

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Обнинский институт атомной энергетики -

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)

Отделение Ядерной физики и технологий

**Выпускная квалификационная работа -
(дипломная работа)**

по специальности: 14.05.02 « Атомные станции: проектирование,
эксплуатация и инжиниринг »

Специализация: «Проектирование и эксплуатация атомных станций»

**«Сравнение метода наименьших квадратов и метода наименьших
модулей при построении регрессионных выражений для описания
термодинамических свойств теплоносителей »**

Выполнил:
студент гр. АЭС1-С14

Кышлал М.Д.

(подпись, дата)

Руководитель ВКР,
профессор ОЯФиТ(О),
д.т.н.

Чусов И.А.

(подпись, дата)

Нормоконтроль

Чистозвонова Е.А.

(подпись, дата)

Выпускная
квалификационная работа
допущена к защите

(№ протокола, дата заседания комиссии)

Руководитель
образовательной программы
14.05.02 «Атомные станции:
проектирование,
эксплуатация и инжиниринг»,
д.т.н., профессор

Лескин С.Т.

(подпись, дата)

Обнинск, 2020

РЕФЕРАТ

Работа 60 с., 12 рис., 2 табл., 51 ист.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ, РЕГРЕССИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ, СРАВНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

Объектом исследования является эвтектический сплав свинец-висмут который рассматривается в качестве возможного теплоносителя для перспективных реакторных установок нового поколения.

Предмет исследования – термодинамические свойства эвтектического сплава свинец-висмут.

Цель работы – Рассмотрение методов наименьших квадратов и модулей, раскрывание их слабых и сильных сторон для оценки термодинамических свойств эвтектического сплава свинец-висмут.

Для решения поставленной цели проводил сравнение результатов аппроксимации по методу наименьших квадратов и методу наименьших модулей для эвтектики свинец-висмут с использованием расчетной программы Фортран.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЯ

МНК - Мэтод Наименьших Квадратов

МНМ - Метод Наименьших Модулей

ЭВМ - Электронная Вычислительная Машина

АОЭ - Асимптотическая Относительная Эффективность

NEA - Nuclear Energy Agency

ГК Росатом – Госкорпорация Росатом



ОГЛАВЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	5
1.1. Вычислительные схемы получения оценок по методу наименьших квадратов.....	8
1.2. Некоторые экстремальные свойства законов распределения ошибок измерения.....	16
ГЛАВА 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ	24
2.1. Вычислительные схемы получения оценок по методу наименьших модулей	24
2.2. Дополнительные сведения к методу наименьших модулей.....	33
ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ	35
3.1. Общие Замечания.....	36
3.2. Рекомендуемые Регрессионные Соотношения И Их Погрешности.....	37
ГЛАВА 4. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНОК МЕТОДОВ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	46
4.1. Сравнение метода наименьших квадратов и метода наименьших модулей для описания термодинамических свойств теплоносителя сплава эвтектики Рb- Bi	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	54
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	55

ВВЕДЕНИЕ

Каждый современный инженер, научно-технический работник в общих чертах знаком с задачей сглаживания экспериментальных точек по методу наименьших квадратов. Однако далеко не все догадываются или имеют смутное представление о существующей связи между методом наименьших квадратов и общей теорией получения оценок. Еще меньшее число людей знакомо с существованием методов обработки экспериментальных данных, отличных от метода наименьших квадратов.

В данной работе рассматривается один из таких методов: метод наименьших модулей, раскрываются его слабые и сильные стороны, прослеживается его связь с общей теорией оценивания.

Метод наименьших модулей не является каким-то новым словом в технике обработки измерений. На желательность использования в определенных условиях этого метода указывали еще Лаплас и Эджворт. В последние десятилетия главным образом, в связи с интенсивным распространением компьютеров, появились реальные предпосылки для его широкого использования в практических задачах.

В различных областях науки и техники многие задачи описываются на основе экстремального принципа. Наиболее часто используется метод наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов является математическим принципом : при его использовании определяют условия, при которых значения квадрата некоторой функции F получаются наименьшими:

$$F^2 = \min . \quad (1)$$

В таком общем виде принцип наименьших квадратов находит широкое применение при математическом описании научных и технических задач, например, в физике, механике, математической статистике, в теории ошибок при обработке экспериментальных данных, при решении задач численного анализа.

Метод наименьших модулей (МНМ) тоже является одним из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки. Этот метод применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

МНМ похож на метод наименьших квадратов. Отличие состоит в минимизации не суммы квадратов невязок, а суммы их абсолютных значений.

$$d[Y, f(X)] = \|Y - f(X)\| = \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|. \quad (2)$$

Этот метод обеспечивает максимум функции правдоподобия, если ошибки измерений подчиняются закону Лапласа

ГЛАВА 1. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть из каких-либо соображений удалось установить закон распределения ошибок измерения Δ_i . Обозначим с помощью $g_i(\Delta_i)$ функцию плотности i -й ошибки и с помощью $G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ многомерную функцию плотности всей совокупности ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$. В случае, когда ошибки измерений независимы, имеем

$$G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N) = g_1(\Delta_1)g_2(\Delta_2)\dots g_N(\Delta_N) = \prod_{i=1}^N g_i(\Delta_i). \quad (3)$$

Функция $G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ плотности совместного распределения ошибок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ измерения носит название функции правдоподобия [1].

Доказано, что оценки максимального правдоподобия при некоторых достаточно общих условиях являются асимптотически несмещенными, состоятельными и асимптотически эффективными оценками, т.е. для больших выборок оценки максимального правдоподобия имеют наибольшую возможную точность.

Из выражения видно, что вид функции правдоподобия зависит от функции плотности, т.е. от распределения ошибок измерения. Допустим, что ошибки измерения в выражении подчинены нормальному закону:

$$g_i(\Delta_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (4)$$

и предположим, что среднеквадратическая ошибка σ_i каждого измерения одинакова для всех измерений.

В этом случае функция правдоподобия имеет вид

$$G = \prod_{i=1}^N g_i(\Delta_i) = \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \Delta_i^2}. \quad (5)$$

Очевидно, что G достигает максимума, когда $\sum_{i=1}^N \Delta_i^2$ достигает минимума.

Таким образом, в данном случае, чтобы получить оценки максимальной точности, нужно минимизировать сумму квадратов невязок.

Если точности отдельных измерений различны, так что

$$G = \frac{1}{\prod_{i=1}^N \sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}}. \quad (6)$$

То для нахождения максимально правдоподобной оценки нужно минимизировать взвешенную сумму квадратов невязок

$$\Phi = \sum_{i=1}^N p_i \Delta_i^2, \quad (7)$$

где $p_i = 1/\sigma_i^2$ называется весом i -го измерения.

Оценки, полученные в результате минимизации взвешенной суммы квадратов невязок, носят название оценок метода наименьших квадратов (оценок МНК).

Но закон распределения ошибок измерений может в силу различных причин и не быть нормальным законом. Например, при некоторых условиях (рассмотрим их дальше) ошибки измерений могут подчиняться закону Лапласа:

$$g(\Delta_i) = \frac{1}{2\beta_i} e^{-\frac{|\Delta_i|}{\beta_i}}. \quad (8)$$

В этом случае функция правдоподобия для равноточных измерений принимает вид

$$G = \left(\frac{1}{2\beta} \right)^N \cdot e^{-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^N |\Delta_i|} . \quad (9)$$

Ее максимум достигается в точке, в которой

$$\Phi = \sum_{i=1}^N |\Delta_i| = \min . \quad (10)$$

Если для различных измерений величины β_i различаются, то минимизации подлежит выражение

$$\Phi = \sum_{i=1}^N q_i |\Delta_i| , \quad (11)$$

где $q_i = 1/\beta_i$. Оценки, полученные в результате минимизации взвешенной суммы модулей невязок, носят название оценок метода наименьших модулей (оценок МНМ).

В силу сказанного, рекомендуется тот или иной способ статистического решения системы уравнений и начать следует с анализа ошибок измерений.

Обычно считают, что ошибки измерений подчинены нормальному закону (закону Гаусса). Оснований для этого достаточно много. В частности, весьма веским доводом в пользу предположения о нормальном законе распределения ошибок является так называемая центральная предельная теорема, утверждающая, что сумма бесконечно большого числа независимых случайных величин с одинаковым математическим ожиданием, распределенных по

произвольному закону с равномерно ограниченными («приблизительно» равными) дисперсиями, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Бессель выдвинул гипотезу о том, что во многих случаях, особенно в астрономических наблюдениях, ошибка измерения как раз и образуется как сумма большого числа малых случайных величин, имеющих самое разнообразное происхождение и примерно одинаковых по величине. В силу этого метод наименьших квадратов, как следствие метода максимального правдоподобия и нормального закона ошибок измерения, и должен был получить очень широкое распространение.

1.1. Вычислительные схемы получения оценок по методу наименьших квадратов

Широкому распространению метода наименьших квадратов способствовало следующее обстоятельство. Оказывается, что сумма квадратов невязок как функций неизвестных параметров a_1, a_2, \dots, a_n имеет самую лучшую аналитическую форму, какую себе только можно представить. Это облегчает нахождение минимума этой функции и, следовательно, получение оценки. Вычисления становятся особенно простыми, когда измеряемая величина линейным образом связана с определяемыми параметрами.

Обратимся, например, к системе уравнений (19). Предполагая закон распределения ошибок измерения нормальным, здесь для получения оценки неизвестной величины a нужно найти минимум следующей функции:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N (\chi_i - at_i)^2 . \quad (12)$$

Пользуясь правилами дифференциального исчисления, для нахождения минимума вычислим производную $d\Phi/da$ и приравняем ее нулю. Имеем

$$\frac{d\Phi}{da} = -\sum_{i=1}^N 2(\chi_i - at_i)t_i = -2\sum_{i=1}^N \chi_i t_i + 2a\sum_{i=1}^N t_i^2 = 0 . \quad (13)$$

Заметим, что уравнения такого типа называют уравнениями правдоподобия. Из уравнения правдоподобия получаем наилучшую оценку:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \chi_i t_i}{\sum_{i=1}^N t_i^2} . \quad (14)$$

Если точности отдельных измерений различаются, то для получения оценки максимального правдоподобия нужно минимизировать выражение

$$\Phi = \sum_{i=1}^N p_i \Delta_i^2 , \quad (15)$$

где $p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$.

В этом случае наилучшей оценкой является:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N p_i \chi_i t_i}{\sum_{i=1}^N p_i t_i^2} . \quad (16)$$

Обратимся теперь к системе уравнений. Здесь для получения оценки наименьших квадратов требуется найти минимум следующей функции:

$$a = \sum_{i=1}^N \left[d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2} \right]^2 . \quad (17)$$

Для отыскания минимума Φ найдем производные $\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial a_2}$ приравняем их

нулю. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=1}^N \left[d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2} \right]^2 \frac{(a_1 t_i - A) t_i}{\sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^N \left[d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2} \right]^2 \frac{(a_2 t_i) t_i}{\sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}} = 0.\end{aligned}\quad (18)$$

Полученная система уравнений относительно a_1 и a_2 носит нелинейный характер и не решается в конечном виде. Поэтому для получения необходимых оценок обычно применяется вычислительная процедура следующего рода.

Используя минимум данных, т.е. в данном случае два измерения, произведенные в моменты t_1 и t_2 , пренебрегая ошибками измерений, легко получим следующую систему уравнений относительно a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{(a_1 t_1 - A)^2 + (a_2 t_1)^2} &= d_1, \\ \sqrt{(a_1 t_2 - A)^2 + (a_2 t_2)^2} &= d_2.\end{aligned}\quad (19)$$

Которую можно решить элементарными средствами. Для этой цели оба уравнения следует возвести в квадрат, затем умножить первое уравнение на t_2^2 , а второе на t_1^2 и вычесть одно уравнение из другого. В результате получится уравнение первой степени относительно a_1 , которое решается элементарно. Подставляя полученное значение a_1 в одно из уравнений (19), получим квадратное уравнение относительно a_2 , которое также решается элементарно. Оба полученных решения имеют физический смысл. Для получения однозначного ответа следует привлечь какие-либо дополнительные сведения,

например, направление вращения дальномера в случае летящего самолета. Полученные по минимуму данных значения a_1 и a_2 назовем начальным приближением и обозначим $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$. Зная начальное приближение, поставим задачу об отыскании поправок δa_1 и δa_2 к $a_1^{(0)}$ и $a_2^{(0)}$, имея в виду с помощью этих поправок удовлетворить условию $\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \min$. С этой целью предварительно сведем исходную систему уравнений относительно a_1 и a_2 к системе уравнений в поправках δa_1 и δa_2 , произведя так называемую линеаризацию уравнений в окрестности значений $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$.

Для составления линеаризованной системы положим

$$d_i^{(0)} = \sqrt{(a_1^{(0)} t_i - A)^2 + (a_2^{(0)} t_i)^2} . \quad (20)$$

$$d_i = d_i^{(0)} + \delta d_i . \quad (21)$$

$$a_1 = a_1^{(0)} + \delta a_1 . \quad (22)$$

$$a_2 = a_2^{(0)} + \delta a_2 . \quad (23)$$

Подставляя выражения (20) – (23) в соотношение

$$d_i = \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2} + \Delta . \quad (24)$$

Раскладывая правую часть в окрестности точки $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$ в степенной ряд и отбрасывая старшие члены разложения, получим искомые уравнения в поправках

$$\frac{(a_1^{(0)}t_i - A)t_i}{d_i^{(0)}} \delta a_1 + \frac{a_1^{(0)}t_i^2}{d_i^{(0)}} \delta a_2 + \Delta_i = \delta d_i. \quad (25)$$

$i = 1, 2, \dots, N.$

Полученную систему уравнений (25) относительно δa_1 и δa_2 будем решать в статистическом смысле, минимизируя сумму квадратов невязок. Если теперь взять производные $\frac{\partial \Phi}{\partial (\delta a_1)}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial (\delta a_2)}$ и приравнять их нулю, то придем к линейной системе алгебраических уравнений относительно δa_1 и δa_2 , которую уже можно решить без труда.

Подставляя δa_1 и δa_2 в выражения (22) и (23), получаем значения a_1 и a_2 , в большей степени удовлетворяющие исходной системе уравнений в статистическом смысле, чем $a_1^{(0)}$ и $a_2^{(0)}$. Для нахождения еще более точной оценки описанную операцию целесообразно повторить несколько раз, беря в качестве начального приближения последние значения a_1 и a_2 .

Такого рода процедуры последовательного улучшения оценок в математике носят название итерационных.

Если бы измерения, распределенные по нормальному закону, производились с различной точностью, то метод максимума правдоподобия, примененный к этой задаче, привел бы к необходимости отыскания минимума следующей функции:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\delta d_i - \frac{(a_1^{(0)}t_i - A)t_i}{d_i^{(0)}} \delta a_1 + \frac{a_1^{(0)}t_i^2}{d_i^{(0)}} \delta a_2 \right]^2. \quad (26)$$

Подобно тому, как это имело место при решении первой задачи. Дополнительных вычислительных сложностей при этом не возникает.

Получение начального приближения можно упростить, если брать не любые измерения углового положения спутника на небесной сфере, а подбирать их особо, стараясь, чтобы их совокупность позволяла бы получить первое приближение без особых вычислительных трудностей.

Так, для приближенного вычисления периода выгодно использовать i_1 -е и i_2 -е наблюдения в моменты времени t_{i_1} и t_{i_2} , находящиеся на разных витках, для которых α_{i_1} приближенно равно α_{i_2} .

Тогда период в первом приближении можно определить с помощью формулы

$$\frac{2\pi}{T} \approx \frac{\alpha_{i_2} + p2\pi - \alpha_{i_1}}{t_{i_2} - t_{i_1}}, \quad (27)$$

здесь p – число полных витков, сделанных спутником за время $t_{i_2} - t_{i_1}$.

Приближенное значение $a_1^{(0)}$ радиуса орбиты теперь можно определить по формуле

$$a_1^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{m}}. \quad (28)$$

Для определения $a_2^{(0)}$ выберем наблюдение угла α_{i_2} , осуществленное на первом витке и близкое к $\pi/2$. Пусть это наблюдение соответствует моменту времени t_{i_3} .

Угловое положение спутника на орбите в этот момент определится углом, равным $\frac{2\pi t_{i_3}}{T} + a_2$. Тогда $a_2^{(0)}$ можно приближенно определить по формуле

где $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ ($i=1,2,\dots,N$, $j=1,2,3$) – частные производные функции f ,

устанавливающей зависимость измеряемой величины от определяемых параметров. Их можно вычислить аналитически, но при этом получаются довольно громоздкие формулы, или численно, давая поочередно определяемым параметрам малые приращения и определяя, насколько при этом изменяется измеряемая величина. Отношения этих приращений являются приближенными значениями частных производных, входящих в систему (31).

Отметим, что все эти частные производные вычисляются при значениях определяемых параметров, полученных в результате первого приближения. Теперь задача, как и прежде, состоит в определении поправок $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3$ к начальному приближению, при которых минимизируется сумма квадратов невязок, вычисляемая следующим образом:

$$\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N) = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\delta \alpha_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \delta a_j \right)^2. \quad (32)$$

Продифференцировав Φ по δa_j и приравняв нулю производные, получим систему линейных уравнений для нахождения поправок δa_j , которая решается без труда.

Уточненные значения параметров определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= a_1^{(0)} + \delta a_1. \\ a_2^{(1)} &= a_2^{(0)} + \delta a_2. \\ a_3^{(1)} &= a_3^{(0)} + \delta a_3. \end{aligned} \quad (33)$$

Далее, если необходимо, производится несколько аналогичных итераций. Итак, предполагая, что измерения подчинены закону Гаусса, и используя метод максимального правдоподобия, пришли к задаче минимизации взвешенной

суммы квадратов. Минимизация суммы квадратов является одной из самых простых задач, возникающих в связи с получением оценок. Нами были описаны методы, позволяющие найти минимум этой суммы, и отмечено, что сложность расчетов быстро нарастает с увеличением числа уточняемых параметров.

Исследуем теперь более подробно вопрос о том, почему же обычно отдают предпочтение закону Гаусса, и при каких условиях целесообразно сделать иное предположение о законе распределения ошибок измерения.

1.2. Некоторые экстремальные свойства законов распределения ошибок измерения

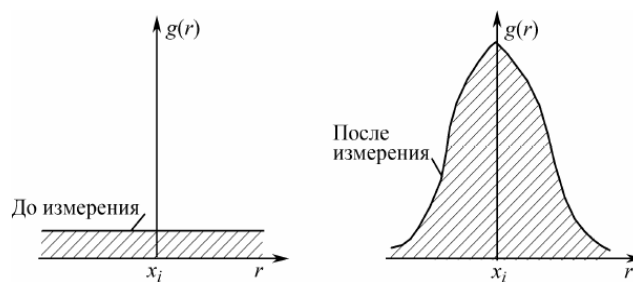
Пусть расположение измеряемой величины на числовой оси нам неизвестно и нет никаких данных, позволяющих предпочесть какое-то одно ее значение другому. За неимением таких данных предполагаем, что с равной вероятностью эта измеряемая величина располагается в любой точке числовой оси. Именно в этом случае изучаемая система обладает для наблюдателя максимальной неопределенностью. В результате измерения вероятность нахождения измеряемой величины в отдельных точках изменяется и, если ошибка измерения подчиняется закону распределения $g(\Delta)$, точное значение измеряемой величины располагается в некоторой окрестности полученного измерения, причем вероятность его нахождения в конкретной точке характеризуется тем же законом распределения.

Пусть с помощью какого-либо прибора нужно измерить расстояние r между пунктами A и C . До измерения предполагаем, что с равной вероятностью оно может принять любое значение. Пусть результатом измерения, произведенного с ошибкой Δ_i , является x_i , так что

$$r + \Delta_i = x_i. \quad (34)$$

Если ошибка имеет плотность распределения $g(\Delta)$, то плотность распределения результата измерения имеет вид $g(x_i - r)$. По такому же закону $g(r - x_i)$ распределяется и r относительно x_i (Рисунок 1).

Будем считать, что в отношении произведенного измерения нам известно только то, что у него отсутствует систематическая ошибка и что его дисперсия равна D . Спрашивается, какие предположения следует сделать о законе распределения ошибок.



Источник: [4]

Рисунок 1 – Плотности распределения результатов

Поскольку нет других сообщений об измеряемой величине, нужно предположить, что ее расположение на числовой оси в максимальной степени неопределенно. Степень неопределенности физической системы принято характеризовать величиной энтропии H , которая в данном случае может быть вычислена по формуле

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} g(r) \log g(r) dr. \quad (35)$$

Основание логарифма при этом не играет принципиальной роли. В теории информации, откуда, собственно говоря, и взято выражение (35), в качестве основания логарифма берется число 2. Нам удобнее в качестве основания логарифма взять число e , а переменную интегрирования обозначить Δ :

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta) \ln g(\Delta) d\Delta. \quad (36)$$

Вопрос далее ставится так: при каком виде функции $g(\Delta)$ выражение (36) достигает максимума, если в отношении этой функции известно только, что

$$g(\Delta) \geq 0 \quad \text{для} \quad -\infty < \Delta < \infty. \quad (37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta) d\Delta = 1. \quad (38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(\Delta) d\Delta = 0. \quad (39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 g(\Delta) d\Delta = D. \quad (40)$$

Все эти соотношения непосредственно следуют из определения функции плотности, математического ожидания и дисперсии и из предположения о несмещенности результата измерения.

Для ответа на поставленный вопрос представим все выписанные интегралы в виде сумм. Имеем:

$$\begin{aligned} H &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta) \ln g(\Delta) d\Delta \approx -\int_{-M}^M g(\Delta) \ln g(\Delta) d\Delta \approx \\ &\approx -\frac{M}{K} \sum_{j=-K}^K g\left(\frac{M}{K} j\right) \ln\left(g\left(\frac{M}{K} j\right)\right) = -\frac{M}{K} \sum_{j=-K}^K y_j \ln y_j, \end{aligned} \quad (41)$$

где M и целое K – достаточно большие числа и, кроме того, обозначено

$$y_j = (\Delta_j), \quad \Delta_j = \frac{M}{K} j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K. \quad (42)$$

При достаточно больших M и K выражение (41) соблюдается со сколь угодно малой погрешностью.

Перепишем выражение (41) еще раз, опуская для простоты записи пределы суммирования:

$$H = -\frac{M}{K} \sum y_j \ln y_j . \quad (43)$$

Аналогичным образом могут быть представлены соотношения с (37) по (40):

$$y_j \geq 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K. \quad (44)$$

$$\frac{M}{K} \sum y_j = 1. \quad (45)$$

$$\frac{M}{K} \sum \Delta_j y_j = 0. \quad (46)$$

$$\frac{M}{K} \sum \Delta_j^2 y_j = D. \quad (47)$$

Для отыскания максимума функций при наличии ограничений обычно применяется метод неопределенных множителей Лагранжа. Соответствующая теорема (теорема Лагранжа) утверждает, в частности, что максимум функции $H(y_{-k}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_k)$ при наличии ограничений (45) – (47) совпадает с седловой точкой функции

$$\begin{aligned} L(y_{-k}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_k, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \\ = -\frac{M}{K} \left(\sum y_j \ln y_j + \lambda_1 \sum y_j + \lambda_2 \sum \Delta_i y_j + \lambda_3 \sum \Delta_i^2 y_j \right), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные вещественные величины.

Необходимыми условиями экстремума функции L от переменных y_i, λ_s являются

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, K; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_s} = 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (49)$$

Для проверки характера точки, подозреваемой на экстремум (максимум, минимум, седловая точка), требуется довольно сложный анализ, которым заниматься не будем.

Запишем первую группу необходимых условий максимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_j} &= -\frac{M}{K} (\ln y_j + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 \Delta_j + \lambda_3 \Delta_j^2), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots && \text{или} \\ \ln y_j &= -(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \Delta_j + \lambda_3 \Delta_j^2). && \text{или} \\ y_j &= e^{-(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \Delta_j + \lambda_3 \Delta_j^2)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Поскольку M и K – произвольные числа, то соотношение (47) должно соблюдаться для любых Δ , т.е. условие

$$g(\Delta) = e^{-(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \Delta + \lambda_3 \Delta^2)}. \quad (51)$$

Должно соблюдаться вообще. При этом автоматически соблюдается условие (37). Неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ найдем из условия

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_s} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (52)$$

В интегральной форме к соотношениям (38) – (40). Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta+\lambda_3\Delta^2)} d\Delta = 1. \quad (53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta e^{-(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta+\lambda_3\Delta^2)} d\Delta = 0. \quad (54)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 e^{-(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta+\lambda_3\Delta^2)} d\Delta = D. \quad (55)$$

Нетрудно проверить, что эти условия удовлетворяются при

$$\lambda_1 = -1 + \ln \sqrt{2\pi B}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2D}. \quad (56)$$

Подставляя значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в (51), окончательно получаем

$$g(\Delta, D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{\frac{\Delta^2}{2D}}. \quad (57)$$

Что как раз и является функцией плотности нормального закона распределения.

Итак, при наличии несмещенного измерения, произведенного со среднеквадратической ошибкой σ (т.е. с дисперсией D), если не делается никаких других предположений, необходимо считать, что измерения подчинены нормальному распределению. Теперь сделаем такое дополнительное предположение: сама дисперсия в каждом конкретном случае не известна, а известно лишь ее среднее для всей совокупности измерений значение. Такая модель самого процесса измерений в определенных условиях имеет право на существование, так как во многих случаях точность каждого конкретного измерения определяется принципиально непредсказуемыми внешними условиями, и основная точностная характеристика прибора – дисперсия измерений – в этом случае бывает известна лишь в среднем. Например, точность визуальных измерений, произведенных в походных условиях, определяется

состоянием погоды, степенью запыленности атмосферы, степенью утомленности персонала и т.п.

Для решения задачи о законе распределения ошибок измерения сначала нужно найти закон распределения дисперсии $s(D)$. Следуя той же концепции о максимальной неопределенности изучаемой физической системы, необходимо найти максимум энтропии

$$H_1 = - \int_0^{\infty} s(D) \ln s(D) dD . \quad (58)$$

При ограничениях

$$\begin{aligned} s(D) &\geq 0. \quad 0 \leq D < \infty \\ \int_0^{\infty} s(D) dD &= 1. \\ \int_0^{\infty} D s(D) dD &= D_{cp}. \end{aligned} \quad (59)$$

Вновь заменяя интегралы суммами и используя метод неопределенных множителей Лагранжа, придем к заключению, что наиболее правильным суждением о законе распределения дисперсий будет

$$S(D) = \frac{1}{D_{cp}} e^{-\frac{D}{D_{cp}}}. \quad D \geq 0. \quad (60)$$

Поскольку при заданной дисперсии наиболее правильным предположением о законе распределения ошибок измерения является предположение о нормальном законе, но сама дисперсия является случайной величиной, распределенной по закону (60), то для нахождения закона распределения ошибок в этом случае необходимо произвести осреднение множества функций $g(\Delta, D)$ по формуле

$$g(\Delta) = \int_0^{\infty} g(\Delta, D) s(D) dD, \quad (61)$$

где $g(\Delta, D)$ и $s(D)$ определяются по формулам (57) и (60).

Интеграл (61) вычисляется довольно сложно, поэтому приведем лишь конечный результат, состоящий в том, что

$$g_1(\Delta, D_{cp}) = \frac{1}{2\sqrt{D_{cp}}} e^{-\frac{|\Delta|}{\sqrt{D_{cp}}}}. \quad -\infty < \Delta < \infty \quad (62)$$

Из формулы (62) видно, что при сделанных предположениях закон распределения ошибок измерения является законом Лапласа.

Подведем некоторые итоги. В том случае, когда дисперсия каждого измерения известна точно и не сообщено ничего другого о характере ошибки измерения, наиболее естественным предположением о законе распределения ошибок является предположение о нем, как о законе Гаусса, и наиболее правильным методом обработки является обработка измерений по методу наименьших квадратов.

Когда же дисперсия какой-либо группы измерений известна лишь в среднем, наиболее естественным предположением о законе распределения ошибок измерения этой группы является предположение о нем как о законе Лапласа и наиболее правильным методом обработки в этом случае является обработка измерений по методу наименьших модулей. Отметим, что последнее высказывание абсолютно справедливо только по отношению к большим выборкам. Рассмотрим теперь вычислительную сторону вопроса получения оценок по методу наименьших модулей.

ГЛАВА 2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ

Метод наименьших модулей — один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки. Метод наименьших модулей применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Метод наименьших модулей похож на метод наименьших квадратов. Отличие состоит в минимизации не суммы квадратов невязок, а (взвешенной) суммы их абсолютных значений. Этот метод обеспечивает максимум функции правдоподобия, если ошибки измерений подчиняются закону Лапласа.

2.1. Вычислительные схемы получения оценок по методу наименьших модулей

Алгоритмы получения оценок МНМ в случае непосредственных измерений одного параметра очень просты и, по-видимому, проще, чем любой другой алгоритм, предназначенный для получения оценок. Для этого надо только расположить результаты измерений в порядке их возрастания и взять средний член полученного ряда, если число измерений нечетно, и полусумму средних членов, если число измерений четно. Совсем иначе обстоит дело в многомерном случае. Здесь вследствие сложного неаналитического характера многомерной функции

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N |x_i - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)|. \quad (63)$$

Нахождение минимума встречает значительные трудности. Эти трудности оказались столь большими, что до появления электронных вычислительных машин никто и не пытался получать оценки МНМ в мало-мальски сложных

задачах. Положение коренным образом изменилось, когда появилась и получила достаточно широкое распространение новая вычислительная техника.

Первыми алгоритмами, предназначенными для нахождения минимума суммы модулей отклонений для случая линейной зависимости измеряемых величин от неизвестных параметров, явились алгоритмы, опирающиеся на идеи линейного программирования. Оказалось, [1], [2], что задача минимизации суммы модулей невязок

$$\Phi = \sum_{i=1}^N |x_i - \sum_{j=1}^N y_{ij} \delta a_j|, \quad y_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}. \quad (64)$$

Является задачей так называемого кусочно-линейного программирования, которая за счет введения некоторого числа вспомогательных переменных может быть сведена к общей задаче линейного программирования с весьма частным видом минимизируемой в задаче функции и ограничивающих условий. Следовательно, данную задачу можно было бы решать при помощи любого алгоритма, предназначенного для решения задач линейного программирования общего вида, имея в виду, что соответствующие программы к настоящему времени имеются в большинстве организаций.

При этом есть возможность придумать алгоритмы, предназначенные специально для минимизации суммы модулей, поскольку каждая задача линейного программирования, имеющая ограничения строго определенного вида, допускает более или менее серьезное упрощение универсального алгоритма, предназначенного для решения задачи в общем виде. Например, алгоритмы решения так называемой «транспортной задачи» или «задачи назначения» [3] намного проще универсального алгоритма решения задачи линейного программирования общего вида, хотя они могли бы быть решены и при помощи такого универсального алгоритма. Аналогично обстоит дело с минимизацией суммы модулей. Специальные алгоритмы, предназначенные для

ее решения, оказываются намного проще алгоритма решения задач линейного программирования общего вида.

Алгоритмы решения задачи минимизации суммы модулей невязок, опирающиеся на идеи линейного программирования, удобны тем, что, не меняя алгоритма, можно легко вводить в число условий задачи дополнительные ограничения типа неравенств. Например, определяя элементы почти круговой орбиты спутника Земли по совокупности измерений, можно наложить ограничение $E \geq 0$ на эксцентриситет. Производя триангуляционные измерения на плоскости, можно наложить ограничения типа $d_1 + d_2 \geq d_3$ («правило треугольника») и т.п. Вместе с тем эти алгоритмы обладают одним крупным недостатком, так как заставляют размещать и хранить в памяти ЭВМ довольно объемистые симплексные таблицы, содержащие промежуточные результаты, возникающие при решении задач линейного программирования, что затрудняет практическое использование алгоритмов, основанных на идеях линейного программирования, в сложных задачах.

Данное обстоятельство заставило искать другие методы получения оценок, например итерационные методы получения оценок МНМ, на которых остановимся более подробно. Решая пример на определение составляющих вектора скорости самолета, вылетевшего из точки O в неизвестном направлении, и другой пример на определение радиуса Земли по результатам наблюдений искусственного спутника по методу наименьших квадратов, оказалось необходимым обратиться к итерационной процедуре, так как измеряемая величина нелинейным образом зависела от определяемых параметров. Существо этой процедуры сводится к тому, что, имея некоторое начальное приближение и пользуясь связью между малыми изменениями определяемых и измеряемых величин, задаваемой уравнением в поправках, можно улучшить это первое приближение, добиваясь на каждом шаге минимальности невязок в интересующем нас смысле, в данном случае в смысле наименьших квадратов.

Аналогичную итерационную процедуру можно предложить и для получения оценок по методу наименьших модулей. Различие будет состоять лишь в способе назначения весовых характеристик на каждом шаге итерационного процесса. Если в рассмотренном примере весовые характеристики измерений в каждой итерации оставались неизменными, то теперь будем менять их каждый раз при переходе к следующей итерации по определенным несложным правилам. В остальном же будем действовать в точности, как и раньше, и, хотя конечной целью является минимизация совокупности невязок в смысле наименьших модулей, на каждом шаге итерационного процесса поправки будем искать по методу наименьших квадратов.

В основе этой итерационной процедуры лежит один примечательный математический факт, который разберем подробно на случае непосредственных равноточных измерений одномерной величины a .

Пусть результатами измерений являются числа x_1, x_2, \dots, x_N и требуется их обработать по методу наименьших модулей, для чего, в свою очередь, нужно найти минимум функции

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^N |x_i - a| . \quad (65)$$

Далее пусть в нашем распоряжении имеется некоторое первоначальное приближение $a^{(0)}$, полученное, например, путем решения задачи по минимуму данных. Следуя методу наименьших квадратов, следовало бы минимизировать функцию

$$W(a) = \sum_{i=1}^N p_i (x_i - a)^2 , \quad (66)$$

где p_i – «вес» i -го измерения.

Минимум $W(a)$, как нетрудно проверить, достигается в точке

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i}{\sum_{i=1}^N p_i} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} . \quad (67)$$

Начиная с этого момента, в дальнейшем для упрощения записи будем опускать пределы суммирования. Допустим, что «веса» являются функцией начального приближения такого вида

$$p_i(a^{(0)}) = \frac{1}{|x_i - a^{(0)}|} . \quad (68)$$

Теперь функция (66) зависит не только от искомого параметра a , но и от значения начального приближения $a^{(0)}$:

$$W(a, a^{(0)}) = \sum \frac{1}{|x_i - a^{(0)}|} (x_i - a^{(0)})^2 . \quad (69)$$

Функция от двух аргументов $W(a, a^{(0)})$ обладает следующими важными свойствами:

а) значение $W(a, a^{(0)})$ при $a = a^{(0)}$ равно

$$\Phi(a^{(0)}) = \sum |x_i - a^{(0)}| . \quad (70)$$

т.е. сумме модулей невязок в точке $a^{(0)}$;

б) если обозначить $a^{(1)}$ значение аргумента, при котором достигается минимум $W(a, a^{(0)})$, так что

$$W(a^{(1)}, a^{(0)}) \leq W(a, a^{(0)}). \quad (71)$$

$$\text{То, } \Phi(a^{(1)}) \leq \Phi(a^{(0)}) . \quad (72)$$

Первое свойство не требует разъяснений, а второе требует ссылки на хорошо известное в анализе неравенство Буняковского –Шварца:

$$\left(\sum c_i d_i\right) \leq \left(\sum c_i^2\right) \left(\sum d_i^2\right) . \quad (73)$$

Запишем очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi(a^{(1)}) &= \sum |x_i - a^{(1)}| = \sum \frac{|x_i - a^{(1)}| \cdot |x_i - a^{(0)}|^{0,5}}{|x_i - a^{(0)}|^{0,5}} = \\ &= \left[\left(\sum \frac{|x_i - a^{(1)}| \cdot |x_i - a^{(0)}|^{0,5}}{|x_i - a^{(0)}|^{0,5}} \right)^2 \right]^{0,5} . \end{aligned} \quad (74)$$

Применяя к выражению, стоящему в квадратных скобках, неравенство Буняковского – Шварца, получим:

$$\Phi(a^{(1)}) \leq \left[\left(\sum \frac{|x_i - a^{(1)}|^2}{|x_i - a^{(0)}|} \right) \left(\sum |x_i - a^{(0)}| \right) \right]^{0,5} = \left[W(a^{(1)}, a^{(0)}) W(a^{(0)}, a^{(0)}) \right]^{0,5} . \quad (75)$$

По самому определению минимума

$$W(a^{(1)}, a^{(0)}) = \min W(a, a^{(0)}) \leq W(a^{(0)}, a^{(0)}) . \quad (76)$$

Поэтому

$$\Phi(a^{(1)}) \geq \left[W(a^{(1)}, a^{(0)}) W(a^{(0)}, a^{(0)}) \right]^{0.5} \leq W(a^{(0)}, a^{(0)}) = \Phi(a^{(0)}) . \quad (77)$$

Путем более тонких рассуждений можно показать, что неравенство (77) носит строгий характер всюду, за исключением искомой точки минимума. Для ликвидации затруднений при доказательстве соотношений (77), связанных с невозможностью вычисления весовых характеристик при $a^{(0)} = x_i$ и для бесперебойного хода вычислений, осуществляемых по формуле (71), целесообразно весовую функцию (68) построить следующим образом:

$$p_i(a^{(0)}) = \begin{cases} \frac{1}{|x_i - a^{(0)}|}, & \text{если } |x_i - a^{(0)}| \neq 0; \\ c, & \text{если } |x_i - a^{(0)}| = 0 \end{cases} , \quad (78)$$

где c – произвольное положительное число (желательно большое, поскольку это убыстряет процесс вычислений).

В результате минимизации выражения (66) удастся указать точку $a^{(1)}$, в которой значение суммы модулей невязок меньше, чем в точке $a^{(0)}$.

Используя точку $a^{(1)}$ в качестве нового начального приближения, можно вычислить новые значения весов и, поступая с ними аналогичным способом, построить квадратичную функцию $W(a, a^{(1)})$. Минимизируя функцию, можно отыскать точку $a^{(2)}$, для которой

$$\Phi(a^{(2)}) \leq \Phi(a^{(1)}) . \quad (79)$$

Можно доказать, что пределом последовательности величин $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ является точка a , в которой сумма невязок обращается в минимум [4].

Для одномерного случая, когда к тому же измерения носят непосредственный характер, вся описанная процедура выглядит чрезмерно сложной, и искомый минимум можно было бы найти и более простым путем. Например, как уже указывалось, его можно определить, располагая x_1, x_2, \dots, x_N в порядке возрастания и беря полусумму центральных членов при N четном, и сам центральный член при N нечетном.

Однако для многомерного случая и особенно, когда измерения носят косвенный характер, причем зависимость измеряемых величин от исходных величин носит нелинейный характер, указанная процедура по своей трудоемкости и затратам времени сближается с процедурой получения оценок по методу наименьших квадратов.

Большим преимуществом рассматриваемого алгоритма является то, что он делает метод наименьших квадратов и метод наименьших модулей частными случаями одной более общей вычислительной схемы. Эта же схема пригодна для получения максимально правдоподобных оценок и тогда, когда у одной части измерений хорошо известны индивидуальные точностные характеристики приборов, а у другой их части эти точностные характеристики известны лишь в среднем.

В данном случае метод максимального правдоподобия приводит к необходимости отыскания минимума функции следующего вида:

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \frac{1}{\sigma_i^2} [x_i - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 + \sum_{i=N_1}^N \frac{1}{\sqrt{D_{cp_i}}} |x_i - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)|. \quad (80)$$

Определяя по минимуму данных первоначальное приближение $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$ и назначая «веса» отдельным измерениям по формуле

$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i^2}, \text{ при } i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \\ \frac{1}{2\sqrt{D_{cp1}} \left| x_i - f_i \left(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)} \right) \right|}, i = N_1, N_1 + 1, \dots, N; \end{cases} \quad (81)$$

С помощью описанной методики можно организовать итерационный процесс, приводящий к отысканию минимума W и, следовательно, к получению асимптотически-эффективной оценки.

Интересен также случай, когда ошибка измерений включает в себя случайную составляющую, подчиненную нормальному закону, к которой с определенной (ненулевой) вероятностью добавляется грубая ошибка, по своей величине намного превышающая эту случайную составляющую. Такая модель ошибок хорошо аппроксимируется функцией распределения такого вида

$$g_i(\Delta_i) = A_i e^{-\psi_i(\Delta_i)}, \quad (82)$$

где $\psi_i(\Delta_i)$ – некоторая достаточно гладкая выпуклая вниз функция, зависящая от небольшого числа параметров; A_i – нормирующий множитель, определяемый из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(\Delta_i) d\Delta_i = 1. \quad (83)$$

И в этом случае, назначая «весовые» характеристики по формуле

$$p_i = \frac{\left| \psi'(\Delta_i^{(0)}) \right|}{2 \left| \Delta_i^{(0)} \right|}, \quad (84)$$

где;

$$\Delta_i^{(0)} = x_i - f_i(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) . \quad (85)$$

И минимизируя взвешенную сумму квадратов невязок:

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum p_i \Delta_i^2 . \quad (86)$$

Также можно организовать итерационную процедуру, приводящую к состоятельной, асимптотически-несмещенной и асимптотически-эффективной оценке.

Поскольку в описанном алгоритме на каждом шаге итерационного процесса минимизируется взвешенная квадратичная форма, причем весовые характеристики изменяются при переходе к каждому очередному шагу, то указанный алгоритм условимся называть алгоритмом вариационно-взвешенных квадратических приближений.

2.2. Дополнительные сведения к методу наименьших модулей

Рассмотрим проблему оценки коэффициентов линейного уравнения регрессии

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_{it} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (87)$$

здесь y_1, y_2, \dots, y_n – значения зависимой переменной; $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ – соответствующие значения i -й, объясняющей переменной, $i = 1, 2, \dots, m$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – случайные ошибки; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – искомые коэффициенты уравнения регрессии.

Наиболее распространенным методом определения коэффициентов уравнения регрессии является метод наименьших квадратов (МНК), являющийся параметрическим методом, требующим выполнения ряда жестких ограничений – независимости и нормальности распределения ε , детерминированности объясняющих переменных. Известно, что даже незначительные нарушения указанных предпосылок резко снижают эффективность оценок. Отметим неустойчивость процедуры МНК-оценивания при наличии в измерениях больших ошибок, при этом оценки становятся несостоятельными [5].

Наряду с проблемой (87) будем рассматривать проблему оценки коэффициентов линейного уравнения авторегрессии

$$y_t = \sum_{i=1}^m a_i y_{t-i} + \varepsilon_t . \quad (88)$$

Нахождение оценок коэффициентов уравнения авторегрессии существенно усложняется плохой обусловленностью системы уравнений, представляющей необходимые условия минимума суммы квадратов отклонений.

Альтернативой МНК с целью обеспечения устойчивости оценок при нарушении предпосылок является метод наименьших модулей (МНМ) [2]. В данной работе рассмотрены два варианта реализации МНМ – взвешенный МНМ [6,7] и обобщенный МНМ [5]. Установленная в работе взаимосвязь методов позволила предложить новые подходы к нахождению оценок коэффициентов уравнений (87) и (88).

ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Эвтектический сплав свинец-висмут сравнительно недавно начал использоваться как теплоноситель преимущественно в транспортных ядерных энергетических установках [8,9]. В настоящее время эта эвтектика рассматривается в качестве возможного теплоносителя для перспективных реакторных установок нового поколения [10].

Обобщающий систематический анализ результатов экспериментов по определению транспортных и термодинамических свойств свинцово-висмутовой эвтектики был выполнен П.Л. Кирилловым с сотрудниками и приведен в работе [11].

За рубежом существуют публикации, обобщающие результаты исследований различных авторов [12,13]. Однако в них не вошли результаты исследований российских специалистов, в частности, группы под руководством С.В. Станкуса (Новосибирск, Сибирское отделение АН РФ, институт им. С.С. Кутателадзе) и группы под руководством Б.Б. Алчагирова (Нальчик, Кабардино-Балкарский государственный университет). Многочисленные эксперименты, выполненные этими специалистами, отличаются методической продуманностью, использованием современной приборной базы и тщательностью обработки экспериментальных результатов.

Появление новых данных привело к необходимости уточнения и коррекции существующих расчетных соотношений. Расчетный анализ был выполнен для следующих параметров: плотность, коэффициент динамической вязкости, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности, коэффициент поверхностного натяжения, удельное электрическое сопротивление и скорость звука в сплаве.

С 2019 г. предложенные в данной работе соотношения являются рекомендованными Госкорпорацией «Росатом» РФ для расчета термодинамических свойств эвтектики свинец-висмут.

3.1. Общие Замечания

Оценка термодинамических и транспортных свойств эвтектического сплава свинец-висмут была выполнена на основании экспериментальных данных, приведенных в 38 экспериментальных работах. Авторы данной работы располагали сведениями всего о 1085 экспериментальных точках. Непосредственная оценка была выполнена по 1058 точкам. В таблице 1 приведены краткие сведения об экспериментальных работах и источниках, на основании которых были получены приведенные ниже соотношения.

Таблица 1 – Сведения об источниках и диапазонах температур

Параметр	Число работ *	Период, гг.	Диапазон температур, К	Общее число точек	Число точек в оценке
Плотность	12	1952 – 2015	400 – 1225	594	594
Коэффициент динамической вязкости	8	1954 – 2015	400 – 1300	155	137
Удельная теплоемкость	3	1954 – 1973	400 – 950	19	11
Коэффициент теплопроводности	9	1923 – 2008	400 – 1000	122	121
Коэффициент поверхностного натяжения	10	1951 – 2008	400 – 1250	77	77

Продолжение таблицы 1

Удельное электрическое сопротивление	3	1954 – 2008	400 – 1050	24	24
Скорость звука	4	1975 – 2009	400 – 1400	112	112
* Число работ, по материалам которых проводился анализ					

Источник: [11, 12, 13, 15]

Для определения сравнительной точности расчета свойств по рекомендованным соотношениям были выполнены сравнительные расчеты по формулам, приведенным в справочнике, изданном NEA (Nuclear Energy Agency) [12], во многом основанном на материалах, приведенных в [13], обобщающей работе [11] и работе [15].

3.2. Рекомендуемые Регрессионные Соотношения И Их Погрешности

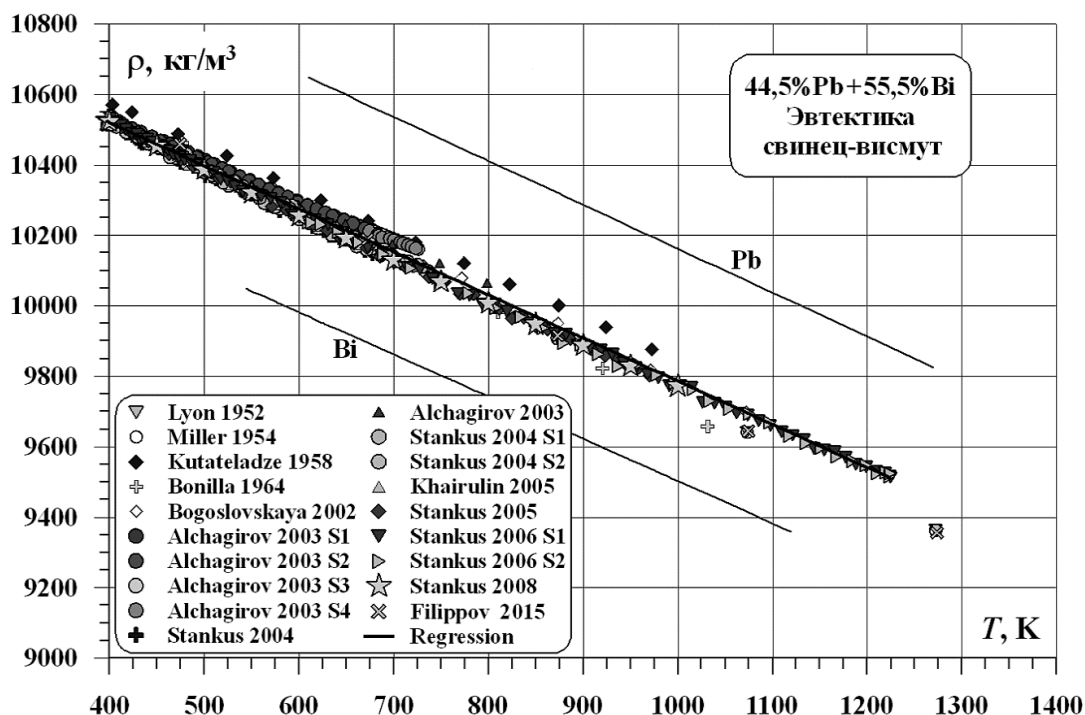
1. Уравнение регрессии для плотности эвтектики свинец-висмут получено на основании анализа 12-ти экспериментальных работ [16 – 27], в которых даны сведения о 594 экспериментальных точках, полученных в 1952 – 2015 гг. Обработка данных выполнена по методике, краткое описание которой приведено в [14].

Рекомендуемое соотношение для плотности свинцово-висмутовой эвтектики имеет вид

$$\rho = 1,1 \cdot 10^4 - 1,223 \cdot T, \quad (89)$$

где T – температура, К; ρ – плотность, кг/м³. Диапазон температур от 400 до 1225 К. Графическое представление экспериментального материала с кривой регрессии показано на Рис 2. Здесь же нанесены кривые зависимостей плотности

чистого свинца и висмута от температуры. Все экспериментальные данные достаточно плотно размещаются на линии аппроксимации. Как и следовало ожидать, экспериментальные точки для эвтектики легли между зависимостями для чистого свинца и висмута. Обозначения S1 – S4 на легенде возле фамилий некоторых авторов означают, что сведения приведены о нескольких сериях экспериментов.



Источник: собственная разработка

Рисунок 2 – Зависимость плотности эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

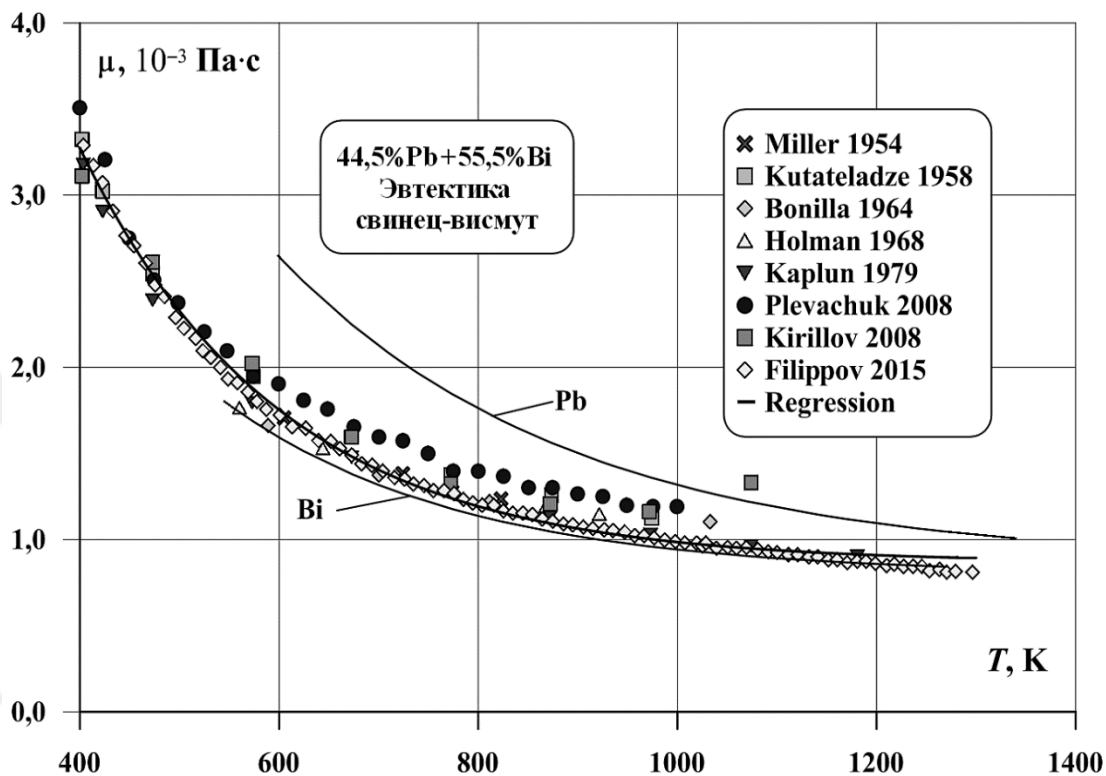
2. Уравнение для расчета коэффициента динамической вязкости эвтектики свинец-висмут в жидкой фазе получено на основании анализа экспериментальных данных, приведенных в работах [11, 17, 18, 30 – 32], и имеет вид

$$\mu = 8,65 \cdot 10^{-4} + 1,77 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-T/200,5), \quad (90)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с. Температурный диапазон от

400 до 1300 К.

Графическое представление результатов расчета по соотношению (90) приведено на рис. 3. Всего в работах [11, 17, 18, 30 – 32] даны сведения о 155 экспериментальных точках из которых в оценке были задействованы 137.



Источник: собственная разработка

Рисунок 3 – Зависимость коэффициента динамической вязкости эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

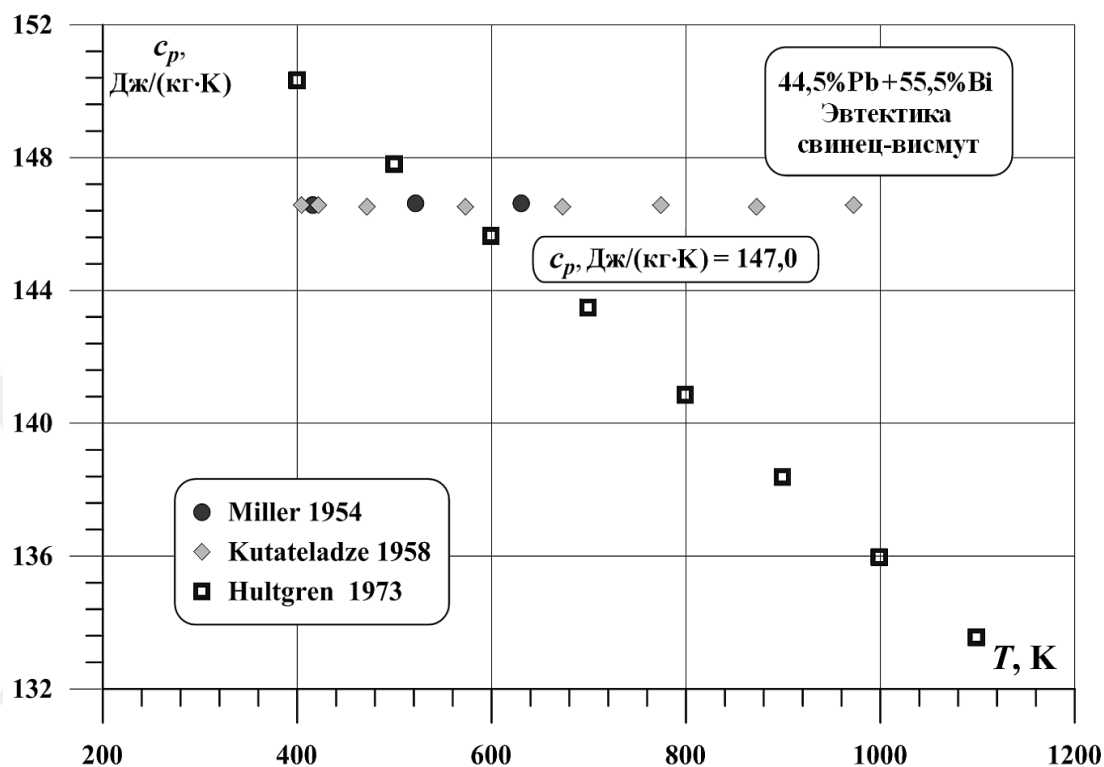
3. Соотношение для удельной теплоемкости c_p эвтектики свинец-висмут в жидкой фазе было получено на основании обработки данных, приведенных в работах [17, 18, 33]:

$$c_p = 147,0 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}). \quad (91)$$

Диапазон температур от 400 до 950 К. Экспериментальные данные и уравнение регрессии (91) показаны на рис. 4. В трех цитируемых работах указаны сведения лишь о 19-ти экспериментальных точках. Для обоснования

соотношения (91) использовалось 11 экспериментальных точек.

Особо отметим, что получение экспериментальных данных по удельной теплоемкости эвтектики связано с большими техническими трудностями и требует применения достаточно дорогостоящей аппаратуры.



Источник: собственная разработка

Рисунок 4 – Зависимость удельной теплоемкости эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

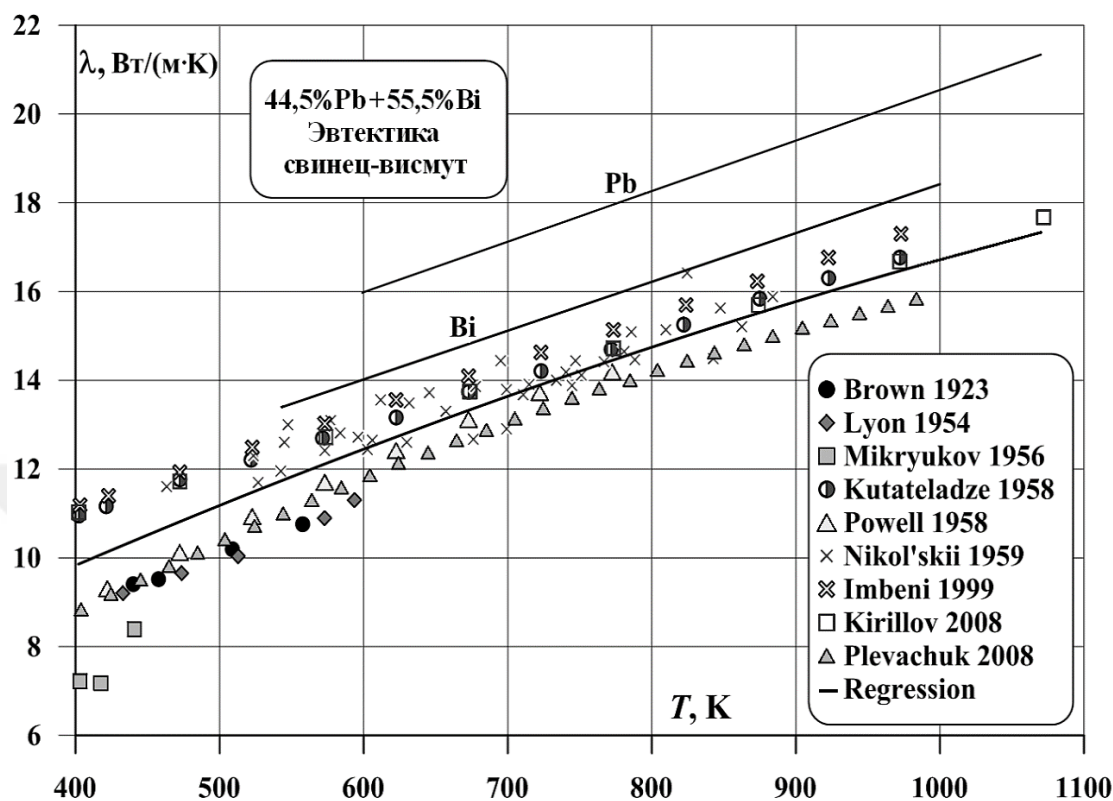
4. Рекомендуемое соотношение для расчета коэффициента теплопроводности висмута в жидкой фазе получено на основании экспериментальных данных работ [10, 11, 28, 34, 37, 40 – 47] таково:

$$\lambda = 3,615 + 0,0173 \cdot 10^{-2} T + 0,405 \cdot 10^{-5} T^2, \quad (92)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К). Соотношение применимо в диапазоне от 400 до 1000 К. Всего в упомянутых работах было получено 97 экспериментальных точек. Расчетная оценка выполнена по 66-ти

экспериментальным точкам.

График для уравнения (92) показан на Рис. 5.



Источник: собственная разработка

Рисунок 5 – Зависимость коэффициента теплопроводности эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

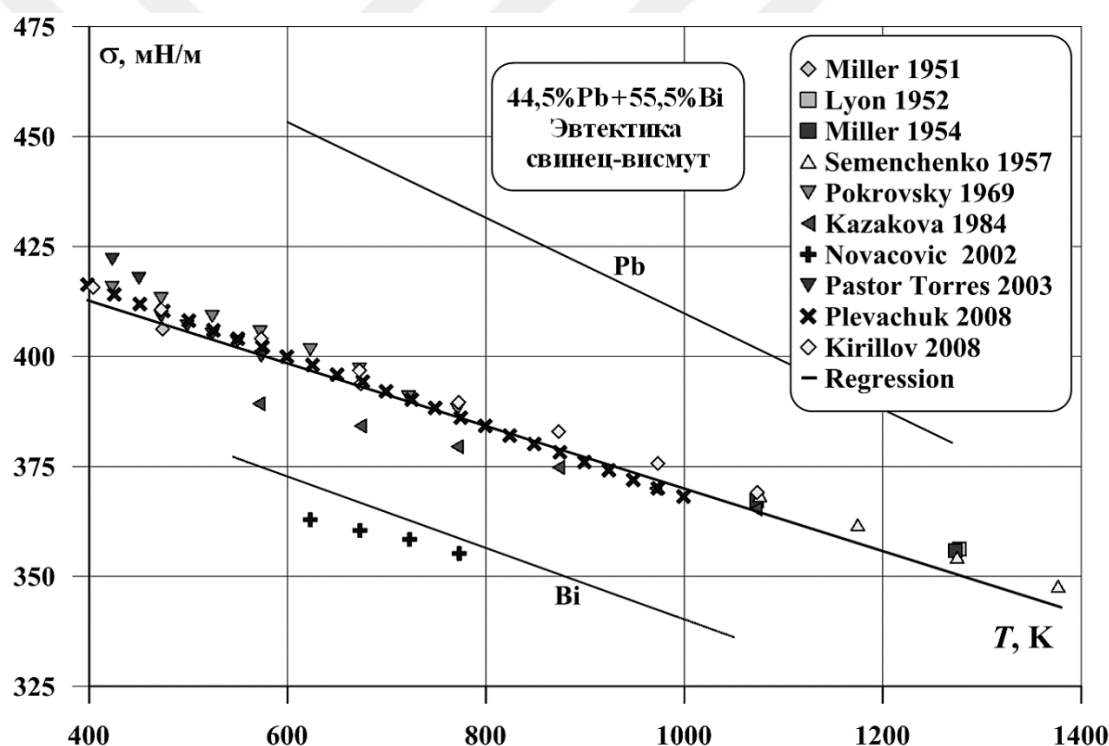
Особо отметим, что экспериментальные данные, приведенные на этом рисунке, расходятся в среднем на 25%. Столь большой разброс вызван, видимо, большим содержанием примесей в висмуте. К сожалению, в большинстве экспериментальных работ сведения о процентном содержании примесей в исходном опытном материале отсутствуют. Авторы данной работы могли только предполагать их наличие. На основании этого основополагающими аргументами при отборе данных для проведения оценки играли факты отклонения тренда экспериментальных данных, приведенных в конкретной работе, от общего тренда и явное «выпадение» отдельных точек из общего массива данных.

5. Уравнение регрессии для коэффициента поверхностного натяжения эвтектики свинец-висмут получено на основании анализа экспериментальных данных работ [17, 30, 31, 39–45] и имеет вид

$$\sigma = (441,1 - 0,0711 \cdot T) \cdot 10^{-3}, \quad (93)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, Н/м. Интервал температур 400 – 1370 К.

График для соотношения (93) и экспериментальные данные показаны на рис.6.



Источник: собственная разработка

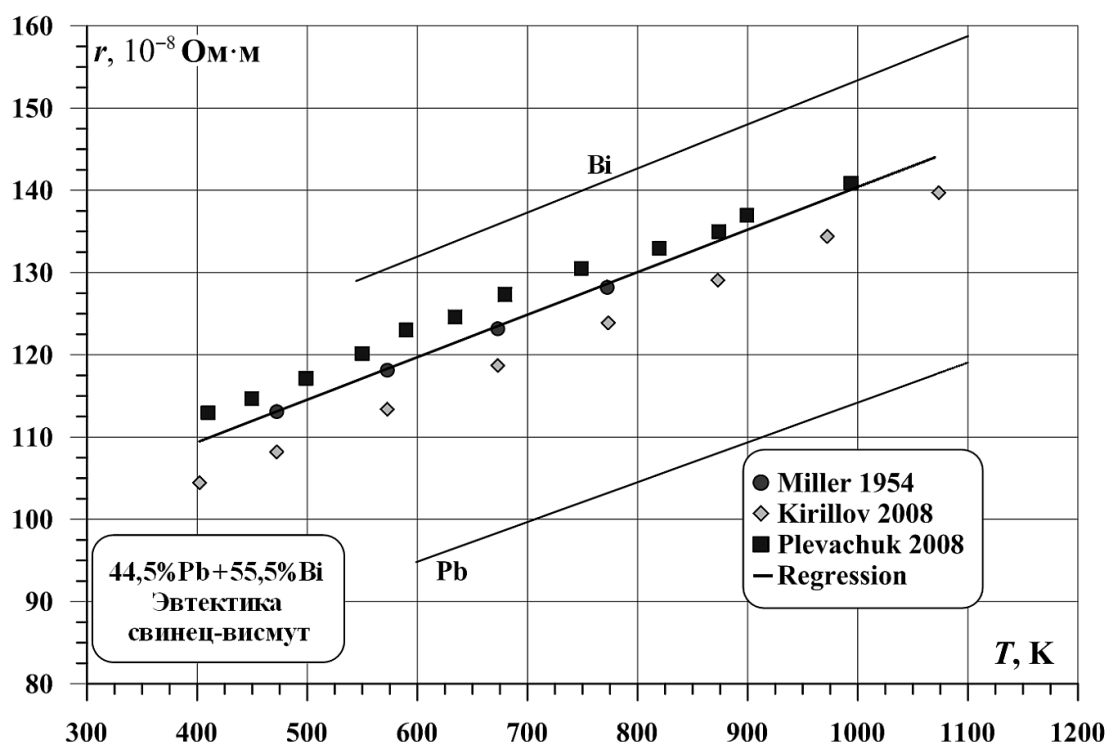
Рисунок 6 – Зависимость коэффициента поверхностного натяжения эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

6. Регрессионное уравнение для удельного электрического сопротивления эвтектики свинец-висмут, находящейся в жидкой фазе, получено на основании анализа экспериментальных данных из [17, 30, 31] и имеет вид

$$r = (88,71 + 0,052 \cdot T) \cdot 10^{-8}, \quad (94)$$

где r – удельное электрическое сопротивление, Ом·м. Диапазон температур 400 – 1050 К.

График для соотношения (94) и экспериментальные данные показаны на Рис.7. Аппроксимация выполнялась по 24-м экспериментальным точкам.



Источник: собственная разработка

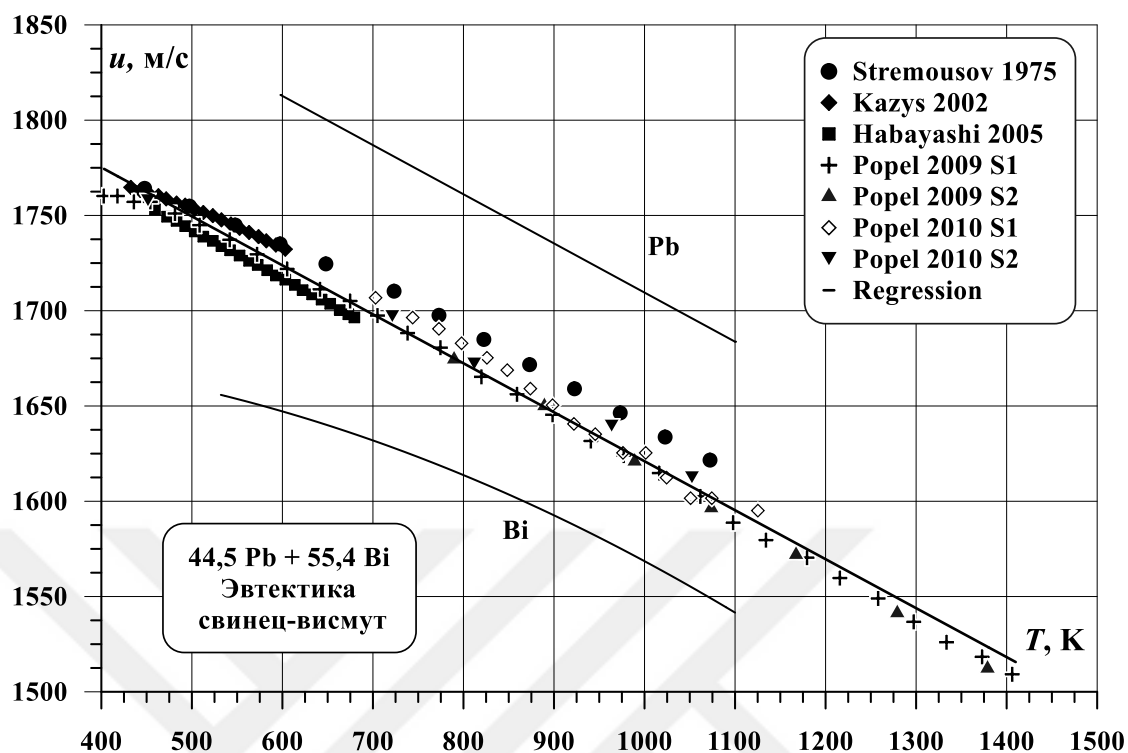
Рисунок 7 – Зависимость удельного электрического сопротивления эвтектики Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

7. Оценка величины местной скорости звука в свинцово-висмутовой эвтектике получена на основании анализа 112-ти экспериментальных точек из работ [46 – 49]. Регрессионное уравнение для ее расчета имеет вид

$$u = 1,855 \cdot 10^3 - 0,257 T, \quad (95)$$

где u – скорость звука, м/с. Диапазон температур от 400 до 1400 К.

Результаты расчета по соотношению (95) представляет Рис. 8.



Источник: собственная разработка

Рисунок 8 – Зависимость скорости звука в эвтектике Pb-Bi, Pb и Bi от температуры

Величины относительных погрешностей для рассмотренных выше соотношений (89) – (95) и погрешностей, приведенных в работах [11] и [12], представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Относительные погрешности уравнений регрессии (89) – (95) для параметров эвтектики свинец-висмут в сравнении с данными работ [11] и [12], %

Параметр	Данная работа	Кириллов [4]	NEA [5]
Плотность	0,25	0,33	0,29
Коэффициент динамической вязкости	3,22	24,02	4,95
Удельная теплоемкость	1,83	2,07	37,86
Коэффициент теплопроводности	5,52	–	7,65
Коэффициент поверхностного натяжения	0,99	–	0,98
Удельное электрическое сопротивление	0,88	0,88	0,92
Местная скорость звука	0,88	–	1,05

Источник: [11, 12]

ГЛАВА 4. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОЦЕНОК МЕТОДОВ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Одним из стандартных способов сравнения качества двух асимптотически нормальных оценок является вычисление их асимптотической относительной эффективности (АОЭ), которая определяется как величина, равная обратному отношению их асимптотических дисперсий. Таким образом, АОЭ оценки наименьших модулей относительно оценки наименьших квадратов есть

$$e = \frac{4 \left(E \left(x_0^2 f_\varepsilon(n_1 x_0) \right) \right)^2 \left(\sigma^2 E x_0^2 + \omega^2 E x_0^4 \right) \left(1 - a_0^2 - \omega^2 \right)^2}{\sigma^4 E x_0^2} . \quad (96)$$

Асимптотическая относительная эффективность показывает, во сколько раз больше наблюдений нужно взять, чтобы оценка наименьших квадратов достигла такой же точности, что и оценка наименьших модулей. Если $e > 1$, то оценка наименьших модулей точнее, чем оценка наименьших квадратов. Если же $e < 1$, то, наоборот, оценка наименьших квадратов точнее, чем оценка наименьших модулей.

Вычислим e в предположении, что случайная величина ε_i имеет загрязненное нормальное распределение (распределение Тьюки), плотность которого имеет вид

$$f_\varepsilon(x) = (1 - \gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} . \quad (97)$$

Распределение Тьюки моделирует небольшое отклонение распределения от нормального, что типично для практики: основная масса наблюдений имеет стандартное нормальное распределение, а небольшая доля γ — нормальное

распределение с нулевым математическим ожиданием и большей, чем единица, дисперсией τ^2 [51, ст 49]. Обычно $\gamma \leq 0,15$.

Раскладывая $x_0^2 f_\varepsilon(n_1 x_0)$ по формуле Тейлора по степеням x_0^2 , получим

$$E(x_0^2 f_\varepsilon(n_1 x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E(n_1^{2n}) E(x_0^{2n+2})}{2^n n!} \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\tau^{2n+1}} \right) \right). \quad (98)$$

Из

$$Ex_t^{2n} = E((a_0 + \eta_t) x_{t-1} + \varepsilon_t)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k Ex_{t-1}^k E\varepsilon_t^{2n-k} E(a + \eta_t)^k. \quad (99)$$

Будем иметь рекуррентную формулу для нахождения Ex_0^{2n} :

$$Ex_0^{2n} = \frac{1}{1 - E(a + \eta_1)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k Ex_0^k E\varepsilon_t^{2n-k} E(a + \eta_t)^k. \quad (100)$$

Сходимость правой части ряда (98) зависит от распределения вероятности η_1 . Несложно показать, что если η_1 имеет нормальное распределение, то ряд расходится при любых σ и ω . Поэтому предположим, что η_1 имеет усеченное нормальное распределение

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{-\frac{x^2}{2\omega^2}}, & \text{если } |x| \leq k\omega, \\ 0, & \text{если } |x| > k\omega \end{cases}, \quad (101)$$

здесь k — некоторая положительная постоянная, например $k = 3$, если следовать правилу «трех сигм»,

$$c_1 = \sqrt{2\pi\omega} 2\Phi_0(k). \quad (102)$$

— нормировочная постоянная, а

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt . \quad (103)$$

— функция Лапласа. Нетрудно показать, что

$$E\eta_1^{2n} < (k\omega)^{2n} \quad , \quad E(a+\eta_1)^{2n} < (|a|+k\omega)^{2n} . \quad (104)$$

Откуда следует, что $E\epsilon_1^{2n} < C_2(|a|+k\omega)^{2n}$, где C_2 — некоторая положительная постоянная. Так как ϵ_1 имеет распределение Тьюки, то

$$E\epsilon_1^{2n} = (2n-1)!!(1-\gamma + \gamma\tau^{2n}) . \quad (105)$$

Так как $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, то, используя формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

получим, что при $(|a|+k\omega)\tau < 1$ ряд в правой части сходится. Так как этот ряд знакочередующийся, то погрешность при аппроксимации $E(x_0^2 f_\epsilon(n_1 x_0))$ n -й частичной суммой этого ряда не превосходит абсолютного значения его $(n+1)$ -го члена. Таким образом для небольших значений a , k , ω и τ можно сколь угодно точно найти $E(x_0^2 g(0))$, а стало быть, и e .

На следующих графиках представлена зависимость e от a , k , ω и τ . На рис.1 показана зависимость e от ω для разных τ . Для определенности полагалось $a_0 = 0,1$, $k = 3$, $\gamma = 0,1$. Видно, что при небольших значениях ω АОЭ практически постоянна. Далее с ростом ω асимптотическая дисперсия обеих оценок неограниченно растет, причем дисперсия оценки наименьших модулей растет быстрее, в результате чего АОЭ уменьшается до нуля.

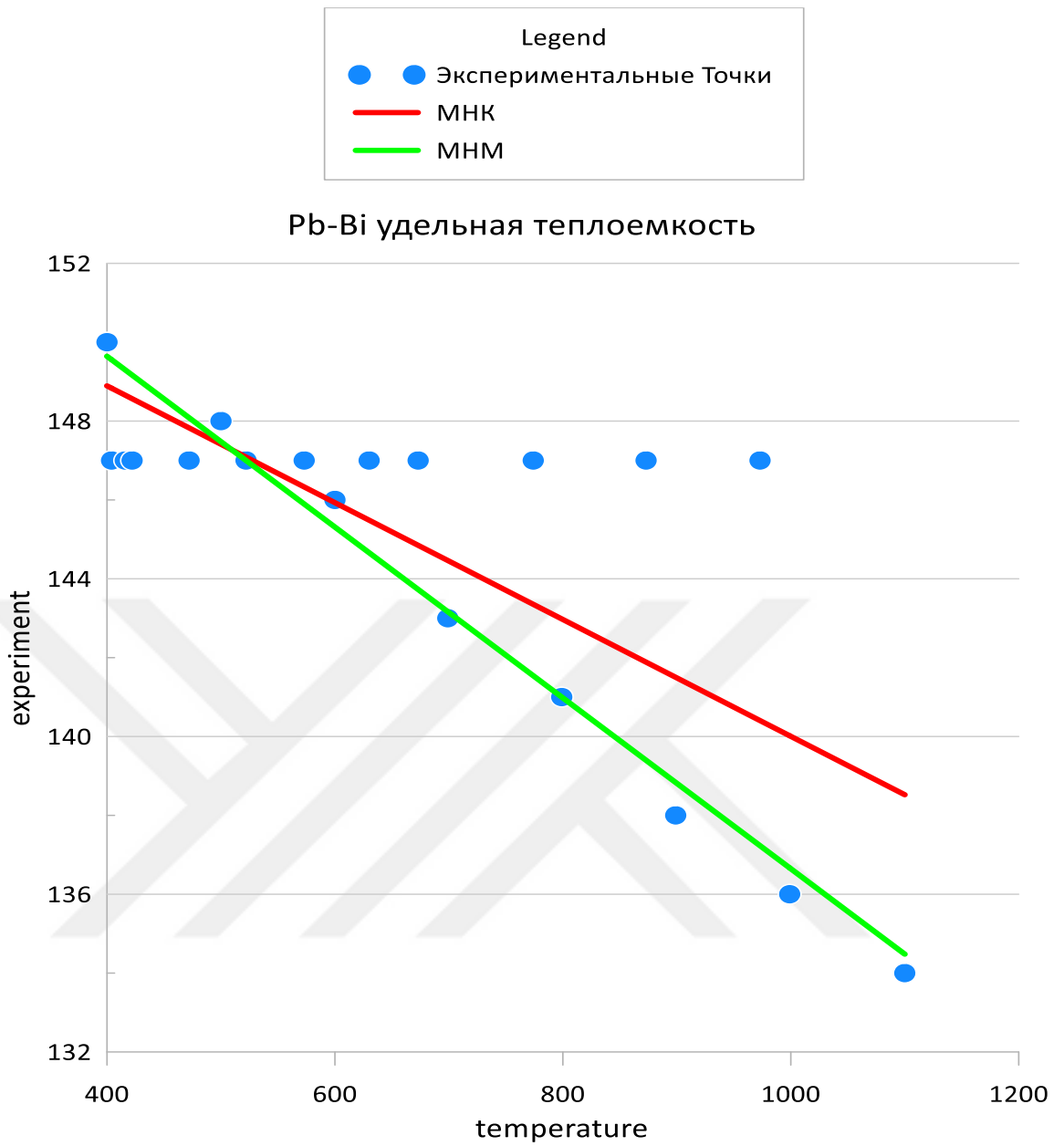
4.1. Сравнение метода наименьших квадратов и метода наименьших модулей для описания термодинамических свойств теплоносителя сплава эвтектики Pb-Vi

В данной выпускной квалификационной работе сравнены эффективности МНК и МНМ по термодинамическим свойствам эвтектического сплава Pb-Vi. Экспериментальные данные введены в программу, которая написана в Фортране. С помощью этой программы получены экспериментальные значения, которые дают функции МНК и МНМ.

Эксперимент проводился по следующим четырем свойствам эвтектического сплава Pb-Vi;

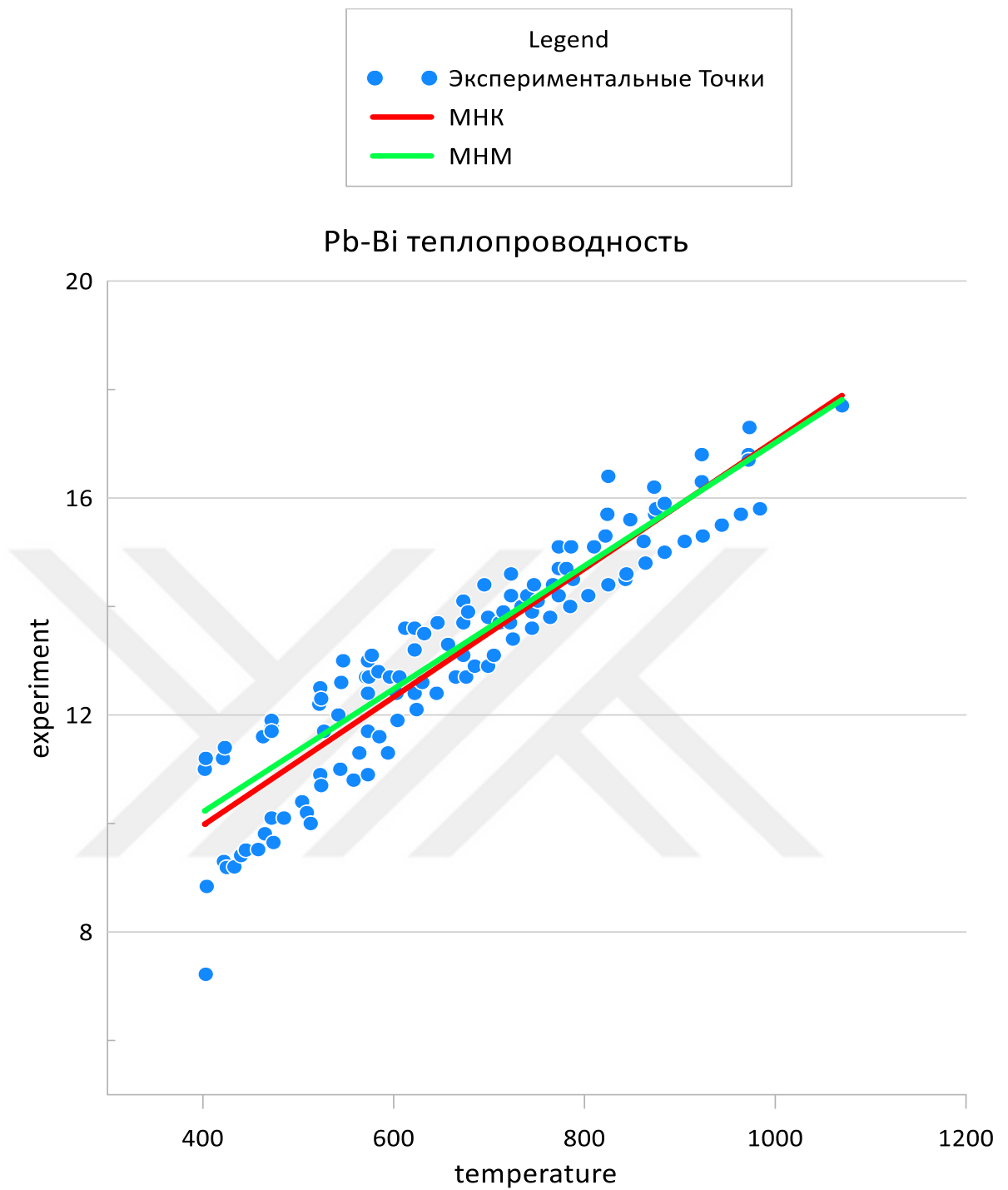
- Удельная теплоемкость Pb-Vi
- Теплопроводность Pb-Vi
- Скорость звука Vi
- Теплопроводность Vi

По этим четырем свойствам 4 графики построены. Сравнение метода наименьших квадратов и метода наименьших модулей для разных термодинамических свойств эвтектики Pb- Vi представлено на рисунках 9-12.



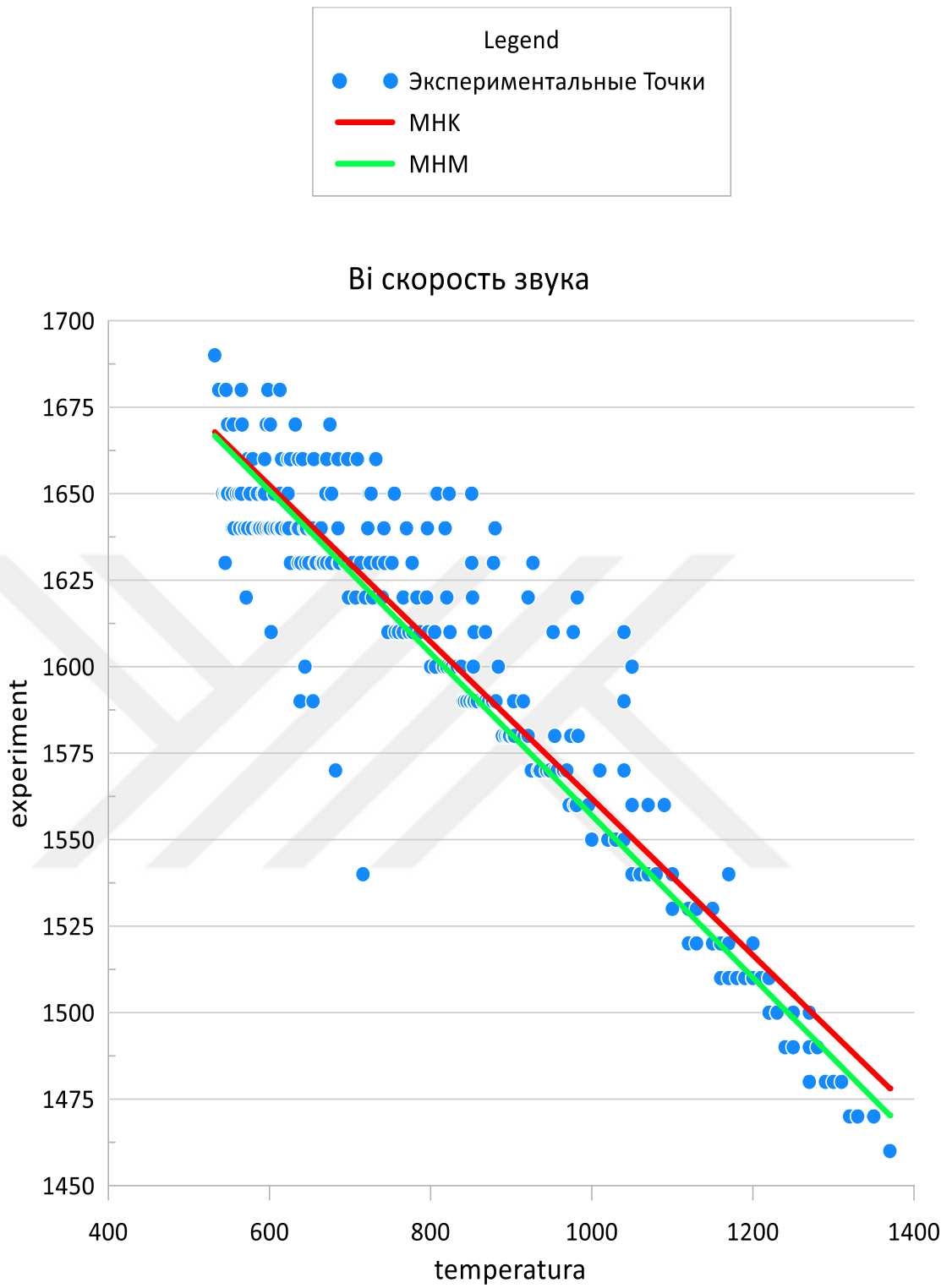
Источник: собственная разработка

Рисунок 9 – Сравнение МНК и МНМ для удельной теплоемкости Pb-Bi



Источник: собственная разработка

Рисунок 10 – Сравнение МНК и МНМ для теплопроводности Pb-Bi

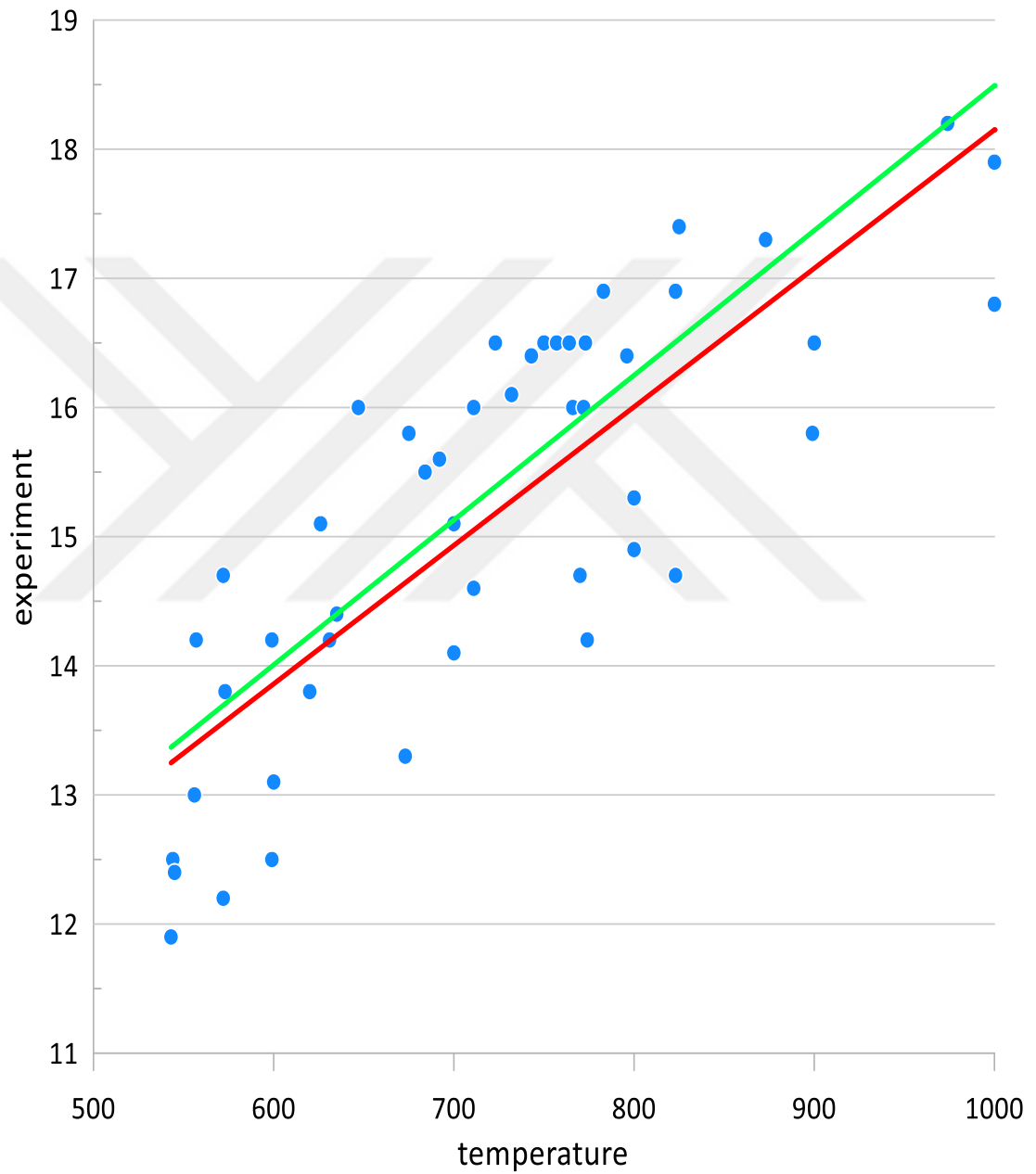


Источник: собственная разработка

Рисунок 11 – Сравнение МНК и МНМ для скорости звука V_i



Ві теплопроводность



Источник: собственная разработка

Рисунок 12 – Сравнение МНК и МНМ для теплопроводности V_i

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы было выполнено:

1. Сбор и анализ экспериментальных данных по термодинамическим свойствам эвтектики свинец-висмут;
2. Разработана расчетная программа для построения регрессионного соотношения по методу наименьших квадратов и методу наименьших модулей;
3. Все экспериментальные материалы были переведены в графический вид;
4. Выполнено сравнение результатов аппроксимации по методу наименьших квадратов и методу наименьших модулей;

Получили, что в наиболее общем случае метод наименьших квадратов и метод наименьших модулей приводят к различным результатам. Результаты различаются на величину коэффициентов в регрессионных соотношениях. По нашим данным различие может достигать 4,3 %.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Гольцов, Н.А. Лекции по аппроксимации табличных функций, заданных своими значениями и значениями своих производных на основе критерия максимального правдоподобия / Н.А. Гольцов. – М.: Изд-во МГУЛ, 2002. – С. 5 – 10.
- 2 Магнус, Я.Р. Эконометрика / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2004. – 576 с.
- 3 Исаков, В.Н. Элементы численных методов / В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2005. – 192 с.
- 4 Мудров, В.И. Метод наименьших модулей / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Знание, 1971. – 64 с.
- 5 Хьюбер, П. Робастность в статистике / П. Хьюбер. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
- 6 Тырсин, А.Н. Об эквивалентности знакового и наименьших модулей методов построения линейных моделей // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2005. – Т. 12. – Вып. 4 – С.879 – 880.
- 7 Болдин, М.В. Знаковый статистический анализ линейных моделей / М.В. Болдин, Г.И. Симонова, Ю.Н. Тюрин. – М.: Физматлит, 1997. – 288 с.
- 8 Тошинский Г.И., Степанов В.С., Никитин Л.Б. и др. Анализ опыта эксплуатации реакторных установок с теплоносителем свинец-висмут и имевших место аварий. / Труды конф. «Тяжелые жидкометаллические теплоносители в ядерных технологиях», ТЖМТ-98. – г. Обнинск: ГНЦ РФ-ФЭИ, 1999. – Т. 1. – С. 63 - 69.
- 9 Зродников А.В., Тошинский Г.И., Степанов В.С. Конверсия свинцово-висмутовой реакторной технологии: от реакторов АПЛ к энергетическим реакторам и пути повышения инвестиционной привлекательности ядерной энергетики на базе быстрых реакторов. / IAEA CN A3. Докл. на Межд. конф. МАГАТЭ «Fifty Years of Nuclear Power – the Next Fifty Years» Обнинск, 27 июня – 2 июля, 2004. CD-ROM. www.akmeengineering.com.

- 10 Джангобегов В.В., Пиминов В.А., Мохов В.А. и др. Современные проекты ОКБ «ГИДРОПРЕСС». Разработка и реализация. // Приложение к научно-техническому сборнику ВАНТ. Сер. Обеспечение безопасности АЭС. – 2015. – Вып. 35. «Реакторные установки» – Подольск: АО ОКБ «ГИДРОПРЕСС», 2015. – 64 с.
- 11 Кириллов П.Л. Теплофизические свойства свинца, висмута и их эвтектического сплава. / Обзор ФЭИ-0286. – М.: ЦНИИАтоминформ, 1998. – 28 с.
- 12 Handbook on Lead-Bismuth Eutectic Alloy and Lead Properties, Materials Compatibility, Thermalhydraulics and Technologies. 2015 Edition. – OECD 2015. Nuclear Energy Agency. – NEA. No. 7268.
- 13 Sobolev V. Database of Thermophysical Properties of Liquid Metal Coolants for GEN-IV. Sodium, Lead, Lead-Bismuth Eutectic (and Bismuth). / Scientific Report of the Belgian Nuclear Research Centre. – SCK·CEN-BLG-1069, Nov. 2010 (rev. Dec. 2011).
- 14 Чусов И.А., Обысов Н.А., Новиков Г.Е., Проняев В.Г. Расчетные соотношения для определения термодинамических свойств свинцового теплоносителя. // ВАНТ. Серия: Физика ядерных реакторов. – 2019. – Вып. 2. – С. 83-91.
- 15 Bogoslovskaya G.P. et al. Comparative Assessment of Thermophysical and Thermohydraulic Characteristics of Lead, Lead-Bismuth and Sodium Coolants for Fast Reactors, IAEA TECDOC-1289. – IAEA, Vienna, 2002. <https://www.oecd-neo.org/>
- 16 Lyon R.N. Liquid Metals Handbook, second ed. – Washington, USA: US Atomic Energy Commission and Dept. of the Navy, 1952. – 733 p.
- 17 Miller R.R., Lyon R.N. et al. Physical Properties of Liquid Metals, Liquid Metals Handbook. / R.N. Lyon (ed.), 2nd edition. Report NAVEXOS P-733. – Atomic Energy Commission and Dept. of the Navy, Washington, USA, 1954.
- 18 Кутателадзе С.С., Боришанский В.М., Новиков И.И., Федынский О.С. Жидкометаллические теплоносители. – М.: Атомиздат, 1958. – 298 с.

- 19 Bonilla C.F. Heat Transfer, Chapter 2 in «Reactor Handbook», 2nd Ed., Vol. IV, Engineering. – Interscience Publishers, New York, USA, 1964. – 677 p.
- 20 Алчагиров Б.Б., Куршев О.И., Мозговой А.Г. Поверхностное натяжение жидкой свинцово-висмутовой эвтектики при технически важных температурах. // Перспективные материалы. – 2003. – № 6. – С.50-54.
- 21 Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Мозговой А.Г. Плотность расплавленной свинцово-висмутовой эвтектики при высоких температурах. //Перспективные материалы. – 2004. – № 4. – С. 38-43.
- 22 Алчагиров Б.Б., Шампаров Т.М., Мозговой А.Г. Экспериментальное исследование плотности расплавленной свинцово-висмутовой эвтектики. // Теплофизика Высоких Температур. – 2003. – Т. 41. – Вып. 2. – С. 247-253.
- 23 Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Мозговой А.Г. Термические свойства жидкометаллического теплоносителя для ядерных реакторов на быстрых нейтронах. // Перспективные материалы. – 2005. – № 3. – С. 41-45.
- 24 Khairulin R.A., Lyapunov K.M., Mozgovoi A.G., Stankus S.V., Ulyusov P.V. Crystallization and relaxation phenomena in the bismuth-lead eutectic. // Journal of Alloys and Compounds. – 2005. – Vol. 387. – PP. 183-186.
- 25 Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Мозговой А.В. Термические свойства жидкометаллического теплоносителя для ядерных реакторов на быстрых нейтронах. // Перспективные материалы. – 2005. – № 3. – С. 41-45.
- 26 Станкус С.В., Хайрулин Р.А., Мозговой А.Г., Рошупкин В.В., Покрасин М.А. Плотность жидкометаллического теплоносителя на основе свинец-висмутовой эвтектики при высоких температурах. // Теплофизика Высоких Температур. – 2006. – Т. 44. – Вып. 2. – С. 307-310.
- 27 Stankus S.V., Khairulin R.A., Mozgovoy A.G., Roshchupkin V.V. and Pokrasin M.A. The density and thermal expansion of eutectic alloys of lead with bismuth and lithium in condensed state. / XIII-th International Conference on Liquid and Amorphous Metals IOP Publishing. // Journal of Physics: Conference Series. – 2008. – Vol. 98. Doi:10.1088/1742-6596/98/6/062017.
- 28 Holman J.P. Heat Transfer. – MacGraw-Hill, 1964, USA. – 463 с.

- 29 Каплун А.Б., Шугаев В.М., Минаков С.П., Варламов Ю.Д. Вязкость эвтектического сплава свинец-висмут. / В сб.: Теплофизические свойства веществ и материалов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО АН СССР, 1979. – С. 105.
- 30 Plevachuk Yu., Sklyarchuk V., Eckert S., Gerbeth G. Some Physical Data of the Near Eutectic Liquid Lead-Bismuth. // J. Nucl. Mater. – 2008, – Vol. 373. – PP. 335-342.
- 31 Kirillov P.L. Thermophysical Properties of Materials for Nuclear Engineering: A Tutorial and Collection of Data, – IAEA, Vienna, 2008. – 167 p.
- 32 Filippov V.V., Yagodin D.A., Borisenko A.V., Shunyaev K.Yu. and Gelchinski B.R. Density, Viscosity, Ultrasound Velocity, and Electrical Resistivity of the Eutectic Lead-Bismuth Melt. // Russian Metallurgy (Metally). – 2016. – No. 8. – PP. 705-708.
- 33 Hultgren R. et al. Selected Values of the Thermodynamic Properties of Binary Alloys. – ASM, Metals Park, Ohio, USA, 1973. – 1435 p.
- 34 Brown W.B. Thermal Conductivities of Some Metals in the Solid and Liquid States. // Physical Review. – 1923. – Vol. 22. – P. 171.
- 35 Микрюков В. Е., Тяпунина Н.А. Исследование температурной зависимости теплопроводности, электропроводности и теплоемкости Bi, Pb и системы сплавов Bi-Pb. // Физика металлов и металловедение. – 1956. – № 1. – С. 31-41.
- 36 Никольский Н.А., Калакуцкая Н.А., Пчелкин И.М. Теплофизические свойства некоторых металлов и сплавов в расплавленном состоянии. / Вопросы теплообмена: сборник статей. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – с. 11-45.
- 37 Powell R.W., Tye R.P. Experimental determination of the thermal and electrical conductivities of molten metals / In: Proc. of the Conf. «Thermodynamic and Transport Properties of Fluids». – London: Inst. Mech. Eng, 1958. – PP. 182-187.
- 38 Imbeni V. Martini C., Masini S., Palombarini G. State of the art on the chemical-physical properties of Pb and Pb-Bi. Part II. Properties of Pb and Pb-Bi, Na, in Study of a superconductive accelerator of high-powered protons and study of a

subcritical system it supports for the burning of radioactive waste, Sub-theme 2: Corrosion tests, BoMet, Programme agreement. ENEA/INFN-MURST, Settore Ambiente, December 1999 (in Italian).

39 Miller R.R. Physical Properties of Liquid Metals, in: Liquid Metal Handbook. Lyon, R.N. (2-nd Ed.), Report NAVEXOS P-733, Atomic Energy Commission and Dept. of the Navy, Washington, USA, June 1952 (rev. 1954)

40 Lyon R.N. Liquid Metals Handbook, second ed. – Washington, USA: US Atomic Energy Commission and Dept. of the Navy, 1952. – 733 p.

41 Покровский Н.Л., Пугачевич П.П., Голубев П.А. Исследование поверхностного натяжения растворов свинец-висмут. // Журнал физической химии. – 1969. – Т. 43. – Вып. 8. – С. 2158-2159.

42 Казакова Н.В., Лямкин С.А., Лепинских Б.М. Плотность и поверхностное натяжение расплавов системы Pb-Bi. // Журнал физической химии. – 1984. – Т. 58. – Вып. 6. – С. 1534-1538.

43 Novakovic R., Ricci E., Giuranno D., Gnecco F. Surface Properties of Bi-Pb Liquid Alloys. // Surface Sci. – 2002. – Vol. 515. – PP. 377-389.

44 Pastor Torres F.C. Surface Tension Measurement of Heavy Liquid Metals Related to Accelerator Driven Systems (ADS). / Diploma Thesis, FZK (IKET), KALLA, April 2003.

45 Семенченко В.К. Поверхностные явления в металлах и сплавах. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1957. – 491 с.

46 Стремоусов В. И., Соломин Б.А. Скорость звука в тройной жидкометаллической системе Bi-Pb-Sn // Журнал физической химии. – 1975. – Т. 49. – № 8. – С. 1972-1974.

47 Kazys R., Voleisis A., Sliteris R. et al. Development of Ultrasonic Sensors for Operation in a Heavy Liquid Metal. // IEEE Sensors Journal. – 2006. – Vol. 6. – Iss. 5. – PP. 1134-1143.

48 Hirabayashi M. et al. Development of ultrasonic flow meter for liquid lead-bismuth flow. / Proc. of the XIII-th International Conference on Nuclear

Engineering, Beijing, China, May 16-20, 2005. – ICONE13-50346.
<https://inis.iaea.org>.

49 Попель П.С., Ягодин Д.А., Мозговой А.Г., Покрасин М.А. Экспериментальное исследование скорости звука в расплавленной свинцово-висмутовой эвтектике при высоких температурах. / Сб. научн. трудов, вып. 36 (материалы I Международной научной конференции «Актуальные проблемы молекулярной акустики и теплофизики») – Курск: Курский государственный университет, 2009, – с. 90-98.

50 Попель П.С., Ягодин Д.А., Мозговой А.Г., Покрасин М.А. Экспериментальное исследование скорости звука в расплавленной свинце, висмуте и их взаимном эвтектическом сплаве при высоких температурах. // Теплофизика высоких температур, – 2010. – Т. 48. – №2. – С. 90-98.

51 Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П. и др. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989. – С.49