



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

Doktora Tezi

TAWANDA GALLAN CHAKUVINGA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İZMİR
2021**

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

**LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER
PROBLEMLERİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI ÜZERİNE**

TAWANDA GALLAN CHAKUVINGA

DANIŞMAN : PROF. DR. FATMA SERAP TOPAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Doktora Programı

İZMİR
2021



EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI**

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Lineer Olmayan Kesirli Sınır Değer Problemlerin Pozitif Çözümlerinin Varlığı Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

27 / 12 / 2021

İmzası

Tawanda Gallan Chakuvinga



ÖZET

LİNEER OLMAYAN KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

CHAKUVINGA, Tawanda Gallan

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL

27.12.2021, 98 sayfa

Bu tezin arkasındaki motivasyon, geniş bir doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler yelpazesi için hem tek hem de çok sayıda pozitif çözümün varlığının araştırılmasıdır.

Ayrıca bu çalışmada, sonlu gecikmeli lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin integral sınır değer problemlerini ele alıyoruz. Problemlerin pozitif çözümlerinin varlık sonuçları Guo-Krasnoselskii teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi temelinde elde edilir.

Ek olarak, doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin başka bir varyasyonunun integral sınır değeri problemlerini ele alıyoruz. Problemin pozitif çözümlerinin varlık sonuçları Guo-Krasnoselskii teoremine dayalı olarak elde edilir.

Ayrıca, integral sınır koşullarına sahip kesirli diferansiyel denklemlerin lineer olmayan sınır değer probleminin farklı yapıları için pozitif çözümlerin varlığını araştırıyoruz. Prosedür, yeterli koşullara sahip Avery ve Peterson'dan kaynaklanan sabit bir nokta teoremine ve integral sınır değeri probleminin ana sonuçlarını elde etmek için Guo-Krasnoselskii teoremine dayanmaktadır.

Son olarak, bu tez, Green'in fonksiyon özellikleri, Guo-Krasnosel'skii sabit nokta teoremi, monoton iteratif teknik ve yeterli koşullarla birlikte p -Laplacian operatörlü kesirli diferansiyel denklemlerin tek ve çoklu pozitif çözümlerinin varlığına odaklanmaktadır. Konu ile ilgili örnekler, ilgili bölümlerdeki ana sonuçları açıklamak için sunulmuştur..

Anahtar sözcükler

Riemann-Liouville kesirli türev, Caputo kesirli türev, p -Laplacian operatör, Sabit Nokta Teoremleri, Sınırsız gecikme, Sınır değer Problemi



ABSTRACT**EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR THE NONLINEAR FRACTIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

CHAKUVINGA, Tawanda Gallan

Ph.D. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Fatma Serap TOPAL

27.12.2021, 98 pages

Abstract

The motivation behind this thesis is the investigation of the existence of both single and multiplicity of positive solution(s) for a broad spectrum of nonlinear fractional differential equations.

Also, in this work, we consider integral boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with finite delay. Existence results of positive solutions for the problems are obtained on the basis of the Guo-Krasnoselskii theorem and the Leggett-Williams fixed point theorem.

Additionally, we consider integral boundary value problems of another variation of nonlinear fractional differential equations. The existence results of positive solutions for the problem are obtained based on the Guo-Krasnoselskii theorem.

Moreover, we investigate the existence of positive solutions for a unique class of nonlinear boundary value problem of fractional differential equations with integral boundary conditions. The procedure is based on a fixed point theorem due to Avery and Peterson with sufficient conditions and the Guo-Krasnoselskii theorem for obtaining the main results to the integral boundary value problem.

Finally, this thesis focuses on the existence of a single and multiple positive solutions of fractional differential equations with p -Laplacian by means of the Green's function properties, the Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem, the monotone iterative technique accompanied by established sufficient conditions and the Leggett-Williams fixed point theorem. Comprehensive examples follow the main results in the respective sections.

Keywords

Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, p -Laplacian operator, Fixed point theorems, Infinite delay, Boundary value problems



ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasına başlarken amacımız, geniş bir doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler yelpazesi için hem tek hem de çok sayıda pozitif çözümün varlığının araştırılmasıdır.

İkinci bölümde, monoton iterasyon yöntemi, konideki sabit nokta indeks teorisi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi, bir p -Laplacian operatörlü ve sonsuz gecikmeye sahip doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklem içeren dört nokta sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığını araştırmak için uygulanmaktadır.

Üçüncü bölümde, sonlu gecikmeli lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem içeren integral sınır değer problemlerini de ele alıyoruz. Bu problemin pozitif çözümlerinin varlık sonuçları Guo-Krasnoselskii teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi temelinde elde edilmektedir.

Son bölümde, Green's fonksiyonunun özellikleri kullanılarak, Guo-Krasnosel'skii sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi aracılığıyla p -Laplacian operatörlü kesirli diferansiyel denklem içeren bir başka sınır değer probleminin tek ve çoklu pozitif çözümlerinin varlığı için gerekli koşullar incelenmektedir.

Kapsamlı örnekler, ilgili bölümlerdeki ana sonuçları daha iyi anlamamıza yardımcı olacak şekilde planlanmıştır.

İZMİR

27/12/2021

Tawanda Gallan Chakuvinga



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	II
KABUL ONAY SAYFASI	III
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI.....	V
ÖZET	VII
ABSTRACT	IX
ÖNSÖZ	XI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	XIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XV
1. GİRİŞ	1
1.1 Genel Bilgiler	4
1.2 Çalışmanın Amacı	6
2. LİNEER OLMAYAN P-LAPLASYEN KESİRLİ BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	8
2.1 Temel Tanımlar ve Ön Bilgiler	9
2.2 (2.2) Problemi İçin Varlık Sonuçları	21
2.3 (2.1) BVP İçin Çözümlerin Çokluğu	30
2.4 Örnekler	38

3. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNTEGRAL KOŞULLU BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ	44
3.1 Temel Tanım ve Bilgiler	44
3.2 Çözümün Varlığı Üzerine Koşullar	49
3.3 (3.1) BVP İçin Çok Sayıda Çözümün Varlığı Üzerine Koşullar	58
4. M-NOKTALI P-LAPLASYEN LİNEER OLMAYAN KESİRLİ BİR BVP NİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	70
4.1 Temel Tanım ve Teoremler	70
4.2 Pozitif Çözümlerin Varlığı	81
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	88
KAYNAKLAR DİZİNİ	89
6. TEŞEKKÜR	100
7. ÖZGEÇMİŞ	101

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

D^β	Riemann-Liouville türev
φ_p	p-Laplacian operatör
I^α	Kesirli mertebeden integral
Γ	gama fonksiyonu
$g(t) * \varphi_\alpha(t)$	$g(t)$ ve $\varphi_\alpha(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu
δ	delta fonksiyonu
$B(u, v)$	Beta fonksiyonu
$(E, \ \cdot\)$	$\ \cdot\ $ ile normlu Banach uzayı
$\{v_m\}$	dizisel kompakt küme
$C(J, R)$	J den R ye sürekli fonksiyonlar uzayı
B_0	$\ \cdot\ _0$ ile normlu Banach uzayı
$f^{(n)}(t)$	$f(t)$ fonksiyonunun n inci mertebeden türevi
D_a^α	α inci mertebeden Riemann-Liouville türev,
${}^c D_a^\alpha$	α inci mertebeden Caputo türev

KISALTMALAR

BVP	Sınır Değer Problemi
IBVP	İntegral Sınır Değer Problemi
a.e	Hemen hemen her yerde
FDE	Kesirli Türevli Denklemler
NFDE	Lineer Olmayan Kesirli Türevli Denklemler



1. GİRİŞ

Bir modele dayalı sınır değer problemlerinin (BVP) en önemli özelliklerinden biri pozitif çözümlerin varlığının araştırılmasıdır. Bu, son yıllarda araştırmacılar için en önemli hedeflerden biri olmuştur. Bu çalışmaların bazılarında genellikle sabit nokta teoremleri, bazılarında ise monoton yöntemler olarak bilinen alt ve üst çözüm yöntemleri kullanılmaktadır.

Kesirli türev analizindeki çalışmaların hız kazanmasıyla, (Z. W. Lv 2014), (S. Q. Zhang 2010), fiziksel olaylar, mühendislik ve ekonomik süreçler incelenirken oluşturulan sınır değer problem modellemelerinde kesirli türevler uygulanmıştır. Son zamanlarda, fizik, kimya, aerodinamik, polimer reolojisi ve diğer birçok alanda kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri içeren sınır değer problemleri düşünülmüştür (Diethelm ve Freed 1999), (Gaul, Klein ve Kempffe 1991), (Metzler, et al. 1995).), (Mainardi 1997), (Glockle ve Nonnenmacher 1995), (Gala, Liu ve Ragusa 2012), (Gala ve Ragusa 2016). Bu, kesirli diferansiyel denklemlerin çeşitli alanlarda çalışan araştırmacıların dikkatini ne ölçüde çektiğini göstermektedir. Kesirli türevlere sahip olmanın avantajı, modellerde daha fazla serbestlik derecesi sağlamaları ve dolayısıyla gerçek yaşam olaylarını modellemede daha etkili olmalarıdır.

Kesirli diferansiyel denklemlere (FDE) ilgi, diğer alanların yanı sıra mühendislik, mekanik ve bilimdeki uygulamalarıyla sonuçlanan kesirli matematik teorisindeki ilerlemelerin ardından ortaya çıkmıştır (Ahmed, et al. 2019), (Hajipour, et al. 2018), (Iqbal, et al. 2020), (Kilbas, Srivastava ve Trujillo 2006), (Ş. M. Ege 2017), (2018), (Weitzner ve Zaslavsky 2003), (Agrawal 2002), (Podlubny 1999), (Oldham ve Spanier 1974), (Agarwal, Benchohra ve Hamani 2008), (Darwish ve Ntouyas 2010), (S. Zhang 2006), (Bai ve Lu 2005), (Benchohra, Cabada ve Seba 2009), (Stojanovic ve Gorenflo 2010), (Zhou ve Jiao 2010), (Lakshmikantham ve Vatsala 2008), (Ege ve Topal 2019), (Ege ve Topal 2017), (Alghamdi, et al. 2020), (Benbernou, Gala ve Ragusa 2014), (Ragusa ve Razani 2020).

Leggett-Williams teoremi (Zhang ve Liu 2013), (Sun, Ji ve Cui 2018) ve koniler üzerinde sabit nokta teoremi (Zhang) gibi kesirli sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerin varlığını araştırırken kullanılan pek çok yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlardan bazılarını kullanan çalışmalara örnek olarak, termo-elastisite, popülasyon dinamiği ve benzeri alanlarda çeşitli uygulanabilirliğe sahip araştırmalardan olan (Qiao ve Zhou 2016) ve (Zhao ve

Wang 2016) gösterilebilir bu çalışmalarda integral sınır koşullu kesirli diferansiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır.

Kesirli diferansiyel denklemler alanında her geçen gün daha büyük bir ilgi ortaya çıkmaktadır. Daha spesifik örnekler vermek gerekirse, polimer reolojisi ve kimyasındaki süreçlerin matematiksel modellenmesi alanında, ve bunun yanısıra bazı malzemeler ve işlemler için kalıtsal özelliklerin tanımlanmasında hayati bir araç olarak kesirli diferansiyel denklemler araştırmacılar tarafından tamamen benimsemiştir. Kesirli hesap teorilerindeki ilerlemeler, bu tür denklemlerin mühendislik ve mekanik vb. alanlardaki uygulamalarına yol açmıştır. (Ahmed, et al. 2019), (Hajipour, et al. 2018), (Iqbal, et al. 2020), (Ege ve Topal 2017) , (2019), (D. Guo 1988), (Leggett ve Williams 1979) .

Önemli sayıda araştırmacı, doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri için pozitif çözümlerin varlığı ve çokluğu üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmaların pek çoğunda Guo-Krasnosel'skii sabit nokta teoremi, üst ve alt çözümler yöntemi, Leggett-Williams sabit nokta teoremi ve Schauder sabit nokta teoremi gibi çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanmıştır (Zhang ve Liu 2013), (Sun, Ji ve Cui 2018), (Zhang ve Zhong 2016).

Bunun yanısıra, çeşitli çalışmalar kesirli matematiğe uyarlanmıştır ve bunlar biyoloji bilimi, geri besleme yükselteçleri, elektrik devreleri ve fizikle ilgili alanları içeren geniş bir uygulama alanını hedeflemiştir, bkz. (Podlubny 1999), (Kilbas ve Trujillo 2001), (Kilbas ve Trujillo 2001), (Kilbas ve Trujillo 2002), (Kilbas, Srivastava ve Trujillo 2006). Kesirli analiz üzerine çok sayıda çalışma, başlangıçta, doğrusal başlangıç değerli kesirli diferansiyel denklemlerin çözülebilirliğine odaklandı (Bai 2010). Son zamanlarda, kesirli analiz teorisindeki gelişmeler, bilimin tüm alanlarında yaygın olarak uygulanmasıyla FDE'lerin başlamasına ve dikkate değer bir şekilde gelişmesine yol açmıştır, bkz. (Babakhani ve Gejji 2003), (Khan, et al. 2019), (Delbosco ve Rodino 1996). Zamanla, diğerlerinin yanı sıra Krasnosel'skii sabit nokta teoremi gibi sabit nokta teoremleri aracılığıyla doğrusal olmayan başlangıç değerli kesirli diferansiyel denklemlerin pozitif çözümlerinin varlığını ve çokluğunu inceleyen çok daha fazla çalışma yapıldı (Tian, Bai ve Sun 2019), (Ege ve Topal 2017), (2019). Ayrıca, p-Laplacian sınır değer problemlerine genişletilmiş tamsayılı diferansiyel denklemler sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı son yıllarda pek çok yazarın üzerinde yoğunlaştığı bir konu olmuştur (Bai 2010), (Avery ve Henderson 2003), (Kong ve Wang 2000), (Regan 1993), (Yang ve Yan 2010). Bu tür

doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler (NFDE'ler) üzerinde pozitif çözümlerin varlığı ve yokluğu üzerine integral sınır koşulları ile sınır değer problemlerini içeren bazı çalışmalar incelenmiştir, bkz. (Bai 2010), (Ahmad ve Nieto 2012), (Karakostas 2013), (Wang, Ahmad ve Zhang 2011), (Zhang ve Xu 2013). Az sayıda makale, NFDE'leri bir p -Laplacian operatörüyle ele almıştır, bunlardan bazıları (Avery ve Henderson 2003), (Prasad ve Krushna 2014) gibi çalışmalardır. Ayrıca, farklı türde kesirli türevler, çeşitli kesirli diferansiyel denklemlerde yalnızca birbirlerinden ayrı olarak geniş çapta araştırılmıştır.

Şüphesiz ki, FDE'ler birçok araştırmacı tarafından bilim ve mühendislikte çok çeşitli alanlarda kullanılan hayati bir araç haline geldi. Biyoloji, ekonomi, kontrol teorisi, kimya, fizik ve biyofizik gibi birçok alanda bu denklemlerin bazı örnekleri görülmektedir (Diethelm ve Freed 1999), (Gaul, Klein ve Kempffe 1991), (Metzler, et al. 1995), (Mainardi 1997), (Glockle ve Nonnenmacher 1995).

Ek olarak, kesirli diferansiyel denklemlerin kullanımı, çeşitli malzeme ve süreçlerin kalıtsal özelliklerine kadar genişlemiştir. Bu aynı zamanda, yıllar boyunca, yerel olmayan sınır koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri (BVP) için çözümlerin varlığı ve tekliği üzerine, doğrusal olmayan teknikler aracılığıyla çalışmaya odaklanan birçok araştırmacının da dikkatini çekmiştir (Ege ve Topal 2017), (2019).

Kesirli hesabın kapsamlı uygulamalarının, diğerlerinin yanı sıra kan akışı fenomeni, difüzyona benzer difüzyonlu taşıma, dinamik sistemlerin kontrol teorisi ve sürekli ortam mekaniği gibi birçok bilim ve mühendislik alanında kapsamlı bir şekilde genişlemekte olduğu açıktır (Wang, Liu ve Kong, et al. 2019), (Guo ve Liu 2019), (Wang, Liu ve Wu 2019), (Wang, Liu ve Wu 2019), (Liu, Sun ve Wu 2019), (Wang, Liu ve Wu 2020).

Çok sayıda araştırmacının doğrusal olmayan kesirli denklemler içeren BVP'lerin pozitif çözümlerinin varlığının araştırılmasına yönelmiş olması, doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlere sahip sınır değer problemlerinin (BVP) incelenmesinin önemi bir kez daha açıkça kanıtlanmıştır bkz. (Chen ve Gao 2018). Kesirli diferansiyel denklem içeren BVP için pozitif çözümlerin varlığı üzerine çalışmalar genişletildi ve sonuç olarak hem diferansiyel hem de integral sınır değer problemlerinde (IBVP'ler) güzel sonuçlar verdi (W. Wang 2019). Kesirli diferansiyel denklemler, çeşitli malzemelerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında etkili araçlar olduğundan, rezonanssız kesirli çok

noktalı problemler ele alınmış (Wei, Bai ve Sun 2019), (Zhai, Wang ve Li 2017), (Zhong, et al. 2018) ayrıca kesirli p-Laplace problemleri (Yao, et al. 2013), (Feng, Li and Sun 2018), (Hao, et al. 2017), (Liu ve Jia 2018), (Sheng, Zhang ve Bai 2018), (Tian, Sun ve Bai 2017), (Wu, et al. 2018), (X. Zhang, et al. 2017), (Zou ve He 2018) üzerine de çalışmalar yoğunlaştırılmıştır. Son zamanlarda, doğrusal olmayan kesirli p-Laplacian operatörlü diferansiyel denklem içeren sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır bkz. (Tian, Bai ve Sun, 2019), (Khan, et al. 2019) , (Li, Chen ve An 2020), (Kang, et al. 2019).

1.1. Genel Bilgiler

Son yıllarda yapılan bir çalışmada (Li, Luo and Zhou 2010)

$$D_{0+}^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, D_{0+}^{\beta}u(1) = aD_{0+}^{\beta}u(\xi),$$

lineer olmayan, kesirli türeve sahip sınır değere problemi ele alınmıştır. Bu problemde, $1 < \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere D_{0+}^{α} ve D^{β} ler standart Riemann-Liouville kesirli türevler, $0 \leq a \leq 1$, $\xi \in (0,1)$, $a\xi^{\alpha-\beta-2} \leq 1 - \beta$, $0 \leq \alpha - \beta - 1$ ve $f: [0,1] \times [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ olarak alınmıştır. Bu çalışmada, sınır değer problemi (BVP) kendisine eşdeğer bir integral denkleme dönüştürülmüştür. İncelenen BVP' nin pozitif çözümlerinin varlığını ve çokluk sonuçlarını göstermek için sabit nokta teoremlerinden faydalanılmıştır. Arzela-Ascoli teoremi ile tanımlanan operatörün tamamen sürekli olduğu gösterilmiş ve BVP 'nin birden fazla pozitif çözümünün olduğunu iddia eden bazı teoremler ispatlanmıştır.

(Z. W. Lv 2014) tarafından yapılan çalışmada

$$D_{0+}^{\beta} \left(\varphi_p \left(D_{0+}^{\alpha} u(t) \right) \right) + \varphi_p(\lambda) f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

p-Laplacian operatörlü lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem içeren m noktalı sınır değer probleminin pozitif çözümlerin varlığı ve çokluğu incelenmiştir. Bu çalışmada, D_{0+}^{α} , D_{0+}^{β} ve D_{0+}^{γ} ler standart Riemann-Liouville kesirli türevlerdir ve $0 \leq \alpha - \gamma - 1$, $0 \leq \alpha - \beta - 1$ olacak şekilde $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta, \gamma \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca, $\lambda \in (0, +\infty)$, $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ ve $\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i \eta_i < 1$ olacak şekilde $0 < \xi_i, \eta_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, m-2$) ile verilen sayılardır. Ele alınan problemde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

olacak şekilde $\varphi_p(s) = |s|^{p-1}s$, $p > 1$ ile tanımlı p-Laplasyen operatörü ve $\varphi_p^{-1} = \varphi_q$ dir. Yazarlar, monoton yinelemeli tekniği ve sabit nokta indeks teorisini bir koni içinde uyguladılar. BVP eşdeğer bir integral denkleme dönüştürülür ve pozitif çözümün çokluğunun varlığı için özdeğer aralığı dikkate alınır. Arzela-Ascoli teoremi operatörün eş-sürekli olduğunu gösterdikten sonra operatörün tam sürekliliğini ispatlar. Ayrıca, Schauder sabit nokta teoremi ile operatörün en az bir sabit noktaya sahip olduğu ve BVP'nin tek bir pozitif çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sonucun yanısıra BVP' nin birden fazla pozitif çözümünün varlığı da kanıtlanmıştır. Bu çözümlerden biri minimum pozitif çözüm, diğeri ise maksimum pozitif çözümdür.

(Z. Lv 2020) yaptığı çalışmasında

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}y(t) + \mu_1 f(t, v(t)) + \mu_2 g(t, v(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ D_{0+}^{\alpha}v(t) + \mu_1 f(t, y(t)) + \mu_2 g(t, y(t)) = 0, & 0 < t < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}y(t) + \mu_1 f(t, y(t)) + \mu_2 g(t, v(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ D_{0+}^{\alpha}v(t) + \mu_1 f(t, v(t)) + \mu_2 g(t, y(t)) = 0, & 0 < t < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}y(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i D_{0+}^{\beta}y(\eta_i), & y(0) = 0, \\ D_{0+}^{\beta}v(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i D_{0+}^{\beta}v(\eta_i), & v(0) = 0, \end{cases}$$

çok noktalı sınır değer koşullarına sahip kesirli diferansiyel denklem sistemlerini ele aldı, burada $1 < \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 1$ ve $0 \leq \alpha - \beta - 1$ olmak üzere $D_{0+}^{\alpha}, D_{0+}^{\beta}$ lar standart Riemann-Liouville kesirli türevler, $f: [0,1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyon $0 < \xi_i, \eta_i < 1$, $\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i \eta_i^{\alpha-\beta-1} < 1$ ($i = 1, 2, \dots, m-2$) ve $\mu_1 \geq \mu_2$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \in (0, +\infty)$ olarak alınmıştır. İncelenen bu çok noktalı sınır koşullarına sahip kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin pozitif çözümlerin varlığını belirlemek için γ içbükey ve $(-\gamma)$ dışbükey operatörlerin sabit nokta teoremleri uygulandı.

(Zhang ve Liu 2020),

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t), D_{0+}^{\alpha-2} y(t), D_{0+}^{\alpha-1} y(t)), & 0 < t < +\infty, \\ y(0) = 0, \quad D_{0+}^{\alpha-2} y(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i D_{0+}^{\alpha-2} y(\xi_i), \\ D_{0+}^{\alpha-1} y(-\infty) = \sum_{j=1}^n \beta_j D_{0+}^{\alpha-1} y(\eta_j), \end{cases}$$

problemini ele alarak pozitif çözümlerin varlığını incelemiştir, burada $2 < \alpha \leq 3$ olmak üzere D_{0+}^{α} standart Riemann-Liouville kesirli türev, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < +\infty$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n < +\infty$, $f: [0, +\infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodory's koşulunu sağlayan, i.e., her $(y, v, w) \in \mathbb{R}^3$ için $f(t, y, v, w)$ Lebesgue integrallenebilir ve sürekli bir fonksiyon olarak alınmıştır.

(Tian, Bai ve Sun 2019),

$$\begin{cases} D^{\gamma} (\varphi_p(D^{\alpha} y(t))) = f(t, y(t)), & 0 < t < 1, \\ y(0) = D^{\alpha} y(0) = 0, \quad D^{\beta} y(1) = a D^{\beta} y(\xi), \quad D^{\alpha} y(1) = b D^{\alpha} y(\eta), \end{cases}$$

kesirli dört noktalı sınır değer problemini ele almıştır. Bu problemde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $1 < \alpha, \gamma \leq 2$, $\beta > 0$, $1 + \beta \leq \alpha$, $\xi, \eta \in (0, 1)$; $a, b \in [0, +\infty)$, $1 - a\xi^{\alpha-\beta-1} > 0$, $1 - b^{p-1}\eta^{\gamma-1} > 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $\varphi_q = (\varphi_p)^{-1}$ ve D^{α} ise Riemann-Liouville kesirli türev olarak alınmıştır. Ayrıca $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ olarak seçilmiştir. Yazarlar, p-Laplasyen operatörlü kesirli diferansiyel denklemlerin bir BVP için pozitif çözümlerin bazı varoluş sonuçlarını elde etmek için monoton yinelemeli yöntemi uygulamışlardır.

1.2 Çalışmanın Amacı

Bildiğimiz kadarıyla, hem p-Laplacian operatörü hem de sonsuz gecikme ile kesirli diferansiyel denklemler için pozitif çözümlerin varlığını araştıran çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu tür problemlerin uygulamaları henüz başlangıç aşamasındadır.

Yapılan literatür araştırmalarında, integral sınır değer problemlerini (IBVP) içeren çalışmalarla karşılaşmakla beraber, gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için IBVP'nin karışık kesirli dereceli türevlerle kombinasyonu azdır.

İntegral sınır değer problemlerini (IBVP) içeren bazı çalışmalar ele alınmıştır, integral sınır değer problemlerine ilişkin kapsamlı ayrıntılı yaklaşımlar (Cabada ve Wang 2012) ve burada yer alan referanslarda görülebilir. Ancak, bildiğimiz kadarıyla, hem Caputo-Riemann Liouville türevlerinin bir kombinasyonunu hem de integral sınır değeri koşullarını içeren sınırlı sayıda çalışma kabul edilmiştir; bunlardan bazıları (Song ve Cui 2020), (Khaldi ve Guezane-Lakoud 2017) , (Guezane-Lakoud, Khaldi ve Kılıçman 2017).

Caputo ve Riemann-Liouville türevleri genellikle birçok durumda ayrı ayrı düşünülse de, çok sınırlı sayıda çalışma iki kesirli mertebeden türevi birlikte ele almıştır, bunlardan birkaçı (Song ve Cui 2020), (Khaldi ve Guezane-Lakoud 2017), (Guezane -Lakoud, Khaldi ve Kılıçman 2017) şeklindedir. Bu çalışmalardan da anlaşılabileceği gibi, karışık kesir dereceli türevleri olan bu tür kesirli diferansiyel denklemlerin yeterince çalışılmadığına dikkat edilmelidir. Bununla birlikte, p-Laplacian operatörü hem çift nokta hem de çok noktalı sınır değer koşullarını içeren Caputo Türevleri ile birlikte Riemann-Liouville türev operatörünü birleştiren hemen hemen hiç çalışma yoktur.

Sonuç olarak, tezimizde, bu bölümde bahsedilen bu boşluğu doldurmak için, karışık kesirli dereceli türevleri içeren sonsuz aralıkta çalışılan BVP ve sonlu gecikmeli IBVP lerini ele alarak bu problemlerin tek ve çoklu pozitif çözümlerinin varlığını araştırmayı hedefliyoruz.

2. LİNEER OLMAYAN P-LAPLASYEN KESİRLİ BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde sonsuz gecikmeli dört noktalı kesirli diferansiyel denklemlerin bir sınır değer problemi için pozitif çözümlerin varlığını inceleyeceğiz. Bu kısımda ele alacağımız problem

$$\begin{cases} D^\beta (\varphi_p(D^\alpha y(t))) = f(t, y_t), & t \in J = [0, 1], \\ y(0) = 0, D^\alpha y(1) = aD^\alpha y(\xi), \quad D^\alpha y(0) = 0, D^\gamma y(1) = bD^\gamma y(\eta), \\ y(t) = \phi(t), & t \in (-\infty, 0], \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklindedir, burada D^α, D^β ve D^γ lar standart Riemann-Liouville kesirli türevleridir. $1 < \alpha, \beta \leq 2$, $0 < \gamma \leq 1$ öyle ki $0 \leq \alpha - \gamma - 1$, $0 \leq a, b \leq 1$, $0 < \xi, \eta < 1$ ve $f : J \times B \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli bir fonksiyondur, $\phi \in B$ ve B bir faz uzayıdır. Bir y fonksiyonu ve her $t \in [0, 1]$ için y_t , $\theta \in (-\infty, 0]$, olmak üzere $y_t(\theta) = y(t + \theta)$ ile tanımlı B nin bir elemanıdır. Fonksiyonel diferansiyel denklemlerde nitel ve nicel teori çalışmasının temel kısmı, (Benaouda 2015), (Schumacher 1978) tarafından ayrıntılı olarak ele alınan uygun aksiyomları karşılayan yarı normlu uzayı içeren B faz uzayı kavramı ile karakterize edilir (Hino 1991), (Hale 1978).

Bu kısımda öncelikle, ana sonuçlarda kullanılan bazı gerekli tanımları ve lemmaları vereceğiz. Ayrıca kolaylık olması açısından kullanacağımız sabit nokta teoremlerini de belirteceğiz.

Öncelikle, lineer olmayan

$$\begin{cases} D^\beta (\varphi_p(D^\alpha y(t))) = f(t, y(t)), & t \in (0, 1) \\ y(0) = 0, \quad D^\alpha y(1) = aD^\alpha y(\xi), D^\alpha y(0) = 0, \quad D^\gamma y(1) = bD^\gamma y(\eta) \end{cases} \quad (2.2)$$

sınır değer problemini ele alacağız ve bu problemin varlık sonuçlarını vereceğiz.

Bu problemi basitleştirmek için, $w = D^\alpha y$ ve $v = \varphi_p(w)$ olarak (2.2) problemini

$$\begin{cases} D^\beta v(t) = g(t) \\ v(0) = 0 \quad \text{ve} \\ v(1) = a^{p-1}v(\xi) \end{cases} \quad (2.3)$$

lineer problemine çevireceğiz, burada $g \in L'[0,1]$ ve $g \geq 0$. Daha sonra (2.1) BVP için birden fazla çözümün varlık sonuçlarını vereceğiz. Son olarak, ana sonuçlarımızı göstermek için bazı örnekler sunacağız.

2.1 Temel Tanımlar ve Ön Bilgiler

Bu bölümde önce gerekli bazı tanımları ve lemmaları tanıtacağız.

Tanım 2.1 (bkz. (Benaouda 2015), (El Sayed 1998)), (Cabada ve Wang 2012), (Liu, Min ve Wu 2020), (Liu, Min ve Wu 2020))

$$I_a^\alpha g(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s) ds,$$

ile verilen integral, bir $g \in L^1([a, b], R_+)$ fonksiyonunun $\alpha \in R_+$ inci mertebeden kesirli integralini tanımlar, burada Γ bilinen gama fonksiyonudur. $\alpha = 0$ için $I^\alpha g(t) = g(t) * \varphi_\alpha(t)$, elde ederiz, burada $t > 0$ için $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, ve $t \leq 0$ için $\varphi_\alpha(t) = 0$ dir. Ayrıca $\alpha \rightarrow 0$ için $\varphi_\alpha(t) \rightarrow \delta(t)$ olur, burada δ delta fonksiyonudur.

Tanım 2.2 (bkz. (Benaouda 2015), (El Sayed 1998), (El-Sayed 1995), (Cabada, Wang 2012)) $[a, b]$ aralığında verilen bir g fonksiyonunun α inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_{0+}^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^1 (t-s)^{n-\alpha-1} g(s) ds$$

ile tanımlanır.

Bu kısımda verilecek olan lemmalar Problem (2.2) nin çözümlerinin varlığını göstermek için gereklidir.

Lemma 2.1 (S. Zhang 2006) $\alpha > 0$ olsun, bu durumda $D^\alpha y(t) = 0$ diferansiyel denklemi, $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N}$ çözümüne sahiptir, burada N , α dan büyük yada eşit olan en küçük tamsayıdır.

Lemma 2.2 (S. Zhang 2006), (Liu, Min ve Wu 2020), (Bai ve Lu 2005) $y \in C(0,1) \cap L(0,1)$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere y fonksiyonunun α inci mertebeden türevi $C(0,1) \cap L(0,1)$ kümesine ait olsun, bu durumda $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$I^\alpha D^\alpha y(t) = y(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N},$$

elde edilir, burada $\mathbb{N}$, α dan büyük yada eşit olan en küçük tamsayıdır.

Lemma 2.3 y bir sürekli fonksiyon olsun, (2.3) sınır değer probleminin çözümü

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) \rho(s) ds, \quad (2.4)$$

şeklindedir, burada $d = 1 - b\eta^{\alpha-\gamma-1} > 0$ olmak üzere

$$G(t,s) = G_1(t,s) + \frac{bt^{\alpha-1}}{d} G_2(\eta,s),$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$G_2(\eta,s) = \begin{cases} \frac{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \\ \frac{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \end{cases} \quad (2.5)$$

ve

$$\rho(s) = \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) g(\tau) d\tau \right),$$

ile verilir, öyleki

$$H(s,\tau) = H_1(s,\tau) + \frac{a^{p-1}s^{\beta-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} H_2(\xi,\tau),$$

$$H_1(s, \tau) = \begin{cases} \frac{s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1} - (s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq \tau \leq s \leq 1, \\ \frac{s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq s \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

ve

$$H_2(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{((1-\tau)\xi)^{\beta-1} - (\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & s \in [0,1], \\ \frac{((1-\tau)\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & s \in [0,1], \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır, burada $a^{p-1}\xi^{\beta-1} < 1$ eşitsizliği sağlanır.

İspat Lemma 2.2 kullanılarak, Problem (2.3) den

$$v(t) = c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2} + I^\beta g(t)$$

elde edilir.

$v(0) = 0$ olduğu için $c_2 = 0$ olduğu görülür, böylece

(2.6)

$$v(t) = c_1 t^{\beta-1} + I^\beta g(t)$$

elde edilir.

$v(1) = a^{p-1}v(\xi)$, sınır koşulu kullanılarak

$$c_1 + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau = a^{p-1} \left[c_1 \xi^{\beta-1} + \int_0^\xi \frac{(\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau \right]$$

$$c_1 = \frac{1}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \left[- \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau + a^{p-1} \int_0^\xi \frac{(\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau \right] \quad (2.7)$$

bulunur.

Bu c_1 sabiti (2.2) de yerine yazılarak

$$v(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau + \frac{t^{\beta-1}}{1-a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \left[a^{p-1} \int_0^\xi \frac{(\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau - \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(\tau) d\tau \right]$$

çözümü buundur.

Eğer

$$v(t) = -v(t)$$

ise bu durumda

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^s [(1-\tau)^{\beta-1} s^{\beta-1} - (s-\tau)^{\beta-1}] g(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_s^1 (1-\tau)^{\beta-1} s^{\beta-1} g(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{a^{p-1} s^{\beta-1}}{(1-a^{p-1}\xi^{\beta-1})\Gamma(\beta)} \left[\int_0^\xi ((1-\tau)^{\beta-1} \xi^{\beta-1} - (\xi-\tau)^{\beta-1}) g(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_\xi^1 (1-\tau)^{\beta-1} \xi^{\beta-1} g(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_0^1 H_1(s, \tau) g(\tau) d\tau + \frac{a^{p-1} s^{\beta-1}}{1-a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \int_0^1 H_2(\xi, \tau) g(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 H(s, \tau) g(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

olduğu görülür, burada

$$H(s, \tau) = H_1(s, \tau) + \frac{a^{p-1} s^{\beta-1}}{1-a^{p-1}\xi^{\beta-1}} H_2(\xi, \tau), \quad (2.8)$$

dir, öyleki

$$\begin{aligned}
H_1(s, \tau) &= \begin{cases} \frac{s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1} - (s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq \tau \leq s \leq 1, \\ \frac{s^{\beta-1}(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq s \leq \tau \leq 1, \end{cases} \\
H_2(\xi, \tau) &= \begin{cases} \frac{((1-\tau)\xi)^{\beta-1} - (\xi-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & s \in [0,1], \\ \frac{((1-\tau)\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & s \in [0,1], \end{cases} \quad (2.9)
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

$D^\alpha y = w$, $w = \varphi_p^{-1}(v) = \varphi_q(v)$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.3) den dolayı biliyoruz ki problem (2.2) nin çözümü

$$D^\alpha y(t) = -\varphi_q(v(t)) \quad (2.10)$$

eşitliğini sağlar, burada

$$\rho(t) = \varphi_q(v(t)) \quad (2.11)$$

olduğundan, **Lemma 2.2**, (2.10) ve (2.11) kullanılarak,

$$y(t) = -I^\alpha(\rho(t)) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \quad (2.12)$$

elde ederiz.

$y(0) = 0$ olduğu için $c_2 = 0$ bulunur. Ayrıca $D^\gamma t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} t^{\alpha-\gamma}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
D^\gamma y(t) &= -I^{\alpha-\gamma} \rho(t) + c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)} t^{\alpha-\gamma-1} \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\gamma-1} \rho(s) ds + \\
&\quad c_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma)} t^{\alpha-\gamma-1} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$D^\gamma y(1) = b D^\gamma y(\eta)$ sınır koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\gamma-1} \rho(s) ds + c_1 \Gamma(\alpha) \\
& = b \left(- \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1} \rho(s) ds + c_1 \Gamma(\alpha) \eta^{\alpha-\gamma-1} \right)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$c_1 = \frac{1}{d\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{(\alpha-\gamma-1)} \rho(s) ds - b \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1} \rho(s) ds \right] \quad (2.14)$$

elde edilir, burada $d = 1 - b\eta^{\alpha-\gamma-1} > 0$ dir.

Bulunan c_1 , (2.12) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((1-s)^{\alpha-\gamma-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}) \rho(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-\gamma-1} t^{\alpha-1} \rho(s) ds \\
&\quad + \frac{bt^{\alpha-1}}{(1-b\eta^{\alpha-\gamma-1})\Gamma(\alpha)} \int_0^\eta [((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1}] \rho(s) ds \\
&\quad + \frac{bt^{\alpha-1}}{(1-b\eta^{\alpha-\gamma-1})\Gamma(\alpha)} \int_\eta^1 ((1-s)\eta)^{(\alpha-\gamma-1)} \rho(s) ds
\end{aligned}$$

$$y(t) = \int_0^1 G_1(t,s) \rho(s) ds + \frac{bt^{\alpha-1}}{d} \int_0^1 G_2(\eta,s) \rho(s) ds \quad (2.15)$$

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) \rho(s) ds,$$

olduğu görülür, burada

$$G(t,s) = G_1(t,s) + \frac{bt^{\alpha-1}}{d} G_2(\eta,s), \quad (2.16)$$

problemin Green's fonksiyonudur, öyleki

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} & G_2(\eta, s) \\ &= \begin{cases} \frac{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \\ \frac{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

dir.

Lemma 2.4 Sırası ile (2.8) and (2.16) ile tanımlı $H(t, s)$ ve $G(t, s)$ fonksiyonları aşağıda verilen eşitsizlikleri sağlar:

- I. $s, t \in [0,1]$ için $G(t, s) \geq 0$, $H(t, s) \geq 0$, $G(t, s) \leq G(s, s)$,
 $H(t, s) \leq H(s, s)$
- II. $s, t \in [0,1]$ için $G(t, s) \geq t^{\alpha-1}G(1, s)$
- III. $s \in (0,1)$ için $\min_{\vartheta \leq t \leq \delta} G_1(t, s) \geq g_1(s)G_1(s, s)$ ve

$$\min_{\vartheta \leq t \leq \delta} G_2(\eta, s) \geq g_2(s)G_2(s, s)$$

olacak şekilde pozitif g_1 ve $g_2 \in C(0,1)$ fonksiyonları vardır, bu fonksiyonlar $0 \leq \vartheta < m_1 < \delta \leq 1$ için

$$g_1(s) = \begin{cases} \frac{\delta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (\delta-s)^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}} & \text{if } s \in [0, m_1], \\ \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\alpha-1} & \text{if } s \in [m_1, 1], \end{cases}$$

ve

$$g_2(s) = \begin{cases} \frac{((1-s)\delta)^{\alpha-\gamma-1} - (\delta-s)^{\alpha-\gamma-1}}{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1}} & \text{if } s \in [0, m_1], \\ \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\alpha-\gamma-1} & \text{if } s \in [m_1, 1], \end{cases} \quad (2.18)$$

şeklindedir

IV.

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds = \left\{ \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \right\}.$$

İspat İlk iki ispat (Wang, Xiang and Liu 2009) ve (Wang and Xiang 2010) nin çalışmalarındaki benzer şekilde kolayca gösterilebilir, biz burada 3. ve 4. ispatları vereceğiz.

$G_1(t, s)$ fonksiyonunu ele alalım, $s \leq t$ için

$$L_{G_1}(t, s) = t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (t-s)^{\alpha-1}$$

ve $t \leq s \leq 1$ için

$$J_{G_1}(t, s) = t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Kolayca görülür ki $L_{G_1}(t, s)$, $s \leq t$ için artmayan ve $J_{G_1}(t, s)$, her $s \in [0, 1]$ için azalmayan bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} G_1(t, s) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} L_{G_1}(\vartheta, s), & s \in [0, m_1], \\ J_{G_1}(\delta, s), & s \in [m_1, 1], \end{cases} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \vartheta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (\vartheta-s)^{\alpha-1}, & s \in [0, m_1], \\ \delta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}, & s \in [m_1, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir, burada $\vartheta \leq m_1 \leq \delta$

$$\vartheta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (\vartheta-s)^{\alpha-1} = \delta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}$$

denklemini sağlar.

L_{G_1} ve J_{G_1} nin monotonluğu kullanılarak

$$\max_{(0 \leq t \leq 1)} G_1(t, s) = G_1(s, s) = \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.19)$$

elde edilir, buradaki $g_1(s)$, (2.18) ile tanımlanmıştır.

Benzer yaklaşımı $G_2(\eta, s)$ fonksiyonuna uygulayarak

$$\begin{aligned} G_2(s, s) &= \frac{(s(1-s))^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ ve } \max_{(0 \leq t \leq 1)} G_2(\eta, s) \\ &= \frac{(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

elde ederiz, buradaki $g_2(s)$, (2.18) ile tanımlanmıştır.

$s \in [0, m_1]$, $s \in [0, m_1]$, $s \leq t$ ve $s \leq \eta$ için

$$\begin{aligned} g_2(s)G_2(s, s) &= \frac{((1-s)\delta)^{\alpha-\gamma-1} - (\delta-s)^{\alpha-\gamma-1}}{((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1}} \times \frac{((1-s)s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[((1-s)\delta)^{\alpha-\gamma-1} - (\delta-s)^{\alpha-\gamma-1} \right] \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$g_2(s)$ fonksiyonu artmayan olduğundan, $\vartheta \leq \delta$ için

$$g_2(s)G_2(s, s) \leq \frac{((1-s)\vartheta)^{\alpha-\gamma-1} - (\vartheta-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

elde ederiz.

Böylece

$$\min_{(\vartheta \leq \eta, t \leq \delta)} G_2(\eta, s) \geq g_2(s)G_2(s, s)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca, $g_2(s)$ fonksiyonu azalmayan olduğundan $s \in [m_1, 1]$, $\eta \leq s$, ve $\vartheta \leq \delta$ için

$$\begin{aligned} g_2(s)G_2(s, s) &= \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\alpha-\gamma-1} \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(1-s)\eta]^{\alpha-\gamma-1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(1-s)\vartheta]^{\alpha-\gamma-1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(1-s)\delta]^{\alpha-\gamma-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, her $s, t \in [0, 1]$ için

$$\min_{(\vartheta \leq \eta, t \leq \delta)} G_2(\eta, s) \geq g_2(s)G_2(s, s)$$

olduğu görülür.

$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt$ Beta integrali ve $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ eşitliği kullanılarak, (2.19) ve (2.20) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \\ &\quad + \frac{b}{d\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(2\alpha-\gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

elde edilir.

Lemma 2.5 (2.8) ile tanımlı H fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

$$I. \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 H(t, s) ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left[1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right],$$

II. Bir pozitif $g_H \in C(0,1)$ fonksiyonu vardır, öyleki

$$\min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(t, s) \geq g_H(s)H(s, s), \quad s \in (0,1),$$

koşulu sağlanır, burada

$$g_H(s) = \begin{cases} \frac{\delta^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (\delta-s)^{\beta-1}}{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}} & \text{if } s \in [0, m_1], \\ \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\beta-1} & \text{if } s \in [m_1, 1], \end{cases} \quad (2.22)$$

ve $\vartheta < m_1 < \delta$ dir.

İspat İspatlar **Lemma 2.4** deki ispata benzer şekilde kolayca görülebilir.

$$\max_{0 \leq t \leq 1} H_1(t, s) = H_1(s, s) = \frac{s^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

ve

$$\max_{0 \leq t \leq 1} H_2(\xi, s) = H_2(s, s) = \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad (2.23)$$

olduğu açıktır.

$g_H(s)$ fonksiyonu (2.22) deki gibi tanımlansın. ((2.23) den ve Beta integrali tanımından

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 H(t, s) ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left[1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right] \quad (2.24)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Çözümlerin varlık sonuçlarını elde etmek için, ayrıca, aşağıda ifade edilen sabit nokta teoremlerini ve lemmaları kullanacağız.

Lemma 2.6 (Z. W. Lv 2014) E bir reel Banach uzayı, $C \subset E$ bir koni ve $\Omega_r = \{y \in C: \|y\| \leq r\}$ açık yuvar olsun. $T: C \cap \Omega_r \rightarrow C$ operatörü tamamen sürekli ve $\forall u \in \partial \Omega_r$ için $Tu \neq u$ koşulunu sağlasın, bu durumda

- I. Eğer $\|Tu\| \leq \|u\|$, $\forall u \in \partial \Omega_r$, ise $i(T, \Omega_r, C) = 1$,
- II. Eğer $\|Tu\| \geq \|u\|$, $\forall u \in \partial \Omega_r$, ise $i(T, \Omega_r, C) = 0$

olur.

$C \subset E$ bir koni ve $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. Her $x, y \in C$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \psi(x) + (1 - \lambda)\psi(y)$$

koşulunu sağlayan bir sürekli ψ fonksiyoneli konkav fonksiyonel olarak tanımlanır. Ayrıca $K, L, r \geq 0$ sabitleri için,

$$C_K = \{y \in C: \|y\| < K\}$$

ve

$$C(\psi, L, K) = \{y \in C: \psi(y) \geq L \text{ and } \|y\| \leq K\}$$

kümelerini tanımlayalım.

Çözümün varlığını veren sonuç aşağıda ifade edilen Legget Williams sabit nokta teoremine dayanmaktadır. (Leggett and Williams 1979), see also (D. Guo 1988), (Benaouda 2015).

Teorem 2.1 E bir Banach uzayı, $C \subset E$ bir koni bir koni ve $R > 0$ bir sabit olsun. Kabul edelim ki her $y \in \bar{C}_R$ için $\psi(y) \leq \|y\|$ olacak şekilde bir konkav pozitif ve sürekli fonksiyonel ve $N: \bar{C}_R \rightarrow \bar{C}_R$ bir sürekli kompakt dönüşüm olsun. $0 < r < L < K \leq R$ olacak şekilde r, L ve K sayıları verilsin.

$$(A_1) \text{ Her } y \in C(\psi, L, K) \text{ için } \{y \in C(\psi, L, K): \psi(y) > L, \|y\| \leq K\} \neq \emptyset \text{ ve } \psi(N(y)) > L,$$

(A₂) Her $y \in \bar{C}_r$ için $\|N(y)\| < r$,

(A₃) Her $y \in C(\psi, L, R)$ için $\psi(N(y)) > L$ ve $\|N(y)\| > K$

koşulları sağlanıyorsa N operatörünün $\bar{C}_R$ de en az üç tane y_1, y_2, y_3 sabit noktası vardır ve

$$y_1 \in C_r, \quad y_2 \in \{y \in C(\psi, L, R) : \psi(y) > L\}$$

ve

$$y_3 \in \bar{C}_R - \{C(\psi, L, R) \cup \bar{C}_r\}$$

olur.

Teorem 2.2 (Schauder-Tychonoff Fixed Point Theorem) X Banach uzayı ve K , X in kapalı, sınırlı ve konveks bir at kümesi olsun. Eğer $T: K \rightarrow K$ bir kompakt dönüşüm ise T, K da bir sabit noktaya sahiptir.

2.2 (2.2) Problemi İçin Varlık Sonuçları

$\|y\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|$ normu ile normlanmış $E = C([0,1], \mathbb{R})$ Banach uzayını ve $C = \{y \in E \mid y(t) \geq 0\}$ kümesini alalım. C, E de bir konidir.

$$(Ty)(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \quad (2.25)$$

ile verilen $T: C \rightarrow C$ operatörünü tanımlayalım. (2.2) probleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul T operatörünün bir sabit noktasının olmasıdır.

Lemma 2.7 Eğer $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ ise bu durumda $T: C \rightarrow C$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat $G(t,s)$, $H(t,s)$ ve $f(t,y(t))$ fonksiyonlarının sürekliliğinden ve pozitif olmasından dolayı $T: C \rightarrow C$ operatörü de süreklidir.

$\Omega \subset C$ sınırlı olsun. Bu durumda her $\tau \in [0,1]$ ve $y \in \Omega$ için, $|f(t, y(t))| \leq M$ olacak şekilde bir pozitif M sabiti vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(s,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{M\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise $T(\Omega)$ nın düzgün sınırlı olduğunu gösterir.

Ayrıca $G(t,s)$ ve $H(t,s)$ fonksiyonlarının $[0,1] \times [0,1]$ sürekli olmalarından, biliyoruz ki $[0,1] \times [0,1]$ de düzgün süreklidir. Bu yüzden, $s \in [0,1]$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sabiti vardır ki, her $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $|t_1 - t_2| < \delta$ için

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \varphi_p \left[\frac{M\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right] \varepsilon$$

elde edilir. Böylece her $y \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
|(Ty)(t_2) - (Ty)(t_1)| &\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\
&\leq \varphi_q \left[\frac{M\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right] \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

olur ki, Arzella-Ascoli teoremi kullanılarak, $T(\Omega)$ nın equi sürekli olduğu söylenir, Böylece $T: C \rightarrow C$ operatörünün tamamen sürekli olduğu elde edilir.

Teorem 2.3 Eğer $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ ve $f(t, y)$ y ye göre azalmayan bir fonksiyon ise (2.2) BVP, B_r kümesinde bir minimal $\bar{v}$ pozitif çözümüne ve bir maksimal $\bar{w}$ çözümüne sahiptir. Ayrıca, $m \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında $v_m(t) \rightarrow \bar{v}(t)$ ve $w_m(t) \rightarrow \bar{w}(t)$ olur, burada

$$v_m(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(s, v_{m-1}(\tau)) d\tau \right) ds \quad (2.26)$$

ve

$$w_m(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(s, w_{m-1}(\tau)) d\tau \right) ds \quad (2.27)$$

şeklindedir.

İspat

$$r \geq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{M_1 \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1}$$

olacak şekilde $B_r = \{ y \in C : \| y \| \leq r \}$ alalım.

Adım 1: (2.2) BVP en az bir çözüme sahiptir.

Her $y \in B_r$ için $|f(t, y(t))| \leq M_1$ olacak şekilde bir pozitif M_1 sayısı vardır ve

$$\begin{aligned} |(Ty)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 G(s,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau,\tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{M_1 \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$T: B_r \rightarrow B_r$$

dir.

Lemma 2. den $T: B_r \rightarrow B_r$ operatörünün tamamen sürekli olduğu görülür.

Böylece Schauder Sabit Nokta Teoremi kullanılarak, T operatörünün en az bir sabit noktasının var olduğu sonucu elde edilir. Sonuç olarak (2.2) BVP, B_r içinde en az bir çözüme sahiptir.

Adım 2: (2.2) BVP, B_r de bir pozitif çözüme sahiptir, bu çözüm minimal pozitif çözümdür. (2.25) ve (2.26) dan ,

$$v_m(t) = (Tv_{m-1})(t), \quad t \in [0,1], \quad \text{for } m = 1,2,3, \dots \quad (2.28)$$

olduğu görülebilir.

Ayrıca $f(t, y)$, y ye göre azalmayan olduğundan

$$0 = v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots v_m(t) \leq \dots, \quad t \in [0,1],$$

elde ederiz. T kompakt olduğundan $\{v_m\}$ bir dizisel kompakt kümedir. Sonuç olarak, $m \rightarrow \infty$ için $v_m \rightarrow \bar{v}$ olacak şekilde bir $\bar{v} \in B_r$ vardır.

$y(t)$, (2.2) probleminin B_r içinde herhangi bir pozitif çözümü olsun. Açık ki

$$0 = v_0(t) \leq y(t) = (Ty)(t)$$

olur. Böylece,

$$v_m(t) \leq y(t), \quad m = 0,1,2, \dots \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.29) da $m \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\bar{v} \leq y(t)$ elde ederiz.

Adım 3: (2.2) BVP, B_r de bir maksimal pozitif çözüme sahiptir. $t \in [0,1]$ için $w_0(t) = r$ ve $w_1(t) = Tw_0(t)$ olsun. $T: B_r \rightarrow B_r$ olduğundan $w_1 \in B_r$ elde ederiz. Böylece

$$0 \leq w_1(t) \leq r = w_0(t)$$

olur. Ayrıca $f(t, y)$, y ye göre azalmayan olduğundan

$$\dots \leq w_m(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t), \quad t \in [0,1]$$

elde ederiz. Adım 2 deki benzer yolla,

$$w_m(t) \rightarrow \bar{w}(t) \text{ as } m \rightarrow \infty$$

olduğunu görürüz ve

$$\bar{w}(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, \bar{w}(\tau)) d\tau \right) ds$$

elde edilir.

$y(t)$, (2.2) probleminin B_r deki herhangi bir çözümü olsun. Açık ki

$$y(t) \leq w_0(t)$$

sağlanır. Böylece

$$y(t) \leq w_m(t) \tag{2.30}$$

olur.

(2.30) da $m \rightarrow \infty$ için limit alırsak, her $t \in [0,1]$ için $y(t) \leq \bar{w}(t)$ sonucunu elde ederiz

Bu kısımda,

$$f^0 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [0,1]} \frac{f(t,y)}{\varphi_p(l_1 \|y\|)}, \quad f_0 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,y)}{\varphi_p(l_2 \|y\|)},$$

$$f^\infty = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{f(t,y)}{\varphi_p(l_3 \|y\|)}, \quad f_\infty = \lim_{y \rightarrow +\infty} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,y)}{\varphi_p(l_4 \|y\|)}$$

limitlerini ve

$$B = \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(2\alpha-\gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1-a^{(p-1)\xi\beta-1}} \right) \right]^{q-1},$$

$$B_1 = \int_0^1 G(1,s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(s,\tau) d\tau \right) ds$$

sayılarını tanımlayalım.

Teorem 2.4 $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$(N_1) f_0 = f_\infty = +\infty,$$

(N₂) Her $t \in [0,1], y \in [0, \rho_1]$ için $f(t, y) \leq \varphi_p(l_5 \|y\|)$ olacak şekilde $\rho_1 > 0$ sabiti vardır.

Bu durumda (2.2) BVP nin

$$0 < \frac{1}{l_2 B_1} < 1 < \frac{1}{l_5 B} < +\infty \text{ ve } 0 < \frac{1}{l_4 B_1} < 1 < \frac{1}{l_5 B} < +\infty \quad (2.31)$$

için

$$0 < \|y_1\| < \rho_1 < \|y_2\|$$

olacak şekilde en az iki y_1 ve y_2 çözümü vardır.

İspat Limit tanımından

$$f_0 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(l_2 \|y\|)} = +\infty$$

olduğu için

$$f(t, y) \geq \varphi_p(l_2 \|y\|), \quad t \in [0,1], \quad y \in [0, \rho_0]$$

olacak şekilde $\rho_0 \in (0, \rho_1)$ sayısı vardır.

$$\Omega_{\rho_0} = \{y \in C : \|y\| \leq \rho_0\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda, her $y \in \partial \Omega_{\rho_0}$ için Lemma 2.4 den

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &= \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\ &\geq \int_0^1 t^{\alpha-1} G(1, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) \varphi_p(l_2 \|y\|) d\tau \right) ds \\ &\geq l_2 \int_0^1 G(1, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(s, \tau) d\tau \right) ds \|y\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|Ty\| \geq l_2 B_1 \|y\|$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde ((2.31) kullanılarak,

$$\|Ty\| \geq \|y\|, \quad \forall y \in \partial \Omega_{\rho_0}$$

elde edilir.

Lemma 2. dan

$$i(T, \Omega_{\rho_0}, C) = 0 \tag{2.32}$$

olur.

Ayrıca,

$$f_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(l_4 \|y\|)} = +\infty,$$

limiti gereği

$$f(t, y) \geq \varphi_p(l_4 \|y\|), \quad t \in [0,1], \quad y \in [\rho_0^*, +\infty)$$

olacak şekilde $\rho_0^* > \rho_1$ eşitsizliğini sağlayan bir ρ_0^* vardır.

$$\Omega_{\rho_0^*} = \{y \in C : \|y\| \leq \rho_0^*\}$$

kümesi tanımlansın.

Bu durumda her $y \in \partial \Omega_{\rho_0^*}$ için, Lemma 2.4 kullanılarak

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &= \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\ &\geq \int_0^1 t^{\alpha-1} G(1, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) \varphi_p(l_4 \|y\|) d\tau \right) ds \\ &\geq l_4 \int_0^1 G(1, s) \varphi_q \left(\int_\vartheta^\delta \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(s, \tau) d\tau \right) ds \|y\| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|Ty\| \geq l_4 B_1 \|y\|$$

olur.

Ayrıca (2.31) ile birlikte

$$\|Ty\| \geq \|y\|, \quad \forall y \in \partial \Omega_{\rho_0^*}$$

olduğu açıkça görülür. Lemma 2. kullanılarak

$$i(T, \Omega_{\rho_0^*}, C) = 0 \quad (2.33)$$

elde edilir.

Son olarak $\Omega_{\rho_1} = \{y \in C : \|y\| \leq \rho_1\}$ kümesini tanımlayalım, her $y \in \partial \Omega_{\rho_1}$ için Lemma 2.4, Lemma 2.5 ve (N_2) koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &= \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \\ &\leq \int_0^1 G(s, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau, \tau) \varphi_p(l_5 \|y\|) d\tau \right) ds \\ &= l_5 \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} \|y\|. \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu yüzden

$$\|Ty\| \leq l_5 B \|y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca (2.31) ile birlikte

$$\|Ty\| \leq \|y\|, \quad \forall y \in \partial \Omega_{\rho_1}$$

olur ki, Lemma 2. dan

$$i(T, \Omega_{\rho_1}, C) = 1 \quad (2.34)$$

olduğu sonucuna varılır.

(2.32)-(2.34) kullanılarak ve $\rho_0 < \rho_1 < \rho_0^*$ için

$$i(T, \Omega_{\rho_0^*} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_1}, C) = -1, \quad i(T, \Omega_{\rho_1} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_0}, C) = 1$$

elde edilir. Böylece T operatörü, $y_1 \in \Omega_{\rho_1} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_0}$ ve $y_2 \in \Omega_{\rho_0^*} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_1}$ sabit noktalarına sahiptir. Açıktır ki, y_1, y_2 ler (2.2) BVP nin pozitif çözümleridir ve $0 < \|y_1\| < \rho_1 < \|y_2\|$ eşitsizliğini sağlar.

Benzer şekilde aşağıdaki sonucu da elde ederiz.

Sonuç 2.1 Kabul edelim ki $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(N_1) f^0 = f^\infty = 0.$$

(N_2) $t \in [0,1]$, $y \in [0, \rho_2]$ için $f(t, y) \geq \varphi_p(l_6 \|y\|)$ olacak şekilde bir $\rho_2 > 0$ sabiti vardır.

Bu durumda (2.2) BVP,

$$0 < \frac{1}{l_6 B_1} < 1 < \frac{1}{l_3 B} < +\infty \text{ ve } 0 < \frac{1}{l_6 B_1} < 1 < \frac{1}{l_1 B} < +\infty$$

için

$$0 < \|y_1\| < \rho_2 < \|y_2\|$$

olacak şekilde en az iki pozitif çözüme sahiptir.

2.3 (2.1) BVP İçin Çözümlerin Çokluğu

(2.1) probleminin bir çözümünü elde etmek için öncelikle

$$B_1 = \{y: (-\infty, 1] \rightarrow R: y|_{(-\infty, 0]} \in B, y|_J \in C^2(J, R)\}$$

kümesini alalım ve $\|\cdot\|_1$, B_1 kümesinde

$$\|y\|_1 = \|y_0\|_B + \sup\{|y(t)|: 0 \leq t \leq 1\}, y \in B_1$$

ile tanımlı yarı norm osun.

Tanım 2.3 (2.1) problemi bir y çözümüne sahiptir ki bu $y \in B_1$ fonksiyonu J üzerinde

$$D^\beta(\varphi_p(D^\alpha y(t))) = f(t, y_t)$$

denklemini ve

$$y(0) = 0, \quad D^\alpha y(1) = a D^\alpha y(\xi), D^\alpha y(0) = 0, \quad D^\gamma y(1) = b D^\gamma y(\eta)$$

koşullarını sağlar öyle ki , $t \in (-\infty, 0]$ için $y(t) = \phi(t)$ olur.

J den R ye tüm sürekli fonksiyonların $\|y\|_\infty := \sup\{|y(t)|: t \in J\}$ normu ile normlanmış Banach uzayı $C(J, R)$ ile gösterilir.

Şimdi, B uzayı ile ilgili aksiyomları vereceğiz:

(A_1) Her $t \in [0, 1]$ için eğer $y: (-\infty, 1) \rightarrow R, y_0 \in B$ ise bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

- I. $y_t \in B$,
- II. $|y(t)| \leq H \|y_t\|_B$ olacak şekilde bir pozitif H sabiti vardır,
- III. y den bağımsız $K(\cdot), M(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$ fonksiyonları vardır, burada K sürekli ve M yerel sınırlıdır öyleki

$$\|y_t\|_B \leq K(t) \sup\{|y(s)|: 0 \leq s \leq t\} + M(t) \|y_0\|_B$$

sağlanır.

(A_2) (A_1) deki $y(\cdot)$ fonksiyonu için $[0, 1]$ de y_t , bir B -değerli sürekli fonksiyondur.

(A_3) B uzayı komple uzaydır.

$$K = \sup\{K(t): t \in [0, 1]\} \quad \text{ve} \quad M = \sup\{M(t): t \in [0, 1]\}$$

ile gösterilsin.

$$\begin{aligned}\mu &= \min_{t \in [\vartheta, \delta]} \{g_1(t), g_2(t), g_H(t)\} \quad \text{ve} \\ \sigma &= \max \{ \vartheta^{\alpha-1}, \vartheta^{\beta-1}, \mu \}\end{aligned}\tag{2.35}$$

olsun.

Aşağıdaki koşullar, çözümlerin çokluğu için kuracağımız teoremi oluşturmak için gereklidir:

(H_1) f sürekli bir fonksiyondur,

(H_2) Her $(t, u) \in J \times B$ için sürekli ve azalmayan bir $q^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve sürekli ve artmayan bir $h^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu vardır öyle ki , $p_1, p_2 \in C(J, R_+)$ ler için

$$p_2(t)h^*(\|u\|) \leq f(t, u) \leq p_1(t)q^*(\|u\|),$$

eşitsizliği sağlanır,

(H_3)

$$\begin{aligned}&\left[q^*(Kr + M\|\phi\|_B)\|p_1\|_\infty \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \\ &\leq r\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sabiti vardır,

(H_4)

$$[h^*(KL + M\|\phi\|_B)\|p_2\|_\infty]^{q-1} \times \left[\int_{\vartheta}^{\delta} G(t, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} H(s, \tau) d\tau \right) ds \right] \geq L$$

olacak şekilde bir $L > r$ sabiti vardır,

(H_5) $0 < r < L \leq \sigma R$ ve

$$\left[q^* (KR + M \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \leq R$$

olacak şekilde bir R sabiti vardır.

Teorem 2.5 Eğer $(H_1) - (H_5)$ koşulları sağlanırsa (2.1) probleminin en az üç pozitif çözümü vardır.

İspat Leggett-William sabit nokta Teorem Dönüşümüne dayanarak (2.1) problemini sabit nokta problemine dönüştürüyoruz.

$N: B_1 \rightarrow B_1$ operatörünü

$$N(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\infty, 0], \\ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y_\tau) d\tau \right) ds, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$G(t, s)$ fonksiyonu (2.16) şeklinde tanımlıdır. Açık ki, N operatörünün sabit noktaları (2.1) probleminin çözümleridir, ayrıca $\rho(s, y_s)$ (2.11) deki gibi tanımlıdır. We define $x(\cdot): (-\infty, 1] \rightarrow R$ fonksiyonunu

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \in (-\infty, 0], \\ 0, & \text{if } t \in [0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda, $x_0 = \phi$ dır. $z_0 = 0$ olacak şekilde her $z \in B$ with $z_0 = 0$ için

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \in (-\infty, 0], \\ z(t), & \text{if } t \in [0, 1] \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonu $\bar{z}$ ile gösterelim.

$y(\cdot)$,

$$y(t) = \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y_\tau) d\tau \right) ds$$

integral denklemini sağlasın.

$y(\cdot)$ fonksiyonunu $y(t) = \bar{z}(t) + x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ olacak şekilde bölelim ki böylece her $t \in [0,1]$ için $y_t = \bar{z}_t + x_t$ eşitliği sağlanır ve $z(\cdot)$ Fonksiyonu

$$z(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds$$

integral denklemini sağlar.

$$B_0 = \{z \in C([0,1], R) : z_0 = 0\} \text{ ve } \|\cdot\|_1, B_0 \text{ da}$$

$$\|z\|_1 = \|z_0\|_B + \sup\{|z(s)| : 0 \leq s \leq 1\} = \|z\|_0$$

ile tanımlı yarı norm olsun.

$B_0, \|\cdot\|_0$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. $P: B_0 \rightarrow B_0$ operatörü

$$P(z)(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \quad (2.36)$$

ile tanımlansın.

Kolayca görülebilir ki, N operatörü bir sabit noktaya sahiptir ki bu nokta P operatörünün sahip olduđuna eřittir. Bu yüzden P nin bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermeliyiz.

şimdi P nin tamamen sürekli olduğunu gösterelim.

Adım 1: P sürekli bir operatördür.

$\{z_n\}, B_0$ da $z_n \rightarrow z$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |P(z)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} \times \varphi_q[\|f(\cdot, \bar{z}(\cdot) \\ &\quad + x(\cdot)\|)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 & |P(z_n(t)) - P(z)(t)| \\
 & \leq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{(p-1)\xi^{\beta-1}}} \right) \right]^{q-1} \\
 & \times [\varphi_q(\|f(\cdot, \bar{z}_{n(\cdot)} + x_{(\cdot)})\|) - \varphi_q(\|f(\cdot, \bar{z}_{(\cdot)} + x_{(\cdot)})\|)]
 \end{aligned}$$

olur.

f sürekli bir fonksiyon olduğu için $n \rightarrow \infty$ için

$$\|P(z_n) - P(z)\|_0 \rightarrow 0$$

elde edilir.

Adım 2: P operatörü, B_0 daki sınırlı kümeleri yine bu uzaydaki sınırlı kümelere dönüştürür.

Bunu göstermek için; verilen her $\xi > 0$ için öyle bir pozitif l vardır ki her

$z \in B_\xi = \{z \in B_0 : \|z\|_0 \leq \varsigma^*\}$ elemanı için $\|Pz\|_\infty \leq l$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
 |P(z)(t)| &= \int_0^1 \left| G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) \right| ds \\
 &\leq \int_0^1 G(s, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau, \tau) p_1(\tau) q(\|\bar{z}_\tau + x_\tau\|) d\tau \right) ds \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{(p-1)\xi^{\beta-1}}} \right) \|p_1\|_\infty q(\varsigma^*) \right]^{q-1} =: l,
 \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
 \|\bar{z}_\tau + x_\tau\|_B &\leq \|\bar{z}_\tau\|_B + \|x_\tau\|_B \\
 &\leq K(s) \sup\{|z(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + M(s) \|z_0\|_B \\
 &\quad + K(s) \sup\{|x(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + M(s) \|x_0\|_B \\
 &\leq K \sup\{|z(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + M \|\phi\|_B \\
 &\leq K\xi + M \|\phi\|_B = \varsigma^*
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

dır.

Adım 3: P operatörü, B_0 daki sınırlı kümeleri eş sürekli kümelere dönüştürür.

$t_1 < t_2$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve B_ξ , B_0 da sınırlı bir küme seçilsin. Adım 2 dekine benzer şekilde, $z \in B_\xi$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |P(z)(t_2) - P(z)(t_1)| &\leq \left| \int_0^1 G(t_1, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 G(t_2, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq \left[\max_{s \in [0,1]} (|G_1(t_2, s) - G_1(t_1, s)|) + \frac{b(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1})}{d} \max_{s \in [0,1]} (|G_1(t_2, s) \right. \\ &\quad \left. - G_1(t_1, s)|) \right] \times \varphi_q \left(\|p\|_{\infty} q^*(\varsigma^*) \int_0^1 H(\tau, \tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

elde edilir. G fonksiyonunun sürekliliğinden, $t_2 \rightarrow t_1$ için eşitsizliğin sağ tarafının sıfır olduğunu görürüz. Bu bize $P(B(0, \xi))$ ın B_0 da eş sürekli olduğunu gösterir. Adım 1 den 3 e kadar elde ettiğimiz sonuçlar ve Ascoli-Arzela Teoremi $P: B_0 \rightarrow B_0$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu söyleriz.

$$\varrho = \left\{ z \in B_0 : z(t) \geq 0 \min_{t \in [\vartheta, \delta]} z(t) \geq \frac{\sigma}{3} \|z\|_0, \quad t \in J \right\}$$

kümesi B_0 da bir koni olsun. $P: \varrho \rightarrow \varrho$ nin iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz.

$z \in \varrho$ olsun, bu durumda Lemma 2. ve (2.36) dan

$$\begin{aligned} \|P(z)\|_0 &\leq \int_0^1 G(s, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \\ &\leq 3 \left[\int_\vartheta^\delta G(s, s) \varphi_q \left(\int_\vartheta^\delta H(\tau, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

Ayrıca, Lemma 2. ve (2.25) kullanılarak

$$(Pz)(t) = \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{\vartheta}^{\delta} \left(g_1(s)G_1(s,s) + \frac{b\vartheta^{\alpha-1}}{d} g_2(s)G_2(s,s) \right) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_H(\tau) H(\tau,\tau) f(\tau, \bar{z}_{\tau} \right. \\
&\quad \left. + x_{\tau}) d\tau \right) ds \\
&\geq \sigma \left[\int_{\vartheta}^{\delta} G(s,s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} H(\tau,\tau) f(\tau, \bar{z}_{\tau} + x_{\tau}) d\tau \right) ds \right] \\
&\geq \frac{\sigma}{3} \|Pz\|_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $P: \varrho \rightarrow \varrho$ nin iyi tanımlı olduğunu gösterir. $(H_1) - (H_2)$ ve (H_5) koşulları kullanılarak $P: \bar{C}_R \rightarrow \bar{C}_R$ nin iyi tanımlı ve tamamen sürekli olduğu görülür.

$\psi: \varrho \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\psi(z) = \min_{t \in [\vartheta, \delta]} z(t)$$

ile tanımlansın. ψ bir negatif olmayan konkav sürekli fonksiyoneldir ve

$$\psi(z) \leq \|z\|_0 \text{ for } z \in \bar{C}_R$$

olur.

Geriye sadece Teorem 2.1 in koşullarının sağlandığını göstermek kaldı.

(H_2) , (H_3) ve (2.37) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|P(z)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} |P(z)(t)| \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^1 \left(|G_1(t,s)| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{bt^{\alpha-1}}{d} |G_2(\eta,s)| \right) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) q^*(\|\bar{z}_{\tau} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + x_{\tau}\|) p_1(\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^1 |G(t,s)| \varphi_q \left(\int_0^1 H(s,\tau) q^*(K\|z\|_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + M\|\phi\|_B) p_1(\tau) d\tau \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 G(s, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(\tau, \tau) q^*(K \|z\|_0 + M \|\phi\|_B) p_1(\tau) d\tau \right) ds \\
&\leq \varphi_q \left(q^*(Kr + M \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \right) \right) \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \\
&\leq r
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $z \in C\left(\psi, L, \frac{L}{\sigma}\right)$ ise bu durumda $L \leq z(s) \leq \frac{L}{\sigma}$, $s \in [\vartheta, \delta]$ olur ve bu yüzden

$$\{z \in C\left(\psi, L, \frac{L}{\sigma}, \psi(z) > L\right)\} \neq \emptyset$$

dir. Ayrıca (H_4) koşulundan

$$\begin{aligned}
\psi(P(z)) &= \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\geq \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) h^*(\|\bar{z}_\tau + x_\tau\|) p_2(\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\geq \varphi_p(h^*(KL + M \|\phi\|_B) \|p_2\|_\infty) \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} \left\{ \int_\vartheta^\delta G(t, s) \varphi_q \left(\int_\vartheta^\delta H(s, \tau) d\tau \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.1 in (A_1) koşulu sağlanır.

Son olarak teoremin (A_3) koşulunun sağlandığını gösterelim. Eğer $z \in C(\psi, L, R)$ ve $\|Pz\| > \frac{L}{\sigma}$ ise

$$\begin{aligned}
\psi(P(z)) &= \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\geq \sigma \|Pz\| \\
&\geq L
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, (A_3) sağlanır. Leggett and William sabit nokta teoremi gösterir ki, N_{z_1, z_2, z_3} sabit noktalarına sahiptir ve bunlar (2.1) probleminin çözümleridir. Ayrıca

$$z_1 \in C_r, \quad z_2 \in \{z \in C(\psi, L, R) : \psi(z) > L\}, z_3 \in C_R - \{(\psi, L, R) \cup C_r\}$$

elde ederiz.

Teorem 2.11 den , üç pozitif z_1, z_2, z_3 çözümü vardır öyleki

$$\|z_1\| < r, \quad L < \alpha(z_2(t)) \quad \text{ve} \quad \alpha(z_3(t)) < L \quad \text{olacak şekilde} \quad \|z_3\| > r$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Son olarak , problem (2.1), üç pozitif y_1, y_2, y_3 çözümüne sahiptir ve

$$y_i(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \in (-\infty, 0], \\ z_i(t), & \text{if } t \in [0, 1], \end{cases} \quad \text{for } i \in \{1, 2, 3\}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

2.4 Örnekler

Bu bölümde ana sonucumuzu destekleyen örnekler sunacağız.

Örnek 2.1 Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}} \left(\varphi_2 \left(D^{\frac{3}{2}} y(t) \right) \right) = \frac{t \pi |y(t)|}{1 + |y(t)|}, & t \in (0, 1), \\ y(0) = 0, \quad D^{\frac{3}{2}} y(1) = \frac{1}{3}, \quad D^{\frac{3}{2}} y\left(\frac{1}{4}\right), & D^{\frac{3}{2}} y(0) = 0, \quad D^{\frac{1}{2}} y(1) = \frac{1}{2}, \quad D^{\frac{1}{2}} y\left(\frac{1}{4}\right), \end{cases} \quad (2.38)$$

burada

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad p = q = 2, \quad a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \\ \xi = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \alpha - \gamma - 1 \geq 0$$

ve $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$.

Ayrıca $M_1 = \pi$ and $a^{p-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{1}{3}$ dir. Kolay hesaplamalarla

$$r \geq \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[M_1 \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} = \frac{14}{15} \pi$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.3 kullanılarak, (2.38) BVP nin bir minimal pozitif $\bar{v}$ çözümü ile bir maksimal pozitif $\bar{w}$ çözümü olduğu söylenebilir.

Örnek 2.2 Aşağıdaki problemi ele alalım:

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{4}}(\varphi_{\frac{3}{2}}(D^{\frac{3}{2}}y(t))) = \frac{t}{8} [2(|y(t)|^{\frac{2}{3}} + 4\|y\|^{\frac{1}{3}}) + \|y\|], & t \in (0,1), \\ y(0) = 0, D^{\frac{3}{2}}y(1) = \left(\frac{1}{16}\right) D^{\frac{3}{2}}y\left(\frac{1}{3}\right), D^{\frac{3}{2}}y(0) = 0, D^{\frac{1}{2}}y(1) = \frac{3}{4} D^{\frac{1}{2}}y\left(\frac{1}{4}\right), \end{cases} \quad (2.39)$$

burada

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{7}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, p = \frac{3}{2}, \quad q = 3, \quad a = \frac{1}{16}, \quad b = \frac{3}{4},$$

$$\xi = \frac{1}{3}, \quad \eta = \frac{1}{4}, \quad \alpha - \gamma - 1 \geq 0, \quad d = \frac{1}{4}.$$

$\vartheta = \frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$ alalım. Kolayca görülür ki

$$B = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d} \right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \right) \right]^{q-1} = 0.37744$$

ve

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (1-s)^{\alpha-1} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{d} \int_0^{\frac{1}{3}} ((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta-s)^{\alpha-\gamma-1} ds + \frac{b}{d} \int_{\frac{1}{3}}^{(1)} ((1-s)\eta)^{\alpha-\gamma-1} ds \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_{\vartheta}^{\delta} \delta^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}} \int_{\vartheta}^{\delta} \xi^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \right) \right]^{q-1} \\ &= 0.090137 \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho_1 = 8$, $l_5 = 2$ seçilerek

$$f(t, y) \leq \frac{1}{8} (2(4+8) + 8) = 4 = \varphi_p(l_5\|y\|) = \varphi_{\frac{3}{2}}(8 \times 2),$$

elde edilir. Böylece (N_2) koşulu sağlanır. (N_1) koşulunun da sağlandığı kolayca görülür.

Ayrıca, $l_2 = 15$ ve $l_4 = 12$ için $0 < \frac{1}{l_2 B_1} < 1 < \frac{1}{l_5 B} < +\infty$ ve $0 < \frac{1}{l_4 B_1} < 1 < \frac{1}{l_5 B} < +\infty$ elde ederiz.

Böylece, Teorem 2.4 ile (2.39) BVP, $0 < \|y_1\| < 8 < \|y_2\|$ olacak şekilde en az iki y_1 ve y_2 çözümüne sahiptir.

Örnek 2.3

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}} \left(\varphi_2 \left(D^{\frac{3}{2}} y(t) \right) \right) = \frac{2 \|y_t\| e^t}{3 e^{\frac{\|y_t\|}{10}} \sqrt{4+t^2}}, & \text{if } t \in J = [0,1], \\ y(0) = 0, \quad D^{\frac{3}{2}} y(1) = \frac{1}{3} D^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4} \right), \quad D^{\frac{3}{2}} y(0) = 0, \quad D^{\frac{1}{2}} y(1) = \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} y \left(\frac{1}{4} \right), \\ y(t) = \phi(t) & \text{if } t \in (-\infty, 0], \end{cases} \quad (2.40)$$

problemini alalım, burada

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{1}{2}, p = q = 2, a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, \xi = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{1}{4},$$

$$\alpha - \gamma - 1 \geq 0.$$

ϕ fonksiyonunu $\|\phi\| = \frac{1}{10}$ olacak şekilde seçelim. B_γ ,

$$B_\gamma = \{u \in C((-\infty, 0], R) : \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{\gamma \theta} u(\theta) \text{ sonlu}\}$$

Üzerinde

$$\|u\|_\gamma = \sup_{\theta \in (-\infty, 0]} e^{\gamma \theta} |u(\theta)|$$

normunu alalım. $u_0 \in B_\gamma$ olacak şekilde $u: (-\infty, 1] \rightarrow R$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{\gamma \theta} u(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{\gamma \theta} u(t + \theta) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{\gamma(\theta-t)} u(\theta) \end{aligned}$$

$$= e^{\gamma t} \lim_{\theta \rightarrow -\infty} e^{-\gamma \theta} u_0(\theta) < +\infty$$

elde edilir. Böylece, $u_t \in B_\gamma$ olduğu görülür.

$K = M = 1$ ve $H = 1$ için

$$\|u_t\| \leq K(t) \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \} + M(t) \|y_0\|_\gamma,$$

eşitsizliği sağlanır ve $u(t) = u(t + \phi)$ elde ederiz.

Eğer $t + \theta \leq 0$

$$\|u_t(\theta)\| \leq \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}$$

olur, böylece her $t + \theta \in [0,1]$ için

$$\|u_t(\theta)\| \leq \sup \{ |u(s)| : -\infty \leq s \leq 0 \} + \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}$$

elde edilir.

Böylece

$$\|u_t\|_\gamma \leq \|u\|_0 + \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}.$$

Açıktır ki $(B_\gamma, \|u\|_\gamma)$ bir Banach uzayıdır.

$$f(t, y) = \frac{2\|y_t\|e^t}{3e^{\frac{\|y_t\|}{10}}\sqrt{4+t^2}}, \quad (t, y) \in J \times B_\gamma$$

olduğu için

$$q^*(y) = \frac{y}{3}, p_1(t) = e^t, h^*(y) = e^{-\frac{y}{10}}, \quad p_2(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{4+t^2}} \right), \quad y \geq 0,$$

seçebiliriz. f, q^*, p_1, h^*, p_2 fonksiyonlarının seçiminden

$$p_2(t)h^*(\|y\|) \leq f(t, y) \leq p_1(t)q^*(\|y\|)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan birtakım hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
& \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} \left[\int_{\vartheta}^{\delta} \left(G_1(t, s) + \frac{b}{d} G_2(\eta, s) \right) \left(\int_{\vartheta}^{\delta} H(s, \tau) ds \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1} \xi^{\beta-1}} \int_{\vartheta}^{\delta} H(\xi, \tau) d\tau \right)^{q-1} ds \right] \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \delta^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (\eta(1-s))^{\alpha-\gamma-1} ds \right) \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \delta^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}-1}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \xi^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \right) \right]^{2-1} \\
&= 0.18383,
\end{aligned}$$

ve ayrıca

$$[h^*(KL + M \|\phi\|_B) \|p_2\|_{\infty}]^{q-1} = h^*\left(L + \frac{1}{100}\right)$$

ve

$$[h^*(KL + M \|\phi\|_B) \|p_2\|_{\infty}]^{q-1} \times \left[\int_{\vartheta}^{\delta} G(t, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} H(s, \tau) d\tau \right) ds \right] \geq L$$

olduğu görülür ki, bu bize

$$e^{-\frac{1}{10}(\frac{1}{100}+L)} \times 0.18383 \geq L$$

eşitsizliğinin $L = 0.15$ seçimi ile sağlandığını gösterir.

$$[q^*(Kr + M \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty]^{2-1} = \frac{1}{3} \left(r + \frac{1}{100}\right) e^1$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d}\right] \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}}\right)\right]^{q-1} = 0.93333,$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \left[q^*(Kr + M \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{a^{p-1}}{1 - a^{p-1}\xi^{\beta-1}}\right)\right]^{q-1} \frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{\Gamma(2\alpha - \gamma)} \left[1 + \frac{b}{d}\right] \\ & \leq r, \end{aligned}$$

eşitsizliği

$$\frac{1}{3} \left(r + \frac{1}{100}\right) e^1 \times 0.93333 \leq r$$

$r = 0.10$ seçimi ile ayrıca

$$\frac{1}{3} \left(R + \frac{1}{100}\right) e^1 \times 0.93333 \leq R$$

$R = 0.17$ seçimi ile sağlanır.

Böylece, Teorem 2.5 in tüm koşulları sağlandığından, Problem (2.40) üç pozitif y_1 , y_2 ve y_3 çözümüne sahiptir.

3. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNTEGRAL KOŞULLU BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sonlu gecikme terimi içeren bir kesirli mertebeden p -laplasyen operatörlü integral sınır koşullu problemin pozitif çözümlerinin varlığı üzerine koşulları inceleyeceğiz. Ele alacağımız

$$\begin{cases} D^\beta(\varphi_p({}^c D^\alpha y(t))) + f(t, y_t) = 0, & t \in [0, 1], \\ y(t) = \phi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ y(0) = y''(0) = 0, & y(1) = k \int_0^1 y(s) ds, \\ \varphi_p({}^c D^\alpha y(0)) = [\varphi_p({}^c D^\alpha y(0))]' = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

integral sınır değer probleminde, $2 < \alpha \leq 3, 1 < \beta \leq 2, 0 < k < 2, {}^c D^\alpha$ ve D^β lar sırası ile Caputo ve Riemann-Liouville türevler, $\tau \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f: [0, 1] \times C_\tau \rightarrow [0, +\infty)$ sürekli fonksiyon $t \in [0, 1]$ ve $\theta \in [-\tau, 0]$ olmak üzere $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\phi \in C_\tau (:= C[-\tau, 0])$ ve C_τ , $\|\phi\|_{[-\tau, 0]} = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} |\phi(\theta)|$ ile normlanmış bir Banach uzayı öyleki $C_\tau^+ = \{y \in C[-\tau, 0] \mid y(t) \geq 0, t \in [-\tau, 0]\}$ ve son olarak $p > 1$, $\varphi_p^{-1} = \varphi_q$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}y$ p -laplasyen operatörüdür.

Bu kısımda öncelikle gerekli tanım ve lemmalar verilecek ardından (3.1) probleminin tek ve çok sayıda pozitif çözümünün varlığı üzerine koşulları veren sonuçlar elde edilecektir.

3.1 Temel Tanım ve Bilgiler

Öncelikle ana sonucumuzu elde etmek için gerekli olan temel tanımlar, lemmalar ve gerekli bilgiler sunulacaktır.

Tanım 3.1 ((Cabada and Wang 2012), (Ramdane and Guezane-Lakoud 2021)). Bir $f(t)$ fonksiyonunun α inci mertebeden Caputo kesirli türevi

$${}^c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad n - 1 < \alpha < n \quad (3.2)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2 (Li, Zhang and Jiang 2020) K bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq K$, boştan farklı, konveks, kapalı bir altküme olsun. Bu durumda

- I. $\lambda y \in P$, for all $y \in P$ and $\lambda \geq 0$,
- II. $y, -y \in P$ implies that $y = 0$,

koşullarını sağlayan P kümesine K da bir koni denir.

Tanım 3.3 (Li, Zhang and Jiang 2020), (Lu, et al. 2013) P , bir K reel Banach uayında koni olsun. Eğer sürekli $Y : P \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü

$$Y(tx + (1 - t)y) \geq t Y(x) + (1 - t)Y(y), \quad x, y \in P, \quad t \in [0, 1],$$

koşulunu sağlarsa, bu durumda Y ye P kümesinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyon denir.

Benzer şekilde, eğer sürekli $v : P \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in P$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$v(tx + (1 - t)y) \leq t v(x) + (1 - t)v(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu v dönüşümü bir K Banach uzayının P konisinde negatif olmayan sürekli konveks fonksiyondur, denir.

Lemma 3.1 (Li, Zhang and Jiang 2020), (Ramdane and Guezane-Lakoud 2021) Kabul edelim ki $\alpha > 0$ ve $n = [\alpha] + 1$ olsun. Eğer $y \in L[0, 1] \cap C[0, 1]$ ise bu durumda $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, için

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha f(t)) = f(t) - c_1 - c_2 t \dots - c_n t^{n-1} \quad (3.3)$$

olur.

Lemma 3.2 (3.1) integral sınır değer problem has a unique solution as follows:

$$y(t) = \begin{cases} \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds, & t \in [0, 1], \\ \phi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir tek çözüme sahiptir, burada

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - k(1-s)) - \alpha(2-k)(t-s)^{\alpha-1}}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

olur.

İspat $u(t) = \varphi_p({}^c D^\alpha y(t))$ olsun, bu durumda (3.1) problemi

$$\begin{cases} D^\beta u(t) + f(t, y_t) = 0, \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

şekline dönüşür ve

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = \varphi_q(u(t)), & t \in (0, 1) \\ y(0) = y''(0) = 0, & y(1) = k \int_0^1 y(s) ds \end{cases} \quad (3.7)$$

olur. Lemma 2.2 ve (3.6) kullanılarak

$$u(t) = -I^\beta f(t, y_t) + c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2}$$

elde edilir.

Sınır koşullarından $u(0) = u'(0) = 0$ olduğu için $c_1 = c_2 = 0$ ve böylece

$$\begin{aligned} u(t) &= -I^\beta f(t, y_t) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s, y_s) ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Ayrıca (3.7) ve Lemma den

$$y(t) = -I^\alpha \varphi_q(I^\beta f(t, y_t)) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

olur. $y(0) = y''(0) = 0$ olduğundan $c_0 = c_2 = 0$, ve böylece

$$y(t) = -I^\alpha \varphi_q(I^\beta f(t, y_t)) + c_1 t \quad (3.9)$$

yazarız. $y(1) = k \int_0^1 y(s) ds$ koşulundan

$$y(1) = k \int_0^1 y(s) ds = - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds + c_1$$

ve böylece

$$c_1 = k \int_0^1 y(s) ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds$$

sabiti elde edilir. Bulunan c_1 , (3.9) da yazılırsa

$$\begin{aligned} y(t) = & -I^\alpha \varphi_q(I^\beta f(t, y_t)) + kt \int_0^1 y(s) ds \\ & + t \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Burada $H = \int_0^1 y(t) dt$ alırsak, (3.10) dan

$$\begin{aligned} H = & - \int_0^1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds dt + \int_0^1 kt H dt \\ & + \int_0^1 t \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds dt \\ = & - \int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds + \frac{k}{2} H + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \end{aligned}$$

sonucuna varırız. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{(2-k)}{2} H = & - \int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
H &= \frac{-2}{2-k} \int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2-k} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde ederiz.

(3.11) i, (3.10) da yazarsak

$$\begin{aligned}
y(t) &= - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&\quad - \frac{2kt}{2-k} \int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&\quad + \frac{kt}{2-k} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds + t \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&= \int_0^t \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - k(1-s)) - \alpha(t-s)^{\alpha-1}(2-k)}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&\quad + \int_t^1 \frac{2t(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds \\
&= \int_0^1 G(t, s) \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds
\end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz, burada $G(t, s)$ problemin Green fonksiyonudur.

Lemma 3.3 (Li, Zhang and Jiang 2020) (3.5) ile tanımlı $G(t, s)$ fonksiyonu

- I. Her $t, s \in (0,1)$ için $0 < G(t, s) \leq \frac{2}{2-k} \Gamma(\alpha)$, burada $0 < k < 2$,
- II. Her $t, s \in (0,1)$ ve $2 < \alpha < 3$ için $tG(1, s) \leq G(t, s) \leq \frac{2\alpha}{k(\alpha-2)} G(1, s)$ burada $0 < k < 2$,

özelliklerini sağlar.

Lemma 3.4 (El-Shahed 2007), (Li, Sun and Zhao 2020), (Cui, Kang and Liu 2015) K bir Banach uzayı ve $X \subset K$ bir koni olsun. Ω_1 ve Ω ler $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ olacak şekilde K nın açık alt kümeleri ve $T: X \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow X$ tamamen sürekli bir operator olsun. Eğer

- I. Her $y \in X \cap \partial \Omega_1$ için $\|Ty\| \leq \|y\|$ ve her $y \in X \cap \partial \Omega_2$ için $\|Ty\| \geq \|y\|$,

ya da

- II. Her $y \in X \cap \partial \Omega_2$ için $\|Ty\| \leq \|y\|$ ve her $y \in X \cap \partial \Omega_1$ için $\|Ty\| \geq \|y\|$

koşullarından biri sağlanıyorsa, bu durumda T nin $X \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ kümesinde bir sabit noktası vardır.

Lemma 3.5 (Li, Zhang and Jiang 2020) Eğer $\rho \in (0, \frac{1}{2})$ bir sabit sayı ise bu durumda her $y \in P$ ve $s \in [\rho, 1 - \rho]$ için

$$\|y_s\|_{[-\tau, 0]} \geq \mu \|y\|_{[0, 1]}, \quad \|y\|_{[0, 1]} = \sup_{t \in [0, 1]} |y(t)|$$

ifadelerini sağlayan bir sabit $\mu \in (0, 1)$ sayısı vardır, burada P kümesi, şekilde tanımlansın.

Lemma 3.6 daki gibi tanımlıdır.

3.2 Çözümün varlığı üzerine sonuçlar

Bu kısımda kullanacağımız bazı gösterimleri ve gerekli olan hipotezleri vererek başlayalım.

$$\begin{aligned} f_\infty &= \lim_{y \in C_\tau^+, \|y\|_{[-\tau, 0]} \rightarrow +\infty} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})}, f_0 \\ &= \lim_{y \in C_\tau^+, \|y\|_{[-\tau, 0]} \rightarrow 0^+} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})}, \\ B_0 &= \frac{\mu}{2(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_\rho^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds, \quad \mu \in (0, 1), \quad \rho \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ B_1 &= \frac{2\alpha}{k(\alpha - 2)(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_0^1 s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(H_1) \quad [-\tau, 0] \text{ da } \phi \geq 0,$$

(H_2) $t \in [0,1]$ ve $y \in C_\tau^+$ için $f(t, y) \geq 0$,

(H_3) $f_0 = f_\infty = +\infty$,

(H_4) $f_0 = f_\infty = 0$,

(H_5) Eğer $m_1 \geq \|\phi\|_{[-\tau,0]} > 0$ olacak şekilde bir sabit varsa bu durumda

$$f(t, y) \leq \varphi_p \left(\frac{m_1}{B_1} \right), \quad \|y\|_{[-\tau,0]} \in [0, m_1], \quad t \in [0,1],$$

(H_6) Eğer $m_0 \geq \|\phi\|_{[-\tau,0]} > 0$ olacak şekilde bir sabit varsa bu durumda

$$f(t, y) \geq \varphi_p \left(\frac{\mu m_0}{B_0} \right), \quad \|y\|_{[-\tau,0]} \in [\mu m_0, m_0], \quad t \in [\rho, 1 - \rho]$$

sağlansın.

$C[-\tau, 1]$ de T operatörü

$$Ty(t) = \begin{cases} \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds, & t \in [0,1], \\ \phi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.6 $(H_1), (H_2)$ koşulları sağlansın, $\|y\|_{[-\tau,1]} = \max_{t \in [-\tau,1]} |y(t)|$ ile normlanmış bir $K = C[-\tau, 1]$ Banach uzayındaki P konisi;

$$P = \{y \in K \mid y \geq 0 \text{ ve } y, [0,1] \text{ de konkav}\},$$

ile tanımlansın, bu durumda $T(P) \subseteq P$ ve $T: P \rightarrow P$ tamamen süreklidir.

İspat T operatörünün sürekli olduğu açıktır. 2. Kısımın gerçekleştiğini görelim. Eğer J, P de bir sınırlı alt küme ise $\|y\| \leq b$ olacak şekilde öyle bir $b > 0$ sayısı vardır.

$$M_1 = \sup_{t \in [0,1], y \in [0,b]} |f(t, y_t)| + 1$$

olsun.

Bu durumda, her $y \in J$ için

$$|Ty(t)| = \left| \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds \right| \leq \frac{2M_1^{q-1}}{(2-k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}}$$

elde ederiz. Böylece $T(J)$, düzgün sınırlıdır.

$y \in J$ ve $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [-\tau, 1]$ olsun. Eğer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} |(Ty)'(t)| &= \left| \int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \left| \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) \right| ds \\ &\quad - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) \right| ds \\ &\leq \int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \left| \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, y_\tau) d\tau \right) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, y_\tau) d\tau \right) \right| ds \\ &\leq \int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-k(1-s))}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_q \left(\frac{M_1 s^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \varphi_q \left(\frac{M_1 s^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) ds \\ &\leq \frac{2\alpha M_1^{q-1}}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &\quad + \frac{M_1^{q-1}}{\Gamma(\alpha-1)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} ds \\ &\leq \left[\frac{4-k}{(2-k)\Gamma(\alpha)} \right] \frac{M_1^{q-1}}{(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} := M_0 \end{aligned}$$

olur ki böylece

$$|Ty(t_2) - Ty(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |(Ty)'(s)| ds \leq M_0(t_2 - t_1)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $-\tau \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1$ olsun, bu durumda

$$\begin{aligned}
|Ty(t_2) - Ty(t_1)| &= |Ty(t_2) - Ty(0)| + |Ty(0) - Ty(t_1)| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(0, s)| \left| \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) \right| ds + |\phi(0) - \phi(t_1)| \\
&\leq \frac{2M_1^{q-1}}{(2-k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} t_2 + |\phi(0) - \phi(t_1)| \\
&\leq \frac{2M_1^{q-1}}{(2-k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} |t_2 - t_1| + |\phi(0) - \phi(t_1)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $T(J)$ eş süreklidir ve Ascoli-Arzela teoreminden, $T(J)$ nin relatively kompakt olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki $(H_1), (H_2), (H_3)$ ve (H_5) sağlansın, bu durumda (3.1) IBVP nine en az iki pozitif y_1 ve y_2 çözümü vardır ve çözümler

$$0 \leq \|y_1\|_{[-\tau, 1]} < m_1 < \|y_2\|_{[-\tau, 1]}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat Kabul edelim ki (H_5) sağlansın ve $\Omega_{m_1} = \{y \in P : \|y\|_{[-\tau, 1]} < m_1\}$ kümesini tanımlayalım, her $y \in P \cap \partial \Omega_{m_1}$

$$\begin{aligned}
Ty(t) &= \begin{cases} \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds, & t \in [0, 1], \\ \phi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \frac{2\alpha m_1}{B_1 k(\alpha - 2)(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_0^1 s^{\beta(q-1)} G(t, s) ds, & t \in [0, 1], \\ \|\phi\|_{[-\tau, 0]}, & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} m_1, & t \in [0, 1], \\ \|\phi\|_{[-\tau, 0]}, & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \\
&\leq \|\phi\|_{[-\tau, 1]},
\end{aligned}$$

elde ederiz, bu ise bize

$$y \in P \cap \partial \Omega_{m_1} \text{ için } \|Ty\|_{[-\tau, 1]} \leq \|y\|_{[-\tau, 1]},$$

eşitsizliğini verir.

Kabul edelim ki (H_3) sağlansın. $f_0 = \infty$ olduğundan, $0 \leq \|y\|_{[-\tau,0]} \leq n_1$ için $f(t, y) \geq \varphi_p(A_0 \|y\|_{[-\tau,0]})$ olacak şekilde $\|\phi\|_{[-\tau,0]} < n_1 < m_1$ seçebiliriz, burada $A_0 > 0$, $A_0 B_0 \geq 1$ eşitsizliğini sağlar. $\Omega_{n_1} = \{y \in P : \|y\|_{[-\tau,1]} < n_1\}$ olsun, her $y \in P \cap \partial \Omega_{n_1}$ için

$$\begin{aligned}
(Ty)\left(\frac{1}{2}\right) &\geq \int_{\rho}^{1-\rho} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \varphi_q\left(I^{\beta} f(s, y_s)\right) ds \\
&\geq \frac{A_0}{(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \varphi_q\left(\varphi_p\left(\|y_s\|_{[-\tau,0]}\right)\right) ds \\
&\geq \frac{A_0 \mu}{2(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \|y\|_{[0,1]} ds \\
&= \frac{A_0 \mu}{2(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \|y\|_{[-\tau,1]} ds \\
&\geq \|y\|_{[-\tau,1]},
\end{aligned}$$

sağlanır, bu da bize

$$\|Ty\|_{[-\tau,1]} \geq \|y\|_{[-\tau,1]}, \quad \text{for } y \in P \cap \partial \Omega_{n_1}$$

olduğunu gösterir.

Ayrıca, $f_{\infty} = \infty$ olduğundan, her $\|y\|_{[-\tau,0]} \geq \mu n_2$ için $f(t, y) \geq \varphi_p(A_1 \|y\|_{[-\tau,0]})$ olacak şekilde $n_2 > m_1 > \|\phi\|_{[-\tau,0]}$ seçebiliriz, burada, $A_1 > 0$ sayısı $A_1 B_0 \geq 1$ eşitsizliğini sağlar.

$\Omega_{n_2} = \{y \in P : \|y\|_{[-\tau,1]} < n_2\}$ kümesini tanımlayalım, her $y \in P \cap \partial \Omega_{n_2}$ için

$$\begin{aligned}
(Ty)\left(\frac{1}{2}\right) &\geq \int_{\rho}^{1-\rho} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \varphi_q\left(I^{\beta} f(s, y_s)\right) ds \\
&\geq \frac{A_1}{(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \varphi_q\left(\varphi_p\left(\|y_s\|_{[-\tau,0]}\right)\right) ds \\
&\geq \frac{A_1 \mu}{2(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \|y\|_{[0,1]} ds \\
&= \frac{A_1 \mu}{2(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \|y\|_{[-\tau,1]} ds \\
&\geq \|y\|_{[-\tau,1]}
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz ki bu da bize

$$\|Ty\|_{[-\tau,1]} \geq \|y\|_{[-\tau,1]}$$

eşitsizliğini verir.

Böylece, şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.6 nın birinci ve ikinci kısmından ispat tamamlanır.

Teorem 3.2 Eğer $(H_1), (H_2), (H_4)$ ve (H_6) koşulları sağlanırsa, bu durumda (3.1) IBVP nin iki pozitif y_1 ve y_2 çözümü vardır ve bu çözümler

$$0 \leq \|y_1\|_{[-\tau,1]} < m_0 < \|y_2\|_{[-\tau,1]}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat Kabul edelim ki (H_6) sağlansın ve $\Omega_{m_0} = \{y \in P : \|y\|_{[-\tau,1]} < m_0\}$ kümesini tanımlayalım, her $y \in P \cap \partial \Omega_{m_0}$ için

$$\begin{aligned} (Ty)\left(\frac{1}{2}\right) &\geq \int_{\rho}^{1-\rho} G\left(\frac{1}{2}, s\right) \varphi_p\left(I^{\beta} f(s, y_s)\right) ds \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\rho}^{1-\rho} G(1, s) \varphi_p\left(I^{\beta} f(s, y_s)\right) ds \\ &\geq \frac{m_0 \mu}{2B_0(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_{\rho}^{1-\rho} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds \\ &= m_0 = \|y\|_{[-\tau,1]}, \end{aligned}$$

olur, böylece

$$\|Ty\|_{[-\tau,1]} \geq \|y\|_{[-\tau,1]}$$

elde edilir.

Eğer (H_4) sağlanır ve ayrıca $f_0 = 0$ olursa, her $0 \leq \|y\|_{[-\tau,0]} \leq m_1$ için $f(t, y) \leq \varphi_p(N \|y\|_{[-\tau,0]})$ olacak şekilde $\|\phi\|_{[-\tau,1]} < m_1 < m_0$ seçebiliriz, burada $N > 0$ asyısı $NB_1 \leq 1$ eşitsizliğini sağlar.

$\Omega_{m_1} = \{y \in P : \|y\|_{[-\tau,1]} < m_1\}$ olsun, her $y \in P \cap \partial \Omega_{m_1}$ için

$$\begin{aligned}
Ty(t) &\leq \begin{cases} \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds, & t \in [0,1], \\ \phi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \frac{2\alpha N}{k(\alpha-2)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_0^1 s^{\beta(q-1)} G(t,s) \|y_s\|_{[-\tau,0]} ds, & t \in [0,1], \\ \|\phi\|_{[-\tau,0]}, & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \\
&\leq \|y\|_{[-\tau,1]},
\end{aligned}$$

elde edilir, bu da bize

$$\|Ty\|_{[-\tau,1]} \leq \|y\|_{[-\tau,1]}$$

olduğunu gösterir.

Ayrıca, $f_\infty = 0$ olduğundan, her $\|y\|_{[-\tau,0]} > Q$ için $f(t, y) \leq X \|y\|_{[-\tau,0]}$ olacak şekilde bir $Q > m_0$ vardır, burada $X > 0$ sayısı $(X+1)B_1 \leq 1$ eşitsizliğini sağlar.

Bir sabit $m_2 > 0$ sayısı seçelim öyleki $m_2 > \max \{ m_0, \|\phi\|_{[-\tau,0]}, \max \{ f(s, y_s) \mid 0 \leq \varphi_p(\|y_s\|_{[-\tau,0]}) \leq Q \} X \}$ olsun ve $\Omega_{m_2} = \{ y \in P : \|y\|_{[-\tau,1]} < m_2 \}$ kümesini tanımlayalım. Her $y \in P \cap \partial \Omega_{m_2}$ için

$$Ty(t) \leq \begin{cases} \int_{\|y_s\|_{[-\tau,0]} > Q} \frac{2\alpha Q}{k(\alpha-2)} G(1,s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds + \\ \int_{0 \leq \|y_s\|_{[-\tau,0]} \leq Q} \frac{2\alpha Q}{k(\alpha-2)} G(1,s) \varphi_q \left(I^\beta f(s, y_s) \right) ds, & t \in [0,1] \\ \phi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \begin{cases} \{Xm_2 + \max \{ f(s, y(s)) \mid 0 \leq \varphi_p(\|y_s\|_{[-\tau,0]}) \leq Q \} \} B_1, & t \in [0,1], \\ \|\phi\|_{[-\tau,0]}, & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} m_2, & t \in [0,1], \\ \|\phi\|_{[-\tau,0]}, & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \\
&\leq m_2 = \|y\|_{[-\tau,1]},
\end{aligned}$$

ve eşitsizlikte her iki taraftan norma geçerse, her $y \in P \cap \partial \Omega_{m_2}$ için

$$\|Ty\|_{[-\tau,1]} \leq \|y\|_{[-\tau,1]}$$

elde ederiz.

Böylece, Lemma 3.4 ün birinci ve ikinci kısmından teorem ispatlanır. Benzer şekilde, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 nin ispatlarından şimdi vereceğimiz Teorem 3.3 ve Theorem 3.4 de kolayca elde edilir

Theorem 3.3 Eğer $(H_1), (H_2)$ ler ve $f_0 = \infty, f_\infty = 0$ koşulları sağlanırsa, (3.1) IBVP nın en az bir çözümü vardır.

Theorem 3.4 Eğer $(H_1), (H_2)$ ler ve $f_0 = 0, f_\infty = \infty$ koşulları sağlanırsa, (3.1) IBVP nın en az bir çözümü vardır.

Örnek 3.1

$$\begin{cases} D^{\frac{9}{5}}(\varphi_2({}^c D^{\frac{7}{3}}y(t))) = -(y^{\frac{1}{4}}\left(t - \frac{1}{5}\right) + y^{\frac{1}{3}}\left(t - \frac{1}{5}\right)) , & t \in [0,1], \\ y(t) = t^8, & t \in \left[-\frac{1}{5}, 0\right], \\ y(0) = y''(0) = 0, & y(1) = \frac{3}{4} \int_0^1 y(s) ds, \\ \varphi_2\left({}^c D^{\frac{7}{3}}y(0)\right) = [\varphi_2({}^c D^{\frac{7}{3}}y(0))]' = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

kesirli diferansiyel denklemini ele alalım, burada $\alpha = \frac{7}{3}, \beta = \frac{9}{5}, \tau = \frac{1}{5}, p = 2, k = \frac{3}{4}, f(t, y) = y^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{5}\right) + y^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{5}\right)$ olarak seçilmiştir.

$\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]} \rightarrow +\infty$ için limite geçtiğimizde

$$\begin{aligned} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})} &= \frac{y^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{5}\right) + y^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{5}\right)}{\varphi_2\left(\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}\right)} \leq \frac{\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{\frac{1}{4}} + \|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{\frac{1}{3}}}{\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{2-\frac{1}{5}}} \\ &= \|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{\frac{3}{4}} + \|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{\frac{2}{3}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

olduğundan, $f_\infty = 0$ elde ederiz.

Ayrıca, $y(t) \geq a \|y\|_{[-\tau, 0]}$ olacak şekilde öyle bir $a > 0$ sabiti vardır ki, $\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]} \rightarrow 0$ için limite geçerse

$$\frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})} \geq a \left[\|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{-\frac{3}{4}} + \|y\|_{[-\frac{1}{5}, 0]}^{-\frac{2}{3}} \right] \rightarrow +\infty$$

elde edilir. Bu yüzden $f_0 = +\infty$ olur, bu da bize den dolayı problem (3.12) nin en az bir pozitif çözümü olduğunu gösterir.

Örnek 3.2

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}} \left(\varphi_{\frac{4}{3}}({}^c D^{\frac{5}{2}} y(t)) \right) = - \left(y^{\frac{1}{3}} \left(t - \left(\frac{1}{4} \right) \right) + y^{\frac{1}{5}} \left(t - \left(\frac{1}{4} \right) \right) \right), & t \in [0, 1], \\ y(t) = t^8, & t \in \left[-\left(\frac{1}{4} \right), 0 \right], \\ y(0) = y''(0) = 0, & y(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 y(s) ds, \\ \varphi_{\frac{4}{3}} \left({}^c D^{\frac{5}{2}} y(0) \right) = [\varphi_{\frac{4}{3}}({}^c D^{\frac{5}{2}} y(0))] = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

kesirli diferansiyel denklemini alalım, burada $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\tau = \frac{1}{4}$, $p = \frac{4}{3}$, $k = \frac{1}{2}$, $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{4} \right) + y^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{1}{4} \right)$ dır ve $y(t) = a\|y\|_{[-\tau, 0]}$ olacak şekilde bir a sabiti vardır, böylece $\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]} \rightarrow +\infty$ için

$$\begin{aligned} \frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})} &= \frac{y^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{4} \right) + y^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{1}{4} \right)}{\varphi_{\frac{4}{3}} \left(\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]} \right)} \geq a \frac{\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{1}{3}} + \|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{1}{5}}}{\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{4}{3}-1}} \\ &= a \left[\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^1 + \|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{-\frac{2}{15}} \right] \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

elde edilir, ayrıca $\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]} \rightarrow 0$ için

$$\frac{f(t, y)}{\varphi_p(\|y\|_{[-\tau, 0]})} \geq a \frac{\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{1}{3}} + \|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{1}{5}}}{\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{\frac{4}{3}-1}} = a \left[\|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^1 + \|y\|_{[-\frac{1}{4}, 0]}^{-\frac{2}{15}} \right] \rightarrow +\infty$$

olur, böylece $f_0 = +\infty$ and $f_\infty = +\infty$ ede ederiz ve (H_3) koşulu sağlanır.

Bununla birlikte

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2\alpha}{k(\alpha-2)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_0^1 s^{\beta(q-1)} G(1,s) ds \\
 &= \frac{2\alpha}{k(\alpha-2)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_0^1 \frac{s^{\beta(q-1)}(1-s)^{\alpha-1}(k[\alpha-2(1-s)])}{(2-k)\Gamma(\alpha+1)} ds \\
 &= \frac{5}{72\pi}
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $m_1 = 2$ alırsak, $0 \leq \|y\|_{[-\frac{1}{4},0]} \leq 2$ için $f(t,y) \leq 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{5}} \leq \left(\frac{144}{5}\pi\right)^{p-1}$ elde ederiz, böylece (H_5) koşulu sağlanmış olur. Bu yüzden, Teorem 3.1 in bir sonucu olarak (3.13) probleminin $0 < \|y_1\|_{[-\frac{1}{4},1]} < 2 < \|y_2\|_{[-\frac{1}{4},1]}$ olacak şekilde en az iki pozitif y_1 ve y_2 çözümü vardır

3.3 (3.1) BVP için çok sayıda çözümün varlığı üzerine sonuçlar

$f : \mathcal{J} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty)$ ve $\phi \in \mathcal{B}$ olsun, burada $\mathcal{B}$ bir bazuzayıdır. Ayrıca bir y fonksiyonu her $t \in [0,1]$ ve $\theta \in (-\tau, 0]$ için $y_t, y_t(\theta) = y(t + \theta)$ şeklinde tanımlı $\mathcal{B}$ nin bir elemanı olsun.

$P \subset K$, K da bir koni ve $(K, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olsun. Bir sürekli

$$\psi : P \rightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonu, her $x, y \in P$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \psi(x) + (1-\lambda)\psi(y)$$

koşulunu sağlayan bir konkav, pozitif ve sürekli bir fonksiyoneldir.

Her $\mathcal{K} \geq 0$ sabiti için

$$P_{\mathcal{K}} = \{y \in P : \|y\| < \mathcal{K}\}$$

kümesini tanımlayalım.

Bu kısımda vereceğimiz sonuç Leggett and Williams (Leggett and Williams 1979) sabit nokta teoremine dayanmaktadır.

Teorem 2.1 den (3.1) IBVP nin bir çözümünü bulmak için öncelikle

$$\mathcal{B}_1 = \{ y: (-\tau, 1] \rightarrow R: y|_{(-\tau, 0]} \in \mathcal{B}, y|_{\mathcal{J}} \in C^2(\mathcal{J}, R) \},$$

kümesini tanımlayalım ve $\mathcal{B}_1$ kümesinde

$$\| y \|_1 = \| y_0 \|_{\mathcal{B}} + \sup\{ |y(t)|: 0 \leq t \leq 1 \}, y \in \mathcal{B}_1$$

ile tanımlı yarı normunu alalım.

Tanım 3.4 (3.1) IBVP bir y çözümüne sahiptir, burada $y \in \mathcal{B}_1$ fonksiyonu $\mathcal{J}$ üzerinde

$$D^\beta(\varphi_p({}^c D^\alpha y(t))) = f(s, y_s)$$

denklemini ve

$$y(0) = 0, y'(0) = y''(0) = 0, y(1) = k \int_0^1 y(s) ds, \varphi_p({}^c D^\alpha y(0)) = [\varphi_p({}^c D^\alpha y(0))]' = 0$$

koşullarını sağlar ve $y(t) = \phi(t)$, $t \in (-\tau, 0]$ dir.

$\mathcal{J}$ den R ye tüm sürekli fonksiyonların, $\| y \|_\infty = \sup\{ | y(t) |: t \in \mathcal{J} \}$ normu ile normlanmış Banach uzayını $C(\mathcal{J}, R)$ ile gösterelim.

Şimdi, $\mathcal{B}$ uzayının bazı aksiyomlarını verelim:

(C_1) Her $t \in [0, 1]$ için eğer $y: (-\tau, 1) \rightarrow R, y_0 \in \mathcal{B}$ ise aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$y_t \in \mathcal{B},$$

$$| y(t) | \leq \mathcal{H} \| y_t \|_{\mathcal{B}} \text{ olacak şekilde bir pozitif } \mathcal{H} \text{ sabiti vardır,}$$

$$\mathcal{K}(.), \mathcal{M}(.): R_+ \rightarrow R_+, \text{ olan ve}$$

$$\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{K}(t) \sup\{|y(s)|: 0 \leq s \leq t\} + \mathcal{M}(t) \|y_0\|_{\mathcal{B}}$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir $\mathcal{K}$ ve yerel sınırlı bir $\mathcal{M}$ fonksiyonu vardır,

(C_2) y_t $[0,1]$ de bir $\mathcal{B}$ -değerli sürekli fonksiyon,

(C_3) $\mathcal{B}$ uzayı komple uzaydır.

$$\mathcal{K} = \sup\{\mathcal{K}(t): t \in [0,1]\} \text{ ve } \mathcal{M} = \sup\{\mathcal{M}(t): t \in [0,1]\}$$

sayılarını tanımlayalım.

Teoremi kurmak için gerekli koşullarımız aşağıda verildiği gibidir:

(N_1) f bir sürekli fonksiyon,

(N_2) Her $(t, u) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}$ için sürekli ve azalmayan bir $q^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ile sürekli ve artmayan bir $h^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $p_1 \in C(\mathcal{J}, R_+)$, $p_2 \in C(\mathcal{J}, R_+)$ fonksiyonları için

$$p_2(t)h^*(\|u\|) \leq f(t, u) \leq p_1(t)q^*(\|u\|),$$

eşitsiziği sağlansın,

(N_3)

$$\frac{2}{(2-k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} [q^*(\mathcal{K}r + \mathcal{M}\|\phi\|_{\mathcal{B}})\|p_1\|_{\infty}]^{q-1} \leq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sabiti vardır,

(N_4)

$$[h^*(\mathcal{K}\mathcal{L} + M\|\phi\|_{\mathcal{B}})\|p_2\|_{\infty}]^{q-1} \times \frac{1}{4(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{s \in I} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds \geq \mathcal{L}$$

olacak şekilde bir $\mathcal{L} > r$ sabiti vardır

(N_5) $0 < r < \mathcal{L} \leq \sigma \mathcal{R}$ olmak üzere

$$\frac{2}{(2-k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} [q^*(\mathcal{K}\mathcal{R} + \mathcal{M}\|\phi\|_B)\|p_1\|_\infty]^{q-1} \leq \mathcal{R}$$

olacak şekilde bir $\mathcal{R}$ sabiti vardır, burada $\sigma = \frac{k(\alpha-2)}{8\alpha}$ dır.

Teorem 3.5 Eğer $(N_1) - (N_5)$ koşulları sağlanırsa, (3.1) IBVP en az üç pozitif çözümü sahiptir.

İspat Leggett-William sabit nokta teoremini kullanmak için, öncelikle (3.1) IBVP ni bir sabit nokta problemine dönüştüreceğiz.

$$T(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\tau, 0], \\ \int_0^1 G(t,s) \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds, & t \in [0,1] \end{cases}$$

ile tanımlı

$$T: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$$

operatörünü ele alalım, burada $G(t,s)$, (3.5) ile tanımlı, problemin Green fonksiyonudur. Açıktır ki, T operatörünün sabit noktaları, (3.1) probleminin çözümleridir.

$x(.): (-\tau, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \in (-\tau, 0], \\ 0, & \text{if } t \in [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $x_0 = \phi$ dır. Her $z \in \mathbb{B}$ için $z_0 = 0$ dır,

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \in (-\tau, 0], \\ z(t), & \text{if } t \in [0,1] \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonu $\bar{z}$ ie gösterelim. $y(.),$

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q(I^\beta f(s, y_s)) ds$$

integral denklemini sağlasın.

$y(\cdot)$ fonksiyonunu $y(t) = \bar{z}(t) + x(t)$ şeklinde iki parçaya ayıralım ki burada her $t \in [0,1]$ için $y_t = \bar{z}_t + x_t$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonu

$$z(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds.$$

integral denklemini sağlar.

$\mathcal{B}_0 = \{z \in C([0,1], R) : z_0 = 0\}$ kümesini ve bu küme üzerindeki $\|z\|_1 = \|z_0\|_{\mathcal{B}} + \sup\{|z(s)| : 0 \leq s \leq 1\} = \|z\|_0$

ile tanımlı $\|\cdot\|_1$ yarı normunu alalım.

$\mathcal{B}_0$, $\|\cdot\|_0$ ile normlu bir Banach uzaydır.

$$\mathcal{N}(z)(t) = \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds. \quad (3.14)$$

ile tanımlı $\mathcal{N} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ operatörünü alalım.

Kolayca görülür ki, T operatörünün sabit noktaya sahip olması $\mathcal{N}$ operatörünün bir sabit noktaya sahip olmasına denktir. Bu nedenle $\mathcal{N}$ nin sabit noktaya sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir.

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.6 dan, $\mathcal{N}$ operatörü tamamen süreklidir.

$$\varrho = \{z \in \mathcal{B}_0 : z(t) \geq 0 \text{ } \min_{t \in I} z(t) \geq \frac{\sigma}{3} \|z\|_0 \text{ for } t \in J\}$$

kümesi $\mathcal{B}_0$ da bir koni olsun. $\mathcal{N} : \varrho \rightarrow \varrho$ nin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz.

$z \in \varrho$ olsun,

Lemma 3. ve (3.14) den

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}(z)\|_0 &\leq \frac{2\alpha}{k(\alpha-2)} \int_0^1 G(1,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \\ &\leq 3 \left[\frac{2\alpha}{k(\alpha-2)} \int_{s \in I} G(1,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, Lemma 3. kullanılarak, her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}z)(t) &= \int_0^1 G(t,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \\ &\geq \frac{1}{4} \int_0^1 G(1,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \\ &\geq \sigma \left[\frac{2\alpha}{k(\alpha-2)} \int_{s \in I} G(1,s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right] \\ &\geq \frac{\sigma}{3} \|\mathcal{N}z\|_0 \end{aligned}$$

olur ki, bu da bize $\mathcal{N}: \varrho \rightarrow \varrho$ nin iyi tanımlı olduğunu gösterir. $(N_1) - (N_2)$ ve (N_5) koşullarını kullanarak $\mathcal{N}: \bar{P}_{\mathcal{R}} \rightarrow \bar{P}_{\mathcal{R}}$ nin iyi tanımlı ve tamamen sürekli olduğunu söyleriz.

$\psi: \varrho \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\psi(z) = \min_{t \in [\vartheta, \delta]} z(t).$$

ile tanımlansın.

Açıktır ki, ψ bir negatif olmayan, konkav, sürekli bir fonksiyoneldir ve

$$\psi(z) \leq \|z\|_0, \quad z \in \bar{P}_{\mathcal{R}}$$

olur.

Geriye sadece, Teorem 2.1 in hipotezlerinin sağlandığını göstermek kaldı.

Kolayca görülür ki, Teorem 2.1 in (A_2) koşulu $z \in \bar{P}_{\mathcal{R}}$ için sağlanır ve (N_2) , (N_3) koşullarından

$$\|\mathcal{N}(z)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |\mathcal{N}(z)(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^1 |G(t, s)| \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} q^*(\|\bar{z}_\tau + x_\tau\|) p_1(\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^1 |G(t, s)| \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} q^*(\mathcal{K}\|z\|_0 + \mathcal{M}\|\phi\|_B) p_1(\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\leq \frac{2}{(2 - k)\Gamma(\alpha)(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} [q^*(\mathcal{K}r + \mathcal{M} + \|\phi\|_B)\|p_1\|_\infty]^{q-1} \\
&\leq r,
\end{aligned}$$

elde ederiz, burada

$$\begin{aligned}
\|\bar{z}_\tau + x_\tau\|_B &\leq \|\bar{z}_\tau\|_B + \|x_\tau\|_B \\
&\leq \mathcal{K}(s) \sup\{|z(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + \mathcal{M}(s)\|z_0\|_B \\
&\quad + \mathcal{K}(s) \sup\{|x(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + \mathcal{M}(s)\|x_0\|_B \\
&\leq \mathcal{K} \sup\{|z(\tau)| : 0 \leq \tau \leq s\} + \mathcal{M}\|\phi\|_B \\
&\leq \mathcal{K}r + \mathcal{M}\|\phi\|_B
\end{aligned} \tag{3.15}$$

dır.

Şimdi, Teorem 2.1 in (A_1) koşulunun sağlandığını görelim.

Eğer $z \in P\left(\psi, \mathcal{L}, \frac{\mathcal{L}}{\sigma}\right)$ ise $\mathcal{L} \leq z(s) \leq \frac{\mathcal{L}}{\sigma}$, $s \in I$ elde edilir ve buradan

$$\left\{ z \in P\left(\psi, \mathcal{L}, \frac{\mathcal{L}}{\sigma}\right), \psi(z) > \mathcal{L} \right\} \neq \emptyset$$

olduğu görülür.

(N_4) koşulu ile

$$\begin{aligned}
\psi(\mathcal{N}(z)) &= \min_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right\} \\
&\geq \min_{t \in I} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} h^*(\|\bar{z}_\tau + x_\tau\|) p_2(\tau) d\tau \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

$$\geq [h^*(\mathcal{KL} + \mathcal{M} \|\phi\|_{\mathcal{B}}) \|p_2\|_{\infty}]^{q-1} \times \frac{1}{4(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_{(s \in I)} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds$$

elde ederiz. Böylece teoremin (A_1) koşulu sağlanır.

Ayrıca Teorem 2.1 in (A_3) koşulunun sağlandığını gösterelim. Eğer $z \in P(\psi, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ ve $\|\mathcal{N}z\| > \frac{\mathcal{L}}{\sigma}$ ise

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{N}(z)) &= \min_{t \in I} \left\{ \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^s \frac{(s - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau, \bar{z}_\tau + x_\tau) d\tau \right) ds \right\} \\ &\geq \sigma \|\mathcal{N}z\| \\ &\geq \mathcal{L} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (A_3) koşulu sağlanmış olur. Leggett and William sabit nokta teoreminden, $\mathcal{N}$ oeratörünün

$$z_1 \in P_r, \quad z_2 \in \{z \in P(\psi, \mathcal{L}, \mathcal{R}) : \psi(z) > \mathcal{L}\}, \quad z_3 \in P_{\mathcal{R}} - \{(\psi, \mathcal{L}, \mathcal{R}) \cup P_r\}$$

olacak şekilde z_1, z_2, z_3 sabit noktalarının olduğu söylenebilir. Teorem 2.1 ile

$$\|z_1\| < r, \quad \mathcal{L} < \alpha(z_2(t)) \quad \text{ve} \quad \alpha(z_3(t)) < \mathcal{L} \quad \text{olacak şekilde} \quad \|z_3\| > r$$

Eşitsizliklerini sağlayan üç pozitif z_1, z_2, z_3 çözümünün var olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak, (3.1) IBVP,

$$y_i(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in (-\tau, 0], \\ z_i(t), & \text{if } t \in [0, 1], \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

olacak şekilde y_1, y_2 ve y_3 pozitif çözümlerine sahiptir.

Örnek 3.3

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{\frac{9}{5}} \left(\varphi_2 ({}^c D^{\frac{7}{3}} y(t)) \right) = \frac{10 \| y_t \| e^{(t-\| y_t \|)}}{(1+t^2)}, \quad t \in \mathcal{J} = [0,1], \\ y(t) = \phi(t), \quad t \in (-\tau, 0], \\ y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = \frac{3}{4} \int_0^1 y(s) ds, \\ \varphi_2 ({}^c D^{\frac{7}{3}} y(0)) = [\varphi_2 ({}^c D^{\frac{7}{3}} y(0))] = 0, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

kesirli diferansiyel denklemini ele alalım, burada $\alpha = \frac{7}{3}$, $\beta = \frac{9}{5}$, $\tau = \frac{1}{5}$, $p = 2$,
 $k = \frac{3}{4}$, $f(t, y) = \frac{10 \| y_t \| e^{(t-\| y_t \|)}}{(1+t^2)}$.

$\| \phi \| = \frac{1}{10} \phi$ olacak şekilde bir ϕ alalım,

$$\mathcal{B}_\gamma = \{ u \in C((-\tau, 0], R) : \lim_{\theta \rightarrow -\tau} e^{\gamma \theta} u(\theta) \text{ sonlu} \}$$

ile tanımlı $\mathcal{B}_\gamma$ de

$$\| u \|_\gamma = \sup_{\theta \in (-\tau, 0]} e^{\gamma \theta} |u(\theta)|$$

normunu alalım.

$u_0 \in \mathcal{B}_\gamma$ olacak şekilde $u: (-\tau, 1] \rightarrow R$ tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\tau} e^{\gamma \theta} u(\theta) &= \lim_{(\theta \rightarrow -\tau)} e^{\gamma \theta} u(t + \theta) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow -\tau} e^{\gamma (\theta - t)} u(\theta) \\ &= e^{\gamma t} \lim_{\theta \rightarrow -\tau} e^{-\gamma \theta} u_0(\theta) < +\infty \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden $u_t \in \mathcal{B}_\gamma$ elde edilir.

$$\| u_t \| \leq \mathcal{K}(t) \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \} + \mathcal{M}(t) \| y_0 \|_\gamma,$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\mathcal{K} = \mathcal{M} = 1$ ve $\mathcal{H} = 1$ dir. $u(t) = u(t + \phi)$ ile tanımlansın.

Eğer $t + \theta \leq 0$ ise

$$\| u_t(\theta) \| \leq \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}.$$

elde edilir. Böylece her $t + \theta \in [0,1]$ için

$$\|u_t(\theta)\| \leq \sup \{ |u(s)| : -\tau \leq s \leq 0 \} + \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}.$$

eşitsizliği sağlanır ve bu yüzden

$$\|u_t\|_{\gamma} \leq \|u\|_0 + \sup \{ |u(s)| : 0 \leq s \leq t \}.$$

olur. $(\mathcal{B}_{\gamma}, \|u\|_{\gamma})$ bir Banach uzayıdır, buradan $\mathcal{B}_{\gamma}$ nin bir faz uzayı oluşu söylenir.

$$f(t, y) = \frac{10\|y_t\| e^{(t-\|y_t\|)}}{(1+t^2)}, \quad (t, y) \in \mathcal{J} \times \mathcal{B}_{\gamma}.$$

olduğu için,

$$q^*(y) = \frac{y}{10}, \quad p_1(t) = e^t, h^*(y) = 100e^{-y}, \quad p_2(t) = \frac{1}{1+t^2}, \\ y \geq 0, t \in [0,1].$$

seçebiliriz. f , q^* , p_1 , h^* ve p_2 nin tanımlarından

$$p_2(t)h^*(\|y\|) \leq f(t, y) \leq p_1(t)q^*(\|y\|)$$

elde edilir.

Kolay hesaplamalarla,

$$\frac{1}{4(\Gamma(\beta+1))^{q-1}} \int_{s \in I} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds = 0.0022194.$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$[h^*(\mathcal{KL} + \mathcal{M} \|\phi\|_{\mathcal{B}}) \|p_2\|_{\infty}]^{q-1} = h^*\left(\mathcal{L} + \frac{1}{100}\right)$$

ve buradan

$$[h^*(\mathcal{KL} + \mathcal{M} \|\phi\|_B) \|p_2\|_\infty]^{q-1} \times \frac{1}{4(\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} \int_{s \in I} s^{\beta(q-1)} G(1, s) ds \geq \mathcal{L},$$

olur ki, bu bize $\mathcal{L} = 0.10$ için

$$100e^{(-\frac{1}{100}-\mathcal{L})} \times 0.0022194 \geq \mathcal{L}$$

eşitsizliğini verir. Ayrıca,

$$[q^*(\mathcal{K}r + \mathcal{M} \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty]^{q-1} = \frac{1}{10} \left(r + \frac{1}{100} \right) e^1$$

Ve

$$\frac{2}{(2-k)\Gamma(\alpha) (\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} = 0.80159,$$

olduğundan

$$\frac{2}{(2-k)\Gamma(\alpha) (\Gamma(\beta + 1))^{q-1}} [q^*(\mathcal{K}r + \mathcal{M} \|\phi\|_B) \|p_1\|_\infty]^{q-1} \leq r,$$

elde edilir ve böylece $r = 0.15$ seçerek

$$\frac{1}{10} \left(r + \frac{1}{100} \right) e^1 \times 0.80159 \leq r$$

Ayrıca $\mathcal{R} = 0.18$ seçerek

$$\frac{1}{10} \left(\mathcal{R} + \frac{1}{100} \right) e^1 \times 0.80159 \leq \mathcal{R} \text{ and we choose } \mathcal{R} = 0.18$$

elde edilir. Teorem 3.5 in tüm koşulları sağlandığı için, Problem (3.16), y_1 , y_2 ve y_3 pozitif çözümlerine sahiptir.



4. M-NOKTALI P-LAPLASYEN LİLEER OLMAYAN KESİRLİ BİR BVP NİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Kesirli diferansiyel denklemlerin p-Laplasyen operatörlü ve çift çok noktalı sınır değerleri koşullarıyla oluşturulan problemlerin pozitif çözümlerinin varlığını kapsayan az sayıda çalışma vardır. Sonuç olarak, bu bölümde ele alacağımız çalışma bu alandaki nadir çalışmalardan biri olarak literatüre katkı sunması ile önem arz etmektedir. Ele aldığımız

$$\begin{cases} D^\beta (\varphi_p(D^\alpha y(t))) + f(t, y(t)) = 0, & t \in [0,1], \\ y(0) = 0, \varphi_p(D^\alpha y(0)) = 0, \\ \varphi_p(D^\alpha y(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \varphi_p(D^\alpha y(\xi_i)), D^\gamma y(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i D^\gamma y(\eta_i), \end{cases} \quad (4.1)$$

çok noktalı, p-Laplasyen kesirli diferansiyel denkleminde, D^α, D^β ve D^γ ler standart Riemann-Liouville kesirli türevlerdir öyleki $0 \leq \alpha - \gamma - 1$ olmak üzere $1 < \alpha, \beta \leq 2$, $0 < \gamma \leq 1$ ve $i = 1, 2, \dots, m-2$ için $0 \leq a_i, b_i, \eta_i, \xi_i \leq 1$ dir ve $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i < 1$, $\sum_{i=1}^{m-2} b_i \xi_i < 1$ koşullarını sağlar. Ayrıca $f \in ([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ ve $p > 1$ için $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ p-Laplasyen operatörüdür.

Bu bölümde öncelikle ana sonuçlarda kullanılan bazı gerekli tanımları ve lemmaları vereceğiz. Problemimizin Green fonksiyonunu özellikleriyle birlikte elde ettikten sonra çalışmanın daha anlaşılır olması için bu bölümde geçen sabit nokta teoremlerini de sunacağız. Teoremlerin sonucu olarak önce tek bir pozitif çözümün varlığını ve ardından da çokluk sonuçlarını vereceğiz. Elde ettiğimiz sonuçları bazı örneklerle pekiştireceğiz.

4.1 Temel Tanım ve Teoremler

İlk olarak bu bölümde gerekli olacak bazı tanım ve lemmaları vereceğiz.

Lemma 4.1 (Z. Lv 2020) $g \in C[0,1]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) + g(t) = 0 \\ y(0) = 0, D^\gamma y(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i D^\gamma y(\eta_i) \end{cases}$$

problemi

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) g(s) ds,$$

ile verilen bir tek çözüme sahiptir, burada

$$G(t,s) = G_1(t,s) + G_2(t,s),$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

ve $A = 1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i^{\alpha-\gamma-1}$ olmak üzere

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{\sum_{0 \leq s \leq \eta_i} [a_i \eta_i^{\alpha-\gamma-1} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} - a_i t^{\alpha-1} (\eta_i - s)^{\alpha-\gamma-1}]}{A \Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \\ \frac{\sum_{\eta_i \leq s \leq 1} a_i \eta_i^{\alpha-\gamma-1} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{A \Gamma(\alpha)}, & t \in [0,1], \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Lemma 4.2 y bir sürekli fonksiyon olsun ve (4.1) BVP ni ele alalım.. Problem (4.1)

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) \rho(s) ds,$$

ile verilen bir tek çözüme sahiptir, burada $B = 1 - \sum_{i=1}^{m-2} b_i \xi_i^{\beta-1}$ olmak üzere

$$\rho(s) = \int_0^1 H(t,s) g(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 H(\xi_i, s) g(s) ds,$$

şeklinde tanımlıdır, öyleki

$$H(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m-2} b_i H(\xi_i, s) \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{0 \leq s \leq \xi_i} [b_i \xi_i^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1} - b_i (\xi_i - s)^{\beta-1}]}{B\Gamma(\beta)}, & t \in [0, 1], \\ \frac{\sum_{\xi_i \leq s \leq 1} b_i \xi_i^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}, & t \in [0, 1], \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dir.

İspat (4.1) BVP ni basitleştirmek için, $D^\alpha y = w$ ve $v = \varphi_p(w)$ ile gösterelim, böylece problem (4.1) becomes the following linear BVP

$$\begin{cases} D^\beta v(t) = g(t) \\ v(0) = 0 \text{ and } v(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i v(\xi_i), \end{cases} \quad (4.4)$$

lineer sınır değer problemine dönüşür, burada $g \in L'[0,1]$ ve $g \geq 0$ dir.

Lemma 2.2 uygulanarak, problem (4.4) den

$$v(t) = c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2} + I^\beta g(t)$$

yazılır. $v(0) = 0$ olduğundan $c_2 = 0$ elde edilir ve

$$v(t) = c_1 t^{\beta-1} - I^\beta g(t) \quad (4.5)$$

olur. (4.4) probleminin ikinci sınır koşulu olan $v(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i v(\xi_i)$ eşitliğinden

$$c_1 - \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(s) ds = \sum_{i=1}^{m-2} b_i \left[c_1 \xi_i^{\beta-1} - \int_0^{\xi_i} \frac{(\xi_i - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(s) ds \right]$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} c_1 \left[1 - \sum_{i=1}^{m-2} b_i \xi_i^{\beta-1} \right] \\ = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(s) ds - \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} \frac{(\xi_i - s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(s) ds \end{aligned}$$

ve $B = 1 - \sum_{i=1}^{m-2} b_i \xi_i^{\beta-1}$ olmak üzere

$$c_1 = \frac{1}{B \Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds - \frac{1}{B \Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)^{\beta-1} g(s) ds,$$

olduğu görülür.

c_1 sabitini (4.5) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds - \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &\quad + \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \xi_i^{\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &\quad - \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds \\ &\quad + \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_1 \xi_1^{\beta-1} \int_0^{\xi_1} (1-s)^{\beta-1} g(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_1 \xi_1^{\beta-1} \int_{\xi_1}^1 (1-s)^{\beta-1} g(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_1 \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - s)^{\beta-1} g(s) ds + \dots \\
& + \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_{m-2} \xi_{m-2}^{\beta-1} \int_0^{\xi_{m-2}} (1 - s)^{\beta-1} g(s) ds \\
& \quad + \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_{m-2} \xi_{m-2}^{\beta-1} \int_{\xi_{m-2}}^1 (1 - s)^{\beta-1} g(s) ds \\
& - \frac{t^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)} b_{m-2} \int_0^{\xi_{m-2}} (\xi_{m-2} - s)^{\beta-1} g(s) ds \\
& = \int_0^1 H(t, s) g(s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 H(\xi_i, s) g(s) ds
\end{aligned}$$

elde ederiz, burada

$$H(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m-2} b_i H(\xi_i, s) = \begin{cases} \frac{\sum_{0 \leq s \leq \xi_i} [b_i \xi_i^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1} - b_i (\xi_i - s)^{\beta-1}]}{B \Gamma(\beta)}, & t \in [0, 1], \\ \frac{\sum_{\xi_i \leq s \leq 1} b_i \xi_i^{\beta-1} (1-s)^{\beta-1}}{B \Gamma(\beta)}, & t \in [0, 1] \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Lemma 4.3 (Z. W. Lv 2014) Eğer $\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i^{\alpha-\gamma-1} < 1$ eşitsizliği sağlanırsa, (4.2) ile verilen $G(t, s)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- I. Her $s, t \in (0, 1)$ için $G(t, s) > 0$,
- II. Her $s, t \in (0, 1)$ için $G(t, s) \leq \bar{G}(t, s) \leq G_*(s, s)$ eşitsizliği sağlanır, burada

$$\bar{G}_1(t, s) = \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

ve

$$\overline{G}_2(t, s) = \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i \eta_i^{\alpha-\gamma-1} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1}}{A \Gamma(\alpha)}$$

olmak üzere

$$\overline{G}(t, s) = \overline{G}_1(t, s) + \overline{G}_2(t, s)$$

ve

$$G_*(s, s) = \max_{t \in [0,1]} \overline{G}_1(t, s) + \max_{t \in [0,1]} \overline{G}_2(t, s)$$

şeklindedir.

III. Her $s, t \in (0,1)$ için $G(t, s) \geq t^{\alpha-1} G(1, s)$ dir.

Lemma 4.4 (4.2) ile tanımlanan $H(t, s)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

I. Her $s, t \in [0,1]$ için $H(t, s) \geq 0$ ve $H(t, s) \leq H(s, s)$,

II. Her $s, t \in [0,1]$ için

$$\min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(t, s) \geq g_2(s) H(s, s) \text{ for } s \in (0,1),$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir pozitif $g_2 \in C(0,1)$ fonksiyonu vardır ve her

$$0 \leq \vartheta < m_1 < \delta \leq 1 \text{ için}$$

$$g_2(s) = \begin{cases} \frac{\delta^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (\delta-s)^{\beta-1}}{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}, & \text{if } s \in [0, m_1], \\ \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\beta-1}, & \text{if } s \in [m_1, 1] \end{cases}$$

şeklindedir,

$$III. \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 H(t, s) ds = \left\{ \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \right\} \text{ dir.}$$

İspat İspat üç adımda yapılacaktır.

Her $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ için eğer $s \leq t$ ise, $H(t, s)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} H(t, s) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left((t(1-s))^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1} \right) \\ &\geq \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left((1-s)^{\beta-1} - (1-s)^{\beta-1} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $t \leq s$ ise kolayca görüleceği gibi her $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ için $H(t, s) \geq 0$ dir.

$H(t, s)$ fonksiyonunu yardımı ile $s \leq t$ için

$$L_H(t, s) = t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} - (t-s)^{\beta-1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım, buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_H(t, s)}{\partial t} &= (1-s)^{\beta-1} - (\beta-1)(t-s)^{\beta-2} \\ &\leq (1-s)^{\beta-1} - (\beta-1)(1-s)^{\beta-2} \\ &\leq (1-s)^{\beta-1} - (1-s)^{\beta-2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu bize $L_H(t, s)$ fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Bu yüzden

$$L_H(t, s) \leq L_H(s, s) \text{ for all } 0 \leq s \leq t \leq 1. \quad (4.6)$$

sonucunu elde ederiz. H fonksiyonunun tanımından ve (4.3) den $H(t, s) \leq H(s, s)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde her $t \leq s \leq 1$ için

$$J_H(t, s) = (t(1-s))^{\beta-1}$$

tanımlayalım. Kolayca görürüz ki $J_H(t, s)$ fonksiyonu her $s \in [0, 1]$ için azalmayandır ve böylece

$$\min_{\vartheta \leq t \leq \delta} H(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} L_H(\vartheta, s), & s \in [0, m_1], \\ J_H(\delta, s), & s \in [m_1, 1], \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} ((\vartheta(1-s))^{\beta-1} - (\vartheta-s)^{\beta-1}), & s \in [0, m_1], \\ ((\delta(1-s))^{\beta-1}), & s \in [m_1, 1] \end{cases}$$

oldğundan $\vartheta \leq m_1 \leq \delta$ için

$$((\vartheta(1-s))^{\beta-1} - (\vartheta-s)^{\beta-1}) = ((\delta(1-s))^{\beta-1})$$

elde edilir.

L_H ve J_H fonksiyonlarının monotonluk özelliklerinden

$$\max_{0 \leq t \leq 1} H(t, s) = H(s, s) = \frac{(s(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \quad (4.7)$$

yazılır ki, Lemma 4.4 de tanımlanan $g_2(s)$ fonksiyonu $s \in [0, m_1]$ ve $s \leq t$ için

$$\begin{aligned} g_2(s)H(s, s) &= \frac{((1-s)\delta)^{\beta-1} - (\delta-s)^{\beta-1}}{(t(1-s))^{\beta-1}} \times \frac{(s(1-s))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[((1-s)\delta)^{\beta-1} - (\delta-s)^{\beta-1} \right], \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. $g_2(s)$ azalmayan bir fonksiyon olduğundan, $\vartheta \leq \delta$ için

$$g_2(s)H(s, s) \leq \frac{((1-s)\vartheta)^{\beta-1} - (\vartheta-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

elde ederiz.

Bu yüzden

$$\min_{\vartheta \leq s, t \leq \delta} H(t, s) \geq g_2(s)H(s, s)$$

olur.

Ayrıca, $g_2(s)$ nin $s \in [m_1, 1]$, $t \leq s$ and $\vartheta \leq \delta$ için artmayan olmasından

$$\begin{aligned} g_2(s)H(s, s) &= \left(\frac{\vartheta}{s}\right)^{\beta-1} \times \frac{1}{\Gamma(\beta)} [s(1-s)]^{\beta-1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} [(1-s)\vartheta]^{\beta-1} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} [(1-s)\delta]^{\beta-1}. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu nedenle, her $s, t \in [0, 1]$ için

$$\min_{\vartheta \leq s, t \leq \delta} H(t, s) \geq g_2(s)H(s, s)$$

olduğu görülür.

Beta integral fonksiyonunun $B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt$ tanımından ve $B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ eşitliğinden, (4.7) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} \left(\int_0^1 H(t, s) ds + \frac{t^{\beta-1}}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 H(\xi_i, s) ds \right) \\ = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (s(1-s))^{\beta-1} ds + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 (s(1-s))^{\beta-1} ds \\ = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left[1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 H(t, s) ds = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

olur ki, böylece ispat tamamlanır.

Bu kısımda, problemin çözümünün varlığı ile ilgili sonucu vermek için kullanacağımız sabit nokta teoremini ve gerekli lemmaları sunacağız.

Lemma 3.4 den, $a, b, c > 0$ sabit sayıları için $P_c = \{y \in P: \|y\| < c\}$ ve $P(\theta, b, d) = \{y \in P: b \leq \theta(y), \|y\| \leq d\}$ kümelerini tanımlayalım.

Lemma 4.5 (Lu, et al. 2013) P, K reel Banach uzayında bir koni olsun. $P_c = \{x \in P \mid \|x\| \leq c\}$ ve her $x \in \overline{P}_c$ için θ , P de $\theta(x) \leq \|x\|$ olacak şekilde, negatif olmayan, sürekli ve konkav bir fonksiyonel ve $P(\theta, b, d) = \{x \in P \mid b \leq \theta(x), \|x\| \leq d\}$ olsun. Kabul edelim ki $B: \overline{P}_c \rightarrow \overline{P}_c$ tamamen sürekli ve $0 < a < b < d \leq c$ için

$$(C_1) \{x \in P(\theta, b, d) \mid \theta(x) > b\} = \emptyset \text{ ve } x \in P(\theta, b, d) \text{ için } \theta(Bx) > b,$$

$$(C_2) x \leq a \text{ için } \|Bx\| < a,$$

$$(C_3) x \in P(\theta, b, c) \text{ için } \|Bx\| > d \text{ olmak üzere } \theta(Bx) > b,$$

koşulları sağlansın. Bu durumda B operatörü

$$\|x_1\| < a, \quad b < \theta(x_2), \quad a < \|x_3\| \text{ ve } \theta(x_3) < b$$

olacak şekilde en az üç x_1, x_2 ve x_3 sabit noktaya sahiptir.

$K = C[0,1]$, $\|y\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|$ ile normlu Banach uzayı olsun. P konisini $P = \{y \in K \mid y(t) \geq 0\}$ ile tanımlayalım. P konisi üzerinde negatif olmayan konkav θ fonksiyoneli $0 < \vartheta < \delta < 1$ olmak üzere $\theta(y) = \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |y(t)|$ ile tanımlansın.

Lemma 4.6 $T: P \rightarrow K$

$$(Ty)(t) := \int_0^1 G(t, s) \rho(s) ds \quad (4.9)$$

ile tanımlı operatör olsun. Bu durumda $T: P \rightarrow P$ tamamen süreklidir.

İspat $y \in P$ olsun, $G(t, s)$, $H(t, s)$ ve $f(t, y(t))$ fonksiyonlarının pozitiflik ve sürekliliğinden, $T: P \rightarrow P$ operatörünün sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

$\Omega \subset P$ sınırlı bir küme olsun, böylece, her $y \in \Omega$ için $\|y\| \leq M$ olacak şekilde bir pozitif $M > 0$ sayısı vardır. $L = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq y \leq M} |f(t, y)| + 1$ olsun, bu durumda her $y \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} |(Ty)(t)| &= \left| \int_0^1 G(t, s) \rho(s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s^{\beta-1}}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 H(\xi_i, \tau) f(\tau, y(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq L^{q-1} \int_0^1 G(t, s) \varphi_q \left(\int_0^1 H(s, \tau) d\tau + \frac{s^{\beta-1}}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \int_0^1 H(\xi_i, \tau) d\tau \right) ds \\ &\leq \left[\frac{L \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right]^{q-1} \int_0^1 G_*(s, s) ds, \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da bize $T(\Omega)$ nin düzgün sınırlı olduğunu gösterir.

Ayrıca, $G(t, s)$ ve $H(t, s)$ fonksiyonlarının $[0, 1] \times [0, 1]$ de sürekli olmasından dolayı biliyoruz ki $[0, 1] \times [0, 1]$ de düzgün süreklidir. Bu yüzden, sabit bir $s \in [0, 1]$ için ve her $\varepsilon > 0$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ olacak şekilde öyle bir $\delta > 0$ sabiti vardır ki

$$|G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \varphi_p \left[\frac{L \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right] \varepsilon$$

olur.

Böylece, her $y \in \Omega$ için

$$|(Ty)(t_2) - (Ty)(t_1)| \leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \rho(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \left[\frac{L \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right]^{q-1} ds \\
&\leq \varphi_q \left[\frac{L \Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right] \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bunun anlamı $T(\Omega)$ nin eş sürekli olmasıdır ve Arzella-Ascoli teoreminden we $T: P \rightarrow P$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu elde ederiz.

4.2 Pozitif çözümlerin varlığı

Öncelikle

$$\mathcal{M} = \left[\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B \sum_{i=1}^{m-2} b_i} \right) \right]^{q-1} \int_0^1 G_*(s, s) ds \right]^{-1}$$

ve

$$\mathcal{N} = \left[\int_{\vartheta}^{\delta} t^{\alpha-1} G(t, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) H(\tau, \tau) d\tau \right) ds \right]^{-1}$$

sayılarını tanımlayalım.

Theorem 4.6 $f(t, y)$ fonksiyonu $[0, 1] \times [0, +\infty)$ de sürekli olsun. Kabul edelimki

$$(A_1) \quad f(t, y) \geq \varphi_p(\mathcal{N}a_1) \text{ for } (t, y) \in [0, 1] \times [0, a_1];$$

$$(A_2) \quad f(t, y) \leq \varphi_p(\mathcal{M}a_2) \text{ for } (t, y) \in [0, 1] \times [0, a_2]$$

olacak şekilde iki pozitif sabit var ve $a_2 > a_1 > 0$ sağlansın. Bu durumda (4.1) kesirli türeve sahip dınır değer problemi $a_1 \leq \|y\| \leq a_2$ olacak şekilde en az bir pozitif y çözümüne sahiptir.

İspat Lemma 4.6 dan, $T: P \rightarrow P$ tamamen süreklidir ve (4.1) sınır değer probleminin $y = y(t)$ gibi bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul y

nin $y = Ty(t)$ operatör denklemini çözmesidir, diğer bir deyişle $T: P \rightarrow P$ operatörünün sabit noktası olmasıdır.

İspat iki adımda tamamlanacaktır:

Adım 1: $\Omega_1 := \{ y \in P \mid \|y\| < a_1 \}$ olsun. Her $y \in \partial \Omega_1$ ve $t \in [0,1]$ için $0 \leq y(t) \leq a_1$ elde ederiz. (A_1) koşulundan,

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &= \int_0^1 G(t,s) \rho(s) ds \\ &\geq \mathcal{N} a_1 \int_0^1 t^{\alpha-1} G(1,s) \varphi_q \left(\int_0^1 g_2(\tau) H(\tau,\tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \\ &\geq \mathcal{N} a_1 \int_{\vartheta}^{\delta} t^{\alpha-1} G(1,s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) H(\tau,\tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \\ &= a_1 = \|y\| \end{aligned}$$

elde edilir, böylece her $y \in \partial \Omega_1$ için

$$\|Ty\| \geq \|y\|$$

olur.

Adım 2: $\Omega_2 := \{ y \in P \mid \|y\| < a_2 \}$ olsun. Her $y \in \partial \Omega_2$ ve $t \in [0,1]$ için $0 \leq y(t) \leq a_2$ elde ederiz. (A_2) koşulundan ise

$$\begin{aligned} \|Ty(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s) \rho(s) ds \\ &\leq \mathcal{M} a_2 \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right]^{q-1} \int_0^1 G_*(s,s) ds \\ &= a_2 = \|y\|. \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece her $y \in \partial \Omega_2$ için

$$\|Ty\| \leq \|y\| \text{ for } y \in \partial \Omega_2.$$

elde edilir. Böylece (4.4) kullanılarak ispat tamamlanır.

Örnek 4.1

$$\begin{cases} D^\beta (\varphi_p(D^\alpha y(t))) + f(t, y(t)) = 0, & t \in [0,1], \\ y(0) = 0, \varphi_p(D^\alpha y(0)) = 0, \\ \varphi_p(D^\alpha y(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \varphi_p(D^\alpha y(\xi_i)), \quad D^\gamma y(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i D^\gamma y(\eta_i), \end{cases} \quad (4.10)$$

sınır değer problemini ele alalım, burada

$$f(t, y(t)) = \frac{1}{100} \left(135 + y^{\frac{1}{100}} + 2t \right),$$

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{5}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad p = q = 2, \quad m = 4, \quad a_1 = b_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = b_2 = \frac{1}{5}, \quad \xi_1 = \frac{1}{8}, \quad \eta_1 = \frac{1}{9}, \quad \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{3},$$

ve $f \in C([0,1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ dir.

$\vartheta = \frac{1}{3}$ ve $\delta = \frac{2}{3}$ alalım. Kolay hesaplamalarla $A = \frac{3}{10}, B = 0.57666$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left[\int_{\vartheta}^{\delta} G(1, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) H(\tau, \tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \right]^{-1} \\ &= \left[\left(\int_{\vartheta}^{\delta} G_1(1, s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\vartheta}^{\delta} G_2(1, s) ds \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) (\tau(1-\tau))^{\beta-1} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right)^{q-1} \right]^{-1} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\vartheta}^{\delta} 1 - (1-s)^{\alpha-1} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_1}{A \Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_1} \eta_1^{\alpha-\gamma-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta_1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_1}{A \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\delta} \eta_1^{\alpha-\gamma-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2}{A \Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta_2} \eta_2^{\alpha-\gamma-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} - (\eta_2-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_2}{A \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_2}^{\delta} \eta_2^{\alpha-\gamma-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) (\tau(1-\tau))^{\beta-1} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right)^{q-1}]^{-1} \\ & = 1.3368 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left[\int_{\vartheta}^{\delta} G_*(s, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) H(\tau, \tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \right]^{-1} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds + \frac{\sum_{i=1}^2 a_i}{A \Gamma(\alpha)} \int_0^1 \eta_i^{\alpha-\gamma-1} (1-s)^{\alpha-\gamma-1} ds \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right)^{q-1} \right) \right]^{-1}. \\ &= 0.0858. \end{aligned}$$

elde edilir.

$a_1 = 1$ ve $a_2 = 17$ seçersek,

$(t, y) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$f(t, y) = \frac{1}{100} \left(135 + y^{\frac{1}{100}} + 2t \right) \geq 1.35 > \varphi_p(\mathcal{N}a_1) \approx 1.3368$$

ve

$(t, y) \in [0,1] \times [0,17]$ için

$$f(t, y) = \frac{1}{100} \left(135 + y^{\frac{1}{100}} + 2t \right) \leq 1.3803 < \varphi_p(\mathcal{M}a_2) = 1.4586$$

olduğu görülür.

Böylece Theorem 4.6 den, (4.10) BVP, $1 \leq \|y\| \leq 17$ olacak şekilde en az bir pozitif çözüme sahiptir.

Teorem 4.7 $f(t, y)$, $[0,1] \times [0, +\infty)$ de sürekli olsun ve

$$(B_1) \quad f(t, y) \leq \varphi_p(\mathcal{M}a), \quad (t, y) \in [0,1] \times [0, a];$$

$$(B_2) \ f(t, y) \geq \varphi_p(\mathcal{N}b), \quad (t, y) \in [\vartheta, \delta] \times [b, c];$$

$$(B_3) \ f(t, y) \leq \varphi_p(\mathcal{M}c), \quad (t, y) \in [0, 1] \times [0, c]$$

koşulları sağlanacak şekilde $0 < a < b < c$ sabitleri var olsun. Bu durumda, (4.1) BVP nin en az üç y_1, y_2 ve y_3 çözümü vardır ve bu çözümler için

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |y_1(t)| &< a, & b < \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |y_2(t)| < \max_{0 \leq t \leq 1} |y_2(t)| \leq c, \\ a < \max_{0 \leq t \leq 1} |y_3(t)| &\leq c, & \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |y_3(t)| < b \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat Lemma 4.6 dan $T: P \rightarrow P$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu ve (4.1) BVP nin $y = y(t)$ çözümüne sahip olması için gerek ve yeter koşulun y nin $y = Ty(t)$ operatör denklemini sağlaması olduğunu söyleyebiliriz.

Eğer $y \in \overline{P}_c$ ise $\|y\| < c$ olur. (B_3) koşulundan

$$\begin{aligned} \|Ty(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) \rho(s) ds \\ &\leq \mathcal{M}c \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)} \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) \right]^{q-1} \int_0^1 G_*(s, s) ds \\ &= c \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $T: \overline{P}_c \rightarrow \overline{P}_c$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, eğer $y \in \overline{P}_a$ ise (B_1) koşulundan $\|Ty\| < a$ olur. Böylece Lemma 4.5 in (C_2) koşuu sağlanmış olur.

(C_1) koşulunu sağlamak için, $y(t) = \frac{(b+c)}{2}$, $0 \leq t \leq 1$ seçelim. Açıktır ki $y(t) = \frac{(b+c)}{2} \in P(\theta, b, c)$ olur ve buradan $\vartheta \leq t \leq \delta$ için $b \leq y(t) \leq c$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \theta(Ty) &= \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |Ty(t)| \\ &\geq \mathcal{N}b \int_0^1 t^{\alpha-1} G(1, s) \varphi_q \left(\int_0^1 g_2(\tau) H(\tau, \tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \mathcal{N}b \int_{\vartheta}^{\delta} t^{\alpha-1} G(1, s) \varphi_q \left(\int_{\vartheta}^{\delta} g_2(\tau) H(\tau, \tau) \left(1 + \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{m-2} b_i \right) d\tau \right) ds \\ &= b \end{aligned}$$

olduğu görülür be bu nedenle her all $y \in P(\theta, b, c)$ için $\theta(Ty) > b$ elde edilir. $d = c$ seçelim, bu bize Lemma 4.5 in (C_1) koşulunun sağlandığını gösterir.

Benzer şekilde, eğer $y \in P(\theta, b, c)$ ve $\|Ty\| > c = d$ ise $\theta(Ty) > b$ elde ederiz. Böylece Lemma 4.5 in (C_3) koşuu da sağlanır. Böylece, Lemma 4.5 den (4.1) BVP,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq 1} |y_1(t)| &< a, & b &< \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |y_2(t)|, \\ a &< \max_{0 \leq t \leq 1} |y_3(t)|, & \min_{\vartheta \leq t \leq \delta} |y_3(t)| &< b \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan en az üç pozitif y_1, y_2 ve y_3 çözümüne sahiptir.

Örnek 4.2

$$\begin{cases} D^{\beta} \left(\varphi_p(D^{\alpha}y(t)) \right) + f(t, y(t)) = 0, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0, \varphi_p(D^{\alpha}y(0)) = 0, \\ \varphi_p(D^{\alpha}y(1)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \varphi_p(D^{\alpha}y(\xi_i)), D^{\gamma}y(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i D^{\gamma}y(\eta_i), \end{cases} \quad (4.11)$$

problemini ele alalım, burada

$$f(t, y(t)) = \begin{cases} \frac{27}{20}y^3 + \frac{t}{1000} & \text{for } y \leq 1, \\ \frac{27}{20}y^{\frac{2}{5}} + \frac{t}{1000} & \text{for } y \geq 1, \end{cases}$$

$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, p = q = 2, m = 4, a_1 = b_1 = \frac{1}{2}, a_2 = b_2 = \frac{1}{5}, \xi_1 = \frac{1}{8}, \eta_1 = \frac{1}{9}, \xi_2 = \eta_2 = \frac{1}{3}$. ve $f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty))$ alınmıştır.

$\vartheta = \frac{1}{3}, \delta = \frac{2}{3}, a = 0.23, b = 1$ ve $C = 100$ seçelim. Böylece $A = \frac{3}{10}, B = 0.57666, \mathcal{N} = 1.3368$ ve $\mathcal{M} = 0.0858$ olduğu hesaplanabilir.

$f(t, y)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
f(t, y) &= \frac{27}{20} y^3 + \frac{t}{1000} \leq 0.0174 < \varphi_2(\mathcal{M}a) = 0.0197, \quad (t, y) \\
&\in [0, 1] \times [0, 0.23], \\
f(t, y) &= \frac{27}{20} y^{\frac{2}{5}} + \frac{t}{1000} \geq 1.35 > \varphi_2(\mathcal{N}b) \approx 1.3368, \quad (t, y) \\
&\in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times [1, 100], \\
f(t, y) &= \frac{27}{20} y^{\frac{2}{5}} + \frac{t}{1000} \leq 8.5190 < \varphi_2(\mathcal{M}c) = 8.58, \quad (t, y) \\
&\in [0, 1] \times [0, 100]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlandığından, Teorem 4.7 den (4.11) BVP nin

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq 1} |y_1(t)| &< 0.23, \\
1 &< \min_{\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}} |y_2(t)| < \max_{0 \leq t \leq 1} |y_2(t)| \leq 100, \\
0.23 &< \max_{0 \leq t \leq 1} |y_3(t)| \leq 100, \quad \min_{\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}} |y_3(t)| < 1
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan en az üç y_1, y_2 ve y_3 çözümleri vardır.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Tezin tamamında, değişen sınır koşullarına sahip çok çeşitli Lineer Olmayan Kesirli Sınır Değer Problemler (NFDE) için en az bir, iki ve üç (tekli ve çoklu) pozitif çözümlerin varlığını kanıtlıyoruz. İlgili NFDE'ler, p -Laplacian operatöründen, hem sonlu hem de sonlu terimli koşullardan oluşur. Ayrıca gecikme terimleri olmayan ancak çeşitli varyasyonları olan çok daha fazla NFDE düşündük. NFDE'lerdeki varyasyonlardan bazıları, integral sınır değeri koşullarını, çok noktalı çift sınır değeri koşullarını içeriyordu. Tezde ele alınan NFDE'lerin çoğunun, bu alandaki çalışmalara birçok katkısı olan Riemann-Liouville ve Caputo fraksiyonel türevlerinin karma kombinasyonlarını içerdiği belirtilmelidir.

Ayrıca Guo-Krasnoselskii ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi, sonlu gecikmeli lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin integral sınır değer problemlerinde kullanıldı. Bunun yanı sıra, gecikme terimleri olmayan lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin integral sınır değeri problemleri için Guo-Krasnoselskii teoremini ve beş fonksiyonelli sabit nokta teoremini dikkate aldık.

NFDE'lerin çift çok noktalı BVP'leri ile ilgili olarak, pozitif çözümlerin varlığını ve çokluğunu doğrulamak için bir monoton yinelemeli yöntem ve sabit nokta indeksi teorisini bir koni içinde uyguladık. Green'in fonksiyon özelliklerinin kullanımıyla birlikte, Guo-Krasnoselskii sabit nokta teoremi yardımı ile pozitif çözümlerin varlığı üzerine sonuçlar elde edildi. Ayrıca ilgili bölümlerde ana sonuçları doğrulayan basit örnekler de sağladık.

Gelecekteki çalışmalar için, bu tezde ele alınan NFDE türlerinin tümü olmasa da çoğunun çeşitli kombinasyonlarını, elbette, bilimin bu kaçınılmaz ancak hayati alanında daha uygun yaklaşımları başlatacak değiştirilmiş tekniklerle birleştirmek faydalı olacaktır. Tahmin edilebileceği gibi, özellikle hem Riemann-Liouville hem de Caputo fraksiyonel türevlerinin kombinasyonu ile kaynaşmış gecikmeli çift çoklu nokta ve integral sınır değeri koşullarını kapsayan daha fazla çalışmanın kapsanması gerekecektir. Laplacian operatörünün dahil edilmesi, bilim ve uygulamalarıyla ilgili daha fazla ilerlemenin bel kemiği olmaya devam ediyor ve devam edecektir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Agarwal, RP, M Benchohra, ve S Hamani. «Boundary value problems for differential inclusions with fractional order.» *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 2008: 16(2) 181-196.

Agrawal, OP. «Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. .» *J. Math. Anal. Appl.*, 2002: 272 (1) 368-379.

Ahmad, B, ve JJ Nieto. «Anti-periodic fractional boundary value problems with nonlinear term depending on lower order derivative. .» *Fract. Calc. Appl. Anal.* , 2012: 15, No 3, 451–462; .

Ahmed, N, M Rafiq, D Baleanu, ve MA Rehman. «Spatio-temporal numerical modeling of auto-catalytic Brusselator model. .» *Rom. J. Phys.*, 2019: 64(7–8) 110.

Alghamdi, AM, S Gala, MA Ragusa, ve Yang JQ. «Regularity criterion via two components of velocity on weak solutions to the shear thinning fluids in $\mathbb{R}^3$. .» *Computational and Applied Mathematics*, 2020: 39(3) 234.

Avery, RI, ve J Henderson. «Existence of three positive pseudo-symmetric solutions for a one dimensional p-Laplacian, .» *J. Math. Anal. Appl.*, 2003: 277, 395-404.

Babakhani, A, ve VD Gejji. «Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equations, .» *J. Math. Anal. Appl.* , 2003: 278 434-442.

Bai, Z. «On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem, Nonlinear Analysis.» *Theory, Methods and Applications*,, 2010: Vol. 72, 2 916-924, .

Bai, Z, ve H Lu. «Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. .» *J. Math. Anal. Appl.* 311 , 2005: 495-505.

Bai, Z, Y Wang, ve W . Ge. «Triple positive solutions for a class of twopoint boundary value problems.» *Electron. J. Differ. Equ* , 2004: No 6, 1–8.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Benaouda, H. «Existence of three positive solutions for boundary value problem with fractional order and infinite delay.» *Seria Matematica-Infrormatica LIII, 1*, 2015: 57-76.

Benbernou, S, S Gala, ve MA Ragusa. «On the regularity criteria for the 3D magnetohydrodynamic equations via two components in terms of BMO space.» *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014: 37(15) 2320-2325.

Benchohra, M, A Cabada, ve D Seba. «An existence result for nonlinear fractional differential equations on Banach spaces.» *Bound. Value Probl.*, 2009: 11.

Cabada, A, ve GT Wang. «Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions. .» *J. Math. Anal. Appl.* , 2012: 389(1) 403–411.

Caballero Mena, J, J Harjani , ve K Sadarangani. «J. Caballero Mena, J. Harjani, K. Sadarangani, Existence and uniqueness of positive and nondecreasing solutions for a class of singular fractional boundary values problems, *Bound. Value Probl.*» 2009: 10.

Chen, P, ve Y Gao. «Positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equations with nonlocal boundary value conditions. .» *Positivity*, 2018: 22, 761–772.

Cui, Y, S Kang, ve Z Liu. «Existence of Positive Solutions to Boundary Value Problem of Caputo Fractional Differential Equation, .» *Discrete Dynamics in Nature and Society*., 2015: 6.

Darwish, MA, ve SK Ntouyas. «On initial and boundary value problems for fractional order mixed type functional differential inclusions., .» *Comput. Math. Appl.*, 2010: 59 1253-1265.

Delbosco, D, ve L Rodino. «Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, .» *J. Math. Anal. Appl.* , 1996: 204 609-625.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ege, Ş M. «Extended travelling wave solutions for some nonlinear equations. .» *Adv. Math. Sci. J.*, 2017: vol 5.179-189.

Ege, Ş M, ve F S Topal. «Existence of Multiple Positive Solutions for Semipositone Fractional Boundary Value Problems.» *Filomat*, 2019.

Ege, Ş M, ve F S Topal. «Existence of Positive Solutions for Fractional Boundary Value Problems.» *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2017: 702-712.

Ege, ŞM. «Extended traveling wave solutions for some integro partial differential equations.» *International Journal of Maps in Mathematics - IJMM*, 2018: 1 (2) 249-257.

El Sayed, A. «Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders.» *Nonlinear Analysis*, 1998: 181-186.

El-Sayed, A. «Multivalued fractional differential equations.» *Applied Mathematical Computation*, 1995: 15-25.

El-Shahed, M. «Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation.» *Abstr. Appl. Anal.*, 2007: 8.

Feng, M, P Li, ve S Sun. «Symmetric positive solutions for fourth-order n-dimensional m Laplace systems.» *Bound. Value Probl.*, 2018.

Gala, S, Q Liu, ve M A Ragusa. «A new regularity criterion for the nematic liquid crystal flows.» *Applicable Analysis*, 2012: 1741-1747.

Gala, S, ve M A Ragusa. «Logarithmically improved regularity criterion for the Boussinesq equations in Besov spaces with negative indices.» *Applicable Analysis*, 2016: 1271-1279.

Gaul, L, P Klein, ve S Kempffe. «Damping description involving fractional operators.» *Mech-Systems Signal Processing*, 1991: 81-88.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Glockle, W G, ve T F Nonnenmacher. «A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics.» *Biophys. J.*, 1995: 46-53.

Guezane-Lakoud, A, R Khaldi, ve A Kilicman. «Existence of solutions for a mixed fractional boundary value problem.» *Adv. Differ. Equ.*, 2017: 1
Nonlinear Problems in Abstract Cones. Boston: Academic Press, 1988.

Guo, L, ve L Liu. «Unique iterative positive solutions for singular p-Laplacian fractional differential equation system with infinite-point boundary conditions. .» *Bound. Value Probl.*, 2019: 113 .

Hajipour, M, A Jajarmi, A Malek, ve D Baleanu. «Positivity-preserving sixth-order implicit finite difference weighted essentially non-oscillatory scheme for the nonlinear heat equation.» *Appl. Math. Comput.* , 2018: 325 146-158.

Hale, J. «Phase space for retarded equations with infinite delay.» *Funkcialaj Ekvacioj*, 1978: 11-14.

Hao, X, H Wang, L Liu, ve Y. Cui. «Positive solutions for a system of nonlinear fractional nonlocal boundary value problems with parameters and p-Laplacian operator. .» *Bound. Value Probl.* , 2017: 182.

Hino, Y. «Functional Differential equations with Infinite Delay.» *SpringerVerlag, Berlin*, 1991.

Kang, S, R Chen, L Li, Y Cui, ve S Ma. «Existence of Three Positive Solutions for a Class of Riemann-Liouville Fractional Q -Difference equation.» *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2019: 590-600.

Karakostas, GL. «Non-existence of solutions for two-point fractional and third-order boundary-value problems.» *Electron. J. Differ. Equ.* , 2013: ID No. 152, 1–19.

Khaldi, R, ve A Guezane-Lakoud. «Higher order fractional boundary value problems for mixed type derivatives. » *J. Nonlinear Funct. Anal.*, 2017: 30.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Khan, Hasib, Thabet Abdeljawad, Muhammad Aslam, Rahmat Ali Khan, ve Aziz Khan. «Existence of Positive Solution and Hyers–Ulam Stability for a Nonlinear Singular-delay-fractional Differential Equation.» *Adv Differ Equ*, 2019: 104.

Kilbas, AA, HH Srivastava, ve JJ Trujillo. «Theory and Applications of Fractional Differential Equations. » *Elsevier, Amsterdam*., 2006.

Kilbas, AA, ve JJ Trujillo. «Differential equations of fractional order: Methods, results and problems-I.» *Appl. Anal.*, 2001: 78 153-192.

Kilbas, AA, ve JJ Trujillo. «Differential equations of fractional order: Methods, results and problems-II.» *Appl. Anal.* , 2002: 81 435-493.

Kong, L, ve J Wang. «Multiple positive solutions for the one-dimensional p -Laplacian.» *Non-linear Analysis* , 2000: 42, 1327-1333.

Lakshmikantham, V, ve AS Vatsala. «Basic theory of fractional differential equations.» *Nonlinear Anal.*, 2008: 69 2677-2682.

Leggett, R W, ve L R Williams. «Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces.» *Indiana University Mathematics Journal*, 1979: 673-688.

Li, C F, X N Luo, ve Y Zhou. «Existence of positive solutions of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equations.» *Computers and Mathematics with Applications*, 2010: 1363-1375.

Li, D, F Chen, ve Y An. «Positive Solutions for a p -Laplacian Type System of Impulsive Fractional Boundary Value Problem.» *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2020: 740-759.

Li, M, JP Sun, ve YH. Zhao. «Existence of positive solution for BVP of nonlinear fractional differential equation with integral boundary conditions. .» *Adv Differ Equ* , 2020: 177 .

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Li, S, Z Zhang, ve W Jiang. «Positive solutions for integral boundary value problems of fractional differential equations with delay.» *Adv Differ Equ*, 2020: 256.

Liu, L, D Min, ve Y Wu. «Existence and multiplicity of positive solutions for a new class of singular higher-order fractional differential equations with Riemann–Stieltjes integral boundary value conditions.» *Adv Differ Equ.*, 2020: 442 .

Liu, L, F Sun, ve Y Wu. «Blow-up of solutions for a nonlinear Petrovsky type equation with initial data at arbitrary high energy level.» *Bound. Value Probl.* , 2019: 15.

Liu, X, ve M Jia. «The method of lower and upper solutions for the general boundary value problems of fractional differential equations with p -Laplacian. .» *Adv. Differ. Equ.* , 2018: 28.

Lu, H, Z Han, S Sun, ve et al. «Existence on positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p -Laplacian. .» *Adv Differ Equ* , 2013: 30.

Lv, Z W. «Existence results for m -point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p -Laplacian operator.» *Advances in Difference Equations* , 2014: 69.

Lv, ZW. «Existence of Positive Solution for Fractional Differential Systems with Multipoint Boundary Value Conditions.» *Journal of Function Spaces*, 2020: 9.

Mainardi, F. «Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, (C.A Carpinteri and F. Mainardi, Eds).» *Springer-Verlag, Wien*, 1997: 291-348.

Metzler, F, W Schick, H G Kilian, ve T F Nonnenmacher. «Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach.» *J. Chem, Phys*, 1995: 7180-7186.

Oldham, KB, ve J Spanier. *The Fractional Calculus.* . New York: AcademicPress, 1974.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

O'Regan, D. «Some general existence principles and results for $(\phi(y'))' = qf(t; y; y')$; $0 < t < 1$; .» *SIAM J. Math. Appl.*, 1993: 24, 648-668. .

Podlubny, I. *Mathematics in Science and Engineering. In Fractional Differential Equations.* New York: Academic Press, 1999.

Prasad, KR, ve BMB, Krushna. «Existence of Multiple Positive Solutions for p-Laplacian Fractional Order Boundary Value Problems.» *Int. J. Anal. Appl.*, 2014: 6 (1) 63-81.

Qiao, Y, ve ZF Zhou. «Existence and uniqueness of positive solutions for a fractional differential equation with integral boundary conditions.» *Adv. Differ. Equ.*, 2016: 106.

Ragusa, MA, ve A Razani. «Weak solutions for a system of quasilinear elliptic equations.» *Contrib. Math. (Shahin Digital Publisher)*, 2020: 1 11-16.

Ramdane, S, ve A Guezane-Lakoud. «Existence of positive solutions for p Laplacian systems involving left and right fractional derivatives .» *Arab Journal of Mathematical Sciences*,, 2021: Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print. .

Schumacher, K. «Existence and continuous dependence for differential equation with unbounded delay.» *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1978: 315-335.

Sheng, K, W Zhang, ve Z Bai. «Positive solutions to fractional boundary value problems with p-Laplacian on time scales.» *Bound. Value Probl.*, 2018.

Song, S, ve Y Cui. «Existence of solutions for integral boundary value problems of mixed fractional differential equations under resonance. .» *Bound Value Probl*, 2020: 23.

Stojanovic, M, ve R Gorenflo. «Nonlinear two-term time fractional diffusion-wave problem. .» *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2010: 11 3512-3523.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sun, Q, HW Ji, ve YJ Cui. «Positive solutions for boundary value problems of fractional differential equation with integral boundary conditions. .» *J. Funct. Spaces Appl.*, 2018.

Sun, W, ve Y Wang. «Multiple positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions.» *Fractional Calculus and Applied Analysis*, , 2014: 17(3) 605-616.

Tian, Y, S Sun, ve Z Bai. «Positive solutions of fractional differential equations with p Laplacian.» *J. Funct. Spaces* , 2017.

Tian, Y, Y Wei, ve S Sun. «Multiplicity for fractional differential equations with p-Laplacian. .» *Bound. Value Probl.*, 2018.

Tian, Y, Z Bai, ve S Sun. «Positive solutions for a boundary value problem of fractional differential equation with p-Laplacian operator.» *Adv Differ Equ*, 2019: 349.

Wang, F, L Liu, D Kong, ve Y Wu. «Existence and uniqueness of positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equations with mixed-type

boundary value conditions. » *Nonlinear Anal., Model. Control* , 2019: 24(1), 73–94 .

Wang, F, L Liu, ve Y Wu. «Iterative analysis of the unique positive solution for a class of singular nonlinear boundary value problems involving two types of fractional derivative with p-Laplacian operator. » *Complexity* , 2019.

Wang, F, L Liu, ve Y Wu. «Iterative unique positive solutions for a new class of nonlinear singular higher order fractional differential equations with mixed-type boundary value conditions. » *J. Inequal. Appl.*, 2019: 210.

Wang, G, B Ahmad, ve L Zhang. «Impulsive anti-periodic boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order.» *Nonlinear Anal.* , 2011: 74, No 3, 792–80.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Wang, J, H J Xiang, ve Z Liu. «Positive solutions for three-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p-Laplacian.» *Far East Journal of Applied Mathematics*, 2009: 33-47.

Wang, J, ve H Xiang. «Upper and lower solutions method for a class of singular fractional boundary value problems with p-Laplacian operator.» *Abstract and Applied Analysis*, 2010.

Wang, W. «Properties of Green's function and the existence of different types of solutions for nonlinear fractional BVP with a parameter in integral boundary conditions.» *Bound. Value Probl.*, 2019: 76 .

Wei, Y, Z Bai, ve S. Sun. «On positive solutions for some second-order three-point boundary value problems with convection term.» *J. Inequal. Appl.*, 2019: 72.

Weitzner, H, ve GM Zaslavsky. «Some applications of fractional equations. » *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2003: 8 (3-4) 273-281.

Wu, J, X Zhang, L Liu, Y Wu, ve Y Cui. «The convergence analysis and error estimation for unique solution of a p -Laplacian fractional differential equation with singular decreasing nonlinearity.» *Bound. Value Probl.* , 2018: 82.

Yang, C, ve J Yan. «Positive solutions for third-order Sturm-Liouville boundary value problems with p -Laplacian. » *Comput. Math. Appl.*, 2010: 59, 2059-2066.

Yao, S, G Wang, Z Li, ve L Yu. «Positive Solutions for Three-Point Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation with p -Laplacian Operator.» *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013: 7.

Zhai, C, W Wang, ve H Li. «A uniqueness method to a new Hadamard fractional differential system with four-point boundary conditions. » *J. Inequal. Appl.* , 207: 2018.

Zhang, DL, ve YS Liu. «Multiple positive solutions for nonlinear fractional boundary value problems.» *Sci. World J.* , 2013.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhang, K, ve J Xu. «Unique positive solution for a fractional boundary value problem.» *Fract. Calc. Appl. Anal.* , 2013: 16, No 4 .

Zhang, S Q. «Positive solutions to singular boundary value problem for nonlinear fractional differential equation.» *Comput. Math. Appl.*, 2010: 1300-1309.

Zhang, W, ve W. Liu. «Existence of Solutions for Fractional Multi-Point Boundary Value Problems on an Infinite Interval at Resonance. » *Mathematics* , 2020: 8, 126.

Zhang, X, L Liu, Y Wu, ve Y Cui. «Entire blow-up solutions for a quasilinear p -Laplacian Schrödinger equation with a non-square diffusion term. » *Appl. Math.*, 2017 Lett. 74, 85–93 .

Zhang, XQ, ve QY Zhong. «Multiple positive solutions for nonlocal boundary value problems of singular fractional differential equations. » *Bound. Value Probl.*, 2016: 65.

Zhao, KH, ve K Wang. «Existence of solutions for the delayed nonlinear fractional functional differential equations with three-point integral boundary value conditions.» *Adv. Differ. Equ.*, 2016: 284.

Zhong, Q, X Zhang, X Lu, ve Z Fu. «Uniqueness of successive positive solution for nonlocal singular higher-order fractional differential equations involving arbitrary derivatives.» *J. Funct. Spaces*, 2018.

Zhou, Y, ve F Jiao. «Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations. .» *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2010: 11 4465-4475.

Zou, Y, ve G He. «Fixed point theorem for systems of nonlinear operator equations and applications to (p_1, p_2) -Laplacian system. .» *Mediterr. J. Math.*, 2018.

6. TEŞEKKÜR

Hayatımdaki tüm insanları ve her şeyi yaratan ve sağlayan hem göğün hem de yerin yaratıcısına teşekkür etmek istiyorum. Beni bu harika Türkiye topraklarına, tanımayacağım ve hiç iyi bağ kuramayacağım her türlü ilginç insanla getirdiğin için kutsanmış ve ayrıcalıklıyım. Bunların başında, akademisyenlerimdeki harika ve yardımsever danışmanlarım ve süpervizörlerim var. (Asıl) danışmanım Prof. Dr. Serap Fatma TOPAL'a beni hiç bilmediğim ve hayalini bile kurmadığım büyüleyici bir dünya olan “Kesirli diferansiyel denklemler” dünyası ile tanıştırdığı için içtenlikle teşekkür ederim. Bunun temel nedeni, araştırmam boyunca bana her türlü desteği vermesi ve her türlü desteği sağlaması, annelik desteğiyle adım adım bana yardım etmesi, her zaman ufkun ötesine bakan yeni bir kültür geliştirmesidir. Doğru zihniyet, rehberlik ve destekle hiçbir şey öğrenilmesi imkansız veya basitçe “öğrenilemez” değildir, her şey çok iyi öğrenilebilir ve öğrenilebilir. Prof. Dr. Özis Turgut'un beni ve sınıf arkadaşlarımı matematik dünyasına farklı bir yaklaşımla tanıştıırken, sayısız alandaki zengin deneyimiyle yetiştirdiği çalışmaları takdir ediyorum. İkinci olarak, komite ve jüri üyelerinin yaptığı paha biçilmez katkıyı kelimelerle anlatılamaz. Çok teşekkürler Prof. Dr. Fadime DAL and Doç. Dr. Şerife FAYDAOĞLU.

“YURTDIŞI TÜRKLER VE AKRABA TOPLULUKLAR BAŞKANLIĞI”na (YTB) ve bu seçkin organizasyonda görev yapan tüm işçi ve gönüllülere teşekkür ederiz. Bana bu bursu, ödenekleri ve rehberliği vererek bana hayatımı değiştiren bir deneyim kazandırmaya uygun olup olmadığını gördüğünüz için teşekkür ederim.

Söylediği gibi, hayır işleri evde başlar, Maraire ailesine eğitimlerimin başlamasından çok önce ve hatta daha önce verdikleri sarsılmaz destek için özel bir teşekkür. Bakım ve destek için genel olarak tüm aileye minnettarım. Gerçekten de, her başarılı erkeğin arkasında güçlü ve güçlü bir kadın vardır, sana özel teşekkürler güzel, destekleyici ve çalışkan daha iyi yarım Lily. Zor zamanlarda bile bir güç direği olduğunuz için teşekkür ederim, kalın ve zayıf olarak oradaydınız, beni ve zorlu durumlarda bile her zaman kararlı ve pozitif kalan oğlumuz Nyasha'yı cesaretlendirdiniz. Bana her zaman aşıladığınız ve önümüzde her zaman daha parlak günlerin olacağını anlamamı sağladığınız enerji için teşekkür ederim Nyasha. Lily ve Nyasha, siz sonsuza kadar besleyeceğim bir nimetsiniz. “...gerçek olanla sevinir. Sevgi her şeye katlanır, her şeye inanır, her şeyi umut eder, her şeye dayanır. Sevgi asla son bulmaz.”