğundan Teorem 4.5 in (ii) aksiyomunda verilen $w = -\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{vqv} \rangle_{\mathbb{M}} + \boldsymbol{q} \wedge_{\mathbb{M}} (\boldsymbol{vqv})$ eşitliğinden $w = -3 + 2j - 2k$ elde edilir. $N(w) = 1$ olduğundan w reel-split kuaterniyonu birim timelikedır. $\boldsymbol{V}(w) = -8$ olduğundan $\boldsymbol{V}(w)$ spacelikedır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} cosh\alpha &= 3 \\ sinh\alpha &= 2\sqrt{2} \\ \boldsymbol{\eta} &= (2j - 2k)/(2\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{4.54}$$

olmak üzere w nin kutupsal formu

$$w = cosh\alpha + \boldsymbol{\eta} sinh\alpha \tag{4.55}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\alpha = ln(2\sqrt{2} + 3) \tag{4.56}$$

elde edilir. Bu durumda, Teorem 4.6 ya göre $\boldsymbol{q}$ vektörü $\boldsymbol{\eta}$ ekseni etrafında pozitif yönde α hiperbolik açısı kadar döner.

4.2. Reel-Split Kuaterniyonların İnvolüsyon ve Anti-İnvolüsyon Matrisleri

Kompleks formu $q = m + \boldsymbol{\zeta}n$ olan herhangi bir reel-split kuaterniyonunu ile birim pür ve timelike $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda Teorem 4.1 de verilen $f_{\boldsymbol{v}}(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}_s$ vektör uzayının $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıda verilen eşitlikler elde edilir:

$$f_v(1) = -\boldsymbol{v}\,\bar{1}\boldsymbol{v} = 1 \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{v}\,\bar{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{v} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{i}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (-x - y\boldsymbol{k} + z\boldsymbol{j})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= -x^2\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k} - yx\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{i} - yz - zx\boldsymbol{k} + zy - z^2\boldsymbol{i} \\ &= (-x^2 - y^2 - z^2)\boldsymbol{i} + (-2xy)\boldsymbol{j} + (-2xz)\boldsymbol{k} \\ &= (1 - 2x^2)\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} - 2xz\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{v}\,\bar{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{v} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{j}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (x\boldsymbol{k} + y + z\boldsymbol{i})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= x^2\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{i} + xz + yx\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k} - zx + zy\boldsymbol{k} - z^2\boldsymbol{j} \\ &= 2xy\boldsymbol{i} + (1 + 2y^2)\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{v}\,\bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{v} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (-x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i} + z)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= x^2\boldsymbol{k} - xy + xz\boldsymbol{i} + yx - y^2\boldsymbol{k} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{i} + zy\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k} \\ &= (2xz)\boldsymbol{i} + (2yz)\boldsymbol{j} + (x^2 - y^2 + z^2)\boldsymbol{k} \\ &= (2xz)\boldsymbol{i} + (2yz)\boldsymbol{j} + (1 + 2z^2)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Buradan, involüsyon dönüşümü $f_{\boldsymbol{v}}(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ ye karşılık gelen matris

$$Aq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2x^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & -2xy & 1 + 2y^2 & 2yz \\ 0 & -2xz & 2yz & 1 + 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\boldsymbol{\zeta}n = (q_1, q_2, q_3)$ ve $q = m + \boldsymbol{\zeta}n$ dir. 4×4 ve $4 \times 1 -$ tipindeki matrisler ise sırasıyla A ve q ya karşılık gelmektedir. Özel olarak

$$A_1(\boldsymbol{\zeta}n) = \begin{bmatrix} 1-2x^2 & 2xy & 2xz \\ -2xy & 1+2y^2 & 2yz \\ -2xz & 2yz & 1+2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

alındığında, $\varepsilon = diag(-1,1,1)$ olmak üzere $A_1^T = \varepsilon\, A_1^{-1}\, \varepsilon$ olacağından A_1 matrisi yarı-ortogonal olacaktır. Ayrıca $det(A_1) = -1$ olduğundan $A_1(\boldsymbol{\zeta}n)$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{\zeta}n$ vektörü $\boldsymbol{v}$ vektörüne dik olan düzleme göre yansır. Dolayısıyla $f_{\boldsymbol{v}}(q) = -\boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} = m + \boldsymbol{v\zeta v}n$ involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı m yi invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan $\boldsymbol{\zeta}n$ yi $\boldsymbol{v}$ eksenine dik olan düzleme göre yansıtır (bir diğer ifadeyle $\boldsymbol{\zeta}n$ vektörünü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döndürür sonrasında ise orijine göre yansıtır). Burada; 3×3 ve $3 \times 1 -$ tipindeki matrisler ile sırasıyla A_1 ve $\boldsymbol{\zeta}n$ e karşılık gelen matrisler gösterilmiştir.

Kompleks formu $q = r + \boldsymbol{\xi}s$ olan herhangi bir reel-split kuaterniyonunu ile birim pür ve spacelike $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, Teorem 4.2 de verilen $f_v(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}_s$ vektör uzayının $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıda verilen eşitlikler elde edilir:

$$f_{\boldsymbol{v}}(1) = \boldsymbol{v}\,\bar{1}\boldsymbol{v} = 1 \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{v}\,\bar{\boldsymbol{\imath}}\boldsymbol{v} &= (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})\boldsymbol{i}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (x + y\boldsymbol{k} - z\boldsymbol{j})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k} + yx\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{i} + yz + zx\boldsymbol{k} - zy + z^2\boldsymbol{i} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (2xy)\boldsymbol{j} + (2xz)\boldsymbol{k} \\ &= (1 + 2x^2)\boldsymbol{i} + (2xy)\boldsymbol{j} + (2xz)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{\jmath}}\boldsymbol{v} &= (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})\boldsymbol{j}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (-x\boldsymbol{k} - y - z\boldsymbol{i})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= -x^2\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{i} - xz - yx\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k} + zx - zy\boldsymbol{k} + z^2\boldsymbol{j} \\ &= (-2xy)\boldsymbol{i} + (-x^2 - y^2 + z^2)\boldsymbol{j} + (-2yz)\boldsymbol{k} \\ &= -2xy\boldsymbol{i} + (1 - 2y^2)\boldsymbol{j} - 2yz\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$
\begin{aligned}
f_v(\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{v}\bar{k}\boldsymbol{v} = (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})k(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= (x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{i} - z)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= -x^2\boldsymbol{k} + xy - xz\boldsymbol{i} - yx + y^2\boldsymbol{k} - yz\boldsymbol{j} - zx\boldsymbol{i} - zy\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} \qquad (4.66) \\
&= (-2xz)\boldsymbol{i} + (-2yz)\boldsymbol{j} + (-x^2 + y^2 - z^2)\boldsymbol{k} \\
&= -2xz\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + (1 - 2z^2)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

Buradan, involüsyon dönüşümü $f_v(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v}$ ye karşılık gelen matris,

$$
Aq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2x^2 & -2xy & -2xz \\ 0 & 2xy & 1-2y^2 & -2yz \\ 0 & 2xz & -2yz & 1-2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \qquad (4.67)
$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\boldsymbol{\xi}s = (q_1, q_2, q_3)$ ve $q = r + \boldsymbol{\xi}s$ dir. 4×4 ve $4 \times 1 -$ tipindeki matrisler ise sırasıyla A ve q ya karşılık gelmektedir. Özel olarak

$$
A_1(\boldsymbol{\xi}s) = \begin{bmatrix} 1+2x^2 & -2xy & -2xz \\ 2xy & 1-2y^2 & -2yz \\ 2xz & -2yz & 1-2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \qquad (4.68)
$$

alındığında, $\varepsilon = diag(-1,1,1)$ olmak üzere $A_1^T = \varepsilon\, A_1^{-1}\, \varepsilon$ olacağından A_1 matrisi yarı-ortogonal olacaktır. Ayrıca, $det(A_1) = -1$ olduğundan $A_1(\boldsymbol{\xi}s)$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{\xi}s$ vektörü $\boldsymbol{v}$ vektörüne dik olan düzleme göre yansır. Dolayısıyla $f_v(q) = \boldsymbol{v}\,\bar{q}\boldsymbol{v} = r + \boldsymbol{v\xi v}s$ involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı r yi invaryant bırakırken vektörel kısmı olan $\boldsymbol{\xi}s$ yi $\boldsymbol{v}$ eksenine dik olan düzleme göre yansıtır (bir diğer ifadeyle $\boldsymbol{\xi}s$ vektörünü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döndürür sonrasında ise orijine göre yansıtır). Burada 3×3 ve $3 \times 1 -$ tipindeki matrisler ile sırasıyla A_1 ve $\boldsymbol{\xi}s$ ye karşılık gelen matrisler gösterilmiştir.

Kompleks formu $q = k + \boldsymbol{\varsigma}l$ olan herhangi bir reel-split kuaterniyonunu ile birim pür ve timelike $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda Teorem 4.3'te $f_v(q) = -\boldsymbol{v}q\boldsymbol{v}$ anti-involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}_s$ vektör uzayının $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıda verilen eşitlikler elde edilir:

$$
f_v(1) = -\boldsymbol{v}1\boldsymbol{v} = 1 \qquad (4.69)
$$

$$
\begin{aligned}
f_v(\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{viv} &= (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})\boldsymbol{i}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= (x + y\boldsymbol{k} - z\boldsymbol{j})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k} + yx\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{i} + yz + zx\boldsymbol{k} - zy + z^2\boldsymbol{i} \\
&= (x^2 + y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (2xy)\boldsymbol{j} + (2xz)\boldsymbol{k} \\
&= (2x^2 - 1)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

$$
\begin{aligned}
f_v(\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{vjv} &= (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})\boldsymbol{j}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= (-x\boldsymbol{k} - y - z\boldsymbol{i})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= -x^2\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{i} - xz - yx\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k} + zx - zy\boldsymbol{k} + z^2\boldsymbol{j} \\
&= (-2xy)\boldsymbol{i} + (-x^2 - y^2 + z^2)\boldsymbol{j} + (-2yz)\boldsymbol{k} \\
&= -2xy\boldsymbol{i} + (-1 - 2y^2)\boldsymbol{j} - 2yz\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

$$
\begin{aligned}
f_v(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{vkv} &= (-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= (x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{i} - z)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\
&= -x^2\boldsymbol{k} + xy - xz\boldsymbol{i} - yx + y^2\boldsymbol{k} - yz\boldsymbol{j} - zx\boldsymbol{i} - zy\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} \\
&= (-2xz)\boldsymbol{i} + (-2yz)\boldsymbol{j} + (-x^2 + y^2 - z^2)\boldsymbol{k} \\
&= -2xz\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + (-1 - 2z^2)\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

Buradan, anti-involüsyon dönüşümü $f_v(q) = -\boldsymbol{vqv}$ ye karşılık gelen matris

$$
Aq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 2x^2 & -2xy & -2xz \\ 0 & 2xy & -1 - 2y^2 & -2yz \\ 0 & 2xz & -2yz & -1 - 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.73}
$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\boldsymbol{\varsigma}l = (q_1, q_2, q_3)$ ve $q = k + \boldsymbol{\varsigma}l$ dir. 4×4 ve $4 \times 1-$ tipindeki matrisler ise sırasıyla A ve q ya karşılık gelmektedir. Özel olarak

$$
A_1(\boldsymbol{\varsigma}l) = \begin{bmatrix} -1 + 2x^2 & -2xy & -2xz \\ 2xy & -1 - 2y^2 & -2yz \\ 2xz & -2yz & -1 - 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.74}
$$

alındığında, $\varepsilon = diag(-1,1,1)$ olmak üzere $A_1^T = \varepsilon\, A_1^{-1}\, \varepsilon$ olacağından A_1 matrisi yarı-ortogonal olacaktır. Ayrıca, $det(A_1) = 1$ olduğundan $A_1(\boldsymbol{\varsigma}l)$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{\varsigma}l$ vektörü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döner. Dolayısıyla $f_v(q) = -\boldsymbol{vqv} = k - \boldsymbol{v\varsigma v}l$ anti-involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı k yı invaryant bırakırken vektörel kısmı olan $\boldsymbol{\varsigma l}$ yi $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döndürür. Burada 3×3 ve $3 \times 1 -$ tipindeki matrisler ile sırasıyla A_1 ve $\boldsymbol{\varsigma l}$ ye karşılık gelen matrisler gösterilmiştir.

Kompleks formu $q = t + \boldsymbol{\omega} z$ olan herhangi bir reel-split kuaterniyonunu ile birim pür ve spacelike $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda Teorem 4.4 te verilen $f_v(q) = \boldsymbol{vqv}$ anti-involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}_s$ vektör uzayının $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıda verilen eşitlikler elde edilir:

$$f_v(1) = \boldsymbol{v}1\boldsymbol{v} = 1 \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{viv} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{i}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (-x - y\boldsymbol{k} + z\boldsymbol{j})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= -x^2\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k} - yx\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{i} - yz - zx\boldsymbol{k} + zy - z^2\boldsymbol{i} \\ &= (-x^2 - y^2 - z^2)\boldsymbol{i} + (-2xy)\boldsymbol{j} + (-2xz)\boldsymbol{k} \\ &= (-1 - 2x^2)\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} - 2xz\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{vjv} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{j}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (x\boldsymbol{k} + y + z\boldsymbol{i})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= x^2\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{i} + xz + yx\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k} - zx + zy\boldsymbol{k} - z^2\boldsymbol{j} \\ &= (2xy)\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2 - z^2)\boldsymbol{j} + (2yz)\boldsymbol{k} \\ &= 2xy\boldsymbol{i} + (-1 + 2y^2)\boldsymbol{j} + 2yz\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned} f_v(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{vkv} &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= (-x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i} + z)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= x^2\boldsymbol{k} - xy + xz\boldsymbol{i} + yx - y^2\boldsymbol{k} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{i} + zy\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k} \\ &= (2xz)\boldsymbol{i} + (2yz)\boldsymbol{j} + (x^2 - y^2 + z^2)\boldsymbol{k} \\ &= 2xz\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + (-1 + 2z^2)\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Buradan, anti-involüsyon dönüşümü $f_v(q) = \boldsymbol{vqv}$ ye karşılık gelen matris

$$Aq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - 2x^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & -2xy & -1 + 2y^2 & 2yz \\ 0 & -2xz & 2yz & -1 + 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\boldsymbol{\omega}z = (q_1, q_2, q_3)$ ve $q = t + \boldsymbol{\omega}z$ dir. 4×4 ve $4 \times 1 -$ tipindeki matrisler ise sırasıyla A ve q ya karşılık gelmektedir. Özel olarak

$$A_1(\boldsymbol{\omega}z) = \begin{bmatrix} -1-2x^2 & 2xy & 2xz \\ -2xy & -1+2y^2 & 2yz \\ -2xz & 2yz & -1+2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

alındığında, $\varepsilon = diag(-1,1,1)$ olmak üzere $A_1^T = \varepsilon\, A_1^{-1}\, \varepsilon$ olacağından A_1 matrisi yarı-ortogonal olacaktır. Ayrıca, $det(A_1) = 1$ olduğundan $A_1(\boldsymbol{\omega}z)$ çarpımı sonucu $\boldsymbol{\omega}z$ vektörü $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döner. Dolayısıyla $f_v(q) = \boldsymbol{v}q\boldsymbol{v} = t + \boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}z$ anti-involüsyon dönüşümü q nun skaler kısmı t yi invaryant bırakırken vektörel kısmı olan $\boldsymbol{\omega}z$ yi $\boldsymbol{v}$ ekseni etrafında pozitif yönde π açısı kadar döndürür. Burada 3×3 ve $3 \times 1 -$ tipindeki matrisler ile sırasıyla A_1 ve $\boldsymbol{\omega}z$ ye karşılık gelen matrisler gösterilmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin 4. bölümünde reel-split kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğer ikisi anti-involüsyon olmak üzere dört dönüşüm tanımlanmıştır. Ayrıca, bu dönüşümlerin Öklid 3-Uzayı $\mathbb{E}^3$ ya da Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ teki geometrik yorumları verilmiştir.

Ell ve Sangwine (2007) tarafından reel kuaterniyonlar kullanılarak tanımlanan, biri involüsyon diğeri ise anti-involüsyon olan iki dönüşümün $\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$ teki geometrik yorumları birer yansımaya karşılık gelirken, bu çalışmada reel-split kuaterniyonlar kullanılarak ele alınan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinin $\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$ ya da $\mathbb{E}_1^3$ te birer dönme hareketine karşılık geldiği gösterilmiştir.

Farklı kuaterniyon çeşitleri ele alınarak oluşturulabilecek involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri ile bu dönüşümlere $\mathbb{E}^{\mathbf{3}}$ ya da $\mathbb{E}_1^3$ te karşılık gelebilecek hareketlerin geometrik yorumları, üzerinde çalışılabilecek konulardır.

KAYNAKLAR

Agrawal, O.P. 1987. Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, Vol. 22 (6); pp. 569-575.

Bekar, M. ve Yaylı, Y., 2018. Involutions in split semi-quaternions. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(12), 4491-4505.

Bottema, O. ve Roth, B. 1979. Theoretical Kinematics. North-Holland Pub. Co., 558 p. New York

Ell, T.A. ve Sangwine, S.J. 2007. Quaternion Involutions and Anti-Involutions. Computers and Mathematics with Applications, 53(1), 137-143.

Hacısalihoğlu, H.H. 1996. Lineer Cebir 1. Cilt. Ankara

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2., 334 s. Ankara.

Hamilton, W.R. 1844. On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a theory of Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol. 2; pp. 424-434.

Hamilton, W.R. 1848. Researches Respecting Quaternions. Transactions of the Royal Irish Academy, 21(1), 199-296.

Hamilton, W.R. 1967. On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra. The Mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton, Vol. 3 (Algebra), Cambridge University Press, 672 p. Cambridge.

Hiller, M. ve Woernle, C. 1984. A Unified Representation of Spatial Displacement. Mechanism and Machine Theory, 19(6), 477-486.

Inoguchi, J. 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space. Tokyo Journal of Mathematics, 21, 140-152.

Jeffreys, H ve Jeffreys, B. 1950. Methods of Mathematical Physics. At the University Press, Cambridge.

Karger, A. ve Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Pub., 422 p. Switzerland.

Kelland, P. Gilston, K.C. ve Guthrie, T.P. 1904. Introduction to Quaternions, Macmillan and Co., 208 p. London.

Knus, M.A., Merkurjev, A., Rost, M. ve Tignol, J-P. 1998. The Book of Involutions. AMS Colloquium Pub., Vol. 44, 593 p.

Kula, L. ve Yayli, Y. 2007. Split quaternions and rotations in semi-Euclidean space E_2^4. Journal of the Korean Mathematical Society, 44, 1313-1327.

Kula, L. 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 116 s. Ankara.

Müller, H.R.1963. Kinematik dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi. Ankara.

O'Neill, B.1983. Semi Riemann için Geometry. Acedemic Press. New York.

Paşa, H.T. 1892. Linear Algebra. Boyacıyan Matbaa, 189 s. İstanbul.

Rooney, J. 1977. A Survey of Representations of Spatial Rotation about a Fixed Point. Environment and Planning B, 4(2), 185-210.

Veldkamp, G.R. 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, 11(2), 142-156.

Ward, J.P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Pub., 242 p. London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı **:** Hasan PENBEGÜL

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans **:** Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1999 - 2003

Yüksek Lisans **:** Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2018 - 2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler:

1. Hasan Penbegül, Murat Bekar, Tunçar Şahan (2019). Kuaterniyonlar ve İnvolüsyonları, 14. Ankara Matematik Günleri, Gazi Üniversitesi 28-29 Haziran 2019, Ankara, Türkiye.