

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FUZZY SOFT TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE**

**Büşra ÇOBAN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2022**

**Her hakkı saklıdır**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## FUZZY SOFT TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE

Büşra ÇOBAN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk iki alt bölümde fuzzy küme, soft küme, fuzzy grup ve soft grup kavramları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra üçüncü ve dördüncü alt bölümlerde fuzzy topolojik grup ve soft topolojik grup kavramları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, fuzzy soft küme tanımlanmış, bazı basit örnekler ve çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra fuzzy soft grup ve fuzzy soft topoloji ifade edilmiş ve bazı özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, fuzzy soft topolojik grup tanımı verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise tez ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

**Ocak 2022, 60 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Fuzzy Soft Küme, Fuzzy Soft Topolojik Uzay, Fuzzy Soft Grup, Fuzzy Soft Topolojik Grup

# ABSTRACT

Master Thesis

ON FUZZY SOFT TOPOLOGICAL GROUPS

Büşra ÇOBAN

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erdal GÜNER

This thesis consists of five chapters. The first chapter is designated as the introduction.

The second chapter consist of four subsections. In first two subsections the notion of fuzzy set, soft set, fuzzy group and soft group are introduced and some properties are given. After that in the third and fourth subsections, fuzzy topological group and soft topological group are defined and some of features are given.

In the third chapter, fuzzy soft sets are introduced, basic examples are given and some basic terms and concepts which shall be used throughout this study are provided. After that notion of fuzzy soft group and fuzzy soft topolgy are expressed and some of features are given.

In the forth chapter, the definition of fuzzy soft topological group is giving and some properties are studied.

The last chapter serves as a general assessment of the thesis.

**January 2022, 60 pages**

**Key Words:** Fuzzy Soft Set, Fuzzy Soft Topological Space, Fuzzy Soft Group, Fuzzy Soft Topological Group

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin ve bu tez çalışmamın yürütülmesi sürecinde ve sonuçlanmasında emeklerini benden esirgemeyen danışmanım sayın hocam Prof. Dr. Erdal GÜNER'e en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Tüm hayatım boyunca göstermiş oldukları sabır ve sevgi ile her zaman yanımda olan annem Şükran ÇOBAN'a, babam Nadir Nusret ÇOBAN'a, ağabeyim Ahmet Buğra ÇOBAN'a ve tüm aileme sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Büşra ÇOBAN  
Ankara, Ocak 2022

## İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK .....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1 Fuzzy Küme ve Fuzzy Grup.....	3
2.2 Soft Küme ve Soft Grup.....	11
2.3 Fuzzy Topoloji ve Fuzzy Topolojik Gruplar .....	15
2.4 Soft Topoloji ve Soft Topolojik Gruplar .....	18
3. FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR .....	21
3.1 Fuzzy Soft Küme ve Fuzzy Soft Gruplar.....	21
3.2 Fuzzy Soft Topoloji.....	30
4. FUZZY SOFT TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE .....	50
5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	57
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ .....	60

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{I}$	$[0, 1]$ kapalı aralığı
$\emptyset$	Boş küme
$\Phi$	Boş fuzzy küme
$\tilde{\Phi}$	Boş (fuzzy) soft küme
$\tilde{\subset}$	(Fuzzy) soft alt küme
$\tilde{=}$	(Fuzzy) soft eşit
$\cap[\cup]$	Arakesit [birleşim]
$\tilde{\cap}[\tilde{\cup}]$	(Fuzzy) soft arakesit [birleşim]
$X, Y, \dots$	Klasik kümeler
$\Gamma$	Fuzzy küme
$\Gamma^c$	$\Gamma$ fuzzy kümesinin tümleyeni
$\Gamma(p)$	$p$ parametresine göre fuzzy küme
$\mu_\Gamma$	$\Gamma$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$[\Gamma(p)]$	$p$ parametresine göre $\Gamma$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$A$	Parametre kümesi
$(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, B), \dots$	Soft kümeler
$(\Gamma, A)$	Fuzzy soft küme
$(G, .)$	Grup
$P(X)$	$X$ 'in kuvvet kümesi
$FP(X)$	$X$ üzerindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi
$S(X, A)$	$A$ parametre kümesine göre $X$ üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi
$FS(X, A)$	$A$ parametre kümesine göre $X$ üzerindeki tüm fuzzy soft kümelerin ailesi

## 1. GİRİŞ

Günlük hayatta birçok belirsizlik ve kararsızlıklar vardır. Kişiden kişiye ve durumdan duruma değişiklik gösteren bu belirsizlikler dil zenginliğine göre kolaylıkla ifade edilebilmektedir. Ancak bu belirsizliklerin modellenmesine ihtiyaç duyulan mühendislik, bilgisayar bilimleri, tıbbi bilimler ve ekonomi gibi birçok alan vardır. Bu durumda Aristo mantığı ve ondan türemiş olan klasik küme teorisi yetersiz kalmaktadır. Belirsizlikleri giderebilmek için geliştirilmiş birçok teori vardır. Buna örnek olarak fuzzy (bulanık) kümeler teorisi verilebilir.

Belirsizlik içeren problemlerin modellenmesi için geliştirilen ve en kullanışlı yöntemlerden biri olan fuzzy küme teorisi Zadeh (1968) tarafından verilmiştir. Fuzzy küme, klasik kümedeki her bir elemanı  $[0, 1]$  aralığında bir sayıya götüren bir dönüşümdür. Bu dönüşüm üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada üyelik fonksiyonunun inşası kişiden kişiye ve duruma göre değişiklik gösterebileceği için aynı problemi başka sonuçlara götürebilir. Bu sorunların giderilmesi için parametrelendirme araçları kullanılabilir ancak bu seferde bazı uyumsuzluklar ortaya çıkabilmektedir.

Bu noktada hem belirsizlik modeli için yeni bir yaklaşım olan hem de üyelik fonksiyonu inşa etmeye gerek duyulmayan soft (esnek) küme teorisi Molodtsov (1999) tarafından verilmiştir. Molodtsov'un tanımladığı soft kümeler, kullanışlılığı nedeniyle birçok uygulama alanı bulmuştur.

Aktaş ve Çağman (2007), soft kümelerin cebirsel yapılara ilk uygulaması olan 'Soft Küme ve Soft Grup' adlı makaleyi çalışmışlardır. Bu çalışmada soft grup kavramı tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Rosenfeld (1971) fuzzy alt grubu tanımlamış ve Foster (1979) bu çalışmadan yararlanarak fuzzy grubu tanımlamıştır.

Fuzzy küme tanımı zamanla topolojinde birçok alanına uyarlanmıştır. Fuzzy topolojik uzay kavramı ilk olarak Chang (1968) tarafından verilmiştir. Daha sonra Lowen (1976) fuzzy topolojik uzay kavramını daha genel bir tanımla vermiştir. Bu çalışmalarla birlikte topolojinin bazı kavramları fuzzy topolojiye uyarlanmıştır.

Fuzzy topolojik grup kavramı ise fuzzy grup ve fuzzy sürekli fonksiyonlar yardımıyla Foster (1979) tarafından verilmiştir.

Soft kümelerin topolojisi ilk kez Shabir ve Naz (2011) tarafından verilmiştir. Nazmul ve Samanta (2010) soft topolojik grup kavramını tanımlayarak normal soft topolojik grup ve homomorfizm üzerine çalışmıştır.

Maji vd. (2001) fuzzy ve soft küme kavramlarını bir araya getirerek daha genel bir kavram olan fuzzy soft küme kavramını tanımlamışlardır.

Ahmad ve Kharal (2009a, 2009b) fuzzy soft küme kavramıyla ilgili temel kavramlar üzerine çalışmış ve fuzzy soft kümelerin fuzzy soft fonksiyon altındaki görüntü ve ters görüntülerinin özelliklerini incelemiştir.

Fuzzy soft kümelerin topolojik yapısı ilk olarak Tanay ve Kandemir (2011) tarafından verilmiştir. Bu çalışmalarında fuzzy soft topolojinin yapısal özellikleri incelenmiştir. Varol ve Aygün (2012) fuzzy soft topoloji üzerine çalışmış ve fuzzy soft topolojik taban tanımını vermişlerdir. Roy ve Samanta (2012) ise fuzzy soft topolojinin bazı özelliklerini incelemiştir. Fuzzy soft grup tanımı ve bazı özellikleri ise Aygün ve Aygünoğlu (2009) tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Nazmul ve Samanta (2014) tarafından verilen Lowen tipi fuzzy soft topoloji kavramı ve fuzzy soft topolojik uzayın bazı özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca yine Nazmul ve Samanta (2014) tarafından verilen fuzzy soft topolojik uzay ve fuzzy soft grubun birleşik yapısı olan fuzzy soft topolojik grup kavramı verilerek, özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, öncelikle fuzzy küme ve fuzzy grup, soft küme ve soft grup kavramları ele alınmıştır. Daha sonra fuzzy topolojik grup ve soft topolojik grup kavramı verilerek bazı özellikleri incelenmiştir.

### 2.1 Fuzzy Küme ve Fuzzy Grup

**Tanım 2.1**  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere

$$\mu_\Gamma : X \rightarrow \mathcal{I} = [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$\Gamma = \{(x, \mu_\Gamma(x)) \mid x \in X\} \subset X \times \mathcal{I}$$

kümesine  $X$  de bir **fuzzy küme** adı verilir. Her  $x \in X$  için  $\mu_\Gamma(x)$  değerine  $x$  noktasının üyelik derecesi adı verilir (Zadeh 1965).

Bundan sonra,  $X$ 'in tüm fuzzy kümelerinin ailesi  $FP(X)$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.1**  $X = \{x, y, z\}$  olsun.

$$\mu_{\Gamma_1} : X \rightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu olmak üzere üyelik dereceleri  $\mu_{\Gamma_1}(x) = 0.2$ ,  $\mu_{\Gamma_1}(y) = 0.5$ ,  $\mu_{\Gamma_1}(z) = 1$  olarak verilsin. Bu durumda  $\Gamma_1 = \{(x, 0.2), (y, 0.5), (z, 1)\}$  kümesi  $X$  üzerinde bir fuzzy kümedir.

$$\mu_{\Gamma_2} : X \rightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu olmak üzere üyelik dereceleri  $\mu_{\Gamma_2}(x) = 0.3$ ,  $\mu_{\Gamma_2}(y) = 0.9$ ,  $\mu_{\Gamma_2}(z) = 1$  olarak verilsin. Bu durumda  $\Gamma_2 = \{(x, 0.3), (y, 0.9), (z, 1)\}$  kümesi  $X$  üzerinde bir fuzzy kümedir. Burada  $FP(X) = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$  biçiminde gösterilir.

**Örnek 2.2**  $\Gamma$  fuzzy kümesi bir kişinin satın almayı istediği evlerin büyüklüklerini tanımlasın.  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  satılık evlerin kümesi olsun.

$$\mu_{\Gamma}(x) = \begin{cases} 0 \leq x < 0.5, & \text{küçük ev} \\ 0.5 \leq x < 1, & \text{orta büyüklükte ev} \\ 1, & \text{büyük ev} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı,  $\mu_{\Gamma} : X \rightarrow [0, 1]$  üyelik fonksiyonu;  $\mu_{\Gamma}(x_1) = 1$ ,  $\mu_{\Gamma}(x_2) = 1$ ,  $\mu_{\Gamma}(x_3) = 0.5$ ,  $\mu_{\Gamma}(x_4) = 0$  olarak verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0.5), (x_4, 0)\} \\ &= \{(x_1, \text{büyük ev}), (x_2, \text{büyük ev}), (x_3, \text{orta büyüklükte ev}), (x_4, \text{küçük ev})\} \end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir.

**Örnek 2.3**  $X = \{x, y, z\}$  bir okulda iş başvurusunda bulunan öğretmenlerin kümesi ve  $A = \{p_1 = \text{formasyon}, p_2 = \text{tecrübe}, p_3 = \text{alan bilgisi}\}$  parametrelerin kümesi, işe alınmak istenen öğretmenlerde aranan özellikler olsun.

$\Gamma(p_1), \Gamma(p_2), \Gamma(p_3) \in FP(X)$  fuzzy kümeleri ile okula alınmak için değerlendirilen öğretmenlerin sırasıyla formasyon, tecrübe ve alan bilgisine göre değerlendirilmeleri olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\forall x \in X \text{ ve } \forall p \in A \text{ için } \mu_{\Gamma(p)}(x) = \begin{cases} 0.75 \leq x \leq 1, & p \text{ var} \\ 0 \leq x < 0.75, & p \text{ yok} \end{cases} \text{ olarak tanımlansın.}$$

$$\Gamma(p_1) = \{(x, \mu_{\Gamma(p_1)}(x) = 0.8), (y, \mu_{\Gamma(p_1)}(y) = 0.8), (z, \mu_{\Gamma(p_1)}(z) = 1)\}$$

$$\Gamma(p_2) = \{(x, \mu_{\Gamma(p_2)}(x) = 1), (y, \mu_{\Gamma(p_2)}(y) = 0.1), (z, \mu_{\Gamma(p_2)}(z) = 0)\}$$

$$\Gamma(p_3) = \{(x, \mu_{\Gamma(p_3)}(x) = 0.8), (y, \mu_{\Gamma(p_3)}(y) = 0), (z, \mu_{\Gamma(p_3)}(z) = 1)\}$$

olmak üzere burada

$\Gamma(p_1)$ , başvuran öğretmenlerin formasyon bilgisi;  $\forall x \in X$  için  $\mu_{\Gamma(p_1)}(x)$  üyelik derecesiyle verilmiştir.

$\Gamma(p_2)$ , başvuran öğretmenlerin tecrübesi;  $\forall x \in X$  için  $\mu_{\Gamma(p_2)}(x)$  üyelik derecesiyle verilmiştir.

$\Gamma(p_3)$ , başvuran öğretmenlerin alan bilgisi;  $\forall x \in X$  için  $\mu_{\Gamma(p_3)}(x)$  üyelik derecesiyle verilmiştir.

$\Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma$  ya benzer biçimde farklı değerlendirmeciler olarak düşünülürse  $\Gamma_2(p_1)$ ,  $\Gamma_2(p_2)$ ,  $\Gamma_2(p_3)$  ve  $\Gamma_3(p_1)$ ,  $\Gamma_3(p_2)$ ,  $\Gamma_3(p_3)$  değerlendirmeler olarak tanımlanmış olur ve fuzzy kümeleri  $\Gamma$  fuzzy kümesine benzer biçimde gösterilir.

Ayrıca, burada verilen  $A$  parametre kümesi bir sonraki bölüm olan soft küme kavramında daha anlamlı olacaktır.

**Tanım 2.2**  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere

$$\mu_\Phi : X \rightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$\Phi = \{(x, \mu_\Phi(x) = 0) \mid x \in X\} \subset X \times \mathcal{I}$$

kümesine  $X$  de bir **boş fuzzy küme** denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.3**  $X \neq \emptyset$  bir küme olmak üzere

$$\mu_X : X \rightarrow [0, 1]$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen

$$X = \{(x, \mu_X(x) = 1) \mid x \in X\} \subset X \times \mathcal{I}$$

kümesine  $X$  de bir **evrensel fuzzy küme** denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.4**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $c \in \mathcal{I}$  olmak üzere

$$\tilde{c} = \{(x, \mu_{\tilde{c}}(x) = c) \mid x \in X\}$$

kümesine  $X$  de bir **sabit fuzzy küme** denir (Zadeh 1965).

**Tanım 2.5**  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  sırasıyla  $\mu_{\Gamma_1}$  ve  $\mu_{\Gamma_2}$  üyelik fonksiyonları ile verilen  $X$  de iki fuzzy küme olsun. Bu durumda  $\forall x \in X$  için

i)  $\Gamma_1 = \Gamma_2 \Leftrightarrow \mu_{\Gamma_1}(x) = \mu_{\Gamma_2}(x)$

ii)  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Leftrightarrow \mu_{\Gamma_1}(x) \leq \mu_{\Gamma_2}(x)$

iii)  $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Leftrightarrow \mu_{\Gamma_3}(x) = \text{Max} [\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)]$

iv)  $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Leftrightarrow \mu_{\Gamma_3}(x) = \text{Min} [\mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(x)]$

v)  $\Gamma_4 = \Gamma_1^c \Leftrightarrow \mu_{\Gamma_4}(x) = 1 - \mu_{\Gamma_1}(x)$

dir (Chang 1968).

**Tanım 2.6**  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $I$  herhangi bir indis kümesi ve  $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j \in I}$ ,  $X$  de fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda  $\forall x \in X$  için

i)  $\mathcal{C} = \bigcup_{j \in I} \Gamma_j$  olmak üzere  $\mu_{\mathcal{C}}(x) = \sup_{j \in I} \{\mu_{\Gamma_j}(x)\}$

ii)  $\mathcal{D} = \bigcap_{j \in I} \Gamma_j$  olmak üzere  $\mu_{\mathcal{D}}(x) = \inf_{j \in I} \{\mu_{\Gamma_j}(x)\}$

dir (Chang 1968).

**Tanım 2.7**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı iki küme,  $\mathcal{I} = [0, 1]$  ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $\mu_{\Gamma_2} : Y \rightarrow [0, 1]$  üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$\Gamma_2 = \{(y, \mu_{\Gamma_2}(y)) \mid y \in Y\} \subset Y \times \mathcal{I}$  kümesi  $Y$  de bir fuzzy küme olmak üzere  $\Gamma_2$  nin  $f$  altındaki ters görüntüsü  $f^{-1}(\Gamma_2)$ ,  $X$  de fuzzy kümedir ve  $\forall x \in X$  için

$$\mu_{f^{-1}(\Gamma_2)}(x) = \mu_{\Gamma_2}(f(x))$$

dir. Diğer taraftan,  $\mu_{\Gamma_1} : X \rightarrow [0, 1]$  üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilen  $\Gamma_1 = \{(x, \mu_{\Gamma_1}(x)) \mid x \in X\} \subset X \times \mathcal{I}$  kümesi  $X$  de bir fuzzy küme olmak üzere  $\Gamma_1$  nin  $f$  altındaki görüntüsü  $f(\Gamma_1)$ ,  $Y$  de fuzzy kümedir.  $\forall y \in Y$  için  $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$  olmak üzere

$$\mu_{f(\Gamma_1)}(y) = \begin{cases} \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\Gamma_1}(z)\} & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

biçimindedir (Chang 1968).

**Teorem 2.1**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı iki küme ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i)  $\Gamma'_1, \Gamma'_2 \in FP(Y)$  olmak üzere  $\Gamma'_1 \subset \Gamma'_2 \Rightarrow f^{-1}(\Gamma'_1) \subset f^{-1}(\Gamma'_2)$

ii)  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in FP(X)$  olmak üzere  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow f(\Gamma_1) \subset f(\Gamma_2)$

dir (Chang 1968).

**İspat. (i)**  $\forall x \in X$  için

$$\mu_{f^{-1}(\Gamma'_1)}(x) = \mu_{\Gamma'_1}(f(x))$$

ve

$$\mu_{f^{-1}(\Gamma'_2)}(x) = \mu_{\Gamma'_2}(f(x))$$

dir.  $\Gamma'_1 \subset \Gamma'_2$  olduğundan  $\forall x \in X$  için

$$\mu_{f^{-1}(\Gamma'_1)}(x) \leq \mu_{f^{-1}(\Gamma'_2)}(x)$$

dir. Buradan  $f^{-1}(\Gamma'_1) \subset f^{-1}(\Gamma'_2)$  dir.

(ii)  $\forall y \in Y$  için

$$\mu_{f(\Gamma_1)}(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\Gamma_1}(z)\}$$

ve

$$\mu_{f(\Gamma_2)}(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\Gamma_2}(z)\}$$

dir.  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  olduğundan  $\forall y \in Y$  için

$$\mu_{f(\Gamma_1)}(y) \leq \mu_{f(\Gamma_2)}(y)$$

dir. Buradan  $f(\Gamma_1) \subset f(\Gamma_2)$  dir. ■

**Teorem 2.2**  $X$  ve  $Y$  herhangi iki küme,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $I$  herhangi bir indis kümesi olsun. Bu durumda,  $\{\Gamma_j\}_{j \in I}$   $X$  de ve  $\{\Gamma'_j\}_{j \in I}$   $Y$  de birer fuzzy kümeler ailesi olmak üzere

i)  $f^{-1}(\bigcup_{j \in I} \Gamma'_j) = \bigcup_{j \in I} f^{-1}(\Gamma'_j)$

ii)  $f^{-1}(\bigcap_{j \in I} \Gamma'_j) = \bigcap_{j \in I} f^{-1}(\Gamma'_j)$

$$\text{iii) } f\left(\bigcup_{j \in I} \Gamma_j\right) = \bigcup_{j \in I} f(\Gamma_j)$$

$$\text{iv) } f\left(\bigcap_{j \in I} \Gamma_j\right) \subset \bigcap_{j \in I} f(\Gamma_j)$$

dir (Foster 1979).

**İspat. (i)**  $\forall x \in X$  için

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}\left(\bigcup_{j \in I} \Gamma'_j\right)}(x) &= \mu_{\bigcup_{j \in I} \Gamma'_j}(f(x)) \\ &= \sup_{j \in I} \left\{ \mu_{\Gamma'_j}(f(x)) \right\} = \mu_{\bigcup_{j \in I} f^{-1}(\Gamma'_j)}(x) \end{aligned}$$

dir.

**(ii)**  $\forall x \in X$  için

$$\begin{aligned} \mu_{f^{-1}\left(\bigcap_{j \in I} \Gamma'_j\right)}(x) &= \mu_{\bigcap_{j \in I} \Gamma'_j}(f(x)) \\ &= \inf_{j \in I} \left\{ \mu_{\Gamma'_j}(f(x)) \right\} = \mu_{\bigcap_{j \in I} f^{-1}(\Gamma'_j)}(x) \end{aligned}$$

dir.

**(iii)**  $\forall y \in Y$  için

$$\begin{aligned} \mu_{f\left(\bigcup_{j \in I} \Gamma_j\right)}(y) &= \sup_{z \in f^{-1}(y)} \left( \sup_{j \in I} \left\{ \mu_{\Gamma_j}(z) \right\} \right) \\ &= \sup_{j \in I} \left( \sup_{z \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{\Gamma_j}(z) \right\} \right) = \mu_{\bigcup_{j \in I} f(\Gamma_j)}(y) \end{aligned}$$

dir.

**(iv)**  $\forall y \in Y$  için

$$\begin{aligned} \mu_{f\left(\bigcap_{j \in I} \Gamma_j\right)}(y) &= \sup_{z \in f^{-1}(y)} \left( \inf_{j \in I} \left\{ \mu_{\Gamma_j}(z) \right\} \right) \\ &\leq \inf_{j \in I} \left( \sup_{z \in f^{-1}(y)} \left\{ \mu_{\Gamma_j}(z) \right\} \right) = \mu_{\bigcap_{j \in I} f(\Gamma_j)}(y) \end{aligned}$$

■

**Tanım 2.8**  $X$  ve  $Y$  herhangi iki küme olmak üzere  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  nin birer fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  fuzzy kümelerinin **kartezyen çarpımı**  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ ,  $\forall (x, y) \in X \times Y$  için

$$\mu_{(\Gamma_1 \times \Gamma_2)}(x, y) = \min \left\{ \mu_{\Gamma_1}(x), \mu_{\Gamma_2}(y) \right\}$$

olarak tanımlanır (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 2.9**  $X_1, X_2, Y_1$  ve  $Y_2$  herhangi kümeler olmak üzere  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  ve  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  birer fonksiyon olsun. Bu durumda,  $\forall (x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2)$  için

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 & : (X_1 \times X_2) \rightarrow (Y_1 \times Y_2) \\ (x_1, x_2) & \rightarrow (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Munkres 2000).

**Tanım 2.10**  $X_1, X_2, Y_1$  ve  $Y_2$  herhangi kümeler olmak üzere  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  ve  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  fonksiyon,  $\Gamma_1$  ve  $\Gamma_2$  sırasıyla  $Y_1$  ve  $Y_2$  nin birer fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda,

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = f_1^{-1}(\Gamma_1) \times f_2^{-1}(\Gamma_2)$$

olarak tanımlanır (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 2.11**  $(G, .)$  bir grup ve  $\Gamma, \mu_\Gamma$  üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen  $G$  de fuzzy küme olsun. Bu durumda,  $\forall x, y \in G$  için

i)  $\mu_\Gamma(x.y) \geq \min \{\mu_\Gamma(x), \mu_\Gamma(y)\}$

ii)  $\mu_\Gamma(x^{-1}) \geq \mu_\Gamma(x)$

özellikleri sağlanıyor ise  $\Gamma$  ya  $G$  üzerinde **fuzzy grup** denir (Foster 1979).

**Not** Rosenfeld (1971) bu tanımda  $\Gamma$  yı  $G$  üzerinde fuzzy altgrup olarak tanımlamıştır.

**Örnek 2.4**  $G = \{1, -1, i, -i\}$  olmak üzere çarpma işlemiyle birlikte bir gruptur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mu_\Gamma & : G \rightarrow [0, 1] \\ x & \rightarrow \mu_\Gamma(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0.5, & x = -1 \\ 0, & x = i, -i \end{cases} \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $\Gamma$  fuzzy küme,  $G$  de bir fuzzy gruptur (Kandasamy 2003).

**Teorem 2.3**  $\Gamma, (G, .)$  üzerinde fuzzy grup olsun. Bu durumda,  $\forall x \in G$  ve  $e$  birim elemanı için

i)  $\mu_{\Gamma}(x^{-1}) = \mu_{\Gamma}(x)$

ii)  $\mu_{\Gamma}(e) \geq \mu_{\Gamma}(x)$

dir (Rosenfeld 1971).

**İspat. (i)**  $\Gamma, (G, .)$  üzerinde fuzzy grup olduğundan  $\mu_{\Gamma}(x^{-1}) \geq \mu_{\Gamma}(x)$  dir.

Dolayısıyla  $\mu_{\Gamma}((x^{-1})^{-1}) \geq \mu_{\Gamma}(x^{-1})$  bulur. Ayrıca  $\mu_{\Gamma}(x) = \mu_{\Gamma}((x^{-1})^{-1})$  olduğundan  $\mu_{\Gamma}(x) \geq \mu_{\Gamma}(x^{-1})$  dir. Böylece

$$\mu_{\Gamma}(x^{-1}) = \mu_{\Gamma}(x)$$

dir.

(ii)  $\Gamma, (G, .)$  üzerinde fuzzy grup olduğundan  $e$  birim elemanı ve  $\forall x \in G$  için

$$\mu_{\Gamma}(e) = \mu_{\Gamma}(x.(x^{-1})) \geq \min \{ \mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(x^{-1}) \} = \mu_{\Gamma}(x)$$

dir. ■

**Teorem 2.4**  $(G, .)$  bir grup ve  $\Gamma, \mu_{\Gamma}$  üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen  $G$  de fuzzy küme olsun. Bu durumda,  $\forall x, y \in G$  için

i)  $\Gamma, (G, .)$  üzerinde fuzzy gruptur.

ii)  $\mu_{\Gamma}(x.y^{-1}) \geq \min \{ \mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y) \}$ .

ifadeleri denktir (Rosenfeld 1971).

**İspat. (i)  $\Rightarrow$  (ii)**

$\Gamma, (G, .)$  üzerinde fuzzy grup olsun. Bu durumda  $\forall x, y \in G$  için

$$\mu_{\Gamma}(x.y^{-1}) \geq \min \{ \mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y^{-1}) \} = \min \{ \mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y) \}$$

dir.

(ii)⇒(i)

$\forall x, y \in G$  için

$$\mu_{\Gamma}(x.y^{-1}) \geq \min \{\mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y)\}$$

olsun.  $y = x$  eşitliği verilirse  $\mu_{\Gamma}(e) \geq \mu_{\Gamma}(y)$  dir. Buradan  $\forall y \in G$  için

$$\mu_{\Gamma}(y^{-1}) = \mu_{\Gamma}(e.y^{-1}) \geq \min \{\mu_{\Gamma}(e), \mu_{\Gamma}(y^{-1})\} = \mu_{\Gamma}(y)$$

dir. Böylece

$$\mu_{\Gamma}(x.y) = \mu_{\Gamma}(x.(y^{-1})^{-1}) \geq \min \{\mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y^{-1})\} \geq \min \{\mu_{\Gamma}(x), \mu_{\Gamma}(y)\}$$

elde edilir. ■

## 2.2 Soft Küme ve Soft Grup

**Tanım 2.12**  $X$  evrensel küme,  $P(X)$ ,  $X$  kümesinin tüm altkümelerinin ailesi ve  $A$  parametrelerin kümesi olsun.

$$\mathcal{F} : A \rightarrow P(X)$$

bir fonksiyon olmak üzere

$$(\mathcal{F}, A) = \{(p, \mathcal{F}(p)) \mid p \in A, \mathcal{F}(p) \in P(X)\}$$

ikilisine  $(X, A)$  ikilisi üzerinde bir **soft küme** adı verilir (Molodtsov 1999).

Bundan sonra  $S(X, A)$  ile  $(X, A)$  üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi gösterilecektir.

**Örnek 2.5**  $X = \{x, y, z\}$  ve  $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  parametrelerin kümesi olmak üzere

$$\mathcal{F} : A \rightarrow P(X)$$

fonksiyonu  $\forall p_i \in A, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  için  $\mathcal{F}(p_1) = \{x, y\}$ ,  $\mathcal{F}(p_2) = \{z\}$ ,  $\mathcal{F}(p_3) = X$ ,  $\mathcal{F}(p_4) = \{y, z\} \subseteq P(X)$  şeklinde verilsin. Bu durumda

$$(\mathcal{F}, A) = \{(p_1, \{x, y\}), (p_2, \{z\}), (p_3, X), (p_4, \{y, z\})\}$$

kümesi  $(X, A)$  üzerinde bir soft kümedir.

$$\mathcal{G} : A \rightarrow P(X)$$

fonksiyonu  $\forall p_i \in A, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  için  $\mathcal{G}(p_1) = \{y\}$ ,  $\mathcal{G}(p_2) = \{z\}$ ,  $\mathcal{G}(p_3) = \{x, z\}$ ,  $\mathcal{G}(p_4) = \{z\} \subseteq P(X)$  şeklinde verilsin. Bu durumda

$$(\mathcal{G}, A) = \{(p_1, \{y\}), (p_2, \{z\}), (p_3, \{x, z\}), (p_4, \{z\})\}$$

kümesi  $(X, A)$  üzerinde bir soft kümedir.

Burada  $S(X, A) = \{(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, A), \dots\}$  biçiminde gösterilir.

**Örnek 2.6**  $(\mathcal{F}, A)$  soft kümesi bir kişinin satın almayı istediği evlerin özelliklerini tanımlasın. Burada  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  satılık evlerin kümesi ve  $A = \{p_1, p_2, p_3\} = \{\text{büyük, markete yakın, ucuz}\}$  karar verme parametrelerinin kümesi olsun.

$\mathcal{F}$  fonksiyonu;  $\mathcal{F}(p_1) = \{x_1, x_2\}$ ,  $\mathcal{F}(p_2) = \{x_1, x_4\}$ ,  $\mathcal{F}(p_3) = \emptyset$  olsun. Bu durumda

$$(\mathcal{F}, A) = \{(\text{büyük ev}, \{x_1, x_2\}), (\text{markete yakın ev}, \{x_1, x_4\}), (\text{ucuz ev}, \emptyset)\}$$

biçiminde gösterilir.

**Örnek 2.7**  $X = \{x, y, z\}$  bir okula iş başvurusunda bulunan öğretmenlerin kümesi ve  $A = \{p_1 = \text{formasyon}, p_2 = \text{tecrübe}, p_3 = \text{alan bilgisi}\}$  parametrelerin kümesi, işe alınmak istenen öğretmenlerde aranan özellikler olsun.

$(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, A), (\mathcal{H}, A) \in S(X, A)$  soft kümeleri ile okula alınmak için değerlendirilen öğretmenlerde bulunan özellikler olarak tanımlansın. Buna göre,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}, A) &= \{(p_1, \{x, y, z\}), (p_2, \{x\}), (p_3, \{x, z\})\} \\ &= \{(\text{formasyon bilgisi olanlar}, \{x, y, z\}), (\text{tecrübesi olanlar}, \{x\}), \\ &\quad (\text{alan bilgisi olanlar}, \{x, z\})\} \\ (\mathcal{G}, A) &= \{(p_1, \{x, y, z\}), (p_2, \{x\}), (p_3, \{x\})\} \\ &= \{(\text{formasyon bilgisi olanlar}, \{x, y, z\}), (\text{tecrübesi olanlar}, \{x\}), \\ &\quad (\text{alan bilgisi olanlar}, \{x\})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}, A) &= \{(p_1, \{x, y, z\}), (p_2, \{x\}), (p_3, \{x, z\})\} \\
&= \{(\text{alan bilgisi olanlar}, \{x, y, z\}), (\text{formasyon bilgisi olanlar}, \{x\}), \\
&\quad (\text{tecrübesi olanlar}, \{x, z\})\}
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir.

**Tanım 2.13**  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun.  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p) = \emptyset$  sağlanıyor ise  $(\mathcal{F}, A)$  soft kümesine **boş soft küme** denir ve  $(\tilde{\Phi}, A)$  ile gösterilir (Maji vd. 2003).

**Tanım 2.14**  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun.  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p) = X$  sağlanıyor ise  $(\mathcal{F}, A)$  soft kümesine **evrensel soft küme** denir ve  $(\tilde{X}, A)$  ile gösterilir (Maji vd. 2003).

**Tanım 2.15**  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda  $A \subset B$  ve  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p) \subseteq \mathcal{G}(p)$  sağlanıyor ise  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $(\mathcal{G}, B)$  soft kümesinin **soft alt kümesidir** denir ve  $(\mathcal{F}, A) \tilde{\subset} (\mathcal{G}, B)$  ile gösterilir (Çağman 2014).

**Tanım 2.16**  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda  $(\mathcal{F}, A) \tilde{\subset} (\mathcal{G}, B)$  ve  $(\mathcal{G}, B) \tilde{\subset} (\mathcal{F}, A)$  sağlanıyor ise  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $(\mathcal{G}, B)$  soft kümesine **soft eşittir** denir ve  $(\mathcal{F}, A) \tilde{=} (\mathcal{G}, B)$  ile gösterilir (Maji vd. 2003).

**Tanım 2.17**  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda  $A \cup B = C$  olmak üzere  $\forall p \in C$  için

$$\mathcal{H}(p) = \begin{cases} \mathcal{F}(p) & , p \in A \setminus B \\ \mathcal{G}(p) & , p \in B \setminus A \\ \mathcal{F}(p) \cup \mathcal{G}(p) & , p \in A \cap B \end{cases}$$

sağlanıyor ise  $(\mathcal{H}, C)$  soft kümesine,  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$  **soft kümelerinin birleşimidir** denir ve  $(\mathcal{H}, C) = (\mathcal{F}, A) \tilde{\cup} (\mathcal{G}, B)$  ile gösterilir (Maji vd. 2003).

**Tanım 2.18**  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda  $A \cap B = C$  olmak üzere  $\forall \alpha \in C$  için  $\mathcal{H}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha) \cap \mathcal{G}(\alpha)$  sağlanıyor ise  $(\mathcal{H}, C)$  soft kümesine  $(\mathcal{F}, A)$  ve  $(\mathcal{G}, B)$  **soft kümelerinin kesişimidir** denir ve  $(\mathcal{H}, C) = (\mathcal{F}, A) \tilde{\cap} (\mathcal{G}, B)$  ile gösterilir (Shabir ve Naz 2011).

**Tanım 2.19**  $I$  bir indis kümesi ve  $A = \{p_j\}_{j \in I}$  parametrelerin bir kümesi olsun. Her  $p_j$  nin değili  $\lceil p_j$  ile gösterilsin. Bu durumda  $A$  kümesinin değili  $\lceil A = \{\lceil p_j\}_{j \in I}$  olacak biçimde gösterilir (Maji vd. 2003).

**Örnek 2.8** Örnek 2.7 da verilen  $A$  parametrelerin kümesinin değili;

$$\lceil A = \{\lceil p_1 = \text{formasyonu olmayan}, \lceil p_2 = \text{tecrübesi olmayan}, \\ \lceil p_3 = \text{alan bilgisi olmayan}\}$$

olarak ifade edilir.

**Tanım 2.20**  $(\mathcal{F}, A) \in S(X, A)$  olsun. Bu durumda  $(\mathcal{F}, A)^c = (\mathcal{F}^c, \lceil A)$  eşitliği sağlanıyor ise  $(\mathcal{F}, A)^c$  soft kümesine,  $(\mathcal{F}, A)$  soft kümesinin **soft tümleyenidir** denir (Maji vd. 2003).

**Tanım 2.21**  $G$  bir grup ve  $A \neq \emptyset$  parametrelerin kümesi olmak üzere  $(\mathcal{F}, A) \in S(G, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p) \leq G$  yani  $\mathcal{F}(p)$ ,  $G$  nin altgrubu ise  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $G$  üzerinde bir **soft gruptur** denir (Aktaş ve Çağman 2007).

**Tanım 2.22**  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $G$  üzerinde bir soft grup olsun.  $\forall p \in A$  için

i)  $e$ ,  $G$  nin birim elemanı olmak üzere  $\mathcal{F}(p) = \{e\}$  oluyor ise  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $G$  üzerinde **birim soft gruptur**

ii)  $\mathcal{F}(p) = G$  ise  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $G$  üzerinde **tam soft gruptur**

denir (Aktaş ve Çağman 2007).

**Örnek 2.9**  $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ,  $I_3 = \{1, 2, 3\}$  kümesi üzerinde bütün permütasyonların kümesi olsun.

$$\mathcal{F} : S_3 \rightarrow S_3$$

fonksiyonunun değer kümesi

$$\mathcal{F}(p) = \{q \in G : pRq \Leftrightarrow q = p^n, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlansın.  $(\mathcal{F}, A)$  soft grubunun alt kümeleri  $\{\mathcal{F}(p) : p \in A\}$  biçiminde parametrize edilen bir ailedir. Bu,  $G$  nin alt gruplarının koleksiyonunu verir. Burada tanımlanan  $\mathcal{F}$  fonksiyonu için  $\mathcal{F}(p)$  değeri  $G$  nin bir alt grubudur. Bu durumda

$$\mathcal{F}(e) = \{e\}, \quad \mathcal{F}(12) = \{e, (12)\}, \quad \mathcal{F}(13) = \{e, (13)\}, \quad \mathcal{F}(23) = \{e, (23)\}, \\ \mathcal{F}(123) = \mathcal{F}(132) = \{e, (123), (132)\}$$

olmak üzere  $(\mathcal{F}, A)$  soft grubunu  $G$  nin alt gruplarının koleksiyonu olarak alabiliriz (Aktaş ve Çağman 2007).

### 2.3 Fuzzy Topoloji ve Fuzzy Topolojik Gruplar

Bu kısımda öncelikle Chang'ın 1968 yılında tanımlamış olduğu fuzzy topoloji kavramı ve daha sonra Lowen'in 1976 yılında tanımlamış olduğu fuzzy topoloji kavramı incelenmiş ve Lowen tipi fuzzy topoloji için bazı özellikleri verilmiştir. Bu kısmın sonunda ise fuzzy topolojik grup kavramı verilip, özellikleri incelenmiştir.

**Tanım 2.23**  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $I \neq \emptyset$  bir indis kümesi ve  $\tau \subset FP(X)$  olsun. Eğer,

- i)  $\Phi, X \in \tau$
- ii)  $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \tau \Rightarrow \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \tau$
- iii)  $\forall i \in I$  için  $\Gamma_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \in \tau$

özellikleri sağlamıyor ise,  $\tau$  ailesine  $X$  kümesi üzerinde bir **fuzzy topoloji**,  $(X, \tau)$  ikilisine **fuzzy topolojik uzay** denir.  $\tau$  nun elemanlarına **fuzzy açık küme** denir (Chang 1968).

**Tanım 2.24**  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $I \neq \emptyset$  bir indis kümesi,  $\mathcal{I} = [0, 1]$  ve  $X$  deki fuzzy kümelerinin bir ailesi  $\tau$  olsun. Eğer,

i)  $\forall c \in \mathcal{I}$  ve  $\forall x \in X$  için  $\mu_{\tilde{c}}(x) = c$  olmak üzere  $\tilde{c} \in \tau$

ii)  $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \tau \Rightarrow \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \tau$

iii)  $\forall i \in I$  için  $\Gamma_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \in \tau$

özellikleri sağlamıyor ise,  $\tau$  ailesine  $X$  kümesi üzerinde **Lowen fuzzy topoloji** denir.  $(X, \tau)$  ikilisine **Lowen fuzzy topolojik uzay** denir (Lowen 1976).

Burada (i) şartı Chang'ın tanımından farklı olarak verildiği açıktır. Klasik topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonlar süreklidir. Ancak fuzzy topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonların sürekli olması gerekli değildir. Lowen bu önemli özelliğe dikkat çekmek için tanımın birinci özelliğini değiştirmiştir. Böylece fuzzy topolojik uzayların klasik topolojik uzayların bir genelleştirmesi olduğu gerçeğini yitirmiştir. Bundan sonraki tanım ve özellikler verilirken Lowen fuzzy topolojisi kullanılmış ve Lowen fuzzy topoloji kısaca fuzzy topoloji olarak adlandırılmıştır.

**Örnek 2.10** Klasik anlamda her topoloji fuzzy topolojidir ancak her fuzzy topoloji klasik anlamda topoloji olmak zorunda değildir.

**Tanım 2.25**  $\Gamma$ ,  $X$  de bir fuzzy küme,  $I$  bir indis kümesi ve  $\tau$ ,  $X$  üzerinde fuzzy topoloji olsun. Bu durumda

$$\tau_\Gamma = \{v_j \cap \Gamma \mid \forall j \in I, v_j \in \tau\}$$

ailesi  $\Gamma$  nin fuzzy altkümelerinin bir ailesi olup  $\Gamma$  üzerinde **indirgenmiş fuzzy topoloji** adını alır.  $(\Gamma, \tau_\Gamma)$  ikilisi de  $(X, \tau)$  fuzzy topolojik uzayının **fuzzy alt topolojik uzayıdır** denir (Foster 1979).

**Tanım 2.26**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \nu)$  fuzzy topolojik uzaylar olmak üzere

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$$

fonksiyonu verilsin.  $\forall \lambda \in \nu$  için  $f^{-1}(\lambda) \in \tau$  ise  $f$  fonksiyonuna **fuzzy süreklidir** denir. Eğer,  $\forall \gamma \in \tau$  için  $f(\gamma) \in \nu$  oluyor ise,  $f$  fonksiyonuna **fuzzy açıktır** denir (Foster 1979).

**Tanım 2.27**  $(\Gamma, \tau_\Gamma)$  ve  $(\Gamma', \nu_{\Gamma'})$  sırasıyla  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \nu)$  fuzzy topolojik uzaylarının fuzzy altuzayları olmak üzere

$$f : (\Gamma, \tau_\Gamma) \rightarrow (\Gamma', \nu_{\Gamma'})$$

fonksiyonu verilsin. Eğer  $\forall \lambda' \in \nu_{\Gamma'}$  için  $f^{-1}(\lambda') \cap \Gamma \in \tau_\Gamma$  ise,  $f$  fonksiyonuna **rölatif fuzzy süreklidir** denir. Eğer  $\forall \gamma' \in \tau_\Gamma$  için  $f(\gamma') \in \nu_{\Gamma'}$  ise  $f$  fonksiyonuna **rölatif fuzzy açıktır** denir (Foster 1979).

**Tanım 2.28**  $(G, .)$  bir grup ve  $G$  üzerinde bir  $\tau$  fuzzy topolojisi verilsin.  $\Gamma$  da  $G$  üzerinde fuzzy grup olmak üzere,  $\tau_\Gamma$  indirgenmiş fuzzy topolojisi ile donatılsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi : (\Gamma, \tau_\Gamma) \times (\Gamma, \tau_\Gamma) &\rightarrow (\Gamma, \tau_\Gamma) \\ (x, y) &\rightarrow \varphi(x, y) = x.y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : (\Gamma, \tau_\Gamma) &\rightarrow (\Gamma, \tau_\Gamma) \\ x &\rightarrow \psi(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonları rölatif fuzzy sürekli ise  $\Gamma$  ya  $G$  üzerinde **fuzzy topolojik grup** denir (Foster 1979).

**Teorem 2.5**  $(G, .)$  bir grup,  $\tau$ ,  $G$  üzerinde bir fuzzy topoloji ve  $\Gamma$  da  $G$  üzerinde fuzzy grup olsun. Bu durumda,

i)  $\Gamma$ ,  $G$  üzerinde fuzzy topolojik gruptur.

ii)  $\psi : (\Gamma, \tau_\Gamma) \times (\Gamma, \tau_\Gamma) \rightarrow (\Gamma, \tau_\Gamma)$  rölatif fuzzy süreklidir.  
 $(x, y) \rightarrow \psi(x, y) = x.y^{-1}$

ifadeleri denktir (Foster 1979)

## 2.4 Soft Topoloji ve Soft Topolojik Gruplar

Bu kısımda soft topoloji ve soft topolojik grup kavramları verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

**Tanım 2.29**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $\tau \in S(X, A)$  olsun. Bu durumda

i)  $\forall p \in A$  için  $\tilde{\Phi}(p) = \emptyset$  ve  $\tilde{X}(p) = X$  olmak üzere  $(\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A) \in \tau$

ii)  $(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, A) \in \tau \Rightarrow (\mathcal{F}, A) \tilde{\cap} (\mathcal{G}, A) \in \tau$

iii)  $\forall i \in I$  için  $(\mathcal{F}_i, A) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} (\mathcal{F}_i, A) \in \tau$

özelliklerini sağlayan  $\tau$  ailesine  $X$  kümesi üzerinde **soft topoloji** denir.  $(X, A, \tau)$  üçlüsüne **soft topolojik uzay** denir.  $\tau$  nun elemanlarına  $X$  üzerinde **soft açık kümeler** denir (Shabir ve Naz 2011).

**Örnek 2.11**  $X = \{x, y, z\}$  bir küme ve  $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  parametrelerin kümesi olsun. Bu durumda  $A_1 = \{p_1, p_2\} \subseteq A$  ve  $(\mathcal{F}, A_1) = \{(p_1, \{x, y\}), (p_2, \{y, z\})\}$  olmak üzere

$$\tau_1 = \{(\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A)\}$$

$$\tau_2 = \{(\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A), (p_1, \{x\}), (p_1, \{y\}), (p_2, \{z\}), (p_1, \{x, y\}), (p_2, \{y, z\})\}$$

topolojileri  $(\mathcal{F}, A_1)$  üzerinde soft topolojidir. Bu durumda  $(X, A_1, \tau_1)$  ve  $(X, A_1, \tau_2)$  soft topolojik uzaylardır (Çağman vd. 2011b).

**Teorem 2.6**  $(X, A, \tau)$ ,  $X$  de soft topolojik uzay olsun. Bu durumda  $\forall p \in A$  için  $\tau^p = \{\mathcal{F}(p) \mid (\mathcal{F}, A) \in \tau\}$  ailesi  $X$  üzerinde bir topolojidir (Shabir ve Naz 2011).

**İspat.**  $(X, A, \tau)$ ,  $X$  de soft topolojik uzay olsun. Bu durumda  $\forall p \in A$  olmak üzere

(i)  $(\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A) \in \tau \Rightarrow \emptyset, X \in \tau^p$ .

(ii)  $(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, A) \in \tau$  olmak üzere  $(\mathcal{F}, A) \tilde{\cap} (\mathcal{G}, A) \in \tau \Rightarrow \mathcal{F}(p) \cap \mathcal{G}(p) \in \tau^p$ .

(iii)  $\{\mathcal{F}_i(p)\}_{i \in I} \in \tau^p$  olsun.  $\forall i \in I$  için  $\bigcup_{i \in I} (\mathcal{F}_i, A) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i(p) \in \tau^p$ .

özellikleri sağlandığı için  $\tau^p = \{\mathcal{F}(p) \mid (\mathcal{F}, A) \in \tau\}$  ailesi  $X$  üzerinde bir topolojidir.

■

**Uyarı 2.1**  $(X, A, \tau_1)$  ve  $(X, A, \tau_2)$ ,  $X$  üzerinde iki soft topolojik uzay olsun. Bu durumda  $\tau_1 \tilde{\cap} \tau_2 = \{(\mathcal{F}, A) \mid (\mathcal{F}, A) \in \tau_1, (\mathcal{F}, A) \in \tau_2\}$  olmak üzere  $(X, A, \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2)$ ,  $X$  üzerinde soft topolojik uzaydır. Ancak  $X$  üzerinde iki soft topolojinin birleşimi  $X$  üzerinde bir soft topoloji olmak zorunda değildir (Shabir ve Naz 2011).

Gerçekten,

$X = \{x, y, z\}$ ,  $A = \{p_1, p_2\}$  parametrelerin kümesi olsun.

$(\mathcal{F}_1, A) = \{(p_1, \{y\}), (p_2, \{x\})\}$ ,  $(\mathcal{F}_2, A) = \{(p_1, \{y, z\}), (p_2, \{x, y\})\}$ ,  
 $(\mathcal{F}_3, A) = \{(p_1, \{x, y\}), (p_2, X)\}$ ,  $(\mathcal{F}_4, A) = \{(p_1, \{x, y\}), (p_2, \{x, z\})\}$ ,  
 $(\mathcal{G}_1, A) = \{(p_1, \{y\}), (p_2, \{x\})\}$ ,  $(\mathcal{G}_2, A) = \{(p_1, \{y, z\}), (p_2, \{x, y\})\}$ ,  
 $(\mathcal{G}_3, A) = \{(p_1, \{x, y\}), (p_2, \{x, y\})\}$ ,  $(\mathcal{G}_4, A) = \{(p_1, \{y\}), (p_2, \{x, z\})\}$   
soft kümeleri verilsin. Bu durumda

$$\tau_1 = \left\{ (\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A), (\mathcal{F}_1, A), (\mathcal{F}_2, A), (\mathcal{F}_3, A), (\mathcal{F}_4, A) \right\}$$

ve

$$\tau_2 = \left\{ (\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A), (\mathcal{G}_1, A), (\mathcal{G}_2, A), (\mathcal{G}_3, A), (\mathcal{G}_4, A) \right\}$$

Tanım 2.29 aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla  $\tau_1$  ve  $\tau_2$ ,  $X$  üzerinde iki topolojidir.

Ayrıca  $\tau = \tau_1 \tilde{\cap} \tau_2$  da Tanım 2.29 aksiyomlarını sağladığı kolaylıkla görülür.

$$\tau = \tau_1 \tilde{\cup} \tau_2 = \left\{ (\tilde{\Phi}, A), (\tilde{X}, A), (\mathcal{F}_1, A), (\mathcal{F}_2, A), (\mathcal{F}_3, A), (\mathcal{F}_4, A), (\mathcal{G}_3, A), (\mathcal{G}_4, A) \right\}$$

olarak tanımlansın.

$X$  üzerinde  $(\mathcal{F}_2, A)$  ve  $(\mathcal{G}_3, A)$  soft topolojilerinin birleşimi  $(\mathcal{F}_2, A) \tilde{\cup} (\mathcal{G}_3, A) = (\mathcal{H}, A)$  olsun. Tanım 2.17 kullanılarak

$$(\mathcal{H}, A) = \{(p_1, X), (p_2, \{x, y\})\}$$

bulunur. Ancak  $(\mathcal{H}, A) \notin \tau$  dir ve  $\tau$ ,  $X$  üzerinde soft topoloji değildir.

**Tanım 2.30**  $(G, +)$  bir grup,  $(G, \tau)$  topolojik grup,  $\tau$ ,  $G$  üzerinde topoloji ve  $(\mathcal{F}, A) \neq \emptyset$  soft küme olsun.  $(\mathcal{F}, A)$ ,  $G$  üzerinde soft grup yani  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p)$ ,  $G$  nin altgrubu ve

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{F}(p) \times \mathcal{F}(p) &\rightarrow \mathcal{F}(p) \\ (x, y) &\rightarrow \varphi(x, y) = x + (-y) \end{aligned}$$

fonksiyonu sürekli ise  $(\mathcal{F}, A, \tau)$  üçlüsüne  $G$  üzerinde **soft topolojik gruptur** denir (Shah ve Shaheen 2014).

**Örnek 2.12**  $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ,  $I_3 = \{1, 2, 3\}$  kümesi üzerinde bütün permütasyonların kümesi olsun.  $A = (p_1, p_2, p_3)$  olarak alalım.  $\beta = \{\{e\}, \{(12)\}, \{(123)\}, \{(132)\}\}$ ,  $\tau$  topolojisi için bir taban olsun.

Bu durumda  $\mathcal{F}$  fonksiyonu,

$$\mathcal{F}(p_1) = \{e\}, \quad \mathcal{F}(p_2) = \{\{e\}, \{(12)\}\}, \quad \mathcal{F}(p_3) = \{\{e\}, \{(123)\}, \{(132)\}\}$$

dır. Açık olarak  $\forall p \in A$  için  $\mathcal{F}(p)$ ,  $G$  nin altgrubudur. Aynı zamanda Tanım 2.30 u sağlar.

Dolayısıyla  $(\mathcal{F}, A, \tau)$ ,  $G$  üzerinde soft topolojik gruptur (Shah ve Shaheen 2014).

### 3. FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümün ilk kısmında, fuzzy soft küme, fuzzy soft grup ve ilgili temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra Tanay ve Kandemir (2011) tarafından ifade edilen fuzzy soft topoloji kavramları ile Nazmul ve Samanta (2014) tarafından ifade edilen Lowen tipi fuzzy soft topoloji kavramları ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. En son kısımda da çarpım fuzzy soft topoloji kavramı ifade edilerek bazı özellikleri irdelenmiştir.

#### 3.1 Fuzzy Soft Küme ve Fuzzy Soft Gruplar

**Tanım 3.1**  $X \neq \emptyset$  evrensel küme,  $A$  parametrelerin kümesi ve  $A_1 \subseteq A$  olsun.

$$\Gamma : A \rightarrow FP(X)$$

bir fonksiyon olmak üzere

$$(\Gamma, A_1) = \{(p, \Gamma(p)) \mid p \in A, \Gamma(p) \in FP(X)\}$$

ikilisine  $(X, A)$  ikilisi üzerinde bir **fuzzy soft küme** adı verilir (Roy ve Maji 2007).

Bundan sonra,  $FS(X, A)$  ile  $(X, A)$  üzerindeki tüm fuzzy soft kümelerin ailesi gösterilecektir.

**Örnek 3.1**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  evrensel küme ve  $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  parametrelerin kümesi olsun.

$$\Gamma : A \rightarrow FP(X)$$

bir fonksiyon ve  $A_1 = \{p_1, p_2\} \subseteq A$  olmak üzere  $\forall p \in A_1$  için fuzzy kümeler  $\Gamma(p_1) = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 1)\}$ ,  $\Gamma(p_2) = \{(x_3, 0.3)\}$  şeklinde verilsin.

Bu durumda  $(\Gamma, A_1) = \{(p_1, \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 1)\}), (p_2, \{(x_3, 0.3)\})\}$  kümesi  $(X, A)$  üzerinde bir fuzzy soft kümedir.

$$\Gamma : A \rightarrow FP(X)$$

bir fonksiyon ve  $A_2 = \{p_3\} \subseteq A$  olmak üzere  $\forall p \in A_2$  için fuzzy kümeler

$\Gamma(p_3) = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 1)\}$  şeklinde verilsin.

Bu durumda  $(\Gamma, A_2) = \{(p_3, \{(x_1, 0.3), (x_2, 0), (x_3, 1)\})\}$  kümesi  $(X, A)$  üzerinde bir fuzzy soft kümedir.

Dolayısıyla  $FS(X, A) = \{(\Gamma, A_1), (\Gamma, A_2), \dots\}$  biçiminde gösterilebilir.

**Örnek 3.2**  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesi bir kişinin satın almayı istediği evlerin büyüklüğüne göre değerlendirilmesi olarak tanımlasın. Burada  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  satılık evlerin kümesi ve  $A = \{p_1, p_2, p_3\} = \{\text{büyük, markete yakın, ucuz}\}$  karar verme parametrelerinin kümesi ve  $A_1 = \{p_1\} \subset A$  olsun.

$\Gamma$  fonksiyonu;  $\Gamma(p_1) = ((x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0.5), (x_4, 0))$  şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$\begin{aligned} (\Gamma, A) &= \{(\text{büyüklük}, (x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0.5), (x_4, 0))\} \\ &= \{(\text{büyüklük}, (x_1, \text{büyük ev}), (x_2, \text{büyük ev}), (x_3, \text{orta büyüklükte ev}), \\ &\quad (x_4, \text{küçük ev}))\} \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

**Örnek 3.3**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  bir okulda iş başvurusunda bulunan öğretmenlerin kümesi ve  $A = \{p_1 = \text{formasyon}, p_2 = \text{tecrübe}, p_3 = \text{alan bilgisi}\}$  parametrelerin kümesi işe alınmak istenen öğretmenlerde aranan özellikler olsun. Bu durumda  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$  değerlendirme komitesindeki öğretmenler olarak düşünülebilir.

$(\mathcal{F}, A), (\mathcal{G}, A), (\mathcal{H}, A) \in S(X, A)$  soft kümeleri ile okula alınmak için değerlendirilen öğretmenlerde bulunan özellikler,

$\Gamma(p_1), \Gamma(p_2), \Gamma(p_3) \in FP(X)$  fuzzy kümeleri ile okula alınmak için değerlendirilen öğretmenlerin sırasıyla formasyon, tecrübe ve alan bilgisine göre değerlendirilmeleri,

$(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A), (\Gamma_3, A) \in FS(X, A)$  fuzzy soft kümeleri ile okula alınmak için değerlendirilen öğretmenlerin değerlendirmeleri ile birlikte özellikleri olarak tanımlansın.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\Gamma_1, A) &= \{(p_1, \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.8), (x_3, 1)\}), (p_2, \{(x_1, 1), (x_2, 0.1)\}), \\ &\quad (p_3, \{(x_1, 0.8), (x_3, 1)\})\} \end{aligned}$$

$$(\Gamma_2, A) = \{(p_1, \{(x_1, 0.75), (x_2, 0.88), (x_3, 0.9)\}), (p_2, \{(x_1, 0.9)\}), (p_3, \{(x_1, 0.8)\})\}$$

$$(\Gamma_3, A) = \{(p_1, \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.8), (x_3, 1)\}), (p_2, \{(x_1, 1), (x_2, 0.3), (x_3, 0.5)\}),$$

$$(p_3, \{(x_1, 0.8), (x_3, 1)\})\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

**Tanım 3.2**  $(\Gamma, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için  $\Gamma(p)$ ,  $X$  in boş fuzzy altkümesi yani  $\Gamma(p) = \Phi$  oluyor ise  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine **boş fuzzy soft küme** denir ve  $\tilde{\Phi}$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

**Tanım 3.3**  $(\Gamma, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için  $\Gamma(p)$ ,  $X$  in evrensel fuzzy kümesi yani  $\Gamma(p) = X$  oluyor ise  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine **evrensel fuzzy soft küme** denir ve  $\tilde{A}$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

**Tanım 3.4**  $(\Gamma, A) \in FS(X, A)$  ve  $\mathcal{I} = [0, 1]$  olsun. Her  $x \in X$  ve  $c_p \in \mathcal{I}$  için  $\tilde{c}_p(x) = c_p$  olmak üzere  $\forall p \in A$  için  $\Gamma(p) = \tilde{c}_p$  oluyor ise  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine **sabit fuzzy soft küme** denir ve  $(\tilde{c}, A)$  ile gösterilir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 3.5**  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p) \subseteq \Gamma_2(p)$  oluyor ise  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A)$  fuzzy soft kümesinin **fuzzy soft alt kümesidir** denir ve  $(\Gamma_1, A) \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A)$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

Bu tanımda dikkat edilmesi gereken  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p), \Gamma_2(p) \in FP(X)$  olduğundan  $\Gamma_1(p) \subseteq \Gamma_2(p)$  sağlanması için gerek ve yeter şart  $\forall x \in X$  için  $\mu_{\Gamma_1(p)}(x) \leq \mu_{\Gamma_2(p)}(x)$  sağlanmasıdır (Chang 1968).

**Tanım 3.6**  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$  olsun. Eğer  $(\Gamma_1, A) \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A)$  ve  $(\Gamma_2, A) \tilde{\subseteq} (\Gamma_1, A)$  oluyor ise  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A)$  fuzzy soft kümesine **fuzzy soft eşittir** denir ve  $(\Gamma_1, A) \tilde{=} (\Gamma_2, A)$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

**Tanım 3.7**  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için

$$(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2)(p) = \Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p)$$

oluyor ise  $(\Gamma, A) = (\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)$  olmak üzere  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$  kümelerinin **fuzzy soft arakesiti** denir ve  $(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2, A)$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

**Tanım 3.8**  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için

$$(\Gamma_1 \tilde{\cup} \Gamma_2)(p) = \Gamma_1(p) \cup \Gamma_2(p)$$

oluyor ise  $(\Gamma, A) = (\Gamma_1, A) \tilde{\cup} (\Gamma_2, A)$  olmak üzere  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$  kümelerinin **fuzzy soft birleşimi** denir ve  $(\Gamma_1 \tilde{\cup} \Gamma_2, A)$  biçiminde gösterilir (Çağman vd. 2011a).

**Tanım 3.9**  $X$  evrensel küme,  $J \neq \emptyset$  bir indis kümesi ve  $\{(\Gamma_i, A)\}_{i \in J}$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

i)  $\{(\Gamma_i, A)\}_{i \in J}$  ailesinin **arakesiti**  $\forall p \in A$  için  $\left(\bigcap_{i \in J} \Gamma_i\right)(p) = \bigcap_{i \in J} (\Gamma_i(p))$  biçiminde tanımlanır ve

$$\bigcap_{i \in J} (\Gamma_i, A) = \left(\bigcap_{i \in J} \Gamma_i, A\right) \quad (3.1)$$

ile gösterilir.

ii)  $\{(\Gamma_i, A)\}_{i \in J}$  ailesinin **birleşimi**  $\forall p \in A$  için  $\left(\bigcup_{i \in J} \Gamma_i\right)(p) = \bigcup_{i \in J} (\Gamma_i(p))$  biçiminde tanımlanır ve

$$\bigcup_{i \in J} (\Gamma_i, A) = \left(\bigcup_{i \in J} \Gamma_i, A\right) \quad (3.2)$$

ile gösterilir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 3.10**  $(\Gamma, A) \in FS(X, A)$  olsun.  $\forall p \in A$  için  $\Gamma^c(p) = (\Gamma(p))^c$  oluyor ise  $(\Gamma^c, A)$  fuzzy soft kümesine  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesinin **tümleyeni** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

Bu tanımda dikkat edilmesi gereken  $\forall p \in A$  için  $\Gamma^c(p) = (\Gamma(p))^c$  sağlanması için gerek ve yeter şart  $\forall x \in X$  için  $\mu_{(\Gamma(p))^c}(x) = 1 - \mu_{\Gamma(p)}(x)$  sağlanmasıdır (Chang 1968).

**Tanım 3.11**  $X, Y \neq \emptyset$  kümeler ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.

i)  $(\Gamma_1, A) \in FS(X, A)$  fuzzy soft kümenin  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüsü,  $\forall p \in A$  için  $[f(\Gamma_1)](p) = f[\Gamma_1(p)]$  biçiminde tanımlanır ve  $f(\Gamma_1, A) = (f(\Gamma_1), A)$  ile gösterilir.

- ii)  $(\Gamma_2, A) \in FS(Y, A)$  fuzzy soft kümenin  $f$  fonksiyonu altındaki ters görüntüsü,  
 $\forall p \in A$  için  $[f^{-1}(\Gamma_2)](p) = f^{-1}[\Gamma_2(p)]$  biçiminde tanımlanır ve  
 $f^{-1}(\Gamma_2, A) = (f^{-1}(\Gamma_2), A)$  ile gösterilir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.1**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$  olsun. Bu durumda,

- i)  $(\Gamma_1, A) \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A) \Rightarrow f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\subseteq} f[(\Gamma_2, A)]$  .  
ii)  $f[(\Gamma_1, A) \tilde{\cup} (\Gamma_2, A)] = f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\cup} f[(\Gamma_2, A)]$  .  
iii)  $f[(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)] \tilde{\subseteq} f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\cap} f[(\Gamma_2, A)]$  .  
iv)  $f$  birebir  $\Rightarrow f[(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)] = f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\cap} f[(\Gamma_2, A)]$  .

(Nazmul ve Samanta 2014)

**İspat.**  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A), (X, A)$  üzerinde fuzzy soft kümeler olduğundan  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p)$  ve  $\Gamma_2(p)$ ,  $X$  kümesinin iki fuzzy altkümesidir.

- (i)  $(\Gamma_1, A) \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A)$  olduğundan  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p) \subseteq \Gamma_2(p)$  dir. Bu durumda Teorem 2.1 'in (ii) özelliğinden  $f[\Gamma_1(p)] \subseteq f[\Gamma_2(p)]$  dir. Buradan

$$(f[\Gamma_1(p)], A) \subseteq (f[\Gamma_2(p)], A)$$

ve

$$f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\subseteq} f[(\Gamma_2, A)]$$

dir.

- (ii)  $\forall p \in A$  için  $(\Gamma_1 \tilde{\cup} \Gamma_2)(p) = \Gamma_1(p) \cup \Gamma_2(p)$  olduğundan

$$[f(\Gamma_1 \tilde{\cup} \Gamma_2)](p) = f[(\Gamma_1(p) \cup \Gamma_2(p))]$$

dir. Teorem 2.2 nin (iii) özelliğinden  $f[(\Gamma_1(p) \cup \Gamma_2(p))] = f[(\Gamma_1(p)) \cup f[\Gamma_2(p)]]$  sağlanır. Buradan

$$[f(\Gamma_1 \tilde{\cup} \Gamma_2)](p) = [f(\Gamma_1) \tilde{\cup} f(\Gamma_2)](p)$$

ve

$$f[(\Gamma_1, A)\tilde{\cup}(\Gamma_2, A)] = f[(\Gamma_1, A)]\tilde{\cup}f[(\Gamma_2, A)]$$

bulunur.

(iii)  $\forall p \in A$  için  $(\Gamma_1\tilde{\cap}\Gamma_2)(p) = \Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p)$  olduğundan

$$f[(\Gamma_1\tilde{\cap}\Gamma_2)](p) = f[(\Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p))]$$

dir. Teorem 2.2 nin (iv) özelliğinden  $f[(\Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p))] \subseteq f[(\Gamma_1(p))] \cap f[(\Gamma_2(p))]$

sağlanır. Buradan

$$f[(\Gamma_1\tilde{\cap}\Gamma_2)](p) \subseteq [(f(\Gamma_1)\tilde{\cap}f(\Gamma_2))(p)]$$

ve

$$f[(\Gamma_1, A)\tilde{\cap}(\Gamma_2, A)] \subseteq f[(\Gamma_1, A)]\tilde{\cap}f[(\Gamma_2, A)]$$

bulunur.

(iv)  $f$  birebir olduğundan

$$f[(\Gamma_1, A)\tilde{\cap}(\Gamma_2, A)] = f[(\Gamma_1, A)]\tilde{\cap}f[(\Gamma_2, A)]$$

bulunur. ■

**Teorem 3.2**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $(\Gamma'_1, A), (\Gamma'_2, A) \in FS(Y, A)$  olsun. Bu durumda,

i)  $(\Gamma'_1, A)\tilde{\subset}(\Gamma'_2, A) \Rightarrow f^{-1}[(\Gamma'_1, A)]\tilde{\subset}f^{-1}[(\Gamma'_2, A)]$ .

ii)  $f^{-1}[(\Gamma'_1, A)\tilde{\cup}(\Gamma'_2, A)] = f^{-1}[(\Gamma'_1, A)]\tilde{\cup}f^{-1}[(\Gamma'_2, A)]$ .

iii)  $f^{-1}[(\Gamma'_1, A)\tilde{\cap}(\Gamma'_2, A)] = f^{-1}[(\Gamma'_1, A)]\tilde{\cap}f^{-1}[(\Gamma'_2, A)]$ .

(Ahmad ve Kharal 2009b)

**İspat.** Teorem 3.1 'e benzer biçimde yapılır. ■

**Teorem 3.3**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $(\Gamma', A) \in FS(Y, A)$  olsun. Bu durumda,

i)  $f[f^{-1}[(\Gamma', A)]] \tilde{=} (\Gamma', A)$  .

ii)  $f$  fonksiyonu örten ise  $f[f^{-1}[(\Gamma', A)]] = (\Gamma', A)$ .

(Aygünoğlu vd. 2014)

**İspat.** Teorem 3.1 'e benzer biçimde yapılır. ■

**Teorem 3.4**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve  $(\Gamma, A) \in FS(X, A)$  olsun.

i)  $(\Gamma, A) \tilde{=} f^{-1}(f[(\Gamma, A)])$  .

ii)  $f$  fonksiyonu birebir ise  $f^{-1}(f[(\Gamma, A)]) = (\Gamma, A)$ .

(Aygünoğlu vd. 2014).

**İspat.** Teorem 3.1 'e benzer biçimde yapılır. ■

**Tanım 3.12**  $X$  boş kümeden farklı bir küme,  $A$  parametrelerin kümesi olmak üzere  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$   $X$  üzerinde iki fuzzy soft küme olsun. Bu durumda  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$  nın **kartezyen çarpımı**,  $\forall p \in A$  için  $[\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2](p) = \Gamma_1(p) \times \Gamma_2(p)$  olarak tanımlanır ve

$$(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_2, A) = (\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2, A)$$

ile gösterilir (Aygünoğlu vd. 2014).

**Not** Bundan sonra,  $\forall p \in A$  ve  $\forall x \in X$  için  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesinde  $\Gamma(p)$  fuzzy kümesinin üyelik derecesi  $\mu_{\Gamma(p)}(x)$  yerine  $[\Gamma(p)](x)$  biçiminde gösterilecektir.

**Teorem 3.5**  $(\Gamma_1, A)$ ,  $(\Gamma_2, A)$  ve  $(\Gamma_3, A)$ ,  $X$  kümesi üzerinde fuzzy soft kümeler olsun. Bu durumda,

i)  $(\Gamma_1, A) \tilde{\times} [(\Gamma_2, A) \tilde{\cup} (\Gamma_3, A)] = [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_2, A)] \tilde{\cup} [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_3, A)]$ .

ii)  $(\Gamma_1, A) \tilde{\times} [(\Gamma_2, A) \tilde{\cap} (\Gamma_3, A)] = [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_2, A)] \tilde{\cap} [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_3, A)]$ .

$$\text{iii) } [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A)] \tilde{\cap} [(\Gamma_2, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A)] = [(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)] \tilde{\times} [(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A)].$$

(Nazmul ve Samanta 2014)

**İspat.** (i) Tanım 3.12 ve (3.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\Gamma_1, A) \tilde{\times} [(\Gamma_2, A) \tilde{\cup} (\Gamma_3, A)] &= (\Gamma_1, A) \tilde{\times} [(\Gamma_2 \tilde{\cup} \Gamma_3), A] \\ &= [(\Gamma_1 \tilde{\times} (\Gamma_2 \tilde{\cup} \Gamma_3)), A] \end{aligned}$$

olduğu açıktır.  $\forall p \in A$  ve  $x_1, x_2 \in X$  için

$$\{[\Gamma_1 \tilde{\times} (\Gamma_2 \tilde{\cup} \Gamma_3)](p)\}(x_1, x_2) = \{\Gamma_1(p) \times [\Gamma_2(p) \cup \Gamma_3(p)]\}(x_1, x_2)$$

dir.  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p)$  fuzzy kümesinin her  $x_1 \in X$  için üyelik fonksiyonu  $[\Gamma_1(p)](x_1)$  biçiminde gösterilsin. Bu durumda Tanım 2.8 den

$$\{\Gamma_1(p) \times [\Gamma_2(p) \cup \Gamma_3(p)]\}(x_1, x_2) = [\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_2(p) \cup \Gamma_3(p)](x_2)$$

sağlanır. Tanım 2.5 den  $[\Gamma_2(p) \cup \Gamma_3(p)](x_2) = [\Gamma_2(p)](x_2) \vee [\Gamma_3(p)](x_2)$  olup

$$[\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_2(p) \cup \Gamma_3(p)](x_2) = [\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [[\Gamma_2(p)](x_2) \vee [\Gamma_3(p)](x_2)]$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} &[\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [[\Gamma_2(p)](x_2) \vee [\Gamma_3(p)](x_2)] \\ &= [\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_2(p)](x_2) \vee [[\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_3(p)](x_2)] \\ &= [[\Gamma_1(p) \times \Gamma_2(p)](x_1, x_2)] \vee [[\Gamma_1(p) \times \Gamma_3(p)](x_1, x_2)] \\ &= [[(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2) \tilde{\cup} (\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_3)](p)](x_1, x_2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$[\Gamma_1 \tilde{\times} (\Gamma_2 \tilde{\cup} \Gamma_3)](p) = [(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2) \tilde{\cup} (\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_3)](p)$$

olup

$$[\Gamma_1 \tilde{\times} (\Gamma_2 \tilde{\cup} \Gamma_3), A] = [(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_2) \tilde{\cup} (\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma_3), A]$$

bulunur. Böylece

$$(\Gamma_1, A) \tilde{\times} [(\Gamma_2, A) \tilde{\cup} (H, A)] = [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_2, A)] \tilde{\cup} [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (H, A)]$$

elde edilir.

(ii) Tanım 3.12, (3.1) eşitliği ve Tanım 2.8 kullanılarak (i) ye benzer biçimde ispat yapılır.

(iii) Tanım 3.12 ve (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A)] \tilde{\cap} [(\Gamma_2, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A)] &= [(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma'_1), A] \tilde{\cap} [(\Gamma_2 \tilde{\times} \Gamma'_2), A] \\ &= [((\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma'_1) \tilde{\cap} (\Gamma_2 \tilde{\times} \Gamma'_2)), A] \end{aligned}$$

olduğu açıktır.  $\forall p \in A$  ve  $x_1, x_2 \in X$  olsun.

$$\begin{aligned} &\{[(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma'_1) \tilde{\cap} (\Gamma_2 \tilde{\times} \Gamma'_2)](p)\}(x_1, x_2) \\ &= \{[[\Gamma_1(p) \times \Gamma'_1(p)] \cap [\Gamma_2(p) \times \Gamma'_2(p)]]\}(x_1, x_2) \\ &= \{[\Gamma_1(p) \times \Gamma'_1(p)](x_1, x_2)\} \wedge \{[\Gamma_2(p) \times \Gamma'_2(p)](x_1, x_2)\} \end{aligned}$$

dir. Tanım 2.8 den

$$[\Gamma_1(p) \times \Gamma'_1(p)](x_1, x_2) = [\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma'_1(p)](x_2)$$

ve

$$[\Gamma_2(p) \times \Gamma'_2(p)](x_1, x_2) = [\Gamma_2(p)](x_1) \wedge [\Gamma'_2(p)](x_2)$$

olup

$$\begin{aligned} &\{[\Gamma_1(p) \times \Gamma'_1(p)](x_1, x_2)\} \wedge \{[\Gamma_2(p) \times \Gamma'_2(p)](x_1, x_2)\} \\ &= [\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma'_1(p)](x_2) \wedge [\Gamma_2(p)](x_1) \wedge [\Gamma'_2(p)](x_2) \\ &= \{[\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_2(p)](x_1)\} \wedge \{[\Gamma'_1(p)](x_2) \wedge [\Gamma'_2(p)](x_2)\} \\ &= [[\Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p)]](x_1) \wedge [[\Gamma'_1(p) \cap \Gamma'_2(p)]](x_2) \\ &= \{[[\Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p)] \times [[\Gamma'_1(p) \cap \Gamma'_2(p)]]\}(x_1, x_2) \\ &= \{[(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2) \tilde{\times} (\Gamma'_1 \tilde{\cap} \Gamma'_2)](p)\}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$[(\Gamma_1 \tilde{\times} \Gamma'_1) \tilde{\cap} (\Gamma_2 \tilde{\times} \Gamma'_2)](p) = [(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2) \tilde{\times} (\Gamma'_1 \tilde{\cap} \Gamma'_2)](p)$$

bulunur. Böylece

$$[(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A)] \tilde{\cap} [(\Gamma_2, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A)] = [(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)] \tilde{\times} [(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A)]. \blacksquare$$

**Tanım 3.13**  $X \neq \emptyset$  bir küme olsun.  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $\forall p \in A$  için  $\Gamma(p)$ ,  $X$  in (Rosenfeld anlamında) fuzzy altgrubu oluyor ise  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesine  $X$  üzerinde **fuzzy soft grup** denir (Aygünoğlu ve Aygün 2009).

**Teorem 3.6**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$ ,  $X$  üzerinde iki fuzzy soft grup ve  $(\Gamma_1, A)$ ,  $(\Gamma_2, A)$  nin fuzzy soft altgrubu olsun. Eğer,

$$f : X \rightarrow Y$$

homomorfizm ise  $(f(\Gamma_1), A)$  ve  $(f(\Gamma_2), A)$ ,  $Y$  üzerinde iki fuzzy soft altgruptur ve  $(f(\Gamma_1), A)$ ,  $(f(\Gamma_2), A)$  nin fuzzy soft altgrubudur (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.7**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler olsun.  $(\Gamma'_1, A)$  ve  $(\Gamma'_2, A)$ ,  $Y$  üzerinde iki fuzzy soft grup ve  $(\Gamma'_1, A)$ ,  $(\Gamma'_2, A)$  nin fuzzy soft altgrubu olsun. Eğer,

$$f : X \rightarrow Y$$

homomorfizm ise  $(f^{-1}(\Gamma'_1), A)$  ve  $(f^{-1}(\Gamma'_2), A)$ ,  $X$  üzerinde iki fuzzy soft altgruptur ve  $(f^{-1}(\Gamma'_1), A)$ ,  $(f^{-1}(\Gamma'_2), A)$  nin fuzzy soft altgrubudur (Nazmul ve Samanta 2014).

### 3.2 Fuzzy Soft Topoloji

Bu kısımda fuzzy soft topoloji kavramı verilerek, bazı özellikleri incelenmiştir.

**Tanım 3.14**  $X \neq \emptyset$  bir küme ve  $\tau \in FS(X, A)$  olsun. Eğer,

- i)  $\tilde{\Phi}, \tilde{A} \in \tau$
- ii)  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in \tau \Rightarrow (\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) \in \tau$
- iii)  $\forall i \in I$  için  $(\Gamma_i, A) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} (\Gamma_i, A) \in \tau$

özellikleri sağlanıyor ise  $\tau$  ailesine  $X$  üzerinde (Chang anlamında) **fuzzy soft topoloji** denir (Tanay ve Kandemir 2011).

**Tanım 3.15**  $X \neq \emptyset$  bir küme,  $\mathcal{I} = [0, 1]$  ve  $X$  üzerinde fuzzy soft kümelerin bir ailesi  $\tau \in FS(X, A)$  olsun. Eğer,

i)  $\forall p \in A, c_p \in \mathcal{I}$  için  $\tilde{c}(p) = \tilde{c}_p$  olmak üzere  $(\tilde{c}, A) \in \tau$

ii)  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in \tau \Rightarrow (\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) \in \tau$

iii)  $\forall i \in I$  için  $(\Gamma_i, A) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \tilde{\Gamma}_i \in \tau$

özellikleri sağlanıyor ise  $\tau$  ailesine  $X$  üzerinde **Lowen tipi fuzzy soft topoloji** denir.  $(X, A, \tau)$  üçlüsüne  $X$  üzerinde **Lowen tipi fuzzy soft topolojik uzay** denir.

$\tau$  ailesinin elemanlarına **Lowen tipi fuzzy soft açık kümeler** denir

(Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.8**  $(X, A, \tau)$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojik uzay olsun. Bu durumda her  $p \in A$  için  $\tau^p = \{\Gamma(p) \mid (\Gamma, A) \in \tau\}$  ailesi,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy topolojidir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $\tau^p$  ailesi Tanım 2.24 aksiyomlarını sağlar. Gerçekten;

(i)  $(\tilde{c}, A) \in \tau$  dır. Dolayısıyla her  $c_p \in \mathcal{I}$  için  $\tilde{c}_p \in \tau^p$  elde edilir.

(ii)  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \tau^p$  olsun. Bu durumda  $\Gamma_1(p) = \Gamma_1$  ve  $\Gamma_2(p) = \Gamma_2$  olmak üzere  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in \tau$  fuzzy soft kümeleri vardır.  $\tau$  fuzzy soft topoloji olduğundan  $(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2, A) \in \tau$  dır. Dolayısıyla  $(\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2)(p) = \Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p) = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \tau^p$  elde edilir.

(iii)  $\forall i \in I$  için  $\Gamma_i \in \tau^p$  olsun. Bu durumda  $\Gamma_i(p) = \Gamma_i$  olmak üzere  $(\Gamma_i, A) \in \tau$  fuzzy soft kümeleri vardır.  $\tau$  fuzzy soft topoloji olduğundan  $\bigcup_{i \in I} \tilde{\Gamma}_i = (\bigcup_{i \in I} \tilde{\Gamma}_i, A) \in \tau$  dır. Dolayısıyla  $(\bigcup_{i \in I} \tilde{\Gamma}_i)(p) = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i(p) = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \in \tau^p$  elde edilir.

Böylece her  $p \in A$  için  $\tau^p$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy topolojidir. ■

**Teorem 3.9**  $(X, A, \tau)$  Lowen tipi fuzzy soft topolojik uzay ve  $\tau^p$  ise Teorem 2.6 de tanımlanan topoloji olmak üzere

$$\tau^* = \{(\Gamma, A) \in FS(X, A) \mid \Gamma(p) \in \tau^p, \forall p \in A\}$$

olsun. Bu durumda her  $p \in A$  için  $[\tau^*]^p = \tau^p$  şartını sağlayan  $\tau^*$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $\forall p \in A$  için  $\tau^p = \{\mathcal{F}(p) \mid (\mathcal{F}, A) \in \tau\}$ ,  $X$  üzerinde topoloji olsun.  $\tau^*$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir ve Tanım 3.15 aksiyomlarını sağlar. Gerçekten;

(i)  $\forall p \in A$  için  $\tilde{c}(p) = \tilde{c}_p \in \tau^p$  olduğundan  $(\tilde{c}, A) \in \tau^*$  elde edilir.

(ii)  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in \tau^*$  olsun. Bu durumda  $\forall p \in A$  için  $\Gamma_1(p), \Gamma_2(p) \in \tau^p$ . Buradan  $\forall p \in A$  için

$$\Gamma_1(p) \cap \Gamma_2(p) \in \tau^p \Rightarrow (\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2)(p) \in \tau^p$$

bulunur. Böylece  $(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) = (\Gamma_1 \tilde{\cap} \Gamma_2, A) \in \tau^*$  dir.

(iii)  $\forall i \in I$  için  $(\Gamma_i, A) \in \tau^*$  olsun. Bu durumda  $\forall p \in A$  ve  $\forall i \in I$  için

$$\Gamma_i(p) \in \tau^p \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Gamma_i(p) \in \tau^p$$

bulunur. Buradan  $(\bigcup_{i \in I} \Gamma_i)(p) \in \tau^p$  dir. Böylece  $\bigcup_{i \in I} (\Gamma_i, A) \in \tau^*$  dir. O halde  $\tau^*$ ,  $X$  üzerinde soft topolojidir.

Şimdi  $U \in \tau^p$  olsun. Bu durumda  $U = \Gamma_1(p)$  olmak üzere  $\exists (\Gamma_1, A) \in \tau$  dir. Buradan  $\forall q \neq p$  için  $\Gamma_2(p) = \Gamma_1(p)$  ve  $\Gamma_2(q) = \tilde{0}$  olmak üzere  $(\Gamma_2, A) \in FS(X, A)$ . Dolayısıyla  $(\Gamma_2, A) \in \tau^*$  ve  $U = \Gamma_1(p) = \Gamma_2(p) \in [\tau^*]^p$  elde edilir.

Böylece

$$\tau^p \subseteq [\tau^*]^p \tag{3.3}$$

bulunur.

Şimdi de  $V \in [\tau^*]^p$  olsun. Bu durumda  $V = \Gamma_1(p) \in \tau^p$  olmak üzere

$\exists (\Gamma_1, A) \in \tau^*$  dir. Buradan

$$[\tau^*]^p \subseteq \tau^p \tag{3.4}$$

elde edilir.

Böylece (3.3) ve (3.4) den  $\forall p \in A$  için  $\tau^p = [\tau^*]^p$  olduğu görülür. ■

**Teorem 3.10**  $(X, A, \tau_1)$  ve  $(X, A, \tau_2)$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojik uzaylar olsun. Bu durumda

$$\tau_1 \widetilde{\cap} \tau_2 = \{(\Gamma_1, A) \mid (\Gamma_1, A) \in \tau_1 \text{ ve } (\Gamma_1, A) \in \tau_2\}$$

olmak üzere  $(X, A, \tau_1 \widetilde{\cap} \tau_2)$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojik uzaydır (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 3.16**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $\tau$  ve  $\nu$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojiler ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun.  $\tau$  topolojisinin  $f$  altındaki görüntüsü  $f(\tau)$  ve  $\nu$  topolojisinin  $f$  altındaki ters görüntüsü  $f^{-1}(\nu)$ ;

i)  $f(\tau) = \{(\Gamma_2, A) \in FS(Y, A) \mid f^{-1}(\Gamma_2, A) = (f^{-1}(\Gamma_2), A) \in \tau\}$  ve

ii)  $f^{-1}(\nu) = \{f^{-1}(\Gamma_2, A) = (f^{-1}(\Gamma_2), A) \mid (\Gamma_2, A) \in \nu\}$

olarak tanımlanır (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.11**  $X$  ve  $Y$  boş kümeden farklı kümeler,  $\tau$  ve  $\nu$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojiler ve  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i)  $f^{-1}(\nu)$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir.

ii)  $f(\tau)$ ,  $Y$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** (i)  $f^{-1}(\nu)$  ailesi Tanım 3.15 in aksiyomlarını sağlar. Gerçekten,

(i)  $\forall p \in A, \forall x \in X$  için

$$\begin{aligned} [[f^{-1}(\widetilde{c}_Y)](p)](x) &= [f^{-1}[[\widetilde{c}_Y](p)]](x) = [[\widetilde{c}_Y](p)](f(x)) \\ &= [[\widetilde{c}_Y](p)](y) = \widetilde{c}_p(y) = c_p = \widetilde{c}_p(x) = [[\widetilde{c}_X](p)](x) \end{aligned}$$

olduğundan,  $\forall c_p \in \mathcal{I}$  için  $(\widetilde{c}_X, A) = f^{-1}(\widetilde{c}_Y, A) \in f^{-1}(\nu)$  dir.

(ii)  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in f^{-1}(\nu)$  olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(\Gamma'_1, A) = (\Gamma_1, A) \text{ ve } f^{-1}(\Gamma'_2, A) = (\Gamma_2, A)$$

olacak biçimde  $\exists(\Gamma'_1, A), (\Gamma'_2, A) \in \nu$  vardır.

Buradan,  $(\Gamma'_1, A), (\Gamma'_2, A) \in \nu \Rightarrow (\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A) \in \nu$  olup

$$\begin{aligned} (\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) &= f^{-1}(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} f^{-1}(\Gamma'_2, A) \\ &= f^{-1}[(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A)] \end{aligned}$$

dir. O halde  $(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) \in f^{-1}(\nu)$ .

(iii)  $\forall i \in I$  için  $(\Gamma_i, A) \in f^{-1}(\nu)$  olsun. Bu durumda  $\forall i \in I$  için

$$f^{-1}(\Gamma'_i, A) = (\Gamma_i, A)$$

olmak üzere  $\forall i \in I$  için  $\exists(\Gamma'_i, A) \in \nu$  vardır.

Dolayısıyla  $\bigcup_{i \in I} (\Gamma'_i, A) \in \nu$  ve

$$\bigcup_{i \in I} (\Gamma_i, A) = \bigcup_{i \in I} [f^{-1}(\Gamma'_i, A)] = f^{-1}[\bigcup_{i \in I} (\Gamma'_i, A)]$$

dir. Böylece  $\bigcup_{i \in I} (\Gamma_i, A) \in f^{-1}(\nu)$  elde edilir.

O halde  $f^{-1}(\nu)$ ,  $X$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir.

**(ii)** Benzer biçimde  $f(\tau)$  ailesi Tanım 3.13 ün aksiyomlarını sağlar. Gerçekten,

(i) İspatın ilk kısmından  $(\widetilde{c}_X, A) = f^{-1}(\widetilde{c}_Y, A)$  dir. Tanım 3.16 dan

$$(\widetilde{c}_X, A) \in f(\tau)$$

elde edilir.

(ii)  $(\Gamma'_1, A), (\Gamma'_2, A) \in f(\tau)$  olsun. Bu durumda

$$f^{-1}(\Gamma'_1, A), f^{-1}(\Gamma'_2, A) \in \tau \Rightarrow f^{-1}(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} f^{-1}(\Gamma'_2, A) = f^{-1}[(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A)] \in \tau$$

olur. Bu durumda  $(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A) \in f(\tau)$  bulunur.

(iii) Her  $i \in I$  için  $(\Gamma'_i, A) \in f(\tau)$  olsun. Bu durumda  $i \in I$  için

$$f^{-1}(\Gamma'_i, A) \in \tau$$

dır. Dolayısıyla

$$\widetilde{\bigcup}_{i \in I} f^{-1}(\Gamma'_i, A) = f^{-1}[\widetilde{\bigcup}_{i \in I} (\Gamma'_i, A)] \in \tau$$

dır. O halde

$$\widetilde{\bigcup}_{i \in I} (\Gamma'_i, A) \in f(\tau)$$

elde edilir.

Böylece  $f(\tau)$ ,  $Y$  üzerinde Lowen tipi fuzzy soft topolojidir. ■

**Tanım 3.17**  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $\tau$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topoloji olsun. Bu durumda

$$\tau_{(\Gamma, A)} = \{(\Gamma_i, A) \cap (\Gamma, A) \mid i \in J, (\Gamma_i, A) \in \tau\}$$

ailesi  $(\Gamma, A)$  nın fuzzy soft alt kümelerinin bir ailesi olup  $(\Gamma, A)$  üzerinde **indirgenmiş fuzzy soft topolojidir** denir.  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ikilisine  $(X, A, \tau)$  fuzzy soft topolojik uzayının **fuzzy soft altuzay topolojisi** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Uyarı 3.1** Genelde Tanım 3.15 in (i) koşulu, indirgenmiş fuzzy soft topolojiyi karşılamamaktadır. Ancak her  $i \in J$  için  $(\Gamma'_i, A) \in \tau_{(\Gamma, A)}$  ise bu durumda her bir  $i \in J$  için  $(\Gamma'_i, A) = (\Gamma_i, A) \widetilde{\cap} (\Gamma, A)$  eşitliği sağlanacak biçimde  $(F_i, A)$  vardır.

$$(\Gamma', A) = \widetilde{\bigcup}_{i \in J} (\Gamma'_i, A) = \widetilde{\bigcup}_{i \in J} [(\Gamma_i, A) \widetilde{\cap} (\Gamma, A)]$$

ve  $\forall x \in X$ , her bir  $p \in A$  için

$$\begin{aligned} [\Gamma'(p)](x) &= \bigvee_{i \in J} [\Gamma'_i(p)](x) \\ &= \bigvee_{i \in J} \left[ \bigwedge \{[\Gamma_i(p)](x), [\Gamma(p)](x)\} \right] \\ &= \bigwedge \left\{ \left[ \bigvee_{i \in J} [\Gamma_i(p)](x) \right], [\Gamma(p)](x) \right\} \\ &= \left[ \left[ \bigcup_{i \in J} \Gamma_i(p) \right] \cap \Gamma(p) \right](x) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $(\Gamma', A) = \bigcup_{i \in J} (\Gamma_i, A) \tilde{\cap} (\Gamma, A)$  ve buradan  $(\Gamma', A) \in \tau_{(\Gamma, A)}$  elde edilir. Böylece, bu indirgenmiş fuzzy soft topoloji Tanım 3.15 in (ii) ve (iii) koşulunu sağlar (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 3.18**  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylar ve

$$f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$$

bir fonksiyon olsun. Her  $(\Gamma', A) \in \nu$  için  $f^{-1}[(\Gamma', A)] = [f^{-1}(\Gamma'), A] \in \tau$  ise  $f$  fonksiyonuna **fuzzy soft süreklili** denir.  $(\Gamma, A) \in \tau$  kümesi için  $f[(\Gamma, A)] = [f(\Gamma), A] \in \nu$  ise  $f$  fonksiyonuna **fuzzy soft açık** denir (Varol ve Aygün 2012).

$[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ve  $[(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları ve  $f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f[(\Gamma, A)] \tilde{\subseteq} (\Gamma', A)$  sağlanıyor ise

$$f: [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$$

bir fonksiyondur (Nazmul ve Samanta 2014).

**Tanım 3.19**  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ve  $[(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları ve

$$f: [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$$

bir fonksiyon olsun. Her  $(V, A) \in \nu_{(\Gamma', A)}$  kümesi için  $f^{-1}[(V, A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A) \in \tau_{(\Gamma, A)}$  ise  $f$  fonksiyonuna **rölatif fuzzy soft süreklili** denir. Her  $(U, A) \in \tau_{(\Gamma, A)}$  için  $f[(U, A)] \in \nu_{(\Gamma', A)}$  ise  $f$  fonksiyonuna **rölatif fuzzy soft açık** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.12**  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ve  $[(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları ve  $f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  bir fonksiyon olsun.  $f[(\Gamma, A)] \tilde{\subseteq} (\Gamma', A)$  sağlanacak biçimde  $f$  fuzzy soft süreklili bir fonksiyon ise

$$f: [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$$

rölatif fuzzy soft sürekli bir fonksiyondur (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $(V', A) \in \nu_{(\Gamma', A)}$  olsun. Bu durumda  $(V', A) = (V, A) \tilde{\cap} (\Gamma', A)$  ve  $f^{-1}[(V, A)] \in \tau$  olacak biçimde  $(V, A) \in \nu$  vardır. Buradan

$$f^{-1}[(V', A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A) = f^{-1}[(V, A)] \tilde{\cap} f^{-1}[(\Gamma', A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A)$$

dır.  $(\Gamma, A) \tilde{\subseteq} f^{-1}[(\Gamma', A)]$  olduğundan  $f^{-1}[(\Gamma', A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A) = (\Gamma, A)$  dır. Dolayısıyla

$$f^{-1}[(V', A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A) = f^{-1}[(V, A)] \tilde{\cap} (\Gamma, A) \in \tau_{(\Gamma, A)}.$$

Böylece  $f: [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$  rölatif fuzzy soft sürekli bir fonksiyondur. ■

**Tanım 3.20**  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  iki fuzzy soft topolojik uzay ve

$$f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$$

birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere fuzzy soft sürekli ve fuzzy soft açık ise  $f$  fonksiyonuna **fuzzy soft homeomorfizm** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

$[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ve  $[(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları olsun.

$$f: [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}]$$

birebir ve örten bir fonksiyon olmak üzere rölatif fuzzy soft sürekli, rölatif fuzzy soft açık ve  $f[(\Gamma, A)] = (\Gamma', A)$  eşitliği sağlanıyor ise  $f$  fonksiyonuna **rölatif fuzzy soft homeomorfizm** denir.

**Teorem 3.13**  $(X, A, \tau)$ ,  $(Y, A, \nu)$  ve  $(Z, A, \omega)$  fuzzy soft topolojik uzaylar olmak üzere  $f: (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  ve  $g: (Y, A, \nu) \rightarrow (Z, A, \omega)$  fuzzy soft sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$g.f: (X, A, \tau) \rightarrow (Z, A, \omega)$$

bileşke fonksiyonu da fuzzy soft sürekli bir fonksiyondur (Nazmul ve Samanta 2014).

Benzer biçimde  $f$  ve  $g$  fuzzy soft açık iki fonksiyon olsun. Bu durumda  $g.f$  bileşke fonksiyonu da fuzzy soft açıktır.

**İspat.**  $(\Gamma_1, A) \in \omega$  olsun.  $g : (Y, A, \nu) \rightarrow (Z, A, \omega)$  fuzzy soft sürekl bir fonksiyon olduğundan

$$g^{-1}[(\Gamma_1, A)] \in \nu$$

dır.  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  fuzzy soft sürekl bir fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}[g^{-1}[(\Gamma_1, A)]] \in \tau$$

dır. Dolayısıyla  $(g.f)^{-1}[(\Gamma_1, A)] \in \tau$  elde edilir. Böylece

$$g.f : (X, A, \tau) \rightarrow (Z, A, \omega)$$

fuzzy soft sürekl bir fonksiyondur.

Fuzzy soft açık fonksiyon için de ispat benzer biçimdedir. ■

**Teorem 3.14**  $[(\Gamma_1, A), \tau_{(\Gamma_1, A)}]$ ,  $[(\Gamma_2, A), \nu_{(\Gamma_2, A)}]$  ve  $[(\Gamma_3, A), \omega_{(\Gamma_3, A)}]$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$ ,  $(Y, A, \nu)$  ve  $(Z, A, \omega)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları olsun.

$f : [(\Gamma_1, A), \tau_{(\Gamma_1, A)}] \rightarrow [(\Gamma_2, A), \nu_{(\Gamma_2, A)}]$  ve  $g : [(\Gamma_2, A), \nu_{(\Gamma_2, A)}] \rightarrow [(\Gamma_3, A), \omega_{(\Gamma_3, A)}]$  rölatif fuzzy soft sürekl iki fonksiyon olmak üzere  $f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A)$  ise

$$g.f : [(\Gamma_1, A), \tau_{(\Gamma_1, A)}] \rightarrow [(\Gamma_3, A), \omega_{(\Gamma_3, A)}]$$

rölatif fuzzy soft sürekl fonksiyondur (Nazmul ve Samanta 2014).

Benzer biçimde  $f$  ve  $g$  rölatif fuzzy soft açık iki fonksiyon olsun.

Eğer,  $f[(\Gamma_1, A)] \tilde{\subseteq} (\Gamma_2, A)$  ise  $g.f$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft açıktır.

**İspat.**  $(W, A) \in \omega_{(\Gamma_3, A)}$  olsun.  $g : [(\Gamma_2, A), \nu_{(\Gamma_2, A)}] \rightarrow [(\Gamma_3, A), \omega_{(\Gamma_3, A)}]$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft sürekl bir fonksiyon olduğundan

$$g^{-1}[(\Gamma_3, A)] \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) \in \nu_{(\Gamma_2, A)}$$

olur. Üstelik  $f : [(\Gamma_1, A), \tau_{(\Gamma_1, A)}] \rightarrow [(\Gamma_2, A), \nu_{(\Gamma_2, A)}]$  fonksiyonu da rölatif fuzzy soft süreklili bir fonksiyon ve  $(\Gamma_1, A) \widetilde{\subseteq} f^{-1}[(\Gamma_2, A)]$  olduğundan

$$f^{-1}[g^{-1}[(W, A)]\widetilde{\cap}(\Gamma_2, A)]\widetilde{\cap}(\Gamma_1, A) \in \tau_{(\Gamma_1, A)}$$

dır. Buradan

$$(g.f)^{-1}[(W, A)]\widetilde{\cap}f^{-1}[(\Gamma_2, A)]\widetilde{\cap}(\Gamma_1, A) = (g.f)^{-1}[(W, A)]\widetilde{\cap}(\Gamma_1, A) \in \tau_{(\Gamma_1, A)}$$

dır. Dolayısıyla

$$g.f : [(\Gamma_1, A), \tau_{(\Gamma_1, A)}] \rightarrow [(\Gamma_3, A), \omega_{(\Gamma_3, A)}]$$

rölatif fuzzy soft süreklili bir fonksiyondur.

Rölatif fuzzy soft açık fonksiyon için de ispat benzer biçimdedir. ■

**Tanım 3.21**  $\tau$ ,  $X$  kümesi üzerinde fuzzy soft topoloji ve  $\beta$ ,  $\tau$  nun bir alt ailesi olsun. Eğer  $\tau$  nun her elemanı,  $\beta$  nin elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa  $\beta$  ya  $\tau$  nun bir **tabanı** denir (Varol ve Aygün 2012).

**Tanım 3.22**  $\tau$ ,  $X$  kümesi üzerinde fuzzy soft topoloji,  $\tau_{(\Gamma, A)}$ ,  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft kümesi üzerinde indirgenmiş fuzzy soft topoloji ve  $\beta'$ ,  $\tau_{(\Gamma, A)}$  nun bir alt ailesi olsun. Eğer  $\tau_{(\Gamma, A)}$  nun her elemanı,  $\beta'$  nün elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa  $\beta'$ ,  $\tau_{(\Gamma, A)}$  için bir **tabandır** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.15**  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  bir fonksiyon ve  $\beta$ ,  $\nu$  için bir taban olsun.

i)  $\forall (\Gamma_2, A) \in \beta$  için  $f^{-1}[(\Gamma_2, A)] \in \tau$  dır.

ii)  $f$  fuzzy soft süreklidir.

ifadeleri denktir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** (i)  $\Rightarrow$  (ii)

$(\Gamma_3, A) \in \nu$  olsun. Bu durumda  $i \in J$  için  $(\Gamma_3, A) = \widetilde{\bigcup}_{i \in J} (\Gamma_i, A)$  ve  $f^{-1}[(\Gamma_i, A)] \in \tau$  olmak üzere  $i \in J$  için  $(\Gamma_i, A) \in \beta$  vardır. Buradan

$$f^{-1}[(\Gamma_3, A)] = f^{-1}[\widetilde{\bigcup}_{i \in J} (\Gamma_i, A)] = \widetilde{\bigcup}_{i \in J} [f^{-1}[(\Gamma_i, A)]] \in \tau$$

dır. Dolayısıyla  $f$  fuzzy soft süreklidir.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) ifadesinin ispatı açıktır. ■

**Teorem 3.16**  $(\Gamma_1, A, \tau_{(\Gamma_1, A)})$  ve  $(\Gamma_2, A, \nu_{(\Gamma_2, A)})$  sırasıyla  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının fuzzy soft altuzayları ve  $\beta', \nu_{(\Gamma_2, A)}$  için bir taban olsun.  $f : (\Gamma_1, A, \tau_{(\Gamma_1, A)}) \rightarrow (\Gamma_2, A, \nu_{(\Gamma_2, A)})$  bir fonksiyon olmak üzere

i)  $\forall (V, A) \in \beta'$  için  $f^{-1}[(V, A)] \tilde{\cap} (\Gamma_1, A) \in \tau_{(\Gamma_1, A)}$  dır.

ii)  $f$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

ifadeleri denktir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** Teorem 3.15 ün ispatına benzer biçimdedir. ■

**Teorem 3.17**  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  Lowen tipi fuzzy soft topolojik iki uzay olsun. Bu durumda  $\beta = \{(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A) \mid (\Gamma_1, A) \in \tau, (\Gamma'_1, A) \in \nu\}$ ,  $X \times Y$  üzerinde fuzzy soft topoloji için açık tabandır (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $(\widetilde{c_{(X \times Y)}}), A) = (\widetilde{c_X}, A) \times (\widetilde{c_Y}, A)$  olduğu biliniyor. Buradan  $(\widetilde{c_X}, A) \in \tau$  ve  $(\widetilde{c_Y}, A) \in \nu$  olduğundan

$$(\widetilde{c_{(X \times Y)}}), A) \in \beta$$

dır. Şimdi,  $(\Gamma_1, A), (\Gamma_2, A) \in \tau$  ve  $(\Gamma'_1, A), (\Gamma'_2, A) \in \nu$  olmak üzere  $(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A), (\Gamma_2, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A) \in \beta$  olsun. Tanım 3.15 in (ii) aksiyomundan

$$(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A) \in \tau \text{ ve } (\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A) \in \nu$$

dır. Bu durumda Teorem 3.5 in (iii) özelliğinden

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_1, A)] \tilde{\cap} [(\Gamma_2, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A)] \\ & = [(\Gamma_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma_2, A)] \tilde{\times} [(\Gamma'_1, A) \tilde{\cap} (\Gamma'_2, A)] \in \beta \end{aligned}$$

dır. Böylece  $\beta$ ,  $X \times Y$  üzerinde fuzzy soft topoloji için açık tabandır. ■

**Tanım 3.23**  $\beta$  açık taban tarafından indirgenen  $X \times Y$  üzerindeki fuzzy soft topolojisine,  $\tau$  ve  $\nu$  fuzzy soft topolojilerinin **çarpım fuzzy soft topolojisi** denir ve  $\tau \tilde{\times} \nu$  ile gösterilir.  $[X \times Y, A, \tau \tilde{\times} \nu]$  üçlüsüne de  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının **çarpım fuzzy soft topolojik uzayı** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 3.18**  $\{(X_j, A, \tau_j), j = 1, 2\}$  iki fuzzy soft topolojik uzay ve  $(X, A, \tau)$  çarpım fuzzy soft topolojik uzay olsun. Her  $j = 1, 2$  için  $(\Gamma_j, A)$ ,  $X_j$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde çarpım fuzzy soft küme olsun. Bu durumda  $(\Gamma, A)$  üzerinde  $\tau_{(\Gamma, A)}$  indirgenmiş fuzzy soft topolojisi  $j = 1, 2$  için  $(U'_j, A) \in (\tau_j)_{\Gamma_j}$  olmak üzere  $\prod_{j=1}^2 (U'_j, A)$  biçiminde bir tabana sahiptir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** Teorem 3.17 den,  $\tau$

$$\beta = \left\{ \prod_{j=1}^2 (U_j, A) \mid (U_j, A) \in \tau_j, j = 1, 2 \right\}$$

biçiminde bir tabana sahiptir. Buradan  $\tau_{(\Gamma, A)}$  için taban

$$\begin{aligned} \beta_{(\Gamma, A)} &= \left\{ \left( \prod_{j=1}^2 (U_j, A) \right) \tilde{\cap} (\Gamma, A) \mid (U_j, A) \in \tau_j, j = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^2 [(U_j, A) \tilde{\cap} (\Gamma_j, A)] \mid (U_j, A) \in \tau_j, j = 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^2 (U'_j, A) \mid (U'_j, A) = (U_j, A) \tilde{\cap} (\Gamma_j, A) \in (\tau_j)_{\Gamma_j} \right\} \end{aligned}$$

dir.

Bu çarpım fuzzy soft altuzayı

$$(\Gamma, A, \tau_{(\Gamma, A)}) = \prod_{i=1}^2 [\Gamma_i, A, (\tau_i)_{\Gamma_i}]$$

ile gösterilmektedir. ■

**Teorem 3.19**  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  fuzzy soft topolojik uzaylar olsun.

Bu durumda,

$$\pi_X : (X \times Y, A, \tau \tilde{\times} \nu) \rightarrow (X, A, \tau)$$

ve

$$\pi_Y : (X \times Y, A, \tau \tilde{\times} \nu) \rightarrow (Y, A, \nu)$$

izdüşüm fonksiyonları fuzzy soft sürekli ve fuzzy soft açıktır. Üstelik  $\tau \tilde{\times} \nu$ ,  $X \times Y$  üzerinde izdüşüm fonksiyonlarının fuzzy soft sürekli olduğu en dar fuzzy soft topolojidir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** Önce  $\pi_X$  fonksiyonunun fuzzy soft sürekli olduğu gösterilsin.

$(\Gamma_1, A) \in \tau$  olsun. Buradan

$$\pi_X^{-1}[(\Gamma_1, A)] = (\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\tilde{1}_Y, A)$$

$\tau \tilde{\times} \nu$  üzerinde temel açık fuzzy soft kümedir. Dolayısıyla  $\pi_X$  fuzzy soft süreklidir.

Şimdi de  $\pi_X$  fonksiyonunun fuzzy soft açık olduğu gösterilsin.  $(\Gamma_2, A) \in \tau \tilde{\times} \nu$  olsun.

Bu durumda  $(\Gamma_2, A) = \bigcup_{i \in J} [(U_i, A) \tilde{\times} (V_i, A)]$  olmak üzere  $\beta$  nın

$$\beta' = \{[(U_i, A), (V_i, A)], i \in J\}$$

alt ailesi vardır.

$(U, A) = \tilde{U}(U_i, A)$  ve  $(V, A) = \tilde{U}(V_i, A)$  olsun. Bu durumda her  $p \in A$  ve  $x \in X$  için

$$\begin{aligned} [[\pi_X(\Gamma_2)](p)](x) &= [\pi_X[\Gamma_2(p)]](x) \\ &= \left[ \pi_X \left[ \bigcup_{i \in J} [U_i \tilde{\times} V_i](p) \right] \right] (x) \\ &= \left[ \pi_X \left[ \bigcup_{i \in J} [U_i(p) \times V_i(p)] \right] \right] (x) \\ &= \bigvee_{(x,y) \in \pi_X^{-1}(x)} \left[ \bigcup_{i \in J} [U_i(p) \times V_i(p)] \right] (x, y) \\ &= \bigvee_{(x,y) \in \pi_X^{-1}(x)} \bigvee_{i \in J} [[U_i(p)](x) \wedge [V_i(p)](y)] \\ &= \bigvee_{i \in J} \left[ \bigvee_{(x,y) \in \pi_X^{-1}(x)} [[U_i(p)](x) \wedge [V_i(p)](y)] \right] \\ &= \bigvee_{i \in J} \left[ [U_i(p)](x) \wedge \left[ \bigvee_{(x,y) \in \pi_X^{-1}(x)} [V_i(p)](y) \right] \right] \\ &= \bigvee_{i \in J} \left[ [U_i(p)](x) \wedge \left[ \bigvee_{y \in Y} [V_i(p)](y) \right] \right] \\ &= \bigvee_{i \in J} [[U_i(p)](x) \wedge c_{i,p}]. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $(U_i, A)\tilde{\cap}(\tilde{c}_i, A) \in \tau$  olduğundan

$$\pi_X[(\Gamma_2, A)] = \bigcup_{i \in J} [(U_i, A)\tilde{\cap}(\tilde{c}_i, A)] \in \tau$$

dır. Böylece,  $\pi_X$  fuzzy soft açıktır.

Benzer biçimde,  $\pi_Y$  nin fuzzy soft sürekli ve aynı zamanda fuzzy soft açık olduğu da gösterilebilir.

Şimdi  $\pi_X : (X \times Y, A, \omega) \rightarrow (X, A, \tau)$  ve  $\pi_Y : (X \times Y, A, \omega) \rightarrow (Y, A, \nu)$  fonksiyonları fuzzy soft sürekli olacak biçimde  $\omega$ ,  $X \times Y$  üzerinde herhangi fuzzy soft topoloji ve  $[(U, A)\tilde{\times}(V, A)]$ ,  $\tau \tilde{\times} \nu$  üzerinde temel açık fuzzy soft küme olsun. Buradan

$$\begin{aligned} [(U, A)\tilde{\times}(V, A)] &= [(U, A)\tilde{\cap}(\tilde{1}_X, A)]\tilde{\times}[(\tilde{1}_Y, A)\tilde{\cap}(V, A)] \\ &= [(U, A)\tilde{\times}(\tilde{1}_Y, A)]\tilde{\cap}[(\tilde{1}_X, A)\tilde{\times}(V, A)] \\ &= \pi_X^{-1}[(U, A)]\tilde{\cap}\pi_Y^{-1}[(V, A)] \in \omega \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $\tau \tilde{\times} \nu$ ,  $\omega$  nin alt kümesidir.

Böylece  $\tau \tilde{\times} \nu$  topolojisi  $X \times Y$  üzerinde izdüşüm fonksiyonlarının fuzzy soft sürekli olduğu en dar fuzzy soft topolojidir. ■

**Teorem 3.20**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ve  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı ve  $i = 1, 2$  için  $\pi_i : (X, A, \tau) \rightarrow (X_i, A, \tau_i)$  izdüşüm fonksiyonu olsun.  $(Y, A, \nu)$  herhangi bir fuzzy soft topolojik uzay olmak üzere

i)  $f : (Y, A, \nu) \rightarrow (X, A, \tau)$  fonksiyonu fuzzy soft sürekli dir.

ii)  $i = 1, 2$  için  $\pi_i f : (Y, A, \nu) \rightarrow (X_i, A, \tau_i)$  fonksiyonu fuzzy soft sürekli dir

ifadeleri denktir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat. (i)  $\Rightarrow$  (ii)**

$f : (Y, A, \nu) \rightarrow (X, A, \tau)$  fuzzy soft sürekli olsun.

$i = 1, 2$  için  $\pi_i : (X, A, \tau) \rightarrow (X_i, A, \tau_i)$  fuzzy soft sürekli dir. Bu durumda Teorem 3.13 den dolayı  $i = 1, 2$  için  $\pi_i f$  fuzzy soft sürekli dir.

**(ii)  $\Rightarrow$  (i)**

$i = 1, 2$  için  $\pi_i f$  fuzzy soft süreklidir.

$(\Gamma, A) \in \tau$  ve  $\beta = \{(U, A) \tilde{\times} (V, A) \mid (U, A) \in \tau_1, (V, A) \in \tau_2\}$  verilsin.

Bu durumda  $(\Gamma, A) = \tilde{\cup}_i [(U_i, A) \tilde{\times} (V_i, A)]$  olmak üzere  $\beta$  nin en azından bir

$$\beta' = \{(U_i, A), (V_i, A) \mid i \in J\}$$

alt ailesi vardır.

Buradan,

$$\begin{aligned} f^{-1}[(\Gamma, A)] &= f^{-1}[\tilde{\cup}_i [(U_i, A) \tilde{\times} (V_i, A)]] \\ &= f^{-1}[\tilde{\cup}_i [\pi_1^{-1}(U_i, A) \tilde{\cap} \pi_2^{-1}(V_i, A)]] \\ &= \tilde{\cup}_i [(\pi_1 f)^{-1}(U_i, A) \tilde{\cap} (\pi_2 f)^{-1}(V_i, A)] \in \nu. \end{aligned}$$

Böylece  $f$  fuzzy soft süreklidir. ■

Aşağıda verilecek olan Teorem 3.21 ve Teorem 3.22 bir sonraki bölümde fuzzy soft topolojik grup çalışmasında kullanılacaktır.

**Teorem 3.21**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı ve  $(Y, A, \nu)$ ,  $(Y_1, A, \nu_1)$  ile  $(Y_2, A, \nu_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı olsun.  $j = 1, 2$  için  $f_j : (X_j, A, \tau_j) \rightarrow (Y_j, A, \nu_j)$  fonksiyonları fuzzy soft süreklidir ise

$$\begin{aligned} f = f_1 \times f_2 & : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu) \\ (x_1, x_2) & \rightarrow f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $f$  çarpım fonksiyonu fuzzy soft süreklidir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**

$$\begin{aligned} [\pi_{Y_1} f](x_1, x_2) &= \pi_{Y_1}[f_1(x_1), f_2(x_2)] \\ &= f_1(x_1) \end{aligned}$$

$\pi_{X_1}(x_1, x_2) = x_1$  olduğundan

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f_1[\pi_{X_1}(x_1, x_2)] \\ &= [f_1 \pi_{X_1}](x_1, x_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $\pi_{Y_1} f = f_1 \pi_{X_1}$  bulunur. Buradan da  $f_1$  ve  $\pi_{X_1}$  fuzzy soft sürekli olduğundan ve  $\pi_{Y_1} f$  fuzzy soft süreklidir.

Benzer şekilde  $\pi_{Y_2} f$  fuzzy soft süreklidir. Buradan  $f$  fuzzy soft süreklidir. ■

**Teorem 3.22**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı ve  $(Y, A, \nu)$ ,  $(Y_1, A, \nu_1)$  ile  $(Y_2, A, \nu_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı olsun.  $j = 1, 2$  için  $f_j \circ f : (X_j, A, \tau_j) \rightarrow (Y_j, A, \nu_j)$  fonksiyonları fuzzy soft açık ise

$$\begin{aligned} f = f_1 \times f_2 & : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu) \\ (x_1, x_2) & \rightarrow f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $f$  çarpım fonksiyonu fuzzy soft açıktır (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $(U, A) \in \tau$  olsun. Bu durumda  $(U, A) = \bigcup_{m \in \Delta} [(U_{1m}, A) \tilde{\times} (U_{2m}, A)]$  olacak biçimde  $j = 1, 2$ ,  $m \in \Delta$  için  $(U_{jm}, A) \in \tau_j$  açık fuzzy soft kümeleri vardır. Şimdi,

$$\begin{aligned} [[f(U)](p)](y) & = \bigcup_{m \in \Delta} [[f_1(U_{1m})](p) \tilde{\times} [f_2(U_{2m})](p)](y) \\ & = \bigvee_{m \in \Delta} \bigvee_{(z_1, z_2) \in f^{-1}(y)} [[U_{1m}(p)](z_1) \tilde{\times} [U_{2m}(p)](z_2)] \\ & = \bigvee_{m \in \Delta} \bigvee_{z_1 \in f_1^{-1}(y_1)} \bigvee_{z_2 \in f_2^{-1}(y_2)} [[U_{1m}(p)](z_1) \wedge [U_{2m}(p)](z_2)], y = (y_1, y_2) \\ & = \bigvee_{m \in \Delta} \left\{ \left[ \bigvee_{z_1 \in f_1^{-1}(y_1)} [U_{1m}(p)](z_1) \right] \wedge \left[ \bigvee_{z_2 \in f_2^{-1}(y_2)} [U_{2m}(p)](z_2) \right] \right\} \\ & = \bigvee_{m \in \Delta} \{ [f_1[U_{1m}(p)]](y_1) \wedge [f_2[U_{2m}(p)]](y_2) \} \\ & = \bigcup_{m \in \Delta} [[f_1(U_{1m})](p) \tilde{\times} [f_2(U_{2m})](p)](y) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla

$$f[(U, A)] = \bigcup_{m \in \Delta} \{ [f_1(U_{1m}), A] \tilde{\times} [f_2(U_{2m}), A] \}$$

dır.  $j = 1, 2$  için  $f_j$  fuzzy soft açık olduğundan  $f[(U, A)]$ ,  $\nu$  da açık olup,

$f(x_1, x_2) = (f(x_1), f_2(x_2))$  eşitliği ile tanımlanan

$$f = f_1 \times f_2 : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$$

çarpım fonksiyonu fuzzy soft açıktır. ■

**Teorem 3.23**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzay olsun.  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$  sırasıyla  $X_1$  ve  $X_2$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $(\Gamma, A)$  çarpım fuzzy soft kümesine denk olsun.  $(Y, A, \nu)$  herhangi bir fuzzy soft topolojik uzay,  $(\Gamma', A)$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $f : [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  bir fonksiyon olmak üzere

i)  $f$  rölatif fuzzy soft süreklidir.

ii)  $j = 1, 2$  için  $\pi_j f$  rölatif fuzzy soft süreklidir.

ifadeleri denktir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat. (i)  $\Rightarrow$  (ii)**

$f$  rölatif fuzzy soft sürekli olsun.  $j = 1, 2$  için  $\pi_j$  fuzzy soft sürekli olduğundan ve Teorem 3.12 den dolayı her  $j = 1, 2$  için  $\pi_j$  rölatif fuzzy soft süreklidir. Buradan da Teorem 3.14 den dolayı  $j = 1, 2$  için  $\pi_j f$  rölatif fuzzy soft süreklidir.

**(ii)  $\Rightarrow$  (i)**

$j = 1, 2$  için  $\pi_j f$  rölatif fuzzy soft sürekli olsun.  $(H_1, A) \in \tau_{1(\Gamma_1, A)}$  ve  $(H_2, A) \in \tau_{2(\Gamma_2, A)}$  olmak üzere  $(H, A) = (H_1, A) \tilde{\times} (H_2, A)$  olsun. Bu durumda Teorem 3.17 den dolayı  $(H, A)$ ,  $\tau_{(\Gamma, A)}$  için bir taban oluşturur. Buradan  $j = 1, 2$  için  $\pi_j f$  rölatif fuzzy soft sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}[(H, A)] \tilde{\cap} (\Gamma', A) &= f^{-1}[\pi_1^{-1}(H_1, A) \tilde{\cap} \pi_2^{-1}(H_2, A)] \tilde{\cap} (\Gamma', A) \\ &= [(\pi_1 f)^{-1}[H_1, A] \tilde{\cap} (\Gamma', A)] \tilde{\cap} [(\pi_2 f)^{-1}[H_2, A] \tilde{\cap} (\Gamma', A)] \end{aligned}$$

$\nu_{(\Gamma', A)}$  de açıktır.

Böylece, Teorem 3.16 den dolayı  $f$  rölatif fuzzy soft süreklidir. ■

**Teorem 3.24**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının ve  $(Y, A, \nu)$ ,  $(Y_1, A, \nu_1)$  ile  $(Y_2, A, \nu_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı olsun.  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$  sırasıyla  $X_1$  ve  $X_2$  üzerinde,  $(\Gamma'_1, A)$  ve  $(\Gamma'_2, A)$  da, sırasıyla  $Y_1$  ve  $Y_2$  üzerinde fuzzy soft kümeler olmak üzere  $(\Gamma, A) = (\Gamma_1, A) \tilde{\times} (\Gamma_2, A)$  ve  $(\Gamma', A) = (\Gamma'_1, A) \tilde{\times} (\Gamma'_2, A)$  olsun.

Eğer, her  $j = 1, 2$  için  $f_j : [(\Gamma_j, A), \tau_{j(\Gamma_j, A)}] \rightarrow [(\Gamma'_j, A), \nu_{j(\Gamma'_j, A)}]$  fonksiyonları rölatif fuzzy soft sürekli (açık) ise

$$\begin{aligned} f = f_1 \times f_2 & : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma', A), \nu_{(\Gamma', A)}] \\ (x_1, x_2) & \rightarrow f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

ile tanımlanan çarpım fonksiyonu rölatif fuzzy soft sürekli (açıktır) (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.** Teorem 3.21 ve Teorem 3.22 yardımı ile kolaylıkla ispatlanır. ■

**Teorem 3.25**  $(X, A, \tau)$  fuzzy soft topolojik uzay olsun.  $\forall x \in X$  için

$$\begin{aligned} f & : (X, A, \tau) \rightarrow (X, A, \tau) \\ x & \rightarrow f(x) = x \end{aligned}$$

fonksiyonu fuzzy soft sürekli (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $(\Gamma, A) \in \tau$  olsun. Bu durumda  $f^{-1}[(\Gamma, A)] = [f^{-1}(\Gamma), A] = (\Gamma, A) \in \tau$  dır. Dolayısıyla  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (X, A, \tau)$  fuzzy soft sürekli. ■

**Teorem 3.26**  $(X, A, \tau)$  ve  $(Y, A, \nu)$  iki fuzzy soft topolojik uzay olsun.

Bu durumda  $y_0$ ,  $Y$  nin sabit elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} f & : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu) \\ x & \rightarrow f(x) = y_0 \end{aligned}$$

fonksiyonu fuzzy soft sürekli (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $(\Gamma, A) \in \nu$  olsun. Bu durumda  $\forall x \in X$  için

$$\begin{aligned} \{[f^{-1}(\Gamma)](p)\}(x) & = \{f^{-1}[\Gamma(p)]\}(x) \\ & = [\Gamma(p)]\{f(x)\} \\ & = [\Gamma(p)](y_0) = c_p \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla  $[f^{-1}(\Gamma)](p) = \tilde{c}_p$  ve buradan  $f^{-1}(\Gamma, A) = [f^{-1}(\Gamma), A] = (\tilde{c}, A) \in \tau$  dır.

Buradan da  $Y$  fuzzy soft sürekli ve  $y_0$ ,  $Y$  nin sabit elemanı olmak üzere  $\forall x \in X$  için  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  fonksiyonu  $f(x) = y_0$  olacak biçimde tanımlanır. ■

**Teorem 3.27**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı ve  $a \in X_1$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f & : (X_2, A, \tau_2) \rightarrow (X, A, \tau) \\ x_2 & \rightarrow f(x_2) = (a, x_2) \end{aligned}$$

fuzzy soft sürekli dir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $i = 1, 2$  için  $\pi_i : (X, A, \tau) \rightarrow (X_i, A, \tau_i)$  izdüşüm fonksiyonu olsun. Şimdi  $\forall x_2 \in X_2$  için

$$\begin{aligned} \pi_1 f & : (X_2, A, \tau_2) \rightarrow (X_1, A, \tau_1) \\ (x_2) & \rightarrow \pi_1 f(x_2) = a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \pi_2 f & : (X_2, A, \tau_2) \rightarrow (X_2, A, \tau_2) \\ (x_2) & \rightarrow \pi_2 f(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

olup, Teorem 3.25 ve Teorem 3.26 den dolayı  $\pi_1 f$  ve  $\pi_2 f$  fuzzy soft sürekli dir.

Buradan da Teorem 3.20 den dolayı  $f$  fuzzy soft sürekli dir. ■

**Teorem 3.28**  $(X, A, \tau)$ ,  $(X_1, A, \tau_1)$  ile  $(X_2, A, \tau_2)$  fuzzy soft topolojik uzaylarının çarpım uzayı,  $(\Gamma_1, A)$  ve  $(\Gamma_2, A)$ , sırasıyla  $X_1$  ve  $X_2$  üzerinde fuzzy soft küme ve  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde eş çarpım fuzzy soft küme olsun. Bu durumda  $\forall p \in A$ ,  $\forall x_2 \in X_2$  ve her bir  $a \in X_1$  için  $[\Gamma_1(p)](a) \geq [\Gamma_2(p)](a)$  şartını sağlayan,

$$\begin{aligned} f & : [(\Gamma_2, A), \tau_{2(\Gamma_2, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ x_2 & \rightarrow f(x_2) = (a, x_2) \end{aligned}$$

fonksiyonu röl atif fuzzy soft sürekli dir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $\forall x_2 \in X_2$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned} \{[f(\Gamma_2)](p)\}(a, x_2) &= [\Gamma_2(p)](x_2) \\ &= \{[\Gamma_1(p)](a) \wedge [\Gamma_2(p)](x_2)\} \\ &= [\Gamma(p)](a, x_2) \end{aligned}$$

dir. Eğer  $x_1 \neq a$  ise,  $\forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned} \{[f(\Gamma_2)](p)\}(x_1, x_2) &= 0 \\ &\leq \{[\Gamma_1(p)](x_1) \wedge [\Gamma_2(p)](x_2)\} \\ &= [\Gamma(p)](x_1, x_2) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla  $f[(\Gamma_2, A)] \widetilde{\subseteq} (\Gamma, A)$  olup, Teorem 3.27 ve Teorem 3.12 dan dolayı

$$\begin{aligned} f : [(\Gamma_2, A), \tau_{2(\Gamma_2, A)}] &\rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ x_2 &\rightarrow f(x_2) = (a, x_2) \end{aligned}$$

fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir. ■

#### 4. FUZZY SOFT TOPOLOJİK GRUPLAR ÜZERİNE

$X$  bir grup,  $(\Gamma, A)$  fuzzy soft grup ve  $\tau$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topoloji olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} f & : (X \times X, A, \tau \tilde{\times} \tau) \rightarrow (X, A, \tau) \\ (x, y) & \rightarrow f(x, y) = x.y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g & : (X, A, \tau) \rightarrow (X, A, \tau) \\ x & \rightarrow g(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonları ele alımsın.  $\forall x \in X$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned} \{[f(\Gamma \tilde{\times} \Gamma)](p)\}(x) & = \bigvee_{(z_1, z_2) \in f^{-1}(x)} \{[\Gamma \tilde{\times} \Gamma](p)\}(z_1, z_2) \\ & = \bigvee_{(z_1, z_2) \in f^{-1}(x)} \{[\Gamma(p)](z_1) \wedge [\Gamma(p)](z_2)\} \\ & \leq \bigvee_{(z_1, z_2) \in f^{-1}(x)} [\Gamma(p)](z_1 \cdot z_2) \\ & = [\Gamma(p)](x) \end{aligned}$$

olduğundan  $f[(\Gamma \tilde{\times} \Gamma, A)] \subseteq (\Gamma, A)$  dir. Ayrıca  $\forall x \in X$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned} \{[g(\Gamma)](p)\}(x) & = \bigvee_{z \in g^{-1}(x)} [\Gamma(p)](z) \\ & = \bigvee_{z^{-1}=x} [\Gamma(p)](z^{-1}) \\ & = [\Gamma(p)](x) \end{aligned}$$

olduğundan  $g[(\Gamma, A)] \cong (\Gamma, A)$  dir. Böylece

$f : [(\Gamma \tilde{\times} \Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)} \tilde{\times} \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  ve  $g : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  iki fonksiyondur. Bu durumda  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}], (X, A, \tau)$  fuzzy soft uzayının fuzzy soft alt uzayı ve  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}], (X, A, \tau) \tilde{\times} (X, A, \tau)$  çarpım fuzzy soft uzayının fuzzy soft altuzayıdır.

**Tanım 4.1**  $X$  bir grup,  $\tau$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topoloji ve  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft grup olsun.  $\forall x, y \in X$  için

$$\text{i) } \begin{aligned} f & : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) & \rightarrow f(x, y) = x.y \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{ccc} g : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] & \rightarrow & [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ x & \rightarrow & g(x) = x^{-1} \end{array}$$

fonksiyonları rölatif fuzzy soft süreklidir ise  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $X$  üzerinde **fuzzy soft topolojik gruptur** denir (Nazmul ve Samanta 2014).

**Teorem 4.1**  $X$ ,  $\tau$  fuzzy soft topoloji ile bir grup ve  $(\Gamma, A)$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft grup olsun. Bu durumda

i)  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur.

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{ccc} h : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] & \rightarrow & [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) & \rightarrow & h(x, y) = xy^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{fonksiyonu rölatif} \\ \text{fuzzy soft süreklidir.} \end{array}$$

ifadeleri denktir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat. (i)  $\Rightarrow$  (ii)**

$[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  fuzzy soft topolojik grup olsun. Teorem 3.24 den dolayı

$$i : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) \rightarrow i(x, y) = (x, y^{-1})$$

olarak tanımlanan  $i$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

Aynı zamanda  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  fuzzy soft topolojik grup olduğundan

$$f : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) \rightarrow f(x, y) = x.y$$

rölatif fuzzy soft süreklidir.

Buradan da Teorem 3.21 dan dolayı

$$h = fi : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) \rightarrow fi(x, y) = f(x, y^{-1}) = x.y^{-1}$$

olarak tanımlanan  $h$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

**(ii)  $\Rightarrow$  (i)**

$$h : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x, y) \rightarrow h(x, y) = x.y^{-1}$$

rölatif fuzzy soft sürekli olsun. Eğer  $e$ ,  $X$  in birim elemanı ise her  $x \in X$  ve her  $p \in A$  için  $[\Gamma(p)](e) \geq [\Gamma(p)](x)$  dir. Buradan, Teorem 3.28 den dolayı

$$\begin{aligned} j & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \widetilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad y \quad \rightarrow \quad j(y) = (e, y) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $j$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir. Böylece

$$\begin{aligned} g = hj & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad y \quad \rightarrow \quad hj(y) = h(e, y) = e.y^{-1} = y^{-1} \end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $g$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

Aynı şekilde

$$\begin{aligned} k & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad x \quad \rightarrow \quad k(x) = x \end{aligned}$$

rölatif fuzzy soft sürekli olduğundan Teorem 3.24 den dolayı

$$\begin{aligned} i & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \widetilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \widetilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad (x, y) \quad \rightarrow \quad i(x, y) = (x, y^{-1}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $i$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

Buradan

$$\begin{aligned} f = hi & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \widetilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad (x, y) \quad \rightarrow \quad hi(x, y) = h(x, y^{-1}) = x.[y^{-1}]^{-1} = x.y \end{aligned}$$

rölatif fuzzy soft süreklidir.

Böylece  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$  fuzzy soft topolojik gruptur. ■

**Teorem 4.2** Birim elemanı  $e$  ile gösterilen ve  $\tau$  fuzzy soft topolojisine sahip  $X$  grubu verilsin.  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik grup olsun. Bu durumda her bir

$a \in G_e = \{x \in X \mid [\Gamma(p)](x) = [\Gamma(p)](e), \forall p \in A\}$  için

$$\begin{aligned} R_a & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad x \quad \rightarrow \quad R_a(x) = x.a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L_a & : \quad [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ & \quad x \quad \rightarrow \quad L_a(x) = a.x \end{aligned}$$

fonksiyonları rölatif fuzzy soft homeomorfizmlerdir (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $\forall x \in X$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned}
\{[R_a(\Gamma)](p)\}(x) &= [\Gamma(p)](xa^{-1}) \geq \min\{[\Gamma(p)](x), [\Gamma(p)](a)\} \\
&= \{[\Gamma(p)](x) \wedge [\Gamma(p)](e)\} = [\Gamma(p)](x) \\
&= [\Gamma(p)](xa^{-1}a) \geq \min\{[\Gamma(p)](xa^{-1}), [\Gamma(p)](a)\} \\
&= \{[\Gamma(p)](xa^{-1}) \wedge [\Gamma(p)](e)\} = [\Gamma(p)](xa^{-1}) \\
&= \{R_a[\Gamma(p)]\}(x)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$R_a[(\Gamma, A)] = (\Gamma, A)$$

dir. Benzer şekilde,  $\forall a \in \Gamma_e$  için

$$L_a[(\Gamma, A)] = (\Gamma, A)$$

dir.

Aynı zamanda  $i: y \rightarrow (a, y)$  ve  $f: (x, y) \rightarrow x.y$  olmak üzere  $L_a = fi$  dir.

$\forall y \in X$  için  $[\Gamma(p)](a) \geq [\Gamma(p)](y)$  olduğundan ve Teorem 3.28 dan dolayı

$$i : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$$

rölatif fuzzy soft sürekli bir fonksiyon olup hipotezden dolayı  $f$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir. Böylece  $L_a$  rölatif fuzzy soft süreklidir. Dolayısıyla  $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$  fonksiyonu da süreklidir.

O halde  $L_a$  fonksiyonu rölatif fuzzy soft homeomorfizmdir.

Benzer şekilde  $R_a$  fonksiyonunda rölatif fuzzy soft homeomorfizm olduğu ispatlanabilir. ■

**Teorem 4.3**  $X$  ve  $Y$  iki grup olmak üzere,  $\nu$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft topoloji ve  $\tau = f^{-1}(\nu)$  olsun.  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  homomorfizm ve  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft topolojik grup ise  $[(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $\tau = f^{-1}(\nu)$  olduğundan  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  fuzzy soft süreklidir. Ayrıca  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur. Dolayısıyla  $(\Gamma, A)$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft gruptur ve

$$\begin{aligned} h_Y : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] &\rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (y_1, y_2) &\rightarrow h_Y(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2^{-1} \end{aligned}$$

rölatif fuzzy soft süreklidir.

Şimdi  $[(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}]$ ,  $(X, A, \tau)$  nun fuzzy soft altuzayıdır ve Teorem 3.24 den dolayı  $f \tilde{\times} f = \omega$  olmak üzere

$$\omega : [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \tilde{\times} [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$$

rölatif fuzzy soft süreklidir.

$f$  homomorfizm olduğundan Teorem 3.7 den dolayı  $[f^{-1}(\Gamma), A]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft gruptur. Şimdi

$$\begin{aligned} h_X : [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \tilde{\times} [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] &\rightarrow [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \\ (x_1, x_2) &\rightarrow h_X(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^{-1} \end{aligned}$$

ve  $(U, A) \in \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}$  olsun.  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  fuzzy soft sürekli bir fonksiyon olduğundan Teorem 3.12 dan dolayı

$$f : [(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$$

fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir. Ayrıca  $\tau = f^{-1}$  olduğundan

$f^{-1}[(V, A)] = (U, A)$  olacak biçimde  $(V, A) \in \nu_{(\Gamma, A)}$  fuzzy soft kümesi vardır.

$h_Y$  rölatif fuzzy soft sürekli olduğundan

$$[h_Y^{-1}(V, A) \tilde{\cap} [(\Gamma, A) \tilde{\times} (\Gamma, A)]] \in [\nu_{(\Gamma, A)} \tilde{\times} \nu_{(\Gamma, A)}]$$

dır.

Üstelik  $f \tilde{\times} f$  rölatif fuzzy soft sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} (f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}(V, A) \tilde{\cap} [(\Gamma, A) \tilde{\times} (\Gamma, A)]] \tilde{\cap} [[f^{-1}(\Gamma), A] \tilde{\times} [f^{-1}(\Gamma), A]] \\ = (f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}(V, A) \tilde{\cap} [f^{-1}(\Gamma), A] \tilde{\times} [f^{-1}(\Gamma), A]] \in [\tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)} \tilde{\times} \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}] \end{aligned}$$

dır. Şimdi  $\forall(x_1, x_2) \in X \times X$  ve  $\forall p \in A$  için

$$\begin{aligned} \{[h_X^{-1}(U)(p)]\}(x_1, x_2) &= [U(p)][h_X(x_1, x_2)] = [U(p)](x_1 x_2^{-1}) \\ &= \{f^{-1}[V(p)]\}(x_1 x_2^{-1}) = [V(p)][f(x_1 x_2^{-1})] \\ &= [V(p)][f(x_1)(f(x_2))^{-1}] = \{h_Y^{-1}[V(p)]\}[f(x_1), f(x_2)] \\ &= \{(f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}[V(p)]]\}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olduğundan  $h_X^{-1}[(U, A)] = (f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}[(V, A)]]$  olup

$$h_X^{-1}[(U, A)] \tilde{\cap} [f^{-1}(\Gamma) \tilde{\times} f^{-1}(\Gamma)] \in \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)} \tilde{\times} \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}$$

dır. Böylece  $h_X$  rölatif fuzzy soft süreklidir ve dolayısıyla  $[(f^{-1}(\Gamma), A), \tau_{(f^{-1}(\Gamma), A)}]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur. ■

**Teorem 4.4**  $X$  ve  $Y$  iki grup olmak üzere  $\tau$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topoloji ve  $\nu = f(\tau)$  olsun. Eğer  $f : (X, A, \tau) \rightarrow (Y, A, \nu)$  birebir homomorfizm ve  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$   $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik grup ise  $[(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}]$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur (Nazmul ve Samanta 2014).

**İspat.**  $[(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}]$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft topolojik grup olsun. Bu durumda  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde fuzzy soft grup ve

$$\begin{aligned} h_X : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] &\rightarrow [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \\ (x_1, x_2) &\rightarrow h_X(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonu rölatif fuzzy soft süreklidir.

Aynı zamanda  $f$  soft açık olduğundan Teorem 3.23 den dolayı

$$f \tilde{\times} f : [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \tilde{\times} [(\Gamma, A), \tau_{(\Gamma, A)}] \rightarrow [(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}] \tilde{\times} [(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}]$$

rölatif fuzzy soft açıktır.

Yine  $f$  homomorfizm olduğundan Teorem 3.6 den dolayı  $[f(\Gamma), A]$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft gruptur.

Şimdi

$$\begin{aligned} h_Y : [(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}] \tilde{\times} [(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}] &\rightarrow [(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}] \\ (y_1, y_2) &\rightarrow y_1 \cdot y_2^{-1} \end{aligned}$$

ve  $(V, A) \in \nu_{(f(\Gamma), A)}$  olsun. Bu durumda  $(V, A) = (U, A) \cap (\Gamma, A)$  olmak üzere  $\exists(U, A) \in \nu$  vardır. Buradan,  $f^{-1}[(U, A)] \in \tau$  ve  $f$  birebir olduğundan

$$f^{-1}[(V, A)] = f^{-1}[(U, A)] \tilde{\cap}(\Gamma, A) \in \tau_{(\Gamma, A)}$$

dır.

Yine  $h_X$  rölatif fuzzy soft sürekli olduğundan

$$h_X^{-1}[f^{-1}[(V, A)]] \tilde{\cap}[(\Gamma, A) \tilde{\times}(\Gamma, A)] \in [\tau_{(\Gamma, A)} \tilde{\times} \tau_{(\Gamma, A)}]$$

dır.

Şimdi,  $\forall x_1, x_2 \in X$  ve  $\forall p \in A$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \{(f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}[V(p)]]\}(x_1, x_2) &= [h_Y^{-1}[V(p)]] [f(x_1), f(x_2)] \\ &= [V(p)] [f(x_1)(f(x_2))^{-1}] \\ &= \{[h_x^{-1} f^{-1}]\}[V(p)](x_1, x_2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}[(V, A)]] = \{h_X^{-1} f^{-1}\}[(V, A)]$$

dir.  $f$  birebir, açık olduğundan ve Teorem 3.24 den dolayı  $f \tilde{\times} f$  rölatif fuzzy soft açıktır.

Aynı Şekilde  $f \tilde{\times} f$  rölatif fuzzy soft açık olduğundan

$$\begin{aligned} (f \tilde{\times} f)[h_Y^{-1}[f^{-1}(V, A)]] \tilde{\cap}[(\Gamma, A) \tilde{\times}(\Gamma, A)] &\in [\nu_{(f(\Gamma), A)} \tilde{\times} \nu_{(f(\Gamma), A)}] \\ \Rightarrow (f \tilde{\times} f)[(f \tilde{\times} f)^{-1}[h_Y^{-1}[(V, A)]] \tilde{\cap}[(\Gamma, A) \tilde{\times}(\Gamma, A)]] &\in [\nu_{(f(\Gamma), A)} \tilde{\times} \nu_{(f(\Gamma), A)}] \\ \Rightarrow h_Y^{-1}[(V, A)] \tilde{\cap}[f(\Gamma, A) \tilde{\cap} f(\Gamma, A)] &\in [\nu_{(f(\Gamma), A)} \tilde{\times} \nu_{(f(\Gamma), A)}] \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla  $h_Y$  rölatif fuzzy soft süreklidir ve  $[(f(\Gamma), A), \nu_{(f(\Gamma), A)}]$ ,  $Y$  üzerinde fuzzy soft topolojik gruptur. ■

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle fuzzy soft grup tanımlanmıştır. Daha sonra, çeşitli yazarlar tarafından tanımlanan ve özellikleri incelenen fuzzy topolojik yapıların esnekleştirilmesiyle, daha genel ve birbiriyle uyumlu olan fuzzy soft topolojik yapılar ele alınmıştır. Nihayetinde, bu iki kavramın birleşimi ile oluşan ve fuzzy soft topolojik grup olarak adlandırılan topolojik grupların daha genelleştirilmiş bir yapısı verilmiştir. Ayrıca, fuzzy soft ortamda topolojik gruplar kavramı verildikten sonra bazı temel özellikleri incelenmiştir.



## KAYNAKLAR

- Aktaş, H. and Çağman, N., 2007. Soft sets and soft groups. *Information Sciences* 177, 2726-2735.
- Ahmad, B. and Kharal, A., 2009. On fuzzy soft sets. *Advances in Fuzzy Systems*, Doi: 10.1155/2009/586507
- Ahmad, B. and Kharal, A., 2009. Mappings on Fuzzy soft classes. *Advances in Fuzzy Systems*, Doi: 10.1155/2009/407890
- Aygünoğlu, A. and Aygün, H., 2009. Introduction to fuzzy soft groups. *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 1279-1286.
- Aygünoğlu, A., Çetkin, V. and Aygün, H., 2014. An introduction to fuzzy soft topological spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(2), 193-204.
- Bourbaki, N. 1966. *General Topology*. Springer, Hermann, Paris.
- Chang, C.L., 1968 Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24(1), 184-190.
- Çağman, N., Enginoğlu, S. and Çıtak, F., 2011, Fuzzy soft set theory and its applications. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 8(3), 137-147.
- Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S., 2011. Soft topology. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 351-358.
- Çağman, N., 2014. Contributions to theory of soft sets. *Journal of New Results in Science*, 4, 33-41.
- Foster, D. H., 1979. Fuzzy topological groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 67, 549-564.
- Halıcıoğlu, S. ve Arıkan, A. 2015. *Cebire Giriş*. Palme Yayıncılık, Ankara.
- Kandasamy, W. B. V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press, 454, India.
- Lowen, R., 1976. Fuzzy topological spaces and Fuzzy Compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56(1), 621-633.
- Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R., 2003. Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Molodtsov, D., 1999. Soft set theory-first result. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Munkres, J. R. 2000. *Topology Second Edition*. Prentice Hall, 514, United States of America

- Nazmul, S. and Samanta, S. K., 2014. Fuzzy soft topological groups. *Fuzzy Information and Engineering*, 6(1), 71-92.
- Rosenfeld, A., 1971. Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35, 512-517.
- Roy, A. R. and Maji, P. K., 2007. A Fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 203, 412-418.
- Roy, S. and Samanta, T. K., 2012. A note on Fuzzy soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Information*, 3(2), 305-311.
- Shabir, M. and Naz, M., 2011. On soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.
- Shah, T. and Shaheen, S., 2014. Soft topological groups and rings. *Annals of Fuzzy Mathematics and Information*, 7(5), 725-743.
- Tanay, B. and Kandemir, M. B., 2011. Topological structure of Fuzzy soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2952-2957.
- Varol, B. P. and Aygün, H., 2012. Fuzzy soft topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41(3), 407-419.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.