



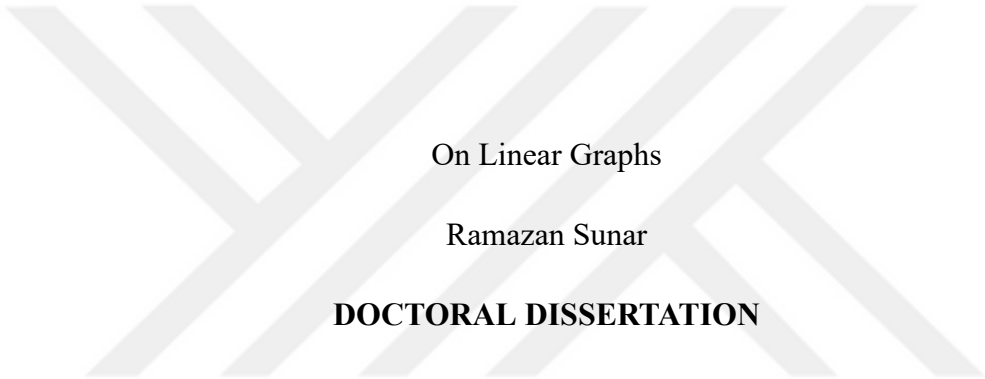
Lineer Graflar Üzerine

Ramazan Sunar

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2021



On Linear Graphs

Ramazan Sunar

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

September 2021

Lineer Graflar Üzerine

Ramazan Sunar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Eylül 2021

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Lineer Graflar Üzerine**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 06/09/2021

Ramazan Sunar

ÖZET

Bu çalışmada, iki kümeli grafların özel bir tipi olan ve $\lambda = 1$ durumu için $(0, \lambda)$ – grafları sınıfında yer alan lineer graflar tanımlanmıştır. Daha sonra lineer grafların temel özellikleri incelenerek sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca lineer grafların bazı yasaklı alt grafların karakterizasyonu yapılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bağlamda, bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın giriş ve amaç kısmına, ikinci bölümde ise detaylı bir literatür taramasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmamız için önemli bir yere sahip olan temel kavramlara yer verilmiştir. Çalışmanın dördüncü bölümünde lineer graf kavramı tanımlanmış ve bunların temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca lineer graflar afin graf, projektif graf ve $\{0, 1\}$ –semi graf olmak üzere sınıflandırması yapılarak temel özellikleri incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde lineer grafların komşuluk grafları incelenerek Friendship grafların komşuluk graflarından lineer graf elde edilmiştir. Altıncı bölümünde ise graflar için önemli bir indeks olan Wiener indeks kavramı kullanarak lineer grafların Wiener indeksleri incelenmiştir. Yedinci bölümünde bulgular ve tartışmalar kısmına yer verilerek elde edilen bulgular özetlenmiştir. Tezin son bölümü olan sekizinci bölümde ise sonuçlar ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer graf, İki kümeli graf, $(0, \lambda)$ – graf, Ortak komşuluk

SUMMARY

In this thesis, linear graphs, which are a type of bipartite graphs and which are a class of graphs $(0, \lambda)$ — whenever $\lambda = 1$, are defined. Following this, the basic properties of linear graphs were examined and their classification was made. Also, some forbidden subgraphs of linear graphs were characterized and important results were obtained.

In this context, this thesis consists of eight chapters. In the first part, the introduction and purpose of the study are given, and in the second part a detailed literature review is presented. The third chapter presents the basic concepts of importance to our thesis. In chapter four, linear graphs are defined and their basic properties are explored. Further, linear graphs that are affine graph, projective graph or $\{0, 1\}$ —semigraph have been classified, their properties examined and important results have been obtained. In chapter five, we obtained a linear graph from the neighborhood graphs of the friendship graphs by examining the neighborhood graphs of the linear graphs. In chapter six, Wiener indices of linear graphs are examined, which has an important indices in graphs. In chapter seven of the thesis, findings and discussions are presented and the findings are summarized. The final chapter of the thesis, which contains the conclusions and suggestions, is the eighth chapter.

Keyword: Linear graph, Bipartite graph, $(0, \lambda)$ — graphs, Common neighborhood

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
SİMGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
4. LİNEER GRAFLAR	10
4.1. Afın Graflar	46
4.2. Projektif Graflar	57
4.3. $\{0, 1\}$ –Semi Graflar	70
5. LİNEER GRAFLARIN KOMŞULUK GRAFLARI	81
6. LİNEER GRAFLARIN WIENER İNDEKSLERİ	87
7. BULGULAR VE TARTIŞMA	96
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	97
KAYNAKLAR DİZİNİ	99

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Königsberg'in yedi köprüsü	2
2.2 Königsberg Probleminin Grafla temsili	2
3.1 Ayrıtlarına Göre Graf Çeşitleri	5
4.1 C_6 bir lineer graf modeli	10
4.2 K_4 ve K_4 ün düğüm genişlemesiyle oluşan graf modeli	13
4.3 K_4 ün düğüm genişlemesinin iki kümeli temsili	13
4.4 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$	21
4.5 Teorem 4.14 için örnek bir lineer graf modeli	25
4.6 Bir lineer graf modeli	28
4.7 Teorem 4.20'deki parametrelere sahip lineer graf modeli	37
4.8 Teorem 4.21'daki parametrelere sahip lineer graf modeli	38
4.9 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf modeli	46
4.10 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, bir projektif graf modeli	57
4.11 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$: bir $\{0, 1\}$ -semi graf modeli	70
4.12 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$	73
5.1 G ve $\mathcal{N}(G)$	81
5.2 C_6 grafinin iki kümeli modeli	85
5.3 $G_1 = (S(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}, E_1)$ ve $G_2 = (\mathcal{P} \cup S(\mathcal{L}), E_2)$	85
5.4 $n = 3$ için Friendship graf modeli: F_3	85
5.5 $\mathcal{N}(F_3)$, F_3 grafinin komşuluk grafi	86
6.1 $G = (V, E)$ grafi	87
6.2 Şekil 4.12 de verilen lineer graf modelinin yeniden adlandırılması	89

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Örnek 4.14 da verilen $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ grafına ait ayrıtların tablosu	45
4.2 Örnek 4.14 da verilen $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ grafına ait ayrıtların tablosu	45
4.3 Örnek 4.17 da verilen $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ grafına ait ayrıtlar	56
6.1 Şekil 6.2 de verilen graf modelindeki farklı düğüm çiftleri arası uzaklıklar . . .	90
6.2 Şekil 4.9 de verilen graf modelindeki farklı düğüm çiftleri arası uzaklıklar . . .	94



SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
$cn(x, y)$	x ve y düğümlerinin ortak komşuluğunun sayısı
$d(x)$	x düğümünün derecesi
$\delta(G)$	G nin minimum derecesi
$ V $	V nin düğüm sayısı
$N(x)$	x düğümünün komşuluğundaki düğümler kümesi
$\Lambda^k(L, H)$	Ortak komşuluğunun sayısı k olan düğümler kümesi
$\mathcal{A}^k(L)$	L ile ortak komşuluğunun sayısı k olan düğümler kümesi
$\mathcal{A}^{r,s}(L, K)$	Ortak komşuluğunun sayısı L ile r ; K ile s olan düğümler kümesi
$\mathcal{N}(G)$	G nin komşuluk grafi
$W(G)$	G nin Wiener indeksi

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Graf Teorinin bir alt konusu olan $(0, \lambda)$ – grafları H. M. Mulder(Mulder, 1979) tarafından " $\lambda \geq 2$ olmak üzere herhangi iki düğümünün ortak komşuluğunun sayısı 0 veya λ olan bağlı graflar" olarak tanımlanmıştır. Bu graflarla ilgili regülerlik, düğüm sayısı derece ilişkisi ve çaplarıyla ilgili çalışmalar yapılarak bazılarının sınıflandırılmaları yapılmıştır. Başta Mulder olmak üzere yapılan bu çalışmalarda $\lambda \geq 2$ olması şartı göz önüne alınmış $\lambda = 1$ durumuyla ilgili herhangi bir çalışma yapılmamıştır. İlerleyen yıllarda $\lambda=1$ durumu, başta Günaltılı olmak üzere Ulukan ve Olgun tarafından incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalarda $(0, 1)$ –graflarının bazı temel özellikleri incelenmiş ve bazılarının sınıflandırmasına yönelik çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmada iki kümeli grafların özel bir tipi olan lineer graflar tanımlanarak karakterizasyonu yapılacaktır. Aynı zamanda $(0, 1)$ – grafları sınıfında yer alan lineer grafların sınıflandırılması yapılarak son yıllarda araştırılmaya başlanan $(0, 1)$ – graflarının sınıflandırılmasına katkı sağlanacaktır. Bununla birlikte bazı geometrik yapılardaki karmaşık durumların lineer graflarla daha anlaşılabilir temsili yapılabileceği öngörülmektedir.

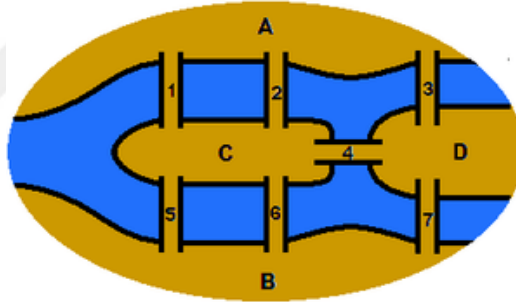
Özetle lineer grafların derece, çap, regülerlik ve çeşitli kombinatorik özellikleri incelenerek bu grafların temel özellikleri ortaya çıkarılacak ve lineer graflar sınıflandırılarak bunların karakterizasyonu yapılacaktır. Ayrıca sınıflandırılması yapılan lineer graflar arasındaki ilişkiler incelenerek birbirlerini alt graf olarak içermesi için gerekli parametreler verilecektir.

Lineer graflarının bazı yasaklanmış alt graflarıyla ilgili incelemeler yapılarak bazı özel graflardan lineer graflar elde edilme koşulları incelenecektir. Son olarak ise grafların önemli bir indeksi olan Wiener indeks kavramı kullanılarak lineer graflarının Wiener indekleri hesaplanacaktır.

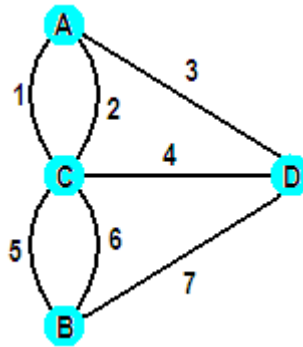
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Graf Teori, 18. asırda Prusya’da bulunan Königsberg Kasabası sakinlerinin uzun bir süre üzerine düşündükleri bir problemten hareketle ortaya çıkmıştır.

Königsberg Kasabası içerisinde Pregel nehri geçmektedir. Bu nehir kasabayı dört mahalleye ayırmakta ve bu mahalleleri birleştiren yedi tane köprü bulunmaktadır. Kasaba sakinlerini şu problem meşgul etmektedir. Herhangi bir mahalleden başlayıp bütün köprülerden bir ve yalnız bir defa geçerek ve bütün mahalleleri dolaşarak başlangıç noktasına geri dönülebilir mi? Bu problem dönemin ünlü İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından çözülmüştür. 1736 yılında Euler yaptığı çalışmalarda böyle bir gezintinin mümkün olmadığını belirtmiştir. Euler bu probleme çözüm üretirken kara parçalarını birer düğüm(nokta) ve köprüleri ise ayırt(kenar) olarak kabul etmiştir. Böylece Şekil 2.1 de verilen Königsberg şehrini Şekil 2.2 deki gibi modellemiştir.



Şekil 2.1 Königsberg’in yedi köprüsü



Şekil 2.2 Königsberg Probleminin Grafla temsili

Yukarıdaki problemin çözümü temel olarak bir düğüm, uç(başlangıç ya da bitiş) düğüm değilse o düğüme giren kişinin turu tamamlayabilmesi için o düğümden çıkması gerekir. Dolayısıyla bu şekildeki düğümlerin derecesi çift olmalıdır. Bu sebepten dolayı tek dereceli düğüm sayısı ikiden fazla ise böyle bir gezinti yapmak mümkün değildir. Gerçek hayatla ilgili bir problemin Euler yaptığı gibi düğümler ve ayrıtlarla temsil edilerek çözülmesi graf teorisinin temelini atmıştır. Sonraki yıllarda benzer çalışmalar devam etmiştir.

G.R.Kirchhoff (1847) tarafından elektrik devrelerinde ve A.Cayley (1857) tarafından yapılan $C_n H_{2n+2}$ Doymuş Hidrokarbon izomerilerinin sınıflanmasında, ağaç kavramının kullanılması, graf teorisinin farklı çalışma alanlarını ortaya çıkmasına katkı sağlamıştır. Thomas Guthrie (1852) meşhur dört renk problemini ortaya atarak bir haritasının komşu ülkeler farkı renkte olacak şekilde en fazla dört renkle boyanabileceğini problemini ortaya atmıştır. Bu problem yaklaşık bir asır sonra 1976 yılında Kaneth Appel ve Wolpeng Hakun tarafından bilgisayar kullanarak çözmesi büyük tartışmlara neden olmuştur. (Chartrand ve Lesniak, 2005). Fakat bu yöndeki çalışmalar matematikte graf teori alt alanının doğmasına katkıda bulunmuştur.

Graf Teori ve uygulamaları ile ilgili çalışmalar, günlük yaşamla ilgili problemlerin graf teorisi sayesinde modellenip çözülebilmesi sebebiyle son yıllarda büyük bir hızla artış göstermektedir. Graf Teori, ekonomi, yönetim bilimi, kimya, biyoloji, iktisat, genetik ,bilgisayar, sosyoloji ve kodlama teorisi gibi bir çok alanda kullanılmaktadır.

$V \neq \emptyset$ ve $1 \leq k \leq 2, k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. V kümesinin k elemanlı alt kümelerinin ailesi $[V]^k$ ile gösterilsin. V düğümlerinin kümesi, E ayrıtlarının kümesi, ϕ üzerinde bulunma bağıntısı ve $V \cap E = \emptyset$ olmak üzere, $\phi : E \rightarrow [V]^1 \cup [V]^2$ bağıntısı bir fonksiyonsa $G = (V, E, \phi)$ üçlüsüne bir “graf“ denir. (Güney, 2005).

Bir grafın düğümler kümesi maksimum mertebeli bağımsız iki ayrık kümeye ayrılabiliriyorsa G ye iki kümeli graf denir. İki kümeli graflar sistematik olarak ilk kez D. Köning (König, 1915, 1916) tarafından ileri sürülmüştür. Her ne kadar iki kümeli graflar Köning tarafından sistematik olarak ortaya konmuşsa da Kirchhoff (1847), A. Cayley (Cayley, 1857), J.J. Sylvester (Sylvester, 1875) ve J.J. Camille (Camille, 1869) gibi bilim insanlarının birbirinden bağımsız olarak ağaçlar üzerine yapmış olduğu çalışmalar iki kümeli graflar için temel teşkil etmektedir. F. W. Levi (Levi, 1942) tarafından ortaya atılan ve Levi grafları ya da çakışım (incidence) grafları olarak adlandırılan iki kümeli graflar projektif geometride bir konfigürasyonda noktalar ve doğrular arasında çakışım modeli olarak kullanılmaktadır. Bu sayede lineer uzaylar ile iki kümeli graflar arasında bazı önemli ilişkiler elde edilmiştir. H. M. Mulder(Mulder, 1979) tarafından $(0, \lambda)$ – grafları ortaya atılarak n-küplerle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Daha sonraki yıllarda A.E. Brouwer ve

H.M. Mulder(Brouwer ve Mulder, 1997), $(0,2)$ – graflarının düğüm bağılılığı üzerine çalışmalar yapmışlardır. A.E. Brouwer(Brouwer, 2006) tarafından açıklığı en çok 7 olan $(0,2)$ – grafların sınıflandırılması verilmiştir. Benzer mahiyette çalışma P. R. J. Östergård ve A.E. Brouwer(Brouwer ve Östergård, 2009) tarafından açıklığı en çok 8 olan $(0,2)$ – grafların sınıflandırılması yapılmıştır.

Daha sonraki süreçte İ. Günaltılı ve A. Ulukan(Ulukan, 2012) tarafından iki kümeli bitişik grafların temel özellikleri incelenerek bu graflardan bazılarının çaplarına göre sınıflandırması yapılmıştır. Benzer şekildeki çalışmalar İ. Günaltılı (Günaltılı, 2013) tarafından sonlu regüler $\{0,1\}$ – bigraflar, İ.Günaltılı, Ş. Olgun ve A.Ulukan (Gunaltılı vd., 2013) tarafından sonlu $(0,1)$ – grafların bazı özellikleri konularında çalışmalar yapılarak iki kümeli $(0,1)$ – graflarının bazıları için sınıflandırmalar yapılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlarla birlikte tez için gerekli bazı teoremler verilecektir. Burada verilen kavram, teorem ve teorem ispatlarıyla ilgili detaylı bilgiye belirtilen kaynaklardan ulaşılabilir.

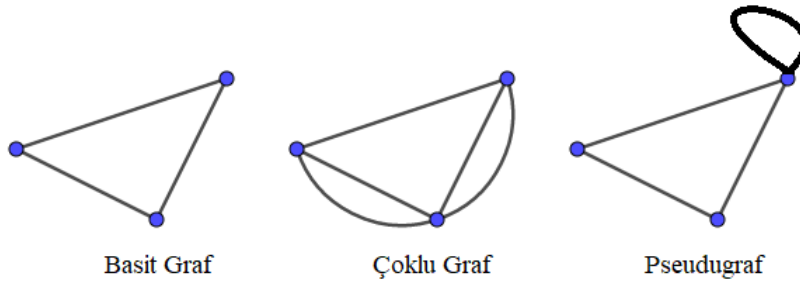
Tanım 3.1. $V \neq \emptyset$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için V kümesinin k elemanlı alt kümelerinin ailesi $[V]^k$ ile gösterilsin. V düğümlerinin kümesi, E ayrıtlarının(kenarların) kümesi, ϕ üzerinde bulunma bağıntısı ve $V \cap E = \emptyset$ olmak üzere, $\phi : E \rightarrow [V]^1 \cup [V]^2$ bağıntısı bir fonksiyonsa $G = (V, E, \phi)$ üçlüsüne bir “**graf**” denir ve kısaca $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir.(Güney, 2005)

Bu tanımdan anlaşılacağı gibi ayrıtlar düğümlerin birli ya da ikili alt kümeleri ile eşleşir. Bir grafın düğüm sayısı; $|V|$ ve ayrıt sayısı; $|E|$ şeklinde gösterilir ve bir G grafının düğüm sayısı ve kenar sayısı sonlu ($|V| < \infty$ ve $|E| < \infty$) ise **sonlu graf** denir. Ayrıca, $e = \{v_1, v_2\}$ kenarı kolaylık olması açısından $e = v_1v_2$ şeklinde gösterilecektir. Buradaki v_1 ve v_2 düğümlerine e ayrıtının uç düğümleri denir. (Vasudev, 2006)

Tanım 3.2. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G grafının herhangi iki düğümü arasında birden fazla kenar varsa bu kenarlara **katlı kenarlar** denir. Eğer bir $G = (V, E)$ grafında uç düğümleri aynı olan bir kenar varsa, bu kenara **ilmek(loop)** denir. (Vasudev, 2006)

Tanım 3.3. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G grafi katlı kenar ve ilmek bulundurmuyorsa G grafına **basit graf** denir. İlmek bulunduran graflara **yalancı graf (pseudo graph)**, katlı kenar bulunduran graflara ise **çoklu graf (multigraph)** denir. (Vasudev, 2006)

Örnek 3.1. Şekil 3.1 de basit graf, çoklu graf ve pseudo grafla ilgili örnekler verilmiştir.



Şekil 3.1 Ayrıtlarına Göre Graf Çeşitleri

Bu durumda yukarıda bahsi geçen basit graf tanımı, V adına düğümler denilen elemanlardan oluşan boştan farklı bir küme ve E adına ayrıtlar denilen, her biri farklı iki düğüm çiftini birleştiren elemanlardan oluşan diğer bir kümenin oluşturduğu bir sıralı ikili olarak verilebilir.

Bu tezdeki tüm graflar basit graf olarak alınmıştır.

Tanım 3.4. $G = (V, E)$ bir graf ve $v_1, v_2 \in V(G)$ olmak üzere $v_1v_2 \in E(G)$ ise v_1 ve v_2 ye **komşu düğümler** denir. Aksi halde yani $v_1v_2 \notin E(G)$ ise v_1 ve v_2 ye **komşu olmayan düğümler** denir. (West, 2005)

$v \in V$ düğümü için

$$N(v) = \{u : u \in V \text{ ve } vu \in E(G)\}$$

kümesine v düğümünün komşuluğunda bulunan düğümler kümesi ve bu kümenin elemanlarına da v düğümünün komşuları denir.

Ayrıca $p, q \in V$ olmak üzere hem p hem q ile komşu olan düğümlerin kümesine p ve q düğümlerinin ortak komşuluğu denir ve $CN(p, q)$ şeklinde gösterilir. p ve q düğümlerinin ortak komşuluklarının sayısı; $|CN(p, q)|$ ya da kısaca $cn(p, q)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.5. Bir grafta ortak düğüme sahip olan kenarlara **bitişik kenarlar** denir. Ayrıca herhangi bir $G = (V, E)$ grafi için $v \in V$ düğümünü üzerinde bulunan kenar sayısına v düğümünün **derecesi** denir ve $d(v)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en küçük olan düğüme **minumum dereceli düğüm** denir ve bir G grafının minumum dereceli düğümünün derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en büyük olan düğüme **maksimum dereceli düğüm** denir ve bir G grafının maksimum dereceli düğümünün derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir. (West, 2005)

Tanım 3.6. $G = (V, E)$ bir graf olsun. $v \in V$ için $d(v) = 0$ ise v ye **izole düğüm**, $u \in V$ için $d(u) = 1$ ise u ya **sarkık düğüm** denir.

Tanım 3.7. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G grafında bütün düğümlerin dereceleri eşit ise bu grafa **düzenli(regular) graf** denir. Eğer $\forall v \in V$ için $d(v) = r$ ise grafa r -düzenli (r -regular) graf denir. (West, 2005)

Tanım 3.8. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G nin bütün farklı düğüm çiftleri komşu ise G ye **tam graf** denir. n düğümlü tam graf K_n ile gösterilir. (Vasudev, 2006)

Tanım 3.9. $G = (V, E)$ bir graf ve $v_i \in V$ ve $e_i = v_{i-1}v_i \in E$ olmak üzere $u = v_0 - e_1 - v_1 - e_2 - \dots - v_{i-1} - e_i - v_i - \dots - v_{n-1} - e_n - v_n = v$ sonlu dizisine bir $u - v$ dolaşısı denir. Bir $u - v$ dolaşısında $u = v$ ise **kapalı dolaşı** aksi halde **açık dolaşı** denir. Bu dolaşıdaki kenar sayısına $u - v$ dolaşının uzunluğu denir. (West, 2005)

Tanım 3.10. $G = (V, E)$ bir graf ve $u - v$ bu grafa ait bir dolaşı olsun. Eğer bu dolaşıda hiçbir kenar tekrar etmiyorsa bu dolaşıya **gezi**, hiçbir düğüm tekrar etmiyorsa bu dolaşıya **yol** adı verilir. u ve v düğümü arası yol $P(u, v)$ ile gösterilir. Ayrıca $P(u, v) = P(v, u)$ dir. Bir $P(u, v)$ yolunun uzunluğu bu yola ait ayrıt sayısıdır ve kısaca $|P(u, v)|$ ile gösterilir. Ayrıca n uzunluklu bir yol grafi P_n ile gösterilir ve $n + 1$ düğüm içerir. (West, 2005)

Tanım 3.11. $G = (V, E)$ bir graf ve $P(u, v)$ bu grafa ait bir yol olsun. Eğer $u - v$ yolu kapalı($u = v$) ise bu yola **çevre** denir. n uzunluklu bir çevre C_n ile gösterilir.

Tanım 3.12. Herhangi bir G grafına ait çevrelerden minimum uzunluklu çevrenin uzunluğuna G grafının **girti** denir ve $girt(G)$ ile gösterilir. (West, 2005)

Tanım 3.13. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer her bir $u, v \in V$ düğüm çifti için $P(u, v)$ yolu varsa G grafına **bağlı(bağlantılı)** graf denir. (West, 2005)

Tanım 3.14. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer G grafının her bir ayrıtını içeren kapalı gezi varsa bu grafa **Euler graf** ve bu geziye ise **Euler gezi** denir. (West, 2005)

Teorem 3.1. $G = (V, E)$ bağlı bir graf olsun. G nin Euler graf olması için gerek ve yeter koşul G nin tüm düğümlerinin derecesinin çift olmasıdır. (West, 2005)

Tanım 3.15. $G = (V, E)$ bağlı bir graf olsun. G , 2 - reguler ise G ye **çevre graf** denir. (Vasudev, 2006)

Tanım 3.16. $G = (V, E)$ çevre içermeyen bağlı bir graf ise G ye **ağaç** denir. (West, 2005)

Tanım 3.17. $G = (V, E)$ bir bağlı graf olsun. G grafına ait $P(u, v)$ yollarının uzunluklarının minimumuna u ve v düğümleri arasındaki **uzaklık** denir ve $d(u, v)$ notasyonu ile gösterilir. (West, 2005)

Teorem 3.2. $G = (V, E)$ bağlı bir graf,

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(u, v) \rightarrow d(u, v)$$

fonksiyonu V kümesindeki herhangi iki düğüm arasındaki uzaklık olmak üzere d , G üzerine bir metriktir.

İspat. $G = (V, E)$ bağlı bir graf ve d , V nin iki düğümü arasındaki yolların minimum uzaklığı olmak üzere, $\forall u, v, w \in V$ için

$$i. d(u, v) \geq 0 \text{ ve } d(u, v) = 0 \text{ ise } u = v.$$

$$ii. d(u, v) = d(v, u)$$

$$\text{iii. } d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

olduğundan dolayı d fonksiyonu G üzerinde bir metriktir.

Tanım 3.18. $G = (V, E)$ bağlı bir graf olsun. $u \in V$ için,

$$e(u) = \max\{d(u, v) : v \in V\}$$

değerine u düğümünün açıklığı denir. (West, 2005)

Tanım 3.19. $G = (V, E)$ grafında minimum açıklık değerine G nin yarıçapı denir ve $\text{rad}(G)$ ile gösterilir. Maksimum açıklık değerine ise G nin çapı denir ve $\text{diam}(G)$ ile gösterilir. (West, 2005)

Tanım 3.20. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer V kümesi $V_1, V_2 \subset V$, $V_1 \cup V_2 = V$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olmak üzere G grafın her bir kenarının uç düğümlerinden biri V_1 kümesinde, diğer düğümü ise V_2 kümesinde olacak şekilde iki alt düğüm kümesine ayrılabilirse bu grafa **iki kümeli(bipartite)** graf denir. $|V_1| = m$ ve $|V_2| = n$ ise bu graf $G_{m,n}$ ile gösterilir. Eğer V_1 kümesinin her bir düğümü V_2 nin tüm düğümleriyle ayrıt belirtiyorsa benzer şekilde V_2 kümesinin her bir düğümü V_1 nin tüm düğümleriyle ayrıt belirtiyorsa bu grafa **iki kümeli tam graf** denir ve $K_{m,n}$ ile gösterilir.

Teorem 3.3. G bir graf olmak üzere G nin iki kümeli olması için gerek ve yeter şart tek uzunluklu çevre içermemesidir. (Asratian vd., 1998).

Tanım 3.21. $\mathcal{P}$ noktalar kümesi ve $\mathcal{L}$ doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ ikisine bir **lineer uzay** denir. (Batten, 1997)

L1. Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

L1. Farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

Tanım 3.22. $\mathcal{P}$ noktalar kümesi ve $\mathcal{L}$ doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayına **afin düzlem** denir. (Kaya, 2005)

A1. Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

A2. Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 3.23. $\mathcal{P}$ noktalar kümesi ve $\mathcal{L}$ doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lineer uzayına bir **projektif düzlem** denir. (Kaya, 2005)

P1. Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P2. Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

Tanım 3.24. $S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \circ)$ herhangi bir geometrik yapı olsun. $V=\mathcal{P}\cup\mathcal{L}$ ve $E = \{\{p, l\} : p\circ l\}$ olmak üzere G parçaları $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ olan iki kümeli graftır. Bu grafa $S=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \circ)$ geometrik yapısının **çakışım grafi (incidence graph)** denir. (Levi, 1942).



4. LİNEER GRAFLAR

Bu bölümde tezin ana konusu olan lineer graflar tanımlanarak bu grafların temel özellikleri ve graf parametreleriyle(uzaklıkları, bağılıkları, girtleri, çap ve regülerlik) ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Lineer grafların bazı yasaklanmış alt grafları belirlenerek, lineer graf olan çevre grafları karakterize edilmiştir. Ayrıca tam graflardan lineer graf elde edilmiştir. Bağlantı sayısı tanımlanarak bu kavramla ilgili önemli sonuçlar verilmiştir. Son olarak da lineer grafların sınıflandırması yapılarak önemli kavram ve ilişkiler ortaya çıkarılmıştır.

İki kümeli sonlu bir grafın parçalarından birine ait herhangi iki düğümünün ortak komşuluğunun sayısı 1 ise bu grafa lineer graf denir. Bu çalışmada lineer graflar $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ notasyonu ile gösterilecek ve kolaylık olması açısından $\mathcal{P}$ parçasından alınan herhangi iki düğümünün ortak komşuluğunun sayısı 1 olarak alınacaktır. Ayrıca bu çalışmadaki tüm graflar basit graftır.

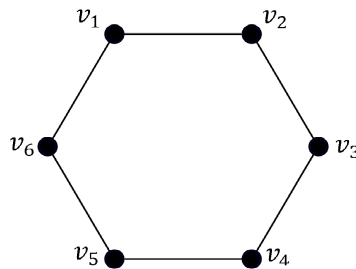
Tanım 4.1. G , $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ parçalarından oluşan herhangi iki kümeli sonlu graf olmak üzere,

$$LG1. \forall x, y \in \mathcal{P} \text{ ve } x \neq y \text{ için } |CN(x, y)| = cn(x, y) = 1$$

$$LG2. \delta(G) \geq 2$$

şartlarını sağlıyorsa G ye iki kümeli lineer graf veya kısaca lineer graf denir.

Örnek 4.1. Şekil 4.1 de verilen graf tek uzunluklu çevre içermediğinden Teorem 3.3 den dolayı iki kümelidir. Bu durumda $\mathcal{P} = \{v_1, v_3, v_5\}$ ve $\mathcal{L} = \{v_2, v_4, v_6\}$ iki kümeli olarak yazılırsa, $cn(v_1, v_3) = \{v_2\}$, $cn(v_1, v_5) = \{v_6\}$ ve $cn(v_3, v_5) = \{v_4\}$ olduğundan LG1 ve her bir $v_i \in V(C_6)$ için $d(v_i) = 2$ olduğundan LG2 sağlanır. Dolayısıyla C_6 bir lineer graftır.



Şekil 4.1 C_6 bir lineer graf modeli

Lemma 4.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise izole ve sarkık düğüm içermez.

İspat. Tanımdan dolayı izole düğümün derecesi sıfır ve sarkık düğümün derecesi 1 dir. LG2 den dolayı lineer graflar izole ve sarkık düğüm içermez.

Lemma 4.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise G tek uzunluklu çevre içermez.

İspat. Lineer graflar iki kümeli graf olduğundan Teorem 3.3 dolayı tek uzunluklu çevre içermez.

Aksi belirtilmedikçe kolaylık olması açısından $\mathcal{P}$ parçasına ait düğümler, $p, q, v, \dots$ gibi küçük harflerle, $\mathcal{L}$ parçasına ait düğümler, $K, L, M, \dots$ gibi büyük harflerle gösterilecektir.

Lemma 4.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf olmak üzere $K \neq L$ olacak şekilde herhangi $K, L \in \mathcal{L}$ için $cn(K, L) \leq 1$.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf olsun. Kabul edelim ki $K \neq L$ olacak şekilde $K, L \in \mathcal{L}$ ve $n \geq 2$ için $cn(K, L) \geq n$ olsun. Bu durumda $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq CN(L, K)$ olacak şekilde birbirinden farklı $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $i \neq j$ için $p_i, p_j \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olsun. Bu durumda $\{K, L\} \subseteq CN(p_i, p_j)$ dir. Böylece $cn(p_i, p_j) \geq 2$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O halde $cn(K, L) \leq 1$ dir.

Lemma 4.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf olmak üzere, her bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğüm çifti için $cn(p, L) = 0$.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf olsun. Kabul edelim ki herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $cn(p, L) \geq 1$ olsun. O halde en az bir $x \in CN(p, L)$ düğümü vardır ki $x \in N(p) \subseteq \mathcal{L}$ ve $x \in N(L) \subseteq \mathcal{P}$ dir. Bu durumda $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ dir. Bu ise G nin iki kümeli graf olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $cn(p, L) = 0$ dir.

Sonuç 4.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, birbirinden farklı herhangi $x, y \in V(G)$ için $cn(x, y) \in \{0, 1\}$.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, birbirinden farklı $x, y \in V(G)$ için üç farklı durum vardır.

1. durum. $x, y \in \mathcal{P}$ ise LG1 den dolayı $cn(x, y) = 1$.

2. durum. $x, y \in \mathcal{L}$ ise Lemma 4.3 den dolayı $cn(x, y) \leq 1$.

3. durum. $x \in \mathcal{P}$ ve $y \in \mathcal{L}$ için Lemma 4.4 den dolayı $cn(x, y) = 0$.

Böylece her $x, y \in V(G)$ ve $x \neq y$ için $cn(x, y) = \{0, 1\}$ dir.

Teorem 4.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise C_4 içermez.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Kabul edelim ki G grafi, $p - x - q - y - p$ şeklinde dört uzunluklu bir çevre içersin. Lineer graflar iki kümeli olduğundan $p \in \mathcal{P}$ ya da $p \in \mathcal{L}$ dir. Dolayısıyla iki durum vardır.

1. durum. $p \in \mathcal{P}$ ise G iki kümeli olduğundan $x \in \mathcal{L}$, $q \in \mathcal{P}$ ve $y \in \mathcal{L}$ dir. Bu durumda, $p, q \in \mathcal{P}$ için $\{x, y\} \subseteq N(p)$ ve $\{x, y\} \subseteq N(q)$ olduğundan $cn(p, q) \geq 2$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir.

2. durum. $p \in \mathcal{L}$ ise G iki kümeli olduğundan $x \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{L}$ ve $y \in \mathcal{P}$ dir. Bu durumda, $p, q \in \mathcal{L}$ için $\{x, y\} \subseteq N(p)$ ve $\{x, y\} \subseteq N(q)$ olduğundan $cn(p, q) \geq 2$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir.

Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. Böylece G , C_4 içermez.

Sonuç 4.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise iki kümeli tam graf değildir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Kabul edelim ki $G = K_{n,m}$ olsun. Bu durumda,

i. $n = 1$ veya $m = 1$ olması durumunda $G = K_{n,1}$ ya da $G = K_{1,m}$ olur. Bu durumda Lemma 4.1 ile çelişir. Dolayısıyla $G \neq K_{n,1}$ ve $G \neq K_{1,m}$.

ii. $n, m \geq 2$ olması durumunda $G = K_{n,m}$ olur ki bu durum Teorem 4.1 ile çelişir.

Böylece (i) ve (ii) den dolayı G iki kümeli tam graf değildir.

Teorem 4.2. K_n bir tam graf ve $n \geq 3$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere K_n nin (çapraz kesişme noktaları hariç) her bir ayritına birer düğüm eklenilerek oluşturulan genişletilmiş graf G olsun. G $(n-1, 2)$ -biregüler lineer graftır. (Burada çapraz kesişme noktaları düğüm olarak alınmamaktadır.)

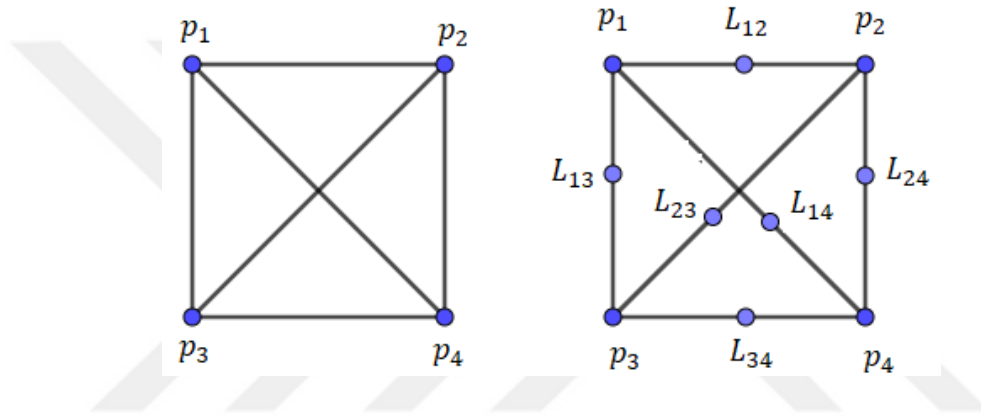
İspat. K_n bir tam graf olsun. Bu durumda $\forall p_i, p_j \in V(K_n)$ ve $i \neq j$ için $p_i p_j \in E(K_n)$ dir. Her bir ayritana birer düğüm ilave edilsin ve $e = p_i p_j$ ayritına eklenen düğüm L_{ij} olsun. Bu durumda $d(p_i, p_j) = p_i - L_{ij} - p_j$ olacağından $CN(p_i, p_j) = \{L_{ij}\}$ olup $cn(p_i, p_j) = 1$ dir. p_i, p_j düğümlerinin seçimi keyfi olduğundan $\forall p_i, p_j \in V(K_n)$ için $cn(p_i, p_j) = 1$ dir. $p_i \in V(K_n)$ için $d(p_i) = n - 1$ dir. $n \geq 3$ olduğundan dolayı $\delta(p_i) \geq 2$ dir. Ayrıca yeni eklenen her bir L_{ij} düğümü için $N(L_{ij}) = \{p_i, p_j\}$ olduğundan $d(L_{ij}) = 2$ dir. Dolayısıyla LG2 sağlanır.

$n \geq 3$ için K_n grafının tek uzunluklu çevre içerdiği açıktır. Bu durumda herhangi bir $C_{2k-1} \in K_n$ için $C_{2k-1} : p_1 - p_2 - p_3 - \dots - p_{2k-1} - p_1$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Her bir ayrita bir düğüm

eklenirse; $C_{4k-2} : p_1 - L_{12} - p_2 - L_{23} - p_3 - \dots - L_{(2k-2)(2k-1)} - p_{2k-1} - L_{(2k-1)1} - p_1$ şeklinde çift uzunluklu bir çevreye dönüşür. C_{2k-1} çevresi keyfi olduğundan K_n tam grafindeki tek uzunluklu çevreler K_n tam grafinin genişletilmesi ile oluşturulan G grafında çift uzunluklu çevrelere dönüşür. Dolayısıyla G grafi tek uzunluklu çevre içermediğinden Teorem 3.3 den dolayı iki kümelidir.

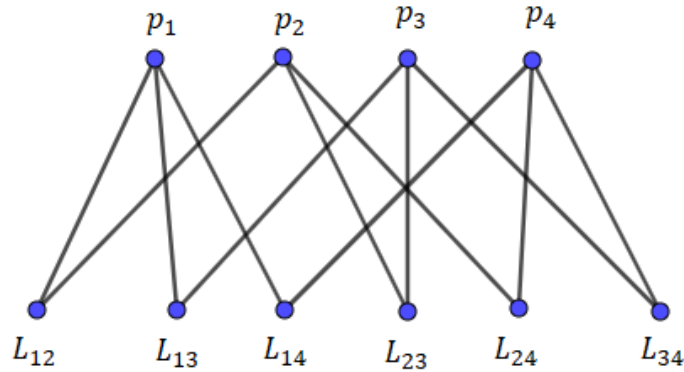
Burada her bir $p_i \in V(K_n)$ için $d(p_i) = n - 1$, her bir $L_{ij} \in \mathcal{L}$ için $d(L_{ij}) = 2$ ve $V = \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ olduğundan dolayı G $(n - 1, 2)$ -biregüler lineer graftır.

Örnek 4.2. Şekil 4.2 K_4 tam grafi ve Teorem 4.2 de bahsedildiği şekliyle K_4 ün düğüm genişlemesiyle elde edilen graf modeli verilmiştir.



Şekil 4.2 K_4 ve K_4 ün düğüm genişlemesiyle oluşan graf modeli

Şekil 4.3 de K_4 tam grafindan düğüm genişlemesiyle oluşan graf modelinin iki kümeli olacak şekilde düzenlenmiştir.



Şekil 4.3 K_4 ün düğüm genişlemesinin iki kümeli temsili

Lemma 4.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise

- i. $\forall p, q \in \mathcal{P}$ ve $p \neq q$ için $d(p, q) = 2$,
- ii. $\forall L, K \in \mathcal{L}$ ve $L \neq K$ için $d(L, K) \in \{2, 4\}$ ve
- iii. $\forall p \in \mathcal{P}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(p, L) \in \{1, 3\}$

dir.

İspat. i. G bir lineer graf olsun. G iki kümeli bir graf olduğundan $p, q \in \mathcal{P}$ ve $p \neq q$ için $pq \notin E(G)$ dir. Bu durumda $d(p, q) \neq 1$ dir. LG1 den dolayı $\forall p, q \in \mathcal{P}$ ve $p \neq q$ için $CN(p, q) = \{L\}$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. O halde $p - L - q$ yolu p ve q düğümleri arasındaki en kısa yol olduğundan $d(p, q) = 2$ dir.

ii. G bir lineer graf olsun. Bu durumda G iki kümeli bir graf olduğundan $L, K \in \mathcal{L}$ ve $L \neq K$ için $LK \notin E(G)$ dir. Bu durumda $d(L, K) \neq 1$. Ayrıca Lemma 4.3 den dolayı her $L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) \in \{0, 1\}$ dir.

1. durum. $cn(L, K) = 1$ ise $CN(L, K) = \{p\}$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu durumda $L - p - K$ yolu L ve K düğümleri arasındaki en kısa yol olduğundan $d(L, K) = 2$ dir.

2. durum. $cn(L, K) = 0$ ise $d(L, K) \neq 2$ ve lineer graflar iki kümeli olduğundan $d(L, K) \neq 3$ dir. LG2 den dolayı $\{p, q\} \subseteq N(L)$ ve $\{r, s\} \subseteq N(K)$ olacak şekilde $p, q, r, s \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $cn(L, K) = 0$ olduğundan $p \neq r, p \neq s, q \neq r, q \neq s$ dir. LG1 den dolayı $CN(p, r) = \{M\}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $L = M$ olması durumunda $cn(L, K) = \{r\}$ dir. Bu ise $cn(L, K) = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $L \neq M$ dir. Benzer şekilde $K \neq M$ dir. Bu durumda L ile K arasındaki en kısa yol $L - p - M - r - K$ yolu olup $d(L, K) = 4$ tür.

iii. $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için iki durum vardır.

1. durum. $p \in N(L)$ ise $d(p, L) = 1$ dir.

2. durum. $p \notin N(L)$ ise $d(L, K) \neq 1$ ve $d(L, K) \neq 2$ dir. LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{M\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ ve $M \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Lemma 4.10 den dolayı $cn(K, L) \leq \{0, 1\}$ dir. Eğer $cn(L, M) = 1$ ise $CN(L, M) = \{r\}$ olacak şekilde $r \in \mathcal{P}$ düğümü vardır ve $p - M - r - L$ yolu p ile L arasındaki en kısa yol olup $d(p, L) = 3$ dir. Eğer $cn(L, M) = 0$ ise LG2 den dolayı $N(L) = \{x, y\}$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $cn(L, M) = 0$

olduğundan dolayı $x \neq p$, $x \neq q$, $y \neq p$ ve $y \neq q$ dir. LG1 den dolayı $p, x \in \mathcal{P}$ için $CN(p, x) = \{K\}$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $cn(L, M) = 0$ olduğundan $K \neq L$ ve $K \neq M$ dir. O halde p ile L arasındaki en kısa yol $p - K - x - L$ olup $d(p, L) = 3$ tür.

Teorem 4.3. $G = (V, E)$ bir lineer graf olmak üzere her $x, y \in V(G)$ için $d(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

İspat. $G = (V, E)$ bir lineer graf olsun. Bu durumda $x, y \in V(G)$ için $x = y$ olması durumunda $d(x, y) = d(x, x) = 0$ dir. $x, y \in V(G)$ için $x \neq y$ ise Lemma 4.5 den dolayı $d(x, y) \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Örnek 4.3. Şekil 4.3 deki graf modeli göz önüne alınırsa $\mathcal{P}$ parçasındaki p_1 ve p_2 arasındaki minumum uzaklıklı yol, $p_1 - L_{12} - p_2$ olduğundan $d(p_1, p_2) = 2$ dir. Diğer düğümler arasındaki uzaklıklarda benzer şekilde hesaplanabilir. $\mathcal{L}$ parçasındaki $cn(L_{12}, L_{13}) = 1$ olduğundan minumum uzaklıklı yol, $L_{12} - p_1 - L_{13}$ olduğundan $d(L_{12}, L_{13}) = 2$ ve $cn(L_{12}, L_{34}) = 0$ olduğundan bu düğümler arası minumum uzaklıklı yol, $L_{12} - p_1 - L_{13} - p_3 - L_{34}$ olduğundan $d(L_{12}, L_{34}) = 4$ tür. Diğer düğüm çiftleri arasındaki uzaklıkta benzer şekilde bulunabilir. Düğümlerden biri $\mathcal{P}$ parçasına diğeri $\mathcal{L}$ parçasına ait olması durumunda p_1 ile L_{12} arasındaki minumum uzunluklu yol $p_1 - L_{12}$ olduğundan $d(p_1, L_{12}) = 1$ dir. p_1 ile L_{23} arasındaki minumum uzunluklu yol $p_1 - L_{12} - p_2 - L_{23}$ olduğundan $d(p_1, L_{23}) = 3$ tür. Diğer düğüm çiftleri arasındaki uzaklıklar benzer şekilde hesaplanabilir.

Teorem 4.4. $G = (V, E)$ bir lineer graf olmak üzere, G bağlı graftır.

İspat. $G = (V, E)$ bir lineer graf olsun. Teorem 4.3 den dolayı her $x, y \in V(G)$ için $d(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dir. Bu durumda, G grafinin herhangi farklı x ve y düğümleri arasında $1 \leq |P(x, y)| \leq 4$ olacak şekilde $P(x, y) \in G$ yolu vardır. O halde G grafi bağlıdır.

Teorem 4.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer olmak üzere, G en az bir C_6 içerir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \in \mathcal{P}$ için LG2 den dolayı $L, K \in N(p)$ ve $L \neq K$ olacak şekilde $L, K \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Benzer şekilde LG2 den dolayı $q \in N(L)$ ve $r \in N(K)$ olacak şekilde $q, r \in \mathcal{P}$ düğümü vardır ve $q \neq p$ ve $r \neq p$ dir. Eğer $q = r$ ise $\{p, q\} \subseteq CN(L, K)$ dir. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişir. O halde $q \neq r$ dir. LG1 den dolayı $CN(p, r) = \{N\}$ olacak şekilde bir tek $N \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $N = L$ ise $\{p, r\} \subseteq CN(L, K)$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $N \neq L$ dir. Benzer şekilde $N \neq K$ dir. Böylece $G, C_6 : p - L - q - N - r - K - p$ olacak şekilde en az bir C_6 içerir.

Sonuç 4.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ise ağaç değildir.

İspat. Teorem 4.5 ve ağaç tanımdan ispat açıktır.

Teorem 4.6. $G = (V, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\text{girt}(G) = 6$.

İspat. Kabul edelim ki $\text{girt}(G) < 6$ olsun. Bu durumda,

1. durum. $\text{girt}(G) \in \{1, 3, 5\}$ olması halinde Lemma 4.2 ile çelişir. O halde $\text{girt}(G) \notin \{1, 3, 5\}$.

2. durum. $\text{girt}(G) = 2$ olması halinde G grafi katlı ayırt içerir. Bu ise lineer grafların basit graf olmasıyla çelişir. O halde $\text{girt}(G) \neq 2$.

3. durum. $\text{girt}(G) = 4$ olması halinde G grafi C_4 içerir. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişeceğinden dolayı $\text{girt}G \neq 4$.

Böylece $\text{girt}(G) \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir. Teorem 4.5 göz önüne alınırsa $\text{girt}(G) = 6$ dir.

Sonuç 4.4. $G = (V, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\text{cn}(p, q, r) = 0$ olacak şekilde $\mathcal{P}$ parçasına ait en az üç düğüm ve $\text{cn}(L, K, M) = 0$ olacak şekilde $\mathcal{L}$ parçasına ait en az üç düğüm vardır.

İspat. $G = (V, E)$ bir lineer graf olsun. Teorem 4.5 den dolayı G grafi $C_6 : p - L - q - K - r - M - p$ olacak şekilde en az bir C_6 içerir. Teorem 4.1 den dolayı $p, q, r \in \mathcal{P}$ ve $L, K, M \in \mathcal{L}$ düğümleri için $\text{cn}(p, q, r) = 0$ ve $\text{cn}(K, L, M) = 0$ dir.

Örnek 4.4. Şekil 4.1 deki graf modeli göz önüne alınırsa $v_1, v_3, v_5 \in \mathcal{P}$ ve $v_2, v_4, v_6 \in \mathcal{L}$ için $\text{cn}(v_1, v_3, v_5) = 0$ ve $\text{cn}(v_2, v_4, v_6) = 0$ dir.

Teorem 4.7. G bir çevre graf olsun. G nin lineer graf olması için gerek ve yeter koşul $G = C_6$ olmasıdır.

İspat. G bir çevre graf olmak üzere kabul edelim ki $G = C_6$ olsun. O halde G lineer graftır. (Örnek 4.1’de C_6 nin lineer graf olduğu gösterilmiştir.)

Tersine, kabul edelim ki G bir lineer graf ve $G \neq C_6$ olsun. Lemma 4.2 dolayı lineer graflar tek uzunluklu çevre içermezler. Bu durumda G çevre grafi olduğundan $k \geq 4$ için $G = C_{2k}$ dir. O halde $G, u_1 - v_2 - u_3 - v_4 - \dots - u_{(2k-1)} - v_{(2k)} - u_1$ şeklinde yazılabilir. G , iki kümeli olacak şekilde yazılırsa, $\mathcal{P} = \{u_1, u_3, \dots, u_{2k-1}\}$ ve $\mathcal{L} = \{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$ olur. $k \geq 4$ olduğundan $|\mathcal{P}| \geq 4$ ve $|\mathcal{L}| \geq 4$ tür. O halde birbirinden farklı $u_i, u_j, u_k, u_t \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı $CN(u_i, u_j) = \{v_{ij}\}$, $CN(u_i, u_k) = \{v_{ik}\}$, $CN(u_i, u_t) = \{v_{it}\}$ olacak şekilde $v_{ij}, v_{ik}, v_{it} \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $v_{ij} = v_{ik}$ ise $\{u_i, u_j, u_k\} \subseteq N(v_{ij})$ olur ki bu durumda $d(v_{ij}) \geq 3$ dir. Bu ise G nin çevre grafi olmasıyla çelişir. O halde $v_{ij} \neq v_{ik}$ dir. Benzer şekilde $v_{ij} \neq v_{it}$ dir. Bu durumda, $\{v_{ij}, v_{ik}, v_{it}\} \subseteq N(u_i)$ dir. O halde $d(u_i) \geq 3$ dir. Bu ise G nin çevre grafi olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. G çevre grafi lineer graf ise $G = C_6$ dir.

Lemma 4.6. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$|\mathcal{L}| \leq \frac{|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1)}{2}$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. LG1 den dolayı $\mathcal{P}$ parçasına ait herhangi farklı iki düğüm $\mathcal{L}$ parçasına ait bir düğüm belirtir ve $\mathcal{P}$ parçasına ait farklı düğüm çiftlerinin $\mathcal{L}$ parçasına ait aynı düğümü belirtme ihtimali olduğundan dolayı,

$$|\mathcal{L}| \leq \binom{|\mathcal{P}|}{2} = \frac{|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1)}{2}$$

dir.

Örnek 4.5. Şekil 4.1 deki lineer graf modelinde $|\mathcal{L}| = 3$ ve $\frac{|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ tür. Benzer şekilde, Şekil 4.10 deki lineer graf modelinde ise $|\mathcal{L}| = 7$ ve $\frac{|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1)}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ dir.

Lemma 4.7. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

i. $\forall p \in \mathcal{P}$ için $|\mathcal{L}| > d(p)$

ii. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{L}| > d(L)$

dir.

İspat. i. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Bu durumda $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ olacak şekilde $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. LG2 den dolayı $i, 1 \leq i \leq n$ için $p_i \in N(L_i)$ olacak şekilde $p_i \neq p$ ve $p_i \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Benzer şekilde LG2 den dolayı $L \neq L_i$ ve $L \in N(p_i)$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $L \in N(p)$ ise $\{L_i, L\} \subseteq CN(p, p_i)$ olur. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $L \notin N(p)$ dir. Böylece $\{L_1, L_2, \dots, L_n, L\} \subseteq \mathcal{L}$ olduğundan dolayı $|\mathcal{L}| \geq n + 1$ dir. p düğümünün seçimi keyfi olduğundan her bir $p \in \mathcal{P}$ için $|\mathcal{L}| > d(p)$ dir.

ii. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG2 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n$ ve $p_i \in N(L)$ için öyle bir $L_i \in \mathcal{L}$ düğümü vardır ki $L_i \in N(p_i)$ ve $L_i \neq L$ dir. $1 \leq i, j \leq n$ ve $L_i, L_j \in N(p_i)$ için $L_i = L_j$ ise $\{L, L_i\} \subseteq CN(p_i, p_j)$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. $\{L_1, L_2, \dots, L_n, L\} \subseteq \mathcal{L}$ olduğundan dolayı $|\mathcal{L}| \geq n + 1$ dir. L düğümünün seçimi keyfi olduğundan her bir $L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{L}| > d(L)$ dir.

Sonuç 4.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

i. $\forall p \in \mathcal{P}$ için $|\mathcal{P}| > d(p)$

ii. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{P}| > d(L)$ dir.

İspat. i. İspat Lemma 4.7 (i) nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

ii. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG2 den dolayı $p_i \in N(L)$ için $K \neq L$ ve $K \in N(p_i)$ olacak şekilde en az bir $K \in \mathcal{L}$ vardır. Benzer şekilde LG2 den dolayı $q \neq p_i$ ve $q \in N(K)$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $q \in N(L)$ ise $\{p_i, q\} \subseteq CN(K, L)$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $q \notin N(L)$ dir. O halde $|\mathcal{P}| \geq n + 1$ dir. Böylece her bir $L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{P}| > d(L)$.

Sonuç 4.6. $G = (V, E)$ bir lineer graf olmak üzere

i. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $p \notin N(L)$ olacak şekilde en az bir $p \in \mathcal{P}$ vardır.

ii. $\forall p \in \mathcal{P}$ için $L \notin N(p)$ olacak şekilde en az bir $L \in \mathcal{L}$ vardır.

İspat. Lemma 4.7 ve Sonuç 4.5 den ispat açıktır.

Teorem 4.8. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

i. $rad(G) = 3$

ii. $diam(G) \in \{3, 4\}$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Sonuç 4.6 den dolayı en az bir $p \notin N(L)$ ve en az bir $L \notin N(p)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ vardır. Lemma 4.5 den dolayı,

$$rad(G) = \min\{e(u)\} = \min\{\max\{d(u, v) : v \in V(G)\}\} = 3$$

$$diam(G) = \max\{e(u)\} = \max\{\max\{d(u, v) : v \in V(G)\}\} \in \{3, 4\}.$$

Örnek 4.6. Şekil 4.1 deki lineer graf modeli için $e(v_1) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_4) = e(v_5) = e(v_6) = 3$ olduğundan $rad(G) = diam(G) = 3$. Şekil 4.3 deki lineer graf modeli için $e(p_1) = e(p_2) = e(p_3) = e(p_4) = 3$ ve $e(L_{12}) = e(L_{13}) = e(L_{14}) = e(L_{23}) = e(L_{24}) = e(L_{34}) = 4$ olduğundan $rad(G) = 3$ ve $diam(G) = 4$.

Teorem 4.9. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$d(p) \geq d(L)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Sonuç 4.6 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Bu durumda, $i, 1 \leq i \leq n$ için $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Ayrıca LG1 den dolayı her bir p_i düğümü için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Her bir i için $p \in N(L_i)$ olduğundan $L_i \neq L$ dir. $L_i, L_j \in \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ için $L_i = L_j$ ise $\{L, L_j\} \subseteq CN(p_i, p_j)$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. Böylece $\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \subseteq N(p)$ dir. Burada iki durum vardır.

1. durum. $q \neq p$ olacak şekilde her bir $q \in \mathcal{P}$ için $q \in N(L)$ olsun. Kabul edelim ki $d(p) \geq n + 1$ olsun. Bu durumda $i, 1 \leq i \leq n$ için $K \neq L_i$ olacak şekilde en az bir $K \in N(p)$ düğümü vardır. $p \notin N(L)$ olduğundan dolayı $K \neq L$ dir. $q \neq p$ olacak şekilde her bir $q \in \mathcal{P}$ için $q \in N(L)$ olduğundan $\mathcal{P} = \{p, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ dir. LG2 den dolayı $r \neq p$ olacak şekilde $r \in N(K)$ düğümü vardır. $r \neq p$ ve $\mathcal{P} = \{p, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ olduğundan dolayı herhangi bir i için $r = p_i$ dir. Bu durumda $CN(p, p_i) = \{L_i, K\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece

$$d(p) = |N(p)| = n \quad (4.1)$$

dir.

2. durum. $s \neq p$ olacak şekilde en az bir $s \in \mathcal{P}$ için $s \notin N(L)$ olsun. LG1 den dolayı $CN(p, s) = \{K\}$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ vardır. Bu durumda,

(a) $i, 1 \leq i \leq n$ için $K = L_i$ ise $\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \subseteq N(p)$ dir. Bu durumda

$$d(p) = |N(p)| \geq n \quad (4.2)$$

dir.

(b) $i, 1 \leq i \leq n$ için $K \neq L_i$ ise $\{L_1, L_2, \dots, L_n, K\} \subseteq N(p)$ dir. Bu durumda

$$d(p) = |N(p)| \geq n + 1 \quad (4.3)$$

dir. O halde (4.1), (4.2) ve (4.3) den dolayı

$$d(p) \geq d(L)$$

dir.

Sonuç 4.7. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve maksimum düğüm derecesi r olmak üzere, $d(p) = r$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve maksimum düğüm derecesi r olsun. Kabul edelim ki her bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) \leq r - 1$ olsun. G grafının maksimum düğüm derecesi r olduğundan en az bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = r$ dir. Sonuç 4.6 den dolayı $q \notin N(L)$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ vardır. Kabulümüzden dolayı $d(q) \leq r - 1$ dir. Bu ise Teorem 4.9 ile çelişir. Dolayısıyla en az bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = r$ dir.

Teorem 4.10. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \in \mathcal{P}$ olmak üzere,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i)$$

dir.

İspat. $x \in \bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i)$ olsun. Bu durumda $\exists L_i \in N(p)$ için $x \in N(L_i)$ dir. $N(L_i) \subseteq \mathcal{P}$ olduğundan dolayı $x \in \mathcal{P}$ dir. Böylece,

$$\bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i) \subseteq \mathcal{P} \quad (4.4)$$

dir. $q \in \mathcal{P}$ ve $q \neq p$ olsun. LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $q \in N(L_i)$ ve $L_i \in N(p)$ olduğundan $q \in \bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i)$ dir. O halde,

$$\mathcal{P} \subseteq \bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i) \quad (4.5)$$

dir. Böylece (4.4) ve (4.5) den dolayı

$$\mathcal{P} = \bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i)$$

elde edilir.

Teorem 4.11. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \in \mathcal{P}$ olsun. $L_i \in N(p)$ düğümleri için

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{i=1}^{d(p)} (d(L_i) - 1)$$

dir.

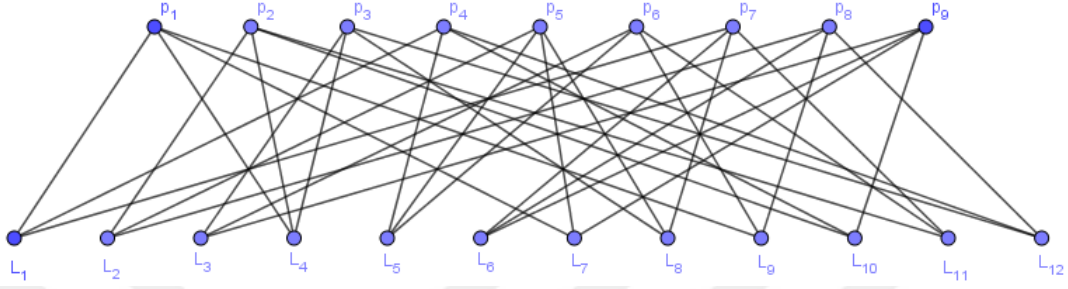
İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. LG2 den dolayı $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = |N(p)| \geq 2$ dir. Bu durumda her bir $i, 1 \leq i \leq d(p)$ için $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{d(p)}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Teorem 4.10 den dolayı $|\mathcal{P}| = |\bigcup_{L_i \in N(p)} N(L_i)|$ dir. Her bir $L_i, L_j \in N(p)$ ve $L_i \neq L_j$ için $N(L_i) \cap N(L_j) = \{p\}$ dir. Bu durumda $\mathcal{P} - \{p\}$ de $N(L_i) \cap N(L_j) = \emptyset$ dir. Böylece p düğümü hariç, $L_i \in N(p)$ için

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{i=1}^{d(p)} (d(L_i) - 1)$$

dir.

Örnek 4.7. Şekil 4.4 deki lineer graf modeli için $|\mathcal{P}| - 1 = 8$ dir. $p_1 \in \mathcal{P}$ için

$$\sum_{i=1}^{d(p_1)} (d(L_i) - 1) = d(L_1) - 1 + d(L_4) - 1 + d(L_7) - 1 + d(L_9) - 1 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$



Şekil 4.4 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$

Sonuç 4.8. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \in \mathcal{P}$ olmak üzere her bir $i, 1 \leq i \leq d(p)$ olacak şekilde $L_i \in N(p)$ düğümleri için $d(L_i) = r$ ise $|\mathcal{P}| - 1 = d(p) \cdot (r - 1)$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $L_i \in N(p)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L_i \in \mathcal{L}$ için $d(L_i) = r$ olsun. Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{i=1}^{d(p)} (r - 1)$$

dir. Böylece

$$|\mathcal{P}| - 1 = d(p) \cdot (r - 1)$$

elde edilir.

Bu kısımda art arda verilen iki sonucun ispatı Teorem 4.10 ve Teorem 4.11 ispatlarına benzer şekildedir.

Sonuç 4.9. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve birbirinden farklı her $L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 1$ olsun. $p_i \in N(L)$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$\mathcal{L} = \bigcup_{p_i \in N(L)} N(p_i)$$

dir.

Sonuç 4.10. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve birbirinden farklı her $L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 1$ olsun. $p_i \in N(L)$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ ve $p_i \in \mathcal{P}$ için

$$|\mathcal{L}| - 1 = \sum_{p_i \in N(L)} (d(p_i) - 1)$$

dir.

Lemma 4.8. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Eğer $\mathcal{L}$ parçası s - reguler ise $r = \frac{|\mathcal{P}|-1}{s-1}$ olmak üzere G grafi (r, s) - bireguler dir. Şayet $r = s$ ise G grafi regulerdir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçası s - reguler olsun. Bu durumda her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = s$, $s \geq 2$ olacak şekilde s tamsayısı vardır. $p \in \mathcal{P}$ için Sonuç 4.8 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = d(p) \cdot (s - 1)$$

dir. Eşitlik düzenlenirse

$$d(p) = \frac{|\mathcal{P}| - 1}{s - 1}$$

elde edilir. p nin seçimi keyfi olduğundan $\mathcal{P}$ parçası $\frac{|\mathcal{P}|-1}{s-1}$ - regulerdir. Böylece G grafi (r, s) - biregulerdir. $r = s$ olması durumunda G grafi r -regüler graf olur.

Teorem 4.12. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $L \in \mathcal{L}$ için

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (d(L) \cdot (d(L) - 1))$$

İspat. G bir lineer graf olduğundan $\mathcal{P}$ parçasına ait farklı düğüm çiftlerini iki farklı şekilde sayabiliriz. Birinci sayma yöntemi,

$$\binom{|\mathcal{P}|}{2} = \frac{|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1)}{2} \quad (4.6)$$

dir. LGI den dolayı $\mathcal{P}$ parçasına ait her bir farklı düğüm çiftinin ortak komşuluğu $\mathcal{L}$ parçasına ait bir tek düğüm olduğundan dolayı $\mathcal{L}$ parçasına ait her bir düğümünün komşuluğundaki farklı düğüm çiftlerinin sayıları toplamı $\mathcal{P}$ parçasına ait her bir farklı düğüm çiftinin sayısını verir. Bu durumda $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{P}$ de ortak komşuluğu L olan farklı düğüm çiftlerinin sayısı, $\binom{|N(L)|}{2} = \binom{d(L)}{2}$ dir. Tüm L düğümleri üzerinden hesaplanırsa;

$$\frac{1}{2} \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) \cdot (d(L) - 1) \quad (4.7)$$

dir. (4.6) ve (4.7) den dolayı

$$|\mathcal{P}|(|\mathcal{P}| - 1) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (d(L) \cdot (d(L) - 1))$$

dir.

Teorem 4.13. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \in \mathcal{P}$ için

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} (d(p) \cdot (d(p) - 1)) \leq |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

İspat. G bir lineer graf olsun. Lemma 4.2 den dolayı $\mathcal{L}$ parçasına ait farklı düğüm çiftlerinin ortak komşuluğunun sayısı sıfır ya da 1 dir. Bu durumda $\mathcal{L}$ parçasına ait farklı düğüm çiftlerini; ortak komşuluklarının sayısı 0 olanlar ve ortak komşuluklarının sayısı 1 olanlar şeklinde iki kümeye ayrılabilir. Bu kümeler,

$$\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j) = \{(L_i, L_j) : cn(L_i, L_j) = 1 \text{ ve } L_i, L_j \in \mathcal{L}\}$$

$$\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j) = \{(L_i, L_j) : cn(L_i, L_j) = 0 \text{ ve } L_i, L_j \in \mathcal{L}\}$$

olsun. Bu kümelerin elemanları sayılırken (L_i, L_j) ve (L_j, L_i) düğüm çiftleri aynı olduğundan birez kez sayılacaktır. $\mathcal{L}$ parçasına ait farklı düğüm çiftlerinin ortak komşuluğunun sayısı hem sıfır hem de 1 olamayacağından dolayı

$$\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j) \cap \Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j) = \emptyset$$

dir. Ayrıca $\mathcal{L}$ parçasına ait tüm farklı düğüm çiftlerinin sayısı

$$\binom{|\mathcal{L}|}{2} = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| (|\mathcal{L}| - 1) \quad (4.8)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| + |\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| (|\mathcal{L}| - 1) \quad (4.9)$$

dir. $p \in \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}$ parçasına ait ortak komşuluğu p olan düğüm çiftlerinin sayısı, $\binom{d(p)}{2}$ dir. Bu durumda $\mathcal{L}$ parçasına ait ortak komşuluğunun sayısı 1 olan tüm düğüm çiftlerinin sayısı tüm p düğümleri üzerinden hesaplanırsa,

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1) \quad (4.10)$$

dir. Lemma 4.3 den dolayı $|\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| \geq 0$ dir. O halde (4.9), (4.10) ve (4.8) den dolayı

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} (d(p) \cdot (d(p) - 1)) \leq |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

elde edilir.

Örnek 4.8. Şekil 4.4 deki lineer graf göz önüne alınırsa $|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = 9 \cdot 8 = 72$ ve

$$\sum_{L_i \in \mathcal{L}} (d(L_i) \cdot (d(L_i) - 1)) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2 = 72$$

dir. Ayrıca $|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) = 12 \cdot 11 = 132$ ve

$$\sum_{p_i \in \mathcal{L}} (d(p_i) \cdot (d(p_i) - 1)) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + \dots + 4 \cdot 3 = 108$$

dir.

Sonuç 4.11. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun.

$$\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j) = \{(L_i, L_j) : cn(L_i, L_j) = 0 \text{ ve } L_i, L_j \in \mathcal{L}\}$$

olmak üzere $p \in \mathcal{P}$ için

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} \left[|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) - \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1) \right]$$

dir. (Burada (L_i, L_j) ve (L_j, L_i) aynı düğüm çiftleridir.)

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. (4.9) eşitliğinden dolayı

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| + |\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir. $p \in \mathcal{P}$ olmak üzere (4.10) eşitliği kullanılırsa

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} \left[|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) - \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1) \right]$$

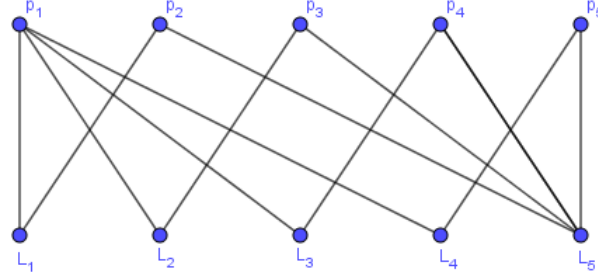
dir.

Örnek 4.9. Şekil 4.5 deki lineer graf modeli incelenirse $\mathcal{L}$ parçasına ait herhangi farklı iki düğümünün ortak komşuluğunun sayısı 1 dir. Ayrıca

$$|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1) = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 20$$

dir.



Şekil 4.5 Teorem 4.14 için örnek bir lineer graf modeli

Teorem 4.14. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \in \mathcal{P}$ için $\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1) = |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) \Leftrightarrow \forall L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 1$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere kabul edelim ki $p \in \mathcal{P}$ için $\sum_{p \in \mathcal{P}} (d(p) \cdot (d(p) - 1)) = |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$ olsun. (4.9) den dolayı

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| + |\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir. Ayrıca $\mathcal{L}$ parçasındaki ortak komşuluğunun sayısı 1 olan farklı düğüm çiftlerinin sayısı, (4.10) eşitliğinden dolayı

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1)$$

dir. Hipotezden dolayı,

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

elde edilir. Bu durumda, $|\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = 0$ dir. Dolayısıyla $\forall L_i, L_j \in \mathcal{L}$ ve $L_i \neq L_j$ için $cn(L_i, L_j) = 1$ dir.

Tersine, kabul edelim ki $\forall L_i, L_j \in \mathcal{L}$ ve $L_i \neq L_j$ için $cn(L_i, L_j) = 1$ olsun. Bu durumda,

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^0(L_i, L_j)| = 0$$

dir. Böylece (4.9) den dolayı

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir. Ayrıca 4.10

$$|\Lambda_{L_i \neq L_j}^1(L_i, L_j)| = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \cdot (d(p) - 1)$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} (d(p) \cdot (d(p) - 1)) = |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

Lemma 4.9. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L)$$

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Bu durumda lineer grafların ayrit sayının iki farklı şekilde sayabiliriz. İlk olarak ayrit sayısını $\mathcal{P}$ parçası üzerinden sayarsak,

$$|E| = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) \quad (4.11)$$

dir. ikinci olarak ayrit sayısını $\mathcal{L}$ parçası üzerinden sayarsak,

$$|E| = \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) \quad (4.12)$$

dir. (4.11) ve (4.12) den dolayı

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L)$$

dir.

Teorem 4.15. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{P}|$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Kabul edelim ki $|\mathcal{L}| < |\mathcal{P}|$ olsun. $L \in \mathcal{L}$ için LG2 den dolayı $d(L) \geq 2$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(L) \cdot |\mathcal{P}| &> d(L) \cdot |\mathcal{L}| \\ -d(L) \cdot |\mathcal{P}| &< -d(L) \cdot |\mathcal{L}| \\ |\mathcal{L}| \cdot |\mathcal{P}| - d(L) \cdot |\mathcal{P}| &< |\mathcal{L}| \cdot |\mathcal{P}| - d(L) \cdot |\mathcal{L}| \\ |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{L}| - d(L)) &< |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{P}| - d(L)) \end{aligned}$$

dir. Lemma 4.7 dan dolayı $|\mathcal{L}| - d(L) > 0$ ve $|\mathcal{L}| > 0$ olduğundan dolayı,

$$\frac{|\mathcal{P}| - d(L)}{|\mathcal{L}| - d(L)} > \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathcal{L}|} \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada herhangi bir p ve L düğümü için

$$\eta(p, L) = \begin{cases} 1, p \in N(L) \\ 0, p \notin N(L) \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} \eta(p, L) = d(p) \quad (4.14)$$

ve

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \eta(p, L) = d(L) \quad (4.15)$$

dir. Ayrıca

$$|\mathcal{P}| = \sum_{p \in \mathcal{P}} 1 \text{ ve } |\mathcal{L}| = \sum_{L \in \mathcal{L}} 1 \quad (4.16)$$

olduğundan (4.14) eşitliği kullanılırsa

$$|\mathcal{L}| - d(p) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (1 - \eta(p, L)) \quad (4.17)$$

elde edilir. Lemma 4.7 den dolayı $|\mathcal{L}| - d(p) > 0$ olduğu göz önüne alınırsa, (4.16) ve (4.17) den dolayı,

$$|\mathcal{P}| = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{|\mathcal{L}| - d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \right) \quad (4.18)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \geq \frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(L)} \quad (4.19)$$

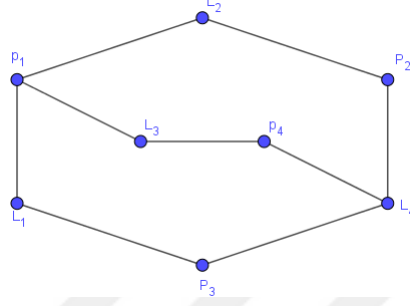
eşitsizliği hem $p \in N(L)$ hem de $p \notin N(L)$ ise Teorem 4.9 dan dolayı $d(p) \geq d(L)$ olduğundan yazılabilir. Bu durumda, (4.13), (4.18) ve (4.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}| &= \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \right) \geq \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(L)} \right) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 - \eta(p, L)}{|\mathcal{L}| - d(L)} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{|\mathcal{P}| - d(L)}{|\mathcal{L}| - d(L)} > \sum_{L \in \mathcal{L}} \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathcal{L}|} = |\mathcal{P}| \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $|\mathcal{P}| > |\mathcal{P}|$ çelişkisi ortaya çıkar. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla, $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{P}|$ dir.

Örnek 4.10. Şekil 4.3 deki lineer graf modeli göz önüne alınırsa $|\mathcal{P}| = 4$ ve $|\mathcal{L}| = 6$ olduğundan $|\mathcal{L}| > |\mathcal{P}|$ dır.

Şekil 4.6 deki graf modeli $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ve $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ olmak üzere $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graftır. Bu grafta $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = 4$ tür.



Şekil 4.6 Bir lineer graf modeli

Lemma 4.10. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}| \Leftrightarrow p \notin N(L) \text{ olacak şekilde } p \in \mathcal{P} \text{ ve } L \in \mathcal{L} \text{ düğümleri için } d(p) = d(L)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$ olsun. Teorem 4.9 dan dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri için

$$d(p) \geq d(L) \quad (4.20)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(p) - d(L) \\ |\mathcal{L}| - |\mathcal{P}| &\leq d(p) - d(L) \\ |\mathcal{L}| - d(p) &\leq |\mathcal{P}| - d(L) \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Lemma 4.7 ve Sonuç 4.5 den dolayı $|\mathcal{L}| - d(p) > 0$ ve $|\mathcal{P}| - d(L) > 0$ dir. Bu durumda (4.20) ve (4.21) den dolayı

$$\frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \geq \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)}$$

elde edilir.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{L \notin N(p)} \frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \right) \geq \sum_{L \in \mathcal{L}} \left(\sum_{p \notin N(L)} \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)} \right) = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(L)$$

olduğundan Lemma 4.9 göz önüne alınırsa

$$\frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} = \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)}$$

dir. Hipotezden dolayı $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ olduğundan dolayı $d(p) = d(L)$ dir.

Tersine $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri için $d(p) = d(L)$ olsun. Teorem 4.15 den dolayı $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{P}|$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\mathcal{L}| - |\mathcal{P}| \\ d(p) - d(L) &\leq |\mathcal{L}| - |\mathcal{P}| \\ |\mathcal{L}| - d(p) &\geq |\mathcal{P}| - d(L) \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ ve hipotezden dolayı $d(p) = d(L)$ olduğundan dolayı (4.22) eşitsizliğinden

$$\frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \leq \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)}$$

elde edilir.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{p \notin N(L)} \frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} \right) \leq \sum_{L \in \mathcal{L}} \left(\sum_{L \notin N(p)} \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)} \right) = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(L)$$

olduğundan Lemma 4.9 göz önüne alınırsa

$$\frac{d(p)}{|\mathcal{L}| - d(p)} = \frac{d(L)}{|\mathcal{P}| - d(L)}$$

dir. Hipotezden $d(p) = d(L)$ olduğu göz önüne alınırsa $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ dir.

Lemma 4.11. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri için

$$d(p) = d(L) \Leftrightarrow \forall K, H \in \mathcal{L} \text{ ve } K \neq H \text{ için } cn(K, H) = 1$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri için $d(p) = d(L)$ olsun. Kabul edelim ki $K, H \in \mathcal{L}$ ve $K \neq H$ için $cn(K, H) = 0$ olsun. Bu durumda LG2 den dolayı $d(K) \geq 2$ olduğundan $N(K) = \{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{d(K)}\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{d(K)} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG2 den dolayı $q \in N(H)$ vardır ki $cn(K, H) = 0$ olduğundan $q \notin N(K)$ dir. Dolayısıyla $q \neq p_i$ dir. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq d(K)$ için $CN(q, p_i) = \{L_i\}$

olacak şekilde bir tek $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $q \in N(L_i)$ ve $q \notin N(K)$ olduğundan $L_i \neq K$ dir. $p_i \in N(L_i)$ ve $p_i \notin N(H)$ olduğundan $L_i \neq H$ dir. Ayrıca $j, 1 \leq j \neq i \leq d(K)$ için $L_i = L_j$ olması durumunda $CN(p_i, p_j) = \{K, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. Bu durumda $\{L_1, L_2, \dots, L_{d(K)}, H\} \subseteq N(q)$ ve dolayısıyla $d(q) \geq d(K) + 1$ dir. Böylece $q \notin N(K)$ için $d(q) > d(K)$ elde edilir. Bu durum hipotezle çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır. Böylece $\forall K, H \in \mathcal{L}$ ve $K \neq H$ için $cn(K, H) = 1$ dir.

Tersine, $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\forall K, H \in \mathcal{L}$ ve $K \neq H$ için $cn(K, H) = 1$ olsun. Kabul edelim ki $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri için $d(p) > d(L)$ olsun. LG2 den dolayı $d(L) \geq 2$ dir. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_{d(L)}\}$ olacak şekilde birbirinden farklı $p_1, p_2, \dots, p_{d(L)} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq d(L)$ için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde bir tek $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $p \notin N(L)$ ve $p \in N(L_i)$ olduğundan $L_i \neq L$ dir. Ayrıca $j, 1 \leq j \neq i \leq d(L)$ için $L_i = L_j$ ise $CN(p_i, p_j) = \{L, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. Bu durumda $\{L_1, L_2, \dots, L_{d(L)}\} \subseteq N(p)$ dir. Kabülümüzden dolayı $d(p) > d(L)$ olduğundan dolayı $\exists K \in N(p)$ vardır ki her bir $i, 1 \leq i \leq d(L)$ için $K \neq L_i$ dir. Ayrıca $K \in N(p)$ ve $L \notin N(p)$ olduğundan $K \neq L$ dir. Hipotezden dolayı $cn(K, L) = 1$ olduğundan $CN(K, L) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $q \in N(L)$ olduğundan $j \in \{1, 2, \dots, d(L)\}$ için $q = p_j$ dir. Bu durumda $CN(p, q) = \{K, L_j\}$ dir. $K \neq L_j$ olduğundan bu durum LG1 ile çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır. Dolayısıyla $d(p) \leq d(L)$ dir. Ayrıca Teorem 4.9 den dolayı $d(p) \geq d(L)$ olduğundan $d(p) = d(L)$ dir.

Teorem 4.16. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| \Leftrightarrow \forall K, H \in \mathcal{L} \text{ ve } K \neq H \text{ için } cn(K, H) = 1$$

dir.

İspat. Lemma 4.10 ve Lemma 4.11 den elde edilir.

Örnek 4.11. Şekil 4.6 deki lineer graf modeli için $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = 4$ ve $CN(L_1, L_2) = \{p_1\}$, $CN(L_1, L_3) = \{p_1\}$, $CN(L_1, L_4) = \{p_3\}$, $CN(L_2, L_3) = \{p_1\}$, $CN(L_2, L_4) = \{p_2\}$, $CN(L_3, L_4) = \{p_4\}$ olduğundan $\mathcal{L}$ parçasına ait tüm düğümlerin ortak komşuluklarının sayısı 1 dir.

Lemma 4.12. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $r \geq 2$, $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r + 1\}$ olsun. $\mathcal{L}_r(N(p)) = \{L : L \in N(p) \text{ ve } d(L) = r\}$ ve $\mathcal{L}_{r+1}(N(p)) = \{L : L \in N(p) \text{ ve } d(L) = r + 1\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{L}_r(N(p))| = r \cdot d(p) - |P| + 1$$

ve

$$|\mathcal{L}_{r+1}(N(p))| = (1-r).d(p) + |\mathcal{P}| - 1$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r+1\}$ olsun. $\mathcal{P}$ parçasına ait herhangi bir p düğümünün komşuluğunda $\mathcal{L}$ parçasına ait $|\mathcal{L}_r(N(p))|$ tane r dereceli ve $|\mathcal{L}_{r+1}(N(p))|$ tane $(r+1)$ dereceli düğüm olsun. Bu durumda p düğümünün komşuluğundaki düğümlerin derecesi r ya da $r+1$ olduğundan

$$|\mathcal{L}_r(N(p))| + |\mathcal{L}_{r+1}(N(p))| = d(p) \quad (4.23)$$

yazılabilir. Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{\substack{L \in N(p) \\ d(L)=r}} (d(L) - 1) + \sum_{\substack{L' \in N(p) \\ d(L')=r+1}} (d(L') - 1) \quad (4.24)$$

dir. p nin komşuluğunda derecesi r olan $|\mathcal{L}_r(N(p))|$ tane ve derecesi $r+1$ olan $|\mathcal{L}_{r+1}(N(p))|$ tane düğüm olduğundan Sonuç 4.8 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = |\mathcal{L}_r(N(p))| \cdot (r-1) + |\mathcal{L}_{r+1}(N(p))| \cdot r \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.23) ve (4.25) birlikte değerlendirilirse

$$|\mathcal{L}_r(N(p))| = r.d(p) - |\mathcal{P}| + 1$$

$$|\mathcal{L}_{r+1}(N(p))| = (1-r).d(p) + |\mathcal{P}| - 1$$

dir.

Teorem 4.17. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $r \geq 2$, $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r+1\}$ olsun. $p \in \mathcal{P}$ için

$$\frac{|\mathcal{P}| - 1}{r} \leq d(p) \leq \frac{|\mathcal{P}| - 1}{r-1}$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r+1\}$ olsun. $\mathcal{L}$ parçasına ait her bir düğümün derecesi en çok $r+1$ olduğu gözönüne alınırsa, Sonuç 4.8 den dolayı $p \in \mathcal{P}$ için $\max |\mathcal{P}| = r.d(p) + 1$ dir. Bu durumda

$$r.d(p) + 1 \geq |\mathcal{P}| \quad (4.26)$$

Benzer şekilde $\mathcal{L}$ parçasına ait her bir düğümün derecesi en az r olduğu gözönüne alınırsa, Sonuç 4.8 den dolayı $p \in \mathcal{P}$ için $\min |\mathcal{P}| = (r-1).d(p) + 1$ dir. Bu durumda

$$(r-1).d(p) + 1 \leq |\mathcal{P}| \quad (4.27)$$

dir. Böylece (4.26) ve (4.27) eşitsizliklerinden

$$\frac{|\mathcal{P}| - 1}{r} \leq d(p) \leq \frac{|\mathcal{P}| - 1}{r - 1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.12. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $r \geq 2$, $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r + 1\}$ ve $\mathcal{P}$ parçası $k - regular$ olsun. $\mathcal{L}$ parçasına ait sırasıyla derecesi r ve derecesi $r + 1$ olan toplam düğüm sayısı $|\mathcal{L}_r|$ ve $|\mathcal{L}_{r+1}|$ olmak üzere,

$$r |\mathcal{L}_r| = |\mathcal{P}| (rk - |\mathcal{P}| + 1)$$

ve

$$(r + 1) |\mathcal{L}_{r+1}| = |\mathcal{P}| ((1 - r)k - |\mathcal{P}| - 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{r, r + 1\}$ ve $\mathcal{P}$ parçası $k - regular$ olsun. Lemma 4.12 den dolayı her bir $p \in \mathcal{P}$ düğümünü için $|\mathcal{L}_r(N(p))| = rk - |\mathcal{P}| + 1$ dir. Bu durumda derecesi r olan $\mathcal{L}$ parçasına ait herhangi bir düğümün komşulunda $\mathcal{P}$ parçasına ait r tane düğüm olduğundan, $\mathcal{P}$ parçasının tüm düğümleri üzerinden hesaplanırsa,

$$|\mathcal{L}_r| = \frac{|\mathcal{P}| (rk - |\mathcal{P}| + 1)}{r}$$

Benzer şekilde

$$|\mathcal{L}_{r+1}| = \frac{|\mathcal{P}| ((1 - r)k - |\mathcal{P}| - 1)}{r + 1}$$

dir.

Teorem 4.18. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $\mathcal{P}$ parçasına ait herhangi p düğümünün komşuluğunda derecesi $n - 1$ olan düğüm sayısı; $|\mathcal{L}_{n-1}(N(p))|$, derecesi n olan düğüm sayısı; $|\mathcal{L}_n(N(p))|$ olmak üzere, $|\mathcal{L}_{n-1}(N(p))| \geq 1$, $|\mathcal{L}_n(N(p))| \geq 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n - 1, n\}$ olsun. $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1) - regüler$ ise $|\mathcal{P}| \in \{n^2 - n, n^2 - 1\}$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n - 1, n\}$ ve $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1) - regular$ olsun. Teorem 4.17 den dolayı

$$\frac{|\mathcal{P}| - 1}{n - 1} \leq d(p) \leq \frac{|\mathcal{P}| - 1}{n - 2}$$

dir. Eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$n^2 - n - 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n^2 \quad (4.28)$$

elde edilir. $\forall p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ olduğundan Lemma 4.12 den dolayı

$$|\mathcal{L}_n(N(p))| = n^2 - |\mathcal{P}| \text{ ve } |\mathcal{L}_{n-1}(N(p))| = -n^2 + n + 1 + |\mathcal{P}| \quad (4.29)$$

dir. $|\mathcal{L}_{n-1}(N(p))| \geq 1$ ve $|\mathcal{L}_n(N(p))| \geq 1$ olduğundan dolayı

$$|\mathcal{P}| \neq n^2 - n - 1 \quad (4.30)$$

ve

$$|\mathcal{P}| \neq n^2 \quad (4.31)$$

dir. O halde (4.28), (4.30) ve (4.31) den dolayı

$$n^2 - n \leq |\mathcal{P}| \leq n^2 - 1$$

dir. Kabul edelim ki $n^2 - n + 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n^2 - 2$ olsun. $2 \leq m \leq n - 1$ olacak şekilde m ve n tamsayıları için $|\mathcal{P}| = n^2 - m$ yazılabilir. Her bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n - 1, n\}$ olduğundan dolayı

$$|\mathcal{L}_{n-1}(N(p))| + |\mathcal{L}_n(N(p))| = n + 1$$

dir. (4.29) gözönüne alınırsa $|\mathcal{L}_{n-1}(N(p))| = m$ ve $|\mathcal{L}_n(N(p))| = n + 1 - m$ elde edilir. Sonuç 4.12 den dolayı

$$n |\mathcal{L}_n| = (n^2 - m) \cdot (n + 1 - m) \text{ ve } (n - 1) |\mathcal{L}_{n-1}| = (n^2 - m)m$$

elde edilir. Bu durumda

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{L}_{n-1}| + |\mathcal{L}_n| = n^2 + n - \frac{m^2 - m}{n(n-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Fakat $m < n$ olduğundan $0 < \frac{m(m-1)}{n \cdot (n-1)} < 1$ olur. Bu durumda $|\mathcal{L}| = n^2 + n - \frac{m^2 - m}{n \cdot (n-1)} \notin \mathbb{Z}$ olup $|\mathcal{P}| \in \mathbb{Z}$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $|\mathcal{P}| \in \{n^2 - n, n^2 - 1\}$ dir.

Lemma 4.13. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}^1(L) = \{K : cn(L, K) = 1 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere

$$\mathcal{A}^1(L) = \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\})$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. LG2 den dolayı lineer grafın minimum derecesi 2 olduğundan $\mathcal{A}^1(L) \neq \emptyset$ dir. $K \in \mathcal{A}^1(L)$ olsun. $cn(K, L) = 1$ olduğundan

$CN(K, L) = \{q\}$ olacak şekilde bir tek $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Bu durumda $q \in N(L)$ ve $K \in N(q)$ olduğundan $K \in \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\})$ dir. Böylece

$$\mathcal{A}^1(L) \subseteq \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\}) \quad (4.32)$$

dir. $M \in \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\})$ olsun. Bu durumda $p \in N(L)$ için $M \in (N(p) - \{L\})$ dir. $p \in N(M)$ olduğundan $\{p\} \subseteq CN(M, L)$ dir. Lemma 4.3 den dolayı $CN(M, L) = \{p\}$ dir. Bu durumda $M \in \mathcal{A}^1(L)$ dir. Böylece

$$\bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\}) \subseteq \mathcal{A}^1(L) \quad (4.33)$$

dir. (4.32) ve (4.33) den dolayı

$$\mathcal{A}^1(L) = \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\})$$

dir.

Sonuç 4.13. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Herhangi bir $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}^1(L) = \{K : cn(L, K) = 1 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere,

$$|\mathcal{A}^1(L)| = \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$$

dir.

İspat. Birbirinden farklı herhangi $p, q \in N(L)$ için $N(p) \cap N(q) = \{L\}$ olduğundan dolayı $(N(p) - \{L\}) \cap (N(q) - \{L\}) = \emptyset$ dir. Lemma 4.13 den dolayı

$$|\mathcal{A}^1(L)| = \left| \bigcup_{p \in N(L)} (N(p) - \{L\}) \right| = \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$$

dir.

Sonuç 4.14. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{P}$ parçası r -regüler olsun. $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}^1(L) = \{K : cn(L, K) = 1 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{A}^1(L)| = (r - 1)d(L)$$

dir.

İspat. Sonuç 4.13 dan ispat açıktır.

Sonuç 4.15. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}^0(L) = \{K : K \neq L, cn(L, K) = 0 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere,

$$|\mathcal{A}^0(L)| = |\mathcal{L}| - 1 - \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Lemma 4.3 den dolayı $L \in \mathcal{L}$ ve her $K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) \in \{0, 1\}$ olduğundan L düğümü hariç,

$$|\mathcal{A}^1(L)| + |\mathcal{A}^0(L)| = |\mathcal{L}| - 1 \quad (4.34)$$

dir. Sonuç 4.13 den dolayı $|\mathcal{A}^1(L)| = \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$ dir. Bu eşitlik (4.34) de yerine yazılırsa

$$|\mathcal{A}^0(L)| = |\mathcal{L}| - 1 - \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$$

elde edilir.

Teorem 4.19. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1) -$ reguler ve $cn(L_i, L_j) = 1$ olacak şekilde $L_i, L_j \in \mathcal{L}$ için

$\mathcal{A}^{0,0}(L_i, L_j) = \{K : cn(K, L_i) = 0 \text{ ve } cn(K, L_j) = 0, K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere,

$$|\mathcal{A}^{0,0}(L_i, L_j)| = |\mathcal{L}| - 2 - d(L_i)n - d(L_j)n + n - 1 + (d(L_i) - 1)(1 - d(L_i))$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $L_i, L_j \in \mathcal{L}$ için $cn(L_i, L_j) = 1$ ve $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1) -$ regüler olsun. Sonuç 4.14 den dolayı $|\mathcal{A}^1(L_i)| = n.d(L_i)$ ve $|\mathcal{A}^1(L_j)| = n.d(L_j)$ dir. $cn(L_i, L_j) = 1$ olduğundan $cn(L_i, L_j) = \{p\}$ olacak şekilde bir tek $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. O halde L_i, L_j düğümleri ile ortak komşuluğu p olan düğümlerin sayısı $d(p) - 2 = n - 1$ dir. $N(L_i) = \{p, p_1, p_2, \dots, p_{d(L_i)-1}\}$ ve $N(L_j) = \{p, q_1, q_2, \dots, q_{d(L_j)-1}\}$ olsun. LGL den dolayı her bir $p_i \in N(L_i) - \{p\}$ ve her bir $q_j \in N(L_j) - \{p\}$ için $CN(p_i, q_j) = \{L_{ij}\}$ olacak şekilde bir tek $L_{ij} \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $1 \leq i, r \leq d(L_i) - 1, 1 \leq j, s \leq d(L_j) - 1$ ve $(i, j) \neq (r, s)$ olmak üzere $L_{ij} = L_{rs}$ ise $CN(q_j, q_s) = \{L_j, L_{ij}\}$ dir. Bu ise LGL ile çelişir. O halde $L_{ij} \neq L_{rs}$ dir. Bu durumda hem L_i hem de L_j ile ortak komşuluğunun sayısı 1 olan ve p düğümünün komşuluğunda olmayan düğümlerin sayısı; $(d(L_i) - 1).(d(L_j) - 1)$ dir. Böylece

$$|\mathcal{A}^{0,0}(L_i, L_j)| = |\mathcal{L}| - 2 - d(L_i)n - d(L_j)n + n - 1 + (d(L_i) - 1)(d(L_j) - 1)$$

dir.

Teorem 4.20. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1) -$ reguler, $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1 - z$ ve birbirinden farklı $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ düğümleriyle ortak komşuluğunun sayısı sıfır olacak şekilde $n - 1$ dereceli en az bir $L \in \mathcal{L}$ düğümüne sahip bir lineer graf olsun. Eğer L_1, L_2, L_3 ikiyeşli ortak komşuluklarının sayısı 1 ve $d(L_j) = n + 1 - d_j, (j = 1, 2, 3)$ ise

$$n \leq d_1.d_2 + d_1.d_3 + d_2.d_3 - d_1 - d_2 - d_3 - z$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, teoremdede verilen koşulları sağlayan bir lineer graf ve $\mathcal{A}^0(L) = \{K : cn(L, K) = 0 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olsun. Sonuç 4.15 dan dolayı $|\mathcal{A}^0(L)| = |\mathcal{L}| - 1 - (n^2 - n) = 2n - z$ dir. $\mathcal{A}^0(L) - \{L_j\}$ kümesinin L_j ile ortak komşuluğunun sayısı 1 olan düğümlerinin kümesi $\mathcal{A}_j^1$ olsun. L_j nin komşuluğunda bulunan her bir düğüm L ile ortak komşuluğun sayısı sıfır olan iki düğümün komşuluğundadır. Bunlardan biri L_j düğümü olduğundan $|\mathcal{A}_j^1| = d(L_j) = n + 1 - d_j$ dir. $j \neq k$ için $\mathcal{A}^0(L) - (\mathcal{A}_j^1 \cup \mathcal{A}_k^1)$ kümesinin her düğümü L_j ve L_k ile ortak komşuluğunun sayısı sıfırdır. L_j ve L_k ile ortak komşuluğunun sayısı sıfır olan $\mathcal{L}$ parçasına ait tüm düğümlerin sayısı Teorem 4.19 den dolayı

$$|\mathcal{L}| - 2 - d(L_j).n - d(L_k).n + n - 1 + (d(L_j) - 1).(d(L_k) - 1) = d_j.d_k - z$$

dir. L düğümünün L_j ve L_k ile ortak komşuluğunun sayısı sıfır olduğundan ayrıca $\mathcal{A}^0(L)$ kümesi dışında L den başka düğümlerinde L_j ve L_k ile ortak komşuluğunun sayısı sıfır olabileceğinden

$$|\mathcal{A}^0(L)| - |\mathcal{A}_j^1 \cup \mathcal{A}_k^1| \geq d_j.d_k - z - 1$$

dir.

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_j^1 \cap \mathcal{A}_k^1| &= |\mathcal{A}_j^1| + |\mathcal{A}_k^1| - |\mathcal{A}_j^1 \cup \mathcal{A}_k^1| \leq |\mathcal{A}_j^1| + |\mathcal{A}_k^1| - |\mathcal{A}^0(L)| + d_j.d_k - z - 1 \\ &= d_j.d_k - d_j - d_k + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1^1 \cup \mathcal{A}_2^1 \cup \mathcal{A}_3^1| &\geq |\mathcal{A}_1^1| + |\mathcal{A}_2^1| + |\mathcal{A}_3^1| - |\mathcal{A}_1^1 \cap \mathcal{A}_2^1| - |\mathcal{A}_2^1 \cap \mathcal{A}_3^1| - |\mathcal{A}_1^1 \cap \mathcal{A}_3^1| \\ &\geq 3n - d_1.d_2 - d_1.d_3 - d_2.d_3 + d_1 + d_2 + d_3 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $j \in \{1, 2, 3\}$ için $\mathcal{A}_j^1 \subseteq \mathcal{A}^0(L)$ ve $|\mathcal{A}^0(L)| = 2n - z$ olduğundan

$$3n - d_1.d_2 - d_1.d_3 - d_2.d_3 + d_1 + d_2 + d_3 \leq 2n - z$$

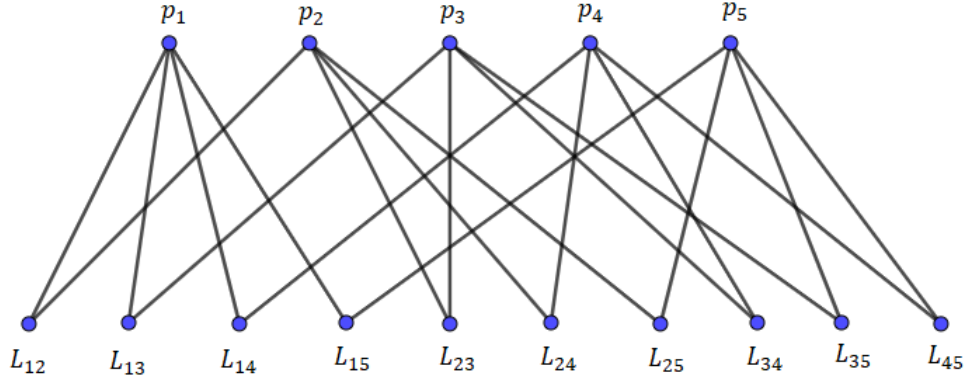
dir.

Örnek 4.12. Şekil 4.7 da verilen graf modeli göz önüne alınırsa,

$L = L_{12}, L_1 = L_{34}, L_2 = L_{35}, L_3 = L_{45}$ olmak üzere, $n = 3, z = 3, d(L) = 2, d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 2$ dir. Bu durumda,

$$3 \leq 2.2 + 2.2 + 2.2 - 2 - 2 - 2 - 3$$

dir. Farklı L, L_1, L_2, L_3 seçimleri için benzer şekilde yapılabilir.



Şekil 4.7 Teorem 4.20'deki parametrelere sahip lineer graf modeli

Teorem 4.21. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $\mathcal{P}$ parçası $(n+1)$ -regüler, $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1 - s$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ olsun. $|\mathcal{L}_n|$, $\mathcal{L}$ parçasındaki n dereceli düğümlerin sayısı olmak üzere,

$$|\mathcal{L}_n| \geq s.(n+2-s)$$

dir. Eşitliğin geçerli olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{L}$ parçasındaki her düğümünün derecesi $n-1$, n veya $n+1$ olmasıdır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, Teoremdaki koşulları sağlayan bir lineer graf olsun. Teorem 4.12 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| . (|\mathcal{P}| - 1) = \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L)(d(L) - 1) \quad (4.35)$$

dir. Lemma 4.9 den dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = |\mathcal{P}| . (n+1) \quad (4.36)$$

dir. (4.35) ve (4.36) den dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} (n+1 - d(L)).(n-1 - d(L)) = s.(s-2-n)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \sum_{L \in \mathcal{L}} (n+1 - d(L)).(n-1 - d(L)) \\ &= \sum_{d(L) \neq n} (n+1 - d(L)).(n-1 - d(L)) + \sum_{d(L)=n} (n+1 - d(L)).(n-1 - d(L)) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\sum_{d(L)=n} (n+1 - d(L)).(n-1 - d(L)) = -|\mathcal{L}_n|$$

dir. Böylece

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} (n+1-d(L)).(n-1-d(L)) + |\mathcal{L}_n| = \sum_{d(L) \neq n} (n+1-d(L)).(n-1-d(L))$$

dir. Teorem 4.9 den dolayı $n+1 = d(p) \geq d(L)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{d(L) \neq n} (n+1-d(L)).(n-1-d(L)) = s.(s-2-n) + |\mathcal{L}_n| \\ &\quad - |\mathcal{L}_n| \leq \sum_{L \in \mathcal{L}} (n+1-d(L)).(n-1-d(L)) \\ &\quad |\mathcal{L}_n| \geq s.(n+2-s) \end{aligned}$$

elde edilir. Şayet $|\mathcal{L}_n| = s.(n+2-s)$ ise

$$\sum_{d(L) \neq \mathcal{L}} (n+1-d(L)).(n-1-d(L)) = s.(s-2-n) + |\mathcal{L}_n| = 0$$

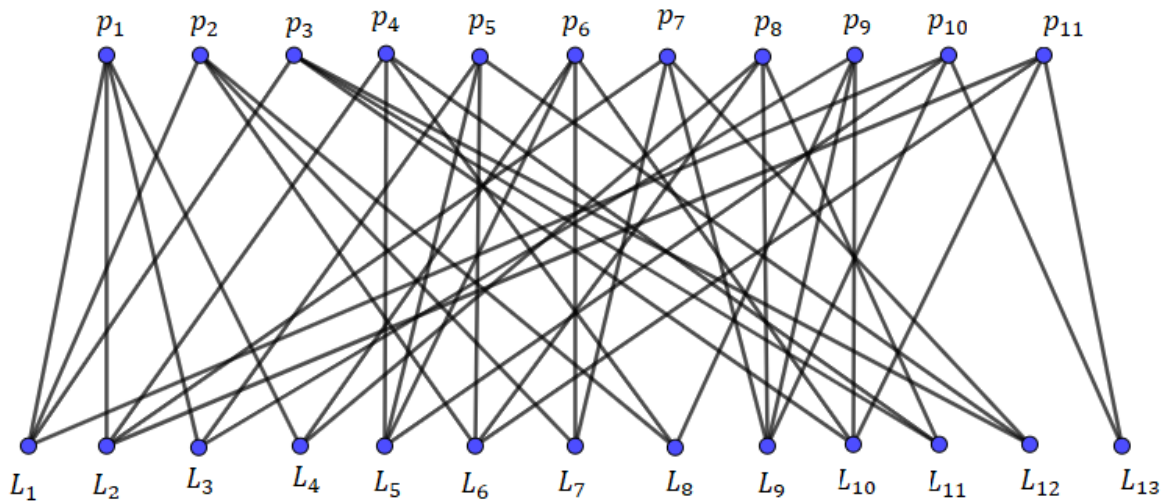
dir. Böylece $\mathcal{L}$ parçasına ait sadece $n+1$, n ve $n-1$ dereceli düğümler bulunur.

Tersine $d(L) \in \{n-1, n, n+1\}$ ise $|\mathcal{L}_n| = s.(-s+2+n)$ dir.

Örnek 4.13. Şekil 4.8’de verilen graf modeli göz önüne alınırsa, $|\mathcal{L}_n| = 6$, $s = 2$, $n = 3$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{2, 3, 4\}$ dir. Teorem 4.21’deki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$6 \geq 2.(3+2-2)$$

dir.



Şekil 4.8 Teorem 4.21’deki parametrelere sahip lineer graf modeli

Tanım 4.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere u ve v arasındaki minimum uzunluklu yolların sayısına bağlantı sayısı denir ve $c(u, v)$ şeklinde gösterilir.

Lemma 4.14. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

i. $p, q \in \mathcal{P}$ için $p \neq q$ ise $c(p, q) = 1$

ii. $p \in N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $c(p, L) = 1$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun.

i. $p, q \in \mathcal{P}$ için $p \neq q$ olsun. Teorem 4.4 den dolayı G bağlı graf olduğundan p ile q arasında en az bir yol vardır. O halde $c(p, q) \geq 1$ dir. Kabul edelim ki $c(p, q) \geq 2$ olsun. Lemma 4.5 den dolayı p ile q düğümleri arasındaki minimum uzunluklu yolların uzunluğu 2 dir. Bu durumda p ile q arasında $P_1 : p - L - q$ ve $P_2 : p - K - q$ olacak şekilde en az iki farklı yol vardır. $P_1 \neq P_2$ olduğundan $L \neq K$ dir. O halde $\{L, K\} \subseteq CN(p, q)$ olur ki bu durumda $cn(p, q) \geq 2$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $c(p, q) = 1$ dir.

ii. $p \in N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda $pL \in E(G)$ olduğundan p ile L arasındaki minimum uzunluklu yolların uzunluğu 1 dir. Eğer $c(p, q) \geq 2$ ise G çoklu ayırt içereceğinden lineer grafın tanımı ile çelişir. Böylece $c(p, q) = 1$ dir.

Teorem 4.22. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^1(L) = \{K : cn(K, L) = 1 \text{ ve } K \in N(p)\}$ olsun.

$$c(p, L) = n \Leftrightarrow |\mathcal{A}_{N(p)}^1(L)| = n$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{L}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $c(p, L) = n$ olsun. Lemma 4.5 den dolayı $d(p, L) = 3$ olduğundan p ile L arasındaki minimum uzunluklu yolların uzunluğu 3 tür. Bu durumda p ile L arasındaki tüm minimum uzunluklu yollar; her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $P_i(p, L) : p - K_i - q_i - L, K_i \in N(p)$ ve $q_i \in \mathcal{P}$ dir. Burada $P_i(p, L) : p - K_i - q_i - L$ ve $P_j(p, L) : p - K_j - q_j - L$ yolları için $K_i = K_j$ iken $q_i \neq q_j$ olması durumunda $CN(K_i = K_j, L) = \{q_i, q_j\}$ olur ki bu durum Lemma 4.3 ile çelişir. Bu durumda, $K_i = K_j$ için $q_i = q_j$ dir. Benzer şekilde LG1 den dolayı $q_i = q_j$ ise $K_i = K_j$ dir. Ayrıca $K_i \neq K_j$ iken $q_i = q_j$ olması durumunda $CN(p, q_i) = \{K_i, K_j\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $K_i \neq K_j$ ise $q_i \neq q_j$ dir. Böylece p ile L düğümü arasındaki minimum uzunluklu birbirinden farklı her bir yol için tam olarak bir tek $K_i \in N(p)$ vardır ki $cn(K_i, L) = 1$ dir. O halde

$$| \mathcal{A}_{N(p)}^1(L) | = n$$

dir.

Tersine, $| \mathcal{A}_{N(p)}^1(L) | = n$ olsun. Bu durumda p ile L arasında her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $P_i : p - K_i - q_i - L$ olacak şekilde n tane yol vardır. Burada p ile L arasındaki farklı 3 uzunluklu her bir yol için bir tek (K_i, q_i) ikilisinin var olduğu ve farklı yollar için bu ikililerin farklı olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Lemma 4.5 den dolayı p ile L arasındaki minimum uzunluklu yolların uzunluğu 3 olduğundan ve bağlantı sayısı tanımından

$$c(p, L) = n$$

dir.

Teorem 4.23. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{L_j : cn(L, L_j) = 0 \text{ ve } L_j \in N(p)\}$ olmak üzere

$$| \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) | = d(p) - c(p, L)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ olsun. LG2 den dolayı $d(p) \geq 2$ dir. Bu durumda her bir $i, 1 \leq i \leq d(p)$ için $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{d(p)}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır.

$$\mathcal{A}_{N(p)}^1(L) = \{L_i : cn(L, L_i) = 1 \text{ ve } L_i \in N(p)\}$$

olsun. Lemma 4.3 den dolayı $cn(L, L_i) \in \{0, 1\}$ dir. Bu durumda

$$N(p) = \mathcal{A}_{N(p)}^1(L) \cup \mathcal{A}_{N(p)}^0(L)$$

dir. Ayrıca

$$\mathcal{A}_{N(p)}^1(L) \cap \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \emptyset$$

olduğundan dolayı

$$| N(p) | = | \mathcal{A}_{N(p)}^1(L) | + | \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) |$$

dir. $\mathcal{A}_{N(p)}^1(L)$ kümesinin tanımı ve Teorem 4.22 den dolayı

$$| N(p) | = c(p, L) + | \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) |$$

dir. Ayrıca $d(p) = | N(p) |$ olduğundan,

$$| \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) | = d(p) - c(p, L)$$

dir.

Sonuç 4.16. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$c(p, L) \leq d(p)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için iki durum vardır.

1. durum $p \in N(L)$ ise Lemma 4.14 den dolayı $c(p, L) = 1$ dir. LG2 den dolayı $d(p) \geq 2$ dir. Böylece

$$c(p, L) < d(p)$$

dir.

2. durum $p \notin N(L)$ ise Teorem 4.23 den dolayı

$$c(p, L) \leq d(p)$$

dir.

Lemma 4.15. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$d(L) = n \Leftrightarrow c(p, L) = n$$

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Kabul edelim ki $d(L) = n$ olsun. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ vardır. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Herhangi bir i için $L_i = L$ olması halinde $p \in N(L)$ olması ile çelişir. O halde $L_i \neq L$ dir. Ayrıca $j, 1 \leq j \leq n$ ve $i \neq j$ için $p_i \neq p_j$ iken $L_i = L_j$ olması halinde $N(L, L_i) = \{p_i, p_j\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişeceğinden $L_i \neq L_j$ dir. Böylece

$$|\{K : K \in N(p) \text{ ve } cn(L, K) = 1\}| = |\{L_1, L_2, \dots, L_n\}| = n$$

elde edilir. Teorem 4.22 den dolayı $c(p, L) = n$ dir.

Tersine kabul edelim ki $c(p, L) = n$ olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için Teorem 4.22 den dolayı $K \in N(p)$ ve $cn(K, L) = 1$ olacak şekilde K düğümlerinin sayısı n dir. Bu özellikteki düğümler $L_1, L_2, \dots, L_n$ olsun. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $CN(L, L_i) = \{p_i\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $p \notin N(L)$ olduğundan dolayı $p_i \neq p$ dir. $1 \leq i \neq j \leq n$ için $L_i \neq L_j$ iken $p_i = p_j$ ise $CN(L_i, L_j) = \{p, p_i\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $p_i \neq p_j$ dir. Böylece $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq N(L)$ elde edilir.

İspatın tamamlanması için $q \neq p_i$ olacak şekilde bir $q \in N(L)$ düğümünün olmadığı gösterilmelidir. Kabul edelim ki bu özellikte bir $q \in \mathcal{P}$ düğümü olsun. Bu durumda LG1 şartı gereğince $CN(p, q) = \{M\}$ olacak şekilde $M \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $p \notin N(L)$ olduğundan $M \neq L$ dir. $M = L_i$ ise $CN(p_i, q) = \{L, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $M \neq L_i$ dir. Fakat $CN(p, q) = \{M\}$ ve $M \neq L$ ve $M \neq L_i$ olacak şekilde $M \in \mathcal{L}$ düğümünün bulunması halinde $c(p, L) = n + 1$ dir. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla $q \neq p_i$ olacak şekilde bir $q \in N(L)$ düğümü yoktur. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dir. Böylece $d(L) = n$ elde edilir.

Sonuç 4.17. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$c(p, L) \geq 2$$

dir.

İspat. Lemma 4.15 ve LG2 den dolayı ispat açıktır.

Sonuç 4.18. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için

$$c(p, L) = d(p) \Leftrightarrow d(p) = d(L)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Kabul edelim ki $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $c(p, L) = d(p)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.15 den dolayı $d(L) = d(p)$ dir. Tersine $d(p) = d(L)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.15 den dolayı $c(p, L) = d(p)$ dir.

Teorem 4.24. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun.

i. $p \notin N(L) \cup N(L')$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L, L' \in \mathcal{L}$ düğümleri varsa

$$\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L') = \{K : cn(K, L) = 1 \text{ ve } cn(K, L') = 0, K \in N(p)\}$$

ve

$$\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L') = \{K : cn(K, L) = 0 \text{ ve } cn(K, L') = 1, K \in N(p)\}$$

olmak üzere

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L')| = d(L') + |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')| - d(L)$$

dir.

ii. $L, L', H \in \mathcal{L}$ için $cn(H, L) = 1$ ve $cn(H, L') = 0$ olsun. $p \notin N(L) \cup N(L')$ özellikli herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ için $cn(K, L) = 0$, $cn(K, L') = 1$ ve $cn(K, H) = 1$ olacak şekilde en az $(d(H) - 1) \cdot (d(L') - d(L) + 1)$ tane $K \in N(p)$ düğümü vardır.

İspat. i. $\mathcal{A}_{N(p)}^{1,1}(L, L') = \{K : cn(K, L) = 1 \text{ ve } cn(K, L') = 1, K \in N(p)\}$ ve $\mathcal{A}_{N(p)}^1(L) = \{H : cn(H, L) = 1, H \in N(p)\}$ olsun. Bu durumda

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{1,1}(L, L')| = |\mathcal{A}_{N(p)}^1(L)| - |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')|$$

dir. Teorem 4.22 dan dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^1(L)| = c(p, L)$ olduğundan dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{1,1}(L, L')| = c(p, L) - |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')| \quad (4.37)$$

dir. Ayrıca

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L')| = |\mathcal{A}_{N(p)}^1(L')| - |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,1}(L, L')|$$

dir. Bu durumda Teorem 4.22 dan dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^1(L')| = c(p, L')$ olduğundan ve (4.37) den dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L')| = c(p, L') - (c(p, L) - |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')|)$$

elde edilir. Lemma 4.15 den dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L')| = d(L') - d(L) + |\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')|$$

dir.

ii. Hipotezden dolayı $cn(H, L') = 0$ ve $cn(H, L) = 1$ dir. Bu durumda, $CN(H, L) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. LG2 den dolayı en az bir $p \in N(H)$ vardır ki $p \neq q$ dir. $p \neq q$ olduğundan $p \notin N(L)$ dir. $p \in N(L')$ olması halinde $CN(H, L') = \{p\}$ dir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde $p \notin N(L')$ dir. p nin seçimi keyfi olduğundan $p \neq q$ olacak şekildeki her bir $p \in N(H)$ için $p \notin N(L) \cup N(L')$ dir. Ayrıca $H \in \mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')$ olduğundan dolayı $\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L') \neq \emptyset$ dir. Bu durumda $|\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')| \geq 1$ dir.

Her bir $p \in N(H) - \{q\}$ için $p \notin N(L) \cup N(L')$, $|\mathcal{A}_{N(p)}^{1,0}(L, L')| \geq 1$ ve (i) den dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^{0,1}(L, L')| \geq d(L') - d(L) + 1$ dir. $|N(H) - \{q\}| = d(H) - 1$ olduğundan dolayı $p \notin N(L) \cup N(L')$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ için $cn(K, L) = 0$, $cn(K, L') = 1$ ve $cn(K, H) = 1$ olacak şekilde en az $(d(H) - 1) \cdot (d(L') - d(L) + 1)$ tane $K \in N(p)$ düğümü vardır.

Teorem 4.25. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $L, H \in \mathcal{L}$ ve $p \in N(L)$ olmak üzere $\mathcal{A}^{1,0}(L, H) = \{K : cn(K, L) = 1 \text{ ve } cn(K, H) = 0, K \in \mathcal{L}\}$ olsun.

i. $cn(L, H) = 0$ ise

$$|\mathcal{A}^{1,0}(L, H)| = \sum_{p \in N(L)} (d(p_i) - d(H) - 1),$$

ii. $cn(L, H) = 1$ ise

$$|\mathcal{A}^{1,0}(L, H)| = \sum_{\substack{p \in N(L) - q \\ CN(L, H) = \{q\}}} (d(p) - d(H))$$

dir.

İspat. i. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $L, H \in \mathcal{L}$ ve $p \in N(L)$ olmak üzere $cn(L, H) = 0$ olsun. Bu durumda $p \notin N(H)$ dir. $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(H)| = \{K : cn(K, H) = 0 \text{ ve } K \in N(p)\}$ olmak üzere Teorem 4.23 den dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^0(H)| = d(p) - c(p, H)$$

dir. Lemma 4.15 den dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^0(H)| = d(p) - d(H)$$

dir. $L \in \mathcal{A}_{N(p)}^0(H)$ olduğu göz önüne alınırsa L den farklı her bir $K \in \mathcal{A}_{N(p)}^0(H)$ için $cn(L, K) = 1$ dir. L nin komşuluğunda bulunan tüm p düğümleri üzerinden hesaplanırsa, L düğümü hariç

$$|\mathcal{A}^{1,0}(L, H)| = \sum_{p \in N(L)} (d(p) - d(H) - 1)$$

dir.

ii. $cn(L, H) = 1$ olsun. Bu durumda $CN(L, H) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $\mathcal{P} - \{q\}$ parçasında $cn(L, H) = 0$ dir. O halde herhangi bir $p \in N(L) - \{q\}$ düğümü için $p \notin N(H)$ dir. O halde (i) den dolayı

$$|\mathcal{A}^{1,0}(L, H)| = \sum_{\substack{p \in N(L) - \{q\} \\ CN(L, H) = \{q\}}} (d(p) - d(H))$$

dir.

Teorem 4.26. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \mathcal{X}$ ve $E' = E - \{pL : p \in \mathcal{X}, L \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere $L \in N(\mathcal{X})$ için $d(L) - |\mathcal{X}| \geq 2$ ve $|\mathcal{P}'| \geq 3$ ise $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ bir lineer graftır.

İspat. G' grafının iki kümeli olduğu açıktır. $\forall p, q \in \mathcal{P}'$ için $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ olduğundan $p, q \in \mathcal{P}$ ve G lineer graf olduğundan LG1 den dolayı $cn(p, q) = 1$ dir. Böylece $\forall p, q \in \mathcal{P}'$ için $cn(p, q) = 1$ olduğundan LG1 sağlanır. $\delta(G') \geq 2$ olduğunu gösterelim. $\forall p \in \mathcal{P}$ için $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ olduğundan $p \in \mathcal{P}$ dir. Bu durumda G lineer graf olduğundan $\delta(G) \geq 2$ dir. Bu durumda $d(p) \geq 2$ dir.

$L \in \mathcal{L}$ için $L \notin \mathcal{N}(\mathcal{X})$ ise $\mathcal{P}$ parçasından $\mathcal{X}$ kümesi atılırsa L düğümünün derecesini değiştirmeyeceğinden $d(L) \geq 2$ dir. $L \in \mathcal{L}$ için $L \in \mathcal{N}(\mathcal{X})$ ise $d(L) - |\mathcal{X}| \geq 2$ olduğundan $d(L) \geq 2$ dir. Bu durumda $\forall p \in \mathcal{P}'$ ve $\forall L \in \mathcal{L}'$ için $d(p) \geq 2$ ve $d(L) \geq 2$ olduğundan $\delta(G') \geq 2$ dir. Böylece LG1 ve LG2 sağlandığından $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ bir lineer graftır.

Örnek 4.14. $\mathcal{P} = \{p_i: 1 \leq i \leq 13, i \in \mathbb{Z}^+\}$, $\mathcal{L} = \{L_i: 1 \leq j \leq 13, j \in \mathbb{Z}^+\}$ ve ayrıklar kümesi olan E , Çizelge 4.1'deki gibi verilsin.

Çizelge 4.1 Örnek 4.14 da verilen $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ grafına ait ayrıkların tablosu

p_1L_1	p_1L_2	p_1L_3	p_1L_4	p_2L_1	p_2L_6	p_2L_7	p_2L_8	p_3L_1
p_3L_{10}	p_3L_{11}	p_3L_{12}	p_4L_2	p_4L_5	p_4L_8	p_4L_{11}	p_5L_3	p_5L_5
p_5L_6	p_5L_{12}	p_6L_4	p_6L_5	p_6L_7	p_6L_{10}	p_7L_2	p_7L_7	p_7L_9
p_7L_{12}	p_8L_4	p_8L_6	p_8L_9	p_8L_{11}	p_9L_3	p_9L_8	p_9L_9	p_9L_{10}
$p_{10}L_1$	$p_{10}L_5$	$p_{10}L_9$	$p_{10}L_{13}$	$p_{11}L_2$	$p_{11}L_6$	$p_{11}L_{10}$	$p_{11}L_{13}$	$p_{12}L_3$
$p_{12}L_7$	$p_{12}L_{11}$	$p_{12}L_{13}$	$p_{13}L_4$	$p_{13}L_8$	$p_{13}L_{12}$	$p_{13}L_{13}$		

Bu durumda $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graftır. $\mathcal{X} = \{p_1, p_2\}$ olsun. Teorem 4.26 ifade edildiği şekliyle $\mathcal{X}$ kümesinin G grafından atılmasıyla oluşan $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ olsun. Bu durumda $\mathcal{P}' = \{p_i: 3 \leq i \leq 13, i \in \mathbb{Z}^+\}$, $\mathcal{L}' = \{L_i: 1 \leq j \leq 13, j \in \mathbb{Z}^+\}$ dir. Ayrıca $E'(G')$, Çizelge 4.2'deki gibidir. Böylece $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ grafi bir lineer graftır.

Çizelge 4.2 Örnek 4.14 da verilen $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ grafına ait ayrıkların tablosu

p_3L_1	p_3L_{10}	p_3L_{11}	p_3L_{12}	p_4L_2	p_4L_5	p_4L_8	p_4L_{11}	p_5L_3
p_5L_5	p_5L_6	p_5L_{12}	p_6L_4	p_6L_5	p_6L_7	p_6L_{10}	p_7L_2	p_7L_7
p_7L_9	p_7L_{12}	p_8L_4	p_8L_6	p_8L_9	p_8L_{11}	p_9L_3	p_9L_8	p_9L_9
p_9L_{10}	$p_{10}L_1$	$p_{10}L_5$	$p_{10}L_9$	$p_{10}L_{13}$	$p_{11}L_2$	$p_{11}L_6$	$p_{11}L_{10}$	$p_{11}L_{13}$
$p_{12}L_3$	$p_{12}L_7$	$p_{12}L_{11}$	$p_{12}L_{13}$	$p_{13}L_4$	$p_{13}L_8$	$p_{13}L_{12}$	$p_{13}L_{13}$	

4.1 Afin Graflar

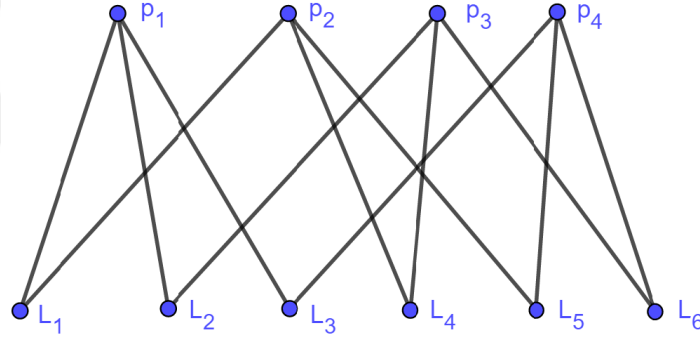
Bu bölümde $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ şartını sağlayan lineer graflar afin graf olarak tanımlanarak temel özellikleri incelenmiş ve bazı lineer grafların afin graf olması için gerekli parametreler verilmiştir. Ayrıca $\mathcal{L}$ parçasına ait bir düğümünün derecesi n olan afin graflar $(n, n+1)$ - biregüler lineer graflar olarak karakterize edilerek düğüm ve ayırıt sayılarına ilişkin parametreler hesaplanmıştır.

Tanım 4.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde her bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{K : cn(K, L) = 0 \text{ ve } K \in N(p)\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$$

oluyorsa G ye afin graf denir.

Örnek 4.15. Şekil 4.9 de bir afin graf modeli verilmiştir.



Şekil 4.9 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf modeli

Lemma 4.16. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Birbirinden farklı $L, K, M \in \mathcal{L}$ düğümleri için $cn(L, K) = 0$ ve $cn(L, M) = 1$ ise $cn(K, M) = 1$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ afin graf ve birbirinden farklı $L, K, M \in \mathcal{L}$ düğümleri için $cn(L, K) = 0$ ve $cn(L, M) = 1$ olsun.

Kabul edelim ki $cn(K, M) = 0$ olsun. $cn(L, M) = 1$ olduğundan $CN(L, M) = \{p\}$ olacak şekilde bir tek $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $p \in N(M)$ ve $cn(K, M) = 0$ olduğundan dolayı $p \notin N(K)$ dir. Ayrıca $L, M \in N(p)$, $cn(L, K) = 0$ ve $cn(K, M) = 0$ dir. $L \neq M$ olduğundan dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(K)| \geq 2$ dir. Bu ise G nin afin graf olması ile çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır. Dolayısıyla $cn(K, M) = 1$ dir.

Lemma 4.17. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. $L, K, M \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 0$ ve $cn(K, M) = 0$ ise $L = M$ ya da $cn(L, M) = 0$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olmak üzere $L, K, M \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 0$ ve $cn(K, M) = 0$ olsun. $L = M$ ise ispat tamamdır. Lemma 4.3 den dolayı $cn(L, M) \in \{0, 1\}$ dir. O halde $L \neq M$ için $cn(L, M) = 0$ olduğu gösterilmelidir.

Kabul edelim ki $L \neq M$ için $cn(L, M) = 1$ olsun. Bu durumda $CN(L, M) = \{p\}$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $cn(L, K) = 0$ olduğundan dolayı $p \notin N(K)$ dir. $L, M \in N(p)$, $cn(K, L) = 0$ ve $cn(K, M) = 0$ olduğundan dolayı $| \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) | \geq 2$ dir. Bu ise G nin afin graf olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $cn(L, M) = 0$.

Lemma 4.18. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ise C_8 içerir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Sonuç 4.4 den dolayı $cn(p, q, r) = 0$ olacak şekilde birbirinden farklı $p, q, r \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır.

LG1 den dolayı $cn(q, r) = 1$ dir. Bu durumda $CN(q, r) = \{L\}$ olacak şekilde bir tek $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $cn(p, q, r) = 0$ olduğundan $p \notin N(L)$ dir. $| \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) | = 1$ olduğundan dolayı $K \in N(p)$ ve $cn(K, L) = 0$ olacak şekilde bir tek $K \in \mathcal{L}$ vardır.

Benzer şekilde, LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{M\}$ olacak şekilde bir tek $M \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $cn(p, q, r) = 0$ olduğundan $r \notin N(M)$ dir. $| \mathcal{A}_{N(r)}^0(M) | = 1$ olduğundan dolayı $S \in N(r)$ ve $cn(M, S) = 0$ olacak şekilde bir tek $S \in \mathcal{L}$ vardır. $K = S$ ise $K \in N(r)$ ve $L \in N(r)$ dir. Bu durumda $CN(K, L) = \{r\}$ dir. Bu ise K düğümünün seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $K \neq S$ dir.

Kabul edelim ki $cn(K, S) = 0$ olsun. $cn(K, S) = 0$, $cn(L, K) = 0$ ve $cn(S, L) = 1$ olduğundan Lemma 4.17 den dolayı $S = L$ dir. Bu durumda $CN(M, S) = \{q\}$ olur. Bu ise S düğümünün seçimi ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $cn(K, S) = 1$ dir. O halde $CN(K, S) = \{t\}$ olacak şekilde bir tek $t \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $cn(K, L) = 0$ olduğundan dolayı $t \neq q$ ve $t \neq r$ dir. Benzer şekilde $cn(M, S) = 0$ olduğundan dolayı $t \neq p$ dir. Böylece $G, C_8 : q - L - r - S - t - K - p - M - q$ içerir.

Lemma 4.19. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Birbirinden farklı $L, K \in \mathcal{L}$ için

$$\mathcal{P} = N(L) \cup N(K) \text{ ise } cn(L, K) = 0$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve birbirinden farklı $L, K \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{P} = N(L) \cup N(K)$ olsun. O halde $cn(L, K) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 4.3 den dolayı $cn(L, K) \in \{0, 1\}$ dir.

Kabul edelim ki $cn(L, K) = 1$ olsun. Bu durumda bir tek $q \in \mathcal{P}$ için $CN(L, K) = \{q\}$ dir. Sonuç 4.4 den dolayı en az bir $r \notin N(L)$ olacak şekilde $r \in \mathcal{P}$ vardır. $r \notin N(L)$ olduğundan dolayı $r \neq q$ dir. $\mathcal{P} = N(L) \cup N(K)$ olduğundan $r \in N(K)$ dir. G afin graf olduğundan dolayı $| \mathcal{A}_{N(r)}^0(L) | = 1$ dir. Bu durumda $r \notin N(L)$ için $M \in N(r)$ ve $cn(L, M) = 0$ olacak şekilde bir tek $M \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. LG2 den dolayı $s \neq r$ olacak

şekilde en az bir $s \in N(M) \subset \mathcal{P}$ vardır. $cn(L, M) = 0$ olduğundan dolayı $s \notin N(L)$ dir. $\mathcal{P} = N(L) \cup N(K)$ olduğundan dolayı $s \in N(K)$ dir. Bu durumda $\{r, s\} \subseteq CN(K, M)$ dir. Böylece $cn(K, M) \geq 2$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. O halde $cn(L, K) = 0$ dir.

Lemma 4.20. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ ve $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = d(L) + 1$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ ve $p \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $i, 1 \leq i \leq d(L)$ olacak şekilde her bir i için $p_i \in N(L)$ olsun. LG2 den dolayı $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_{d(L)}\}$ ve $d(L) \geq 2$ dir. LG1 den dolayı her bir i için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $L_i \in N(p)$ ve $L \notin N(p)$ olduğundan $L \neq L_i$ dir. Ayrıca $1 \leq i, j \leq d(L)$ ve $i \neq j$ için $L_i = L_j$ ise $CN(p_i, p_j) = \{L, L_j\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. G afin graf olduğundan $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ dir. Bu durumda, $K \in N(p)$ ve $cn(K, L) = 0$ olacak şekilde tek bir $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Her bir i için $CN(L, L_i) = \{p_i\}$ olduğundan $cn(L_i, L) = 1$ dir. Böylece $K \neq L_i$ dir. Böylece

$$\{L_1, L_2, \dots, L_{d(L)}, K\} \subseteq N(p)$$

olur.

Kabul edelim ki, her bir i için $M \neq L_i$ ve $M \neq K$ olacak şekilde $M \in N(p)$ düğümü olsun. $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ ve bu düğüm K olduğundan dolayı $cn(M, L) = 1$ dir. Bu durumda $CN(M, L) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $q \in \{p_1, p_2, \dots, p_{d(L)}\}$ olduğundan öyle bir $j, 1 \leq j \leq d(L)$ vardır ki $q = p_j$ dir. Bu durumda $CN(p, p_j) = \{L, M\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $\{L_1, L_2, \dots, L_{d(L)}, K\} = N(p)$ dir. Böylece

$$d(p) = |N(p)| = |\{L_1, L_2, \dots, L_{d(L)}, K\}| = d(L) + 1$$

dir.

Teorem 4.27. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olmak üzere

i. $G, (n+1, n) - \text{biregulerdir.}$

ii. $|\mathcal{P}| = n^2$

iii. $|\mathcal{L}| = n^2 + n$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. $L \neq M$ ve $M \in \mathcal{L}$ için iki durum vardır.

1.durum. $\mathcal{P} = N(L) \cup N(M)$ ise Lemma 4.19 den dolayı $cn(L, M) = 0$ dir. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ dir.

Kabul edelim ki $d(L) \geq 3$ olsun. (Burada L veya M den herhangi birini seçmek genelliği bozmayacağından $d(M) \geq 3$ olması durumunda benzer şekilde gösterilebilir.) Bu durumda $\{p, q, r\} \subseteq N(L)$ olacak şekilde $p, q, r \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Ayrıca $d(M) \geq 2$ olduğundan dolayı $\{s, t\} \subseteq N(M)$ olacak şekilde $s, t \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $cn(L, M) = 0$ olduğundan dolayı, $s \neq p, s \neq q, s \neq r, t \neq p, t \neq q$ ve $t \neq r$ dir. LG1 den dolayı $CN(p, s) = \{X\}$, $CN(q, s) = \{Y\}$ ve $CN(r, t) = \{Z\}$ olacak şekilde $X, Y, Z \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $s, t \notin N(L)$ olduğundan dolayı $X \neq L, Y \neq L$ ve $Z \neq L$ dir. $X = M$ ise $CN(L, M) = \{p\}$ dir. Bu ise $cn(L, M) = 0$ olması ile çelişir. O halde $X \neq M$ dir. Benzer şekilde $Y \neq M$ ve $Z \neq M$ dir. $X = Y$ ise $CN(p, q) = \{L, X\}$ olur. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $X \neq Y$ dir. Benzer şekilde $X \neq Z$ ve $Y \neq Z$ dir.

$d(Z) \geq 3$ olsun. Bu durumda $\exists k \in N(Z)$ vardır ki $k \neq r$ ve $k \neq t$ dir. Eğer $k = p$ ise $CN(Z, L) = \{r, p\}$ olur. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $k \neq p$ dir. Benzer şekilde $k \neq q$ ve $k \neq s$ dir. $\mathcal{P} = N(L) \cup N(M)$ ve $cn(L, M) = 0$ olduğundan ya $k \in N(L)$ ya da $k \in N(M)$ dir. $k \in N(L)$ ise $CN(Z, L) = \{r, k\}$ olur. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $k \notin N(L)$ dir. Benzer şekilde $k \in N(M)$ ise $CN(Z, M) = \{s, k\}$ olur. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $k \notin N(M)$ dir. Fakat bu durumda $\mathcal{P} = N(L) \cup N(M)$ olması ile çelişeceğinden dolayı $d(Z) = 2$ dir. Benzer şekilde X ve Y düğümleri için $d(X) = d(Y) = 2$ dir.

$d(Z) = 2$ olduğundan $N(Z) = \{r, t\}$ dir. Bu durumda $s \notin N(Z)$ için $cn(Y, Z) = 0$ ve $cn(X, Z) = 0$ olup $X, Y \in N(s)$ dir. $X \neq Y$ olduğundan $|\mathcal{A}_{N(s)}^0(Z)| = 1$ ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $d(L) = d(M) = 2$ dir. Böylece $\mathcal{L}$ parçasındaki tüm düğümlerin derecesi 2 dir.

2.durum. Eğer $\mathcal{P} \neq N(L) \cup N(M)$ ise $p \notin N(L) \cup N(M)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. Lemma 4.20 den dolayı $d(p) = d(L) + 1$ ve $d(p) = d(M) + 1$ dir. Böylece $d(L) = d(M)$ elde edilir. L ve M seçimi keyfi olduğundan $\forall L, M \in \mathcal{P}$ için $d(L) = d(M) = n$ dir.

Böylece $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olduğundan $\mathcal{L}$ parçası n -regulerdir. Bu durumda Lemma 4.8 dan dolayı $\mathcal{P}$ parçasıda regulerdir. Sonuç 4.4 den dolayı $L \in \mathcal{L}$ için $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Lemma 4.20 den dolayı $d(p) = d(L) + 1$ ve $d(L) = n$ olduğundan $d(p) = n + 1$ dir. G grafinin $\mathcal{P}$ parçası reguler olduğundan $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ dir. Bu durumda $G, (n + 1, n) - \text{bireguler}$ dir.

ii. $L \in N(p)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{L \in N(p)} (d(L) - 1)$$

dir. (i) den dolayı $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ ve $\forall p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ dir. Bu durumda

$$|\mathcal{P}| = (n + 1)(n - 1) + 1 = n^2$$

dir.

iii. $L \in \mathcal{L}$ için (4.34) eşitliğinden dolayı

$$|\mathcal{A}^1(L)| + |\mathcal{A}^0(L)| = |\mathcal{L}| - 1$$

dir. (i) den dolayı G , $(n + 1, n)$ – biregulerdir. Sonuç 4.14 den dolayı

$$|\mathcal{A}^1(L)| = n^2 \quad (4.38)$$

dir. İspatı tamamlamak için öncelikle aşağıdaki (4.39) eşitliğinin doğru olduğunu gösterilsin.

$$\mathcal{A}^0(L) = \bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) \quad (4.39)$$

$K \in \mathcal{A}^0(L)$ olsun. $cn(K, L) = 0$ olduğundan dolayı $N(K) \subset \mathcal{P} - N(L)$ dir. Bu durumda, $K \in N(p)$ olacak şekilde en az bir $p \in \mathcal{P} - N(L)$ düğümü vardır. $cn(K, L) = 0$ olduğundan

$$\mathcal{A}^0(L) \subseteq \bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) \quad (4.40)$$

dir. Tersine, $K' \in \bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} \mathcal{A}_{N(p)}^0(L)$ olsun. Bu durumda en az bir $q \in \mathcal{P} - N(L)$ için $K' \in \mathcal{A}_{N(q)}^0(L)$ dir. $cn(K', L) = 0$ olduğundan dolayı $K' \in \mathcal{A}^0(L)$ dir. Dolayısıyla

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} \mathcal{A}_{N(p)}^0(L) \subseteq \mathcal{A}^0(L) \quad (4.41)$$

dir. (4.40) ve (4.41) den dolayı (4.39) eşitliği geçerlidir.

Ayrıca

$$\bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} - N(L) \\ K \in \mathcal{A}_{N(p)}^0(L)}} N(K) = \mathcal{P} - N(L)$$

olduğu açıktır. G afin graf olduğundan $p \in \mathcal{P} - N(L)$ için $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ dir. O halde herhangi bir $p \in \mathcal{P} - N(L)$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{K\}$ olacak şekilde bir tek $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $p, q \in \mathcal{P} - N(L)$ ve $p \neq q$ düğümleri için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{K\}$, $\mathcal{A}_{N(q)}^0(L) = \{M\}$ ve $K \neq M$ olmak üzere $cn(K, M) = 1$ olsun. Bu durumda $CN(K, M) = \{r\}$ olacak şekilde $r \in \mathcal{P} - N(L)$ düğümü vardır. $r \notin N(L)$, $K, M \in N(r)$ ve $cn(K, L) = 0$, $cn(M, L) = 0$ olduğundan dolayı $|\mathcal{A}_{N(r)}^0(L)| \geq 2$ dir. Bu ise G nin afin graf olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $cn(K, M) = 0$ dir. $cn(K, M) = 0$ olduğundan $N(K) \cap N(M) = \emptyset$ dir. O halde

$$\sum_{\substack{p \in \mathcal{P} - N(L) \\ K \in \mathcal{A}_{N(p)}^0(L)}} |N(K)| = |\mathcal{P} - N(L)| \quad (4.42)$$

dir. $|\bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} \mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = x$ olsun. Herhangi bir $p \in \mathcal{P} - N(L)$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{K\}$ olacak şekilde bir tek $K \in \mathcal{L}$ düğümü olduğundan $|\bigcup_{p \in \mathcal{P} - N(L)} K| = x$ dir. Her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = |N(L)| = n$ ve $|\mathcal{P}| = n^2$ olduğundan (4.42) eşitliği düzenlenirse,

$$x = \frac{n^2 - 1}{n} = n - 1$$

dir. (4.39) den dolayı

$$|\mathcal{A}^0(L)| = n - 1 \quad (4.43)$$

dir.

Böylece (4.34), (4.38) ve (4.43) den dolayı

$$|\mathcal{L}| = n^2 + n$$

dir.

Sonuç 4.19. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afın graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olmak üzere

$$|V(G)| = 2n^2 + n$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afın graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ ve Teorem 4.27 den dolayı

$$|V(G)| = |\mathcal{P} \cup \mathcal{L}| = |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}| = 2n^2 + n$$

dir.

Sonuç 4.20. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afın graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olmak üzere

$$|E(G)| = n^2(n + 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afın graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. (4.11) den dolayı

$$|E(G)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)$$

dir. Teorem 4.27 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2$ ve her $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ olduğundan

$$|E(G)| = n^2(n + 1)$$

dir.

Örnek 4.16. Şekil 4.9 de verilen graf modeli göz önüne alınırsa, $n = 2$ için G , $(3, 2)$ -biregüler, $|\mathcal{P}| = 2^2$, $|\mathcal{L}| = 2^2 + 2$, $V(G) = 2 \cdot 2^2 + 2$ ve $E(G) = 2^2(2 + 1)$ dir.

Sonuç 4.21. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. $\mathcal{A}^1(L) = \{K : cn(K, L) = 1 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{A}^1(L)| = n^2$$

dir.

Sonuç 4.22. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}^0(L) = \{K : cn(K, L) = 0 \text{ ve } K \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{A}^0(L)| = n - 1$$

dir.

Teorem 4.28. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ afin graf ise Euler graf değildir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. LG2 den dolayı $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olacak şekilde $n \geq 2$ tamsayısı vardır. Teorem 4.27 den dolayı G , $(n + 1, n)$ - biregülerdir. Bu durumda, her bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ dir.

Eğer $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ise $d(L) = 2k + 1$ dir.

Eğer $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ise $d(p) = 2k + 1$ dir.

Bu durumda, en az bir $v \in V(G)$ düğümünün derecesi tek olduğundan Teorem 3.1 den dolayı G , Euler graf değildir.

Teorem 4.29. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $(n + 1, n)$ -biregüler lineer graf $\Leftrightarrow G$ $(n + 1, n)$ -biregüler afin graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $(n + 1, n)$ - biregüler lineer graf olsun. LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $d(L) = n$ olduğundan $i, 1 \leq i \leq n$ için $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Ayrıca LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Her bir i için $p \in N(L_i)$ olduğundan $L_i \neq L$ dir. $i \neq j$ ve $1 \leq i, j \leq n$ için $L_i = L_j$ ise $CN(p_i, p_j) = \{L, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. $d(p) = n + 1$ olduğundan her bir i için $K \neq L_i$ olacak şekilde bir tek $K \in N(p) \subset \mathcal{L}$ düğümü vardır. Herhangi bir i için $K \in N(p_i)$ ise $CN(p, p_i) = \{L_i, K\}$ olur. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $K \notin N(p_i)$ dir. Bu durumda $p \notin N(L)$ için $cn(L, K) = 0$ olacak şekilde bir tek $K \in N(p)$ düğümü vardır. p ve L düğümlerinin seçimi keyfi olduğundan $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ dir. Dolayısıyla G afin graftır. $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olduğu gözönüne alınırsa Teorem 4.27 den dolayı G $(n + 1, n)$ biregüler afin graftır.

Tersine, kabul edelim ki $G(n+1, n)$ biregüler afın graf olsun. Afın graf tanımından dolayı G lineer graftır. Böylece $G(n+1, n)$ biregüler lineer graftır.

Teorem 4.30. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\forall L \in \mathcal{L}$ ve $|\mathcal{P}| = n^2$ için $d(L) = n \Leftrightarrow G(n+1, n)$ –biregüler afın graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $|\mathcal{P}| = n^2$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. Lemma 4.8 den dolayı $\mathcal{P}$ parçası regulerdir ve her bir $p \in \mathcal{P}$ için

$$d(p) = \frac{|\mathcal{P}| - 1}{d(L) - 1}$$

dir. $|\mathcal{P}| = n^2$ ve $d(L) = n$ olduğundan dolayı

$$d(p) = \frac{n^2 - 1}{n - 1} = n + 1$$

dir. Bu durumda $G, (n+1, n)$ –biregulerdir. Dolayısıyla Teorem 4.29 dan dolayı $G(n+1, n)$ –biregüler afın graftır.

Tersine, kabul edelim ki $G(n+1, n)$ –biregüler afın graf olsun. Afın graf tanımından dolayı G lineer graftır. Teorem 4.27 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ dir.

Teorem 4.31. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $|\mathcal{L}| = n^2 + n$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n \Leftrightarrow G(n+1, n)$ –biregüler afın graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $|\mathcal{L}| = n^2 + n$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. Teorem 4.12 den dolayı

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) \cdot (d(L) - 1)$$

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = n(n-1)(n^2 + n)$$

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = n^2(n^2 - 1)$$

elde edilir. Bu durumda $|\mathcal{P}| = n^2$ dir. Teorem 4.30 den dolayı $G(n+1, n)$ –biregüler afın graftır.

Tersine, kabul edelim ki $G(n+1, n)$ –biregüler afın graf olsun. Afın graf tanımından dolayı G lineer graftır. Teorem 4.27 den dolayı $|\mathcal{L}| = n^2 + n$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ dir.

Teorem 4.32. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $c(p, L) = d(p) - 1 \Leftrightarrow G$ bir afın graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $c(p, L) = d(p) - 1$ olsun. LG2 den dolayı $d(p) \geq 2$ dir.

Bu durumda, $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{d(p)}\}$ olacak şekilde $L_1, L_2, \dots, L_{d(p)} \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Her bir $L_i \in N(p)$ için $L_i \neq L$ dir. $c(p, L) = d(p) - 1$ olduğu göz önüne alınırsa Teorem 4.22 den dolayı

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^1(L)| = d(p) - 1$$

dir. Bu durumda bir tek $K \in N(p)$ düğümü vardır ki $cn(L, K) = 0$ dır. O halde $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ olduğundan dolayı G bir afin graftır.

Tersine, $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Afin graf tanımından dolayı lineer graftır. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Lemma 4.15 den dolayı $c(p, L) = d(L)$ dir. Lemma 4.20 den dolayı $d(p) = d(L) + 1$ olduğundan dolayı $c(p, L) = d(p) - 1$ dir.

Teorem 4.33. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $n \geq 3$ olmak üzere $|\mathcal{P}| = n^2 + 1$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n, n + 1\}$ olsun. $G - \{q\}$ bir afin graf olacak şekilde en az bir $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $L \in \mathcal{L}$ ve $n \geq 3$ için $|\mathcal{P}| = n^2 + 1$ ve $d(L) \in \{n, n + 1\}$ olsun. Eğer $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ ise Teorem 4.11 den dolayı,

$$|\mathcal{P}| = n^2 + 1 = d(p) \cdot (n - 1) + 1$$

dir. Böylece

$$d(p) = \frac{n^2}{n - 1} = n + 1 + \frac{1}{n - 1}$$

elde edilir. Bu ise $d(p) \in \mathbb{Z}$ olması ile çelişir. O halde $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n + 1$ olan en az bir düğüm vardır.

$L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ olsun. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Teorem 4.17 den dolayı $p \in \mathcal{P}$ için

$$\frac{|\mathcal{P}| - 1}{n} \leq d(p) \leq \frac{|\mathcal{P}| - 1}{n - 1}$$

dir. $|\mathcal{P}| = n^2 + 1$ olduğundan dolayı

$$d(p) \in \{n, n + 1\}$$

dir. Teorem 4.9 den dolayı $d(p) = n + 1$ dir.

$d(L) = n + 1$ olduğundan dolayı $i, 1 \leq i \leq n + 1$ için $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LGL den dolayı her bir i için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $d(p) = d(L)$ olduğundan Sonuç 4.18 den dolayı $c(p, L) = n + 1$ dir. Bu durumda her $L_i \in N(p)$ için $cn(L_i, L) = 1$ dir. Hipotezden dolayı her bir $L_i \in N(p)$ için $d(L_i) \in \{n, n + 1\}$ dir. p düğümün komşuluğundaki düğümlerden

x tanesi $n + 1$ dereceli olsun. $d(p) = n + 1$ olduğundan $n + 1 - x$ tanesi de n derecelidir. Teorem 4.11 den dolayı,

$$|\mathcal{P}| = n^2 + 1 = x.n + (n + 1 - x).(n - 1) + 1$$

dir. Bu durumda $x = 1$ dir. O halde bir tek $L_j \in N(p)$ için $d(L_j) = n + 1$ ve $\forall L_k \in N(p) - \{L_j\}$ için $d(L_k) = n$ dir.

Ayrıca $d(R) = d(S) = n + 1$ olacak şekilde $R, S \in \mathcal{L}$ için $cn(R, S) = 0$ olması durumunda $p' \in N(R)$ için $cn(R, S) = 0$ olduğundan $p' \notin N(S)$ dir. $d(S) = n + 1$ olduğundan $N(S) = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{n+1}\}$ olacak şekilde $p'_1, p'_2, \dots, p'_{n+1} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 dolayı her bir $t, 1 \leq t \leq n + 1$ için $CN(p', p'_t) = \{L'_t\}$ olacak şekilde $L'_t \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $CN(R, S) = 0$ olduğundan $R \neq L'_t$ ve $L'_t \neq S$ dir. $L'_j, L'_k \in N(p')$ için $L'_t = L'_k$ ise $CN(p'_t, p'_k) = \{S, L'_t\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L'_t \neq L'_k$ dir. Böylece $\{R, L'_1, L'_2, \dots, L'_{n+1}\} \subseteq N(p')$ dir. Bu durumda $d(p') \geq n + 2$ olur. Bu ise $d(p') = n + 1$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $d(R) = d(S) = n + 1$ olacak şekildeki her bir $R, S \in \mathcal{L}$ düğüm çifti için $cn(R, S) = 1$ dir.

$cn(L, L_j) = 1$ olduğundan dolayı $CN(L, L_j) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Kabul edelim ki $d(M) = n + 1$ olacak şekilde $M \in \mathcal{L}$ düğümü için $M \notin N(q)$ olsun. $\mathcal{L}$ parçasında ait $n + 1$ dereceli düğümlerin ortak komşuluğunun sayısı 1 olduğundan $CN(L, M) = \{q'\}$ olacak şekilde $q' \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $M \notin N(q)$ olduğundan $q' \neq q$ dur. $q' \in N(L_j)$ ise $CN(L, L_j) = \{q, q'\}$ olur. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $q' \notin N(L_j)$ dir. Teorem 4.9 den dolayı $d(q') \geq d(L_j) = n + 1$ ve $d(q') \in \{n, n + 1\}$ olduğundan dolayı $d(q') = n + 1$ dir. Bu durumda $d(M) = d(L) = n + 1$, $M, L \in N(q')$ ve $M \neq L$ olduğundan $\mathcal{P}$ parçasına ait $n + 1$ dereceli herhangi bir düğümünün komşuluğunda $n + 1$ dereceli bir tek düğüm olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $d(M) = n + 1$ olacak şekilde her bir $M \in \mathcal{L}$ için $M \in N(q)$ dir.

Böylece q düğümü G grafindan atılırsa $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ ve $|\mathcal{P}| = n^2$ dir. Teorem 4.30 dan dolayı $G - \{q\}$ grafi afın graftır.

Örnek 4.17 'de Teorem 4.33 de verilen parametrelere ait bir lineer graf verilmiştir.

Örnek 4.17. Aşağıdaki verilen özelliklere sahip $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graftır. Bu durumda $G - \{q\}$ grafi bir afın graftır.

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, q\}, \mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}\}$$

ve $E(G) = \{e_i : i, 1 \leq i \leq 39\}$ olmak üzere, $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ Teorem 4.33 da verilen parametrelere sahip bir lineer graftır. (Çizelge 4.3 de $E(G)$ kümesinin elemanları verilmiştir.)

Çizelge 4.3 Örnek 4.17 da verilen $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ grafına ait ayrıtlar

$e_1 = p_1L_1$	$e_2 = p_1L_4$	$e_3 = p_1L_7$	$e_4 = p_1L_9$
$e_5 = p_2L_2$	$e_6 = p_2L_4$	$e_7 = p_2L_{10}$	$e_8 = p_2L_{11}$
$e_9 = p_3L_3$	$e_{10} = p_3L_4$	$e_{11} = p_3L_8$	$e_{12} = p_3L_{12}$
$e_{13} = p_4L_1$	$e_{14} = p_4L_5$	$e_{15} = p_4L_{10}$	$e_{16} = p_4L_{12}$
$e_{17} = p_5L_2$	$e_{18} = p_5L_5$	$e_{19} = p_5L_7$	$e_{20} = p_5L_8$
$e_{21} = p_6L_3$	$e_{22} = p_6L_5$	$e_{23} = p_6L_9$	$e_{24} = p_6L_{11}$
$e_{25} = p_7L_1$	$e_{26} = p_7L_6$	$e_{27} = p_7L_8$	$e_{28} = p_7L_{11}$
$e_{29} = p_8L_2$	$e_{30} = p_8L_6$	$e_{31} = p_8L_9$	$e_{32} = p_8L_{12}$
$e_{33} = p_9L_3$	$e_{34} = p_9L_6$	$e_{35} = p_9L_7$	$e_{36} = p_9L_{10}$
$e_{37} = qL_1$	$e_{38} = qL_2$	$e_{39} = qL_3$	

4.2 Projektif Graflar

Bu bölümde $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $\mathcal{L}$ parçasındaki farklı iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 olan ve C_8 içeren lineer graflar projektif graf olarak tanımlanarak bu grafların temel özellikleri incelenmiştir. $\mathcal{L}$ parçasındaki bir düğümün derecesi n olan projektif graflar $(n + 1)$ -regüler lineer graflar olarak karakterize edilerek düğüm sayıları ve ayrıt sayılarına ilişkin hesaplamalar yapılmıştır. Lineer grafların projektif graf olması için gerekli parametreler verilerek afin graflarla ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca projektif grafların Euler graf olması koşulları belirlenmiştir.

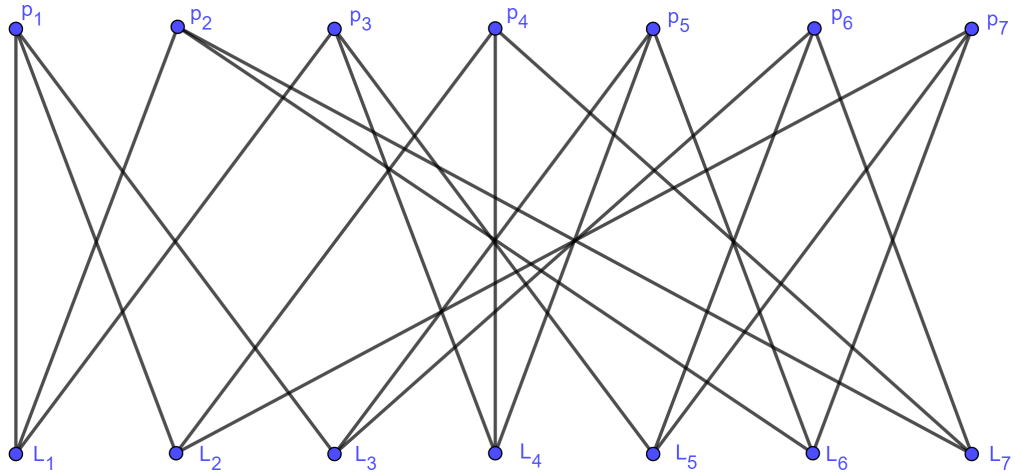
Son olarakta $\mathcal{L}$ parçasındaki farklı iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 olan fakat C_8 içermeyen lineer graflar dejenere projektif graf olarak tanımlanarak temel özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer grafi PG1 ve PG2 şartlarını sağlıyorsa G ye projektif graf denir.

$$PG1. \forall L, K \in \mathcal{L} \text{ ve } L \neq K \text{ için } cn(L, K) = 1$$

$$PG2. C_8 \text{ içerir.}$$

Örnek 4.18. Şekil 4.10 de bir projektif graf modeli verilmiştir. Burada G nin lineer graf olduğu açıktır. $\mathcal{L}$ parçasındaki birbirinden farklı iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 ve G, C_8 içerir.



Şekil 4.10 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, bir projektif graf modeli

Sonuç 4.23. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olmak üzere $\forall K, L \in \mathcal{L}$ ve $K \neq L$ için $d(L, K) = 2$ dir.

İspat. G bir projektif graf olsun. G iki kümeli olduğundan $L, K \in \mathcal{L}$ için $d(L, K) \neq 1$. PG1 den dolayı $\forall K \in \mathcal{L}$ ve $K \neq L$ için $CN(L, K) = \{p\}$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. Bu durumda $L - p - K$ yolu G grafindaki en kısa yol olduğundan $d(L, K) = 2$ dir.

Sonuç 4.24. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ise $\text{diam}(G) = 3$ dür.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. LG1 den dolayı $\forall p, q \in \mathcal{P}$ ve $p \neq q$ için $CN(p, q) = \{L\}$ olacak şekilde bir tek $L \in \mathcal{L}$ vardır. O halde Lemma 4.5 den dolayı $d(p, q) = 2$ dir. PG1 den dolayı her bir $L, K \in \mathcal{L}$ ve $K \neq L$ için Sonuç 4.24 dolayı $d(L, K) = 2$ dir.

Sonuç 4.4 den dolayı her bir $M \in \mathcal{L}$ için en az $r \in \mathcal{P}$ vardır ki $r \notin N(M)$ dir. Lemma 4.5 den dolayı $d(r, L) = 3$ olur. Bu durumda,

$$\text{diam}(G) = \max\{\max\{d(u, v) : u, v \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}\}\} = 3$$

dür.

Teorem 4.34. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçasındaki birbirinden farklı herhangi iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 olmak üzere $\mathcal{P}$ parçasında herhangi üçünün ortak komşuluk sayısı sıfır olacak şekilde dört düğüm olması için gerek ve yeter koşul G projektif graftır.

İspat. Kabul edelim ki G projektif graf olsun. Bu durumda $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçasında ki birbirinden farklı herhangi iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 dir. PG2 den dolayı G , birbiriden farklı $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$ ve $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathcal{L}$ için $C_8 : p_1 - L_1 - p_2 - L_2 - p_3 - L_3 - p_4 - L_4 - p_1$ olacak şekilde C_8 içerir. $p_1 \in N(L_3)$ ise $CN(p_1, p_4) = \{L_1, L_2\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $p_1 \notin N(L_3)$ dir. Benzer şekilde $p_2 \notin N(L_3)$, $p_3 \notin N(L_1)$ ve $p_4 \notin N(L_1)$ dir. $CN(p_1, p_2) = \{L_1\}$ ve $CN(p_3, p_4) = \{L_3\}$ olduğundan p_1, p_2, p_3 ve p_4 düğümlerinin herhangi üçünün ortak komşuluğunun sayısı sıfırdır.

Tersine, $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçasında ki birbirinden farklı herhangi iki düğümün ortak komşuluğunun sayısı 1 olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{P}$ parçasında herhangi üçünün ortak komşuluk sayısı sıfır olacak şekilde dört düğüm olsun. Hipotezden dolayı PG1 sağlanır. p, q, r ve s düğümleri $\mathcal{P}$ parçasında herhangi üçünün ortak komşuluk sayısı sıfır olacak şekilde dört düğüm olsun. LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{L\}$ ve $CN(r, s) = \{K\}$ olacak şekilde $L, K \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $L = K$ ise $CN(p, q, r) = \{K\}$ olur. Bu durumda $cn(p, q, r) = 1$ olacağından p, q, r, s düğümlerin seçimi ile çelişir. O halde $L \neq K$

dir. Benzer şekilde, LG1 den dolayı $CN(p, r) = \{M\}$ ve $CN(q, s) = \{N\}$ olacak şekilde $M, N \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. p, q, r, s düğümlerinin seçiminden dolayı $M \neq N$, $M \neq L$, $M \neq K$, $N \neq L$ ve $M \neq K$ dir.

Böylece $G, C_8 : p - L - q - N - s - K - r - M - p$ içerir.

Lemma 4.21. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olmak üzere birbirinden farklı $L, K \in \mathcal{L}$ için $p \notin N(L) \cup N(K)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. PG2 den dolayı G, C_8 içerir. Bu durumda, $C_8 : n - L - q - N - s - K - r - M - n$ olacak şekilde $n, q, r, s \in \mathcal{P}$ ve $L, N, K, M \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. PG1 den dolayı $CN(N, M) = \{p\}$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Teorem 4.1 den dolayı p düğümü n, q, r, s düğümlerinden farklıdır. $p \in N(L)$ ise $\{n, p\} \subseteq CN(L, M)$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $p \notin N(L)$ dir. Benzer şekilde $p \in N(K)$ ise $\{r, p\} \subseteq CN(K, M)$ dir. Bu durum Lemma 4.3 ile çelişeceğinden $p \notin N(K)$ dir. Böylece $p \notin N(L) \cup N(K)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır.

Teorem 4.35. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ olmak üzere

i. $G, (n + 1)$ -regülerdir

ii. $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$

iii. $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$

iv. $n \geq 2$

dir.

İspat. i. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L, K \in \mathcal{L}$ için $L \neq K$ olsun. PG1 den dolayı $CN(L, K) = \{p\}$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. $d(L) = n + 1$ olduğundan $i, 1 \leq i \leq n$ için $N(L) = \{p, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Lemma 4.21 dolayı $q \notin N(L) \cup N(K)$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ vardır. $q \notin N(L) \cup N(K)$ olduğundan her bir i için $q \neq p_i$ ve $q \neq p$ dir. Ayrıca herhangi bir i için $CN(q, p_i) = \{K\}$ olması durumunda $CN(p, p_i) = \{L, K\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişeceğinden $CN(q, p_i) \neq \{K\}$ dir. $i, 1 \leq i \leq n$ için $CN(q, p_i) = M_i$ olsun. Bu durumda $M_i \neq K$ ve $M_i \neq L$ dir. Buna göre,

$$f_q : N(L) - \{p\} \rightarrow N(K) - \{p\}$$

$$f_q(p_i) = CN(M_i, K)$$

dönüşümünü göz önüne alınsın. Bu durumda $p_i \neq p_j$ düğümleri için kabul edelim ki $f_q(p_i) = f_q(p_j)$ olsun. Bu durumda $CN(M_i, M_j) = \{q, f_q(p_i)\}$ olur. $q \notin N(K)$

olduğundan $q \neq f_q(p_i)$ dir. Bu durumda $cn(M_i, M_j) \geq 2$ olduğundan Lemma 4.3 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece, $f_q(p_i) \neq f_q(p_j)$ dir. Dolayısıyla f_q birebirdir.

Ayrıca herhangi bir $x \in N(K) - \{p\}$ düğümünü alalım. $q \notin N(K)$ olduğundan dolayı $x \neq q$ dir. LG1 den dolayı $CN(x, q) = \{M'\}$ olacak şekilde $M' \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. PG1 den dolayı $CN(L, M') = \{r\}$ olacak şekilde $r \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $r = p$ olması durumunda $CN(K, M') = \{x, p\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. Dolayısıyla $r \neq p$ dir. $N(L) = \{p, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olduğundan dolayı bir $j, 1 \leq j \leq n$ indisi vardır ki $r = p_j$ dir. Bu durumda $M' = M_j$ ve $\{x\} = CN(M_j, K) = f_q(p_j)$ elde edilir. Dolayısıyla x keyfi olduğundan K düğümünün komşuluğunda alınan p den farklı her bir düğüm için L nin komşuluğunda p den farklı bir düğüm vardır. Böylece f_q örten bir dönüşümdür.

Bu durumda $d(L) = d(K) = n + 1$ dir. K düğümünün seçimi keyfi olduğundan her bir $K \in \mathcal{L}$ için $d(K) = n + 1$ dir. O halde $\mathcal{L}$ parçası $(n + 1)$ -regülerdir.

Lemma 4.8 dan dolayı $\mathcal{P}$ parçasıda regülerdir. Sonuç 4.4 den dolayı $z \notin N(L)$ olacak şekilde $z \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $d(L) = n + 1$ olduğundan $i, 1 \leq i \leq n + 1$ için $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir i için $CN(z, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Teorem 4.9 den dolayı $z \notin N(L)$ için $d(z) \geq d(L) = n + 1$ dir. Kabul edelim ki $d(z) \geq n + 2$ olsun. Bu durumda en az bir $K \in N(p)$ vardır ki $cn(K, L) = 0$ dir. Bu ise PG1 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $d(z) = n + 1$ dir. Böylece G grafi $(n + 1)$ -regülerdir.

ii. (i) den dolayı $G, (n + 1)$ -regülerdir. Bu durumda, Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = (n + 1) \cdot (n + 1 - 1) = n^2 + n$$

dir. Eşitlik düzenlenirse,

$$|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$$

dir.

iii. $L \in \mathcal{L}$ ve $p \in N(L)$ için Sonuç 4.10 den dolayı

$$|\mathcal{L}| - 1 = \sum_{p \in N(L)} (d(p) - 1)$$

dir. (i) den dolayı $d(L) = d(p) = n + 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$|\mathcal{L}| - 1 = (n + 1) \cdot (n + 1 - 1)$$

$$|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$$

dir.

iv. Kabul edelim ki $n = 1$ olsun. (i) den dolayı G , 2-regülerdir. Bu durumda G çevre graftır. (ii) ve (iii) den dolayı $V(G) = 6$ dir. Dolayısıyla $G = C_6$ dir. Bu ise PG2 ile çelişir. Dolayısıyla $n \geq 2$ dir.

Sonuç 4.25. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olmak üzere,

$$\delta(G) \geq 3$$

dir.

İspat. Teorem 4.35 den dolayı $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = 2$ ise G , $(n+1)$ -regülerdir. G , lineer graf olduğu göz önüne alınırsa LG2 den dolayı $n \geq 2$ dir. Böylece $\delta(G) \geq 3$ tür.

Sonuç 4.26. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n+1$ olmak üzere,

$$|V(G)| = 2(n^2 + n + 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n+1$ olsun. Sonuç 4.25 den dolayı $n \geq 3$ tür. Teorem 4.35 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ dir. $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ olduğundan

$$|V(G)| = |\mathcal{P} \cup \mathcal{L}| = |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}| = 2(n^2 + n + 1)$$

dir.

Lemma 4.22. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n+1$ olmak üzere,

$$|E(G)| = n^3 + 2(n^2 + n) + 1$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n+1$ olsun. Sonuç 4.25 den dolayı $n \geq 2$ dir. Eşitlik (4.11) den dolayı

$$|E(G)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)$$

dir. Teorem 4.35 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) = n+1$ olduğundan dolayı

$$|E(G)| = n^3 + 2(n^2 + n) + 1$$

dir.

Örnek 4.19. Şekil 4.10 de verilen projektif graf modeli göz önüne alınırsa $n = 2$ için G nin; 3-regüler, $|\mathcal{P}| = 7 = 2^2 + 2 + 1$, $|\mathcal{L}| = 7 = 2^2 + 2 + 1$, $\delta(G) = 3$ ve $E(G) = 21 = 2^3 + 2(2^2 + 2 + 1) + 1$ olduğu açıktır.

Teorem 4.36. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$ için G , $(n+1)$ -regüler $\Leftrightarrow G$ $(n+1)$ -regüler projektif graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$ için G , $(n+1)$ -regüler olsun. Kabul edelim ki birbirinden farklı $K, M \in \mathcal{L}$ için $cn(K, M) = 0$ olsun. Bu durumda her bir $p \in N(K)$ için $p \notin N(M)$ dir. $d(M) = n+1$ olduğundan dolayı $N(M) = \{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}\}$ olacak şekilde $q_1, q_2, \dots, q_{n+1} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LGL den dolayı her bir i , $1 \leq i \leq n+1$ için $CN(p, q_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $1 \leq i \neq j \leq n+1$ için $L_i = L_j$ olması durumunda $\{M, L_i\} \subseteq CN(q_i, q_j)$ dir. $p \notin N(M)$ olduğundan $M \neq L_i$ dir. Bu ise LGL ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. $K = L_i$ olması halinde $q_i \in N(K)$ ve $q_i \in N(M)$ olduğundan dolayı $CN(K, M) = \{q_i\}$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde $K \neq L_i$ dir. Böylece $\{K, L_1, L_2, \dots, L_{n+1}\} \subseteq N(p)$ ve dolayısıyla $d(p) \geq n+2$ dir. Bu ise G nin $(n+1)$ -regüler olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla birbirinden farklı her bir $L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 1$ dir. Hipotezden dolayı $d(L) = n+1$ dir. Bu durumda $N(L) = \{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, \dots, p_{n+1} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Sonuç 4.4 den dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ vardır. LGL den dolayı her bir i , $1 \leq i \leq n+1$ için $CN(p, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $p \notin N(L)$ olduğundan dolayı $L_i \neq L$ dir. $1 \leq i \neq j \leq n+1$ için $L_i = L_j$ ise $\{L, L_i\} \subseteq CN(p_i, p_j)$ dir. Bu ise LGL ile çelişir. O halde $L_i \neq L_j$ dir. G , $(n+1)$ -regüler ve $n \geq 2$ olduğundan dolayı $d(L_i) \geq 3$ tür. Bu durumda $q \in N(L_i)$ vardır ki $q \neq p$ ve $q \neq p_i$ dir. Böylece $CN(p, q) = \{L_i\}$ dir. Ayrıca $q \in N(L)$ ise $\{L, L_i\} \subseteq CN(q, p_i)$ dir. Bu ise LGL ile çelişir. Dolayısıyla $q \notin N(L)$ dir. $i \neq j$ için $q \in N(L_j)$ ise $\{L_i, L_j\} \subseteq CN(p, q)$ dir. Bu ise LGL ile çelişir. Dolayısıyla $i \neq j$ için $q \notin N(L_j)$ dir. $d(L) \geq 3$ olduğundan $p_k \neq p_i$ ve $p_k \neq p_j$ olacak şekilde $p_k \in N(L)$ düğümü vardır ve $CN(p_j, p_k) = \{L\}$ dir. Böylece p, p_k, p_j ve q herhangi üçünün ortak komşuluğunun sayısı sıfır olan dört düğümdür. Bu durumda Teorem 4.34 den dolayı G $(n+1)$ -regüler projektif graftır.

Tersine G $(n+1)$ -regüler bir projektif graf olsun. Projektif graf tanımından G lineer graftır. Dolayısıyla G $(n+1)$ -regüler lineer graftır.

Teorem 4.37. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olmak üzere, G , Euler graftır gerek ve yeter koşul $u \in V(G)$ için $d(u) = 2.k$, $k \in \mathbb{Z}$ olmasıdır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. Kabul edelim ki G Euler graf olsun. Teorem 3.1 den dolayı G nin düğümlerinin derecesi çifttir. Bu durumda $u \in V(G)$ için $d(u) = 2.k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

Tersine, kabul edelim ki bir $u \in V(G)$ için $d(u) = 2.k$ olsun. Bu durumda Teorem 4.35 den dolayı G , $2.k$ -regülerdir. Sonuç 4.25 den dolayı $k \geq 2$ dir. Böylece Teorem 3.1 den dolayı G Euler graftır.

Teorem 4.38. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1 \Leftrightarrow G(n + 1)$ regüler projektif graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ olsun. $\mathcal{L}$ parçası regüler olduğundan Lemma 4.8 den dolayı $\mathcal{P}$ parçasıda regülerdir. Her bir $p \in \mathcal{P}$ için

$$d(p) = \frac{|\mathcal{P}| - 1}{d(L) - 1}$$

dir. Hipotezden dolayı

$$d(p) = \frac{n^2 + n + 1 - 1}{n + 1 - 1} = n + 1$$

dir. O halde G , $(n + 1)$ -regülerdir. Böylece Teorem 4.36 dan dolayı $G(n + 1)$ - projektif graftır.

Tersine, $G(n + 1)$ regüler projektif graf olsun. Projektif graf tanımından G lineer graftır. Sonuç 4.25 den dolayı $n \geq 2$ dir. Teorem 4.35 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ dir.

Teorem 4.39. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1 \Leftrightarrow G(n + 1)$ projektif graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ olsun. Teorem 4.12 den dolayı

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{L}|} (d(L_i) \cdot (d(L_i) - 1))$$

dir. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ olduğundan

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = (n + 1) \cdot n \cdot (n^2 + n + 1)$$

$$|\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) = (n^2 + n) \cdot (n^2 + n + 1)$$

dir. Bu durumda

$$|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$$

dir. Teorem 4.38 den dolayı $G(n + 1)$ -regüler projektif graftır.

Tersine, $G(n + 1)$ regüler projektif graf olsun. Projektif graf tanımından G lineer graftır. Sonuç 4.25 den dolayı $n \geq 2$ dir. Teorem 4.35 den dolayı $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ dir.

Teorem 4.40. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, C_8 içeren bir lineer graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $c(p, L) = d(p)$ ise G bir projektif graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ lineer graf olsun. LG2 den dolayı $i, 1 \leq i \leq d(p)$ ve $d(p) \geq 2$ için $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{d(p)}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Böylece birbirinden farklı $R, S \in \mathcal{L}$ düğümleri için üç farklı durum vardır.

1. durum. $R, S \in N(p)$ ise $CN(R, S) = \{p\}$ dir. Dolayısıyla $cn(R, S) = 1$ dir.

2. durum. $R \notin N(p)$ ve $S \in N(p)$ ise hipotezden dolayı $c(p, R) = d(p)$ dir. Teorem 4.23 den dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(R)| = 0$ dir. Böylece $cn(R, S) = 1$ dir.

3. durum. $R, S \notin N(p)$. LG2 ve Lemma 4.3 den dolayı $q \notin N(S)$ olacak şekilde en az bir $q \in N(R)$ düğümü vardır. Hipotezden dolayı $c(q, S) = d(q)$ dir. Teorem 4.23 $|\mathcal{A}_{N(q)}^0(S)| = 0$ dir. Dolayısıyla $cn(R, S) = 1$ dir. Böylece PG1 sağlanır. Hipotezden dolayı G , C_8 içerdiğinden PG2 sağlanır. Böylece G projektif graftır.

Teorem 4.41. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - N(L)$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \{L\}$ ve $E' = \{xy : x \in \mathcal{P}' \text{ ve } y \in \mathcal{L}'\} \cap E$ olmak üzere $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ bir afin graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - N(L)$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \{L\}$ ve $E' = \{xy : x \in \mathcal{P}' \text{ ve } y \in \mathcal{L}'\} \cap E$ olmak üzere $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ olsun. G iki kümeli graf olduğundan alt grafi olan G' de iki kümelidir. $x, y \in \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ ise $x, y \notin N(L)$ dir. G lineer graf olduğundan $cn(x, y) = 1$ dir. Dolayısıyla $CN(x, y) = \{K\}$ ve $K \neq L$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $K \in \mathcal{L}'$ dir. x, y seçimi keyfi olduğundan LG1 sağlanır. L düğümü komşuları ile birlikte atıldığından G' grafının $\mathcal{P}'$ parçasındaki düğümlerinin derecesi değişmez. $L' \in \mathcal{L}'$ olsun. G de PG1 den dolayı $cn(L, L') = 1$ dir. Dolayısıyla $d_{G'}(L') = d_G(L') - 1$ dir. G projektif graf olduğundan Sonuç 4.25 den dolayı $\delta(G) \geq 3$ dir. Bu durumda her bir $L' \in \mathcal{L}'$ için $d(L') \geq 2$ dir. Dolayısıyla $\delta(G) \geq 2$ dir. O halde LG2 sağlanır. Böylece G' , lineer graftır.

Sonuç 4.4 den dolayı $p' \notin N(L')$ olacak şekilde $p' \in \mathcal{P}'$ ve $L' \in \mathcal{L}'$ düğümleri vardır. G projektif graf olduğundan G de $CN(L', L) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ vardır. Ayrıca LG1 den dolayı $CN(p', q) = \{S\}$ olacak şekilde $S \in \mathcal{L}$ vardır. $p' \in \mathcal{P}'$ olduğundan $p' \notin N(L)$ dir. $p' \in N(S)$ olduğundan dolayı $S \neq L$ ve $p' \notin N(L')$ olduğundan dolayı $S \neq L'$ dir. G' grafında $S \in \mathcal{L}'$ ve $p' \notin N(L')$ dir. G grafında $CN(S, L') \in N(L)$ olduğundan dolayı G' grafında $CN(S, L') = \emptyset$ dir. O halde $cn(S, L') = 0$ dir.

$R \neq L'$ olmak üzere kabul edelim ki $R \in N(p')$ için $cn(R, L') = 0$ olacak şekilde $R \neq S$ düğümü olsun. $p' \notin N(L)$ olduğundan $R \neq L$ dir. $CN(R, L') \notin N(L)$ olması durumunda $cn(R, L') = 1$ olur ki bu durum kabulümüzle çelişir. O halde $CN(R, L') \in N(L)$ dir. G projektif graf olduğundan G de $CN(R, L') = \{t\}$ olacak şekilde $t \in N(L) \subset \mathcal{P}$ vardır. Eğer $t \neq q$ ise $t \in N(L)$ ve $t \in N(L')$ olduğundan dolayı $CN(L', L) = \{q, t\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. Dolayısıyla $t = q$ dir. Bu durumda $R \in N(q)$ ve $R \in N(p')$ olduğundan dolayı $CN(p', q) = \{R, S\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $p' \notin N(L')$ için $cn(L', S) = 0$ olacak şekilde bir tek $S \in N(L')$ düğümü vardır. Böylece G' afin graftır.

Lemma 4.23. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $(n+1)$ -regüler projektif graf, $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}$, $|X| = s$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - X$, $E' = \{xy : xy \in E(G) \text{ ve } x, y \notin X\}$ ve $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}, E')$ olmak üzere $L \in \mathcal{L}$ için $d_{G'}(L) = n+1 - d_L$ olsun. Bu durumda

$$i. \sum_{L \in \mathcal{L}} d_L = s.(n+1)$$

$$ii. \sum_{L \in \mathcal{L}} d_L^2 = s.(n+s)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $(n+1)$ -regüler projektif graf, $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}$, $|X| = s$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - X$, $E' = \{xy : xy \in E(G) \text{ ve } x, y \notin X\}$ ve $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}, E')$ olmak üzere $L \in \mathcal{L}$ için $d_{G'}(L) = n+1 - d_L$ olsun.

i. Lemma 4.9 den dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) = \sum_{p \in \mathcal{P}'} d(p)$$

$d_{G'}(L) = n+1 - d_L$ ve her bir $p \in \mathcal{P}'$ için $d(p) = n+1$ olduğundan dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} (n+1 - d_L) = \sum_{p \in \mathcal{P}'} (n+1)$$

dir. $|\mathcal{P}'| = n^2 + n + 1 - s$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d_L = (n+1).(n^2 + n + 1) - (n+1).(n^2 + n + 1 - s)$$

elde edilir. Eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d_L = s.(n+1)$$

dir.

ii. Teorem 4.12 den dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d(L)(d(L) - 1) = |\mathcal{P}'| (|\mathcal{P}'| - 1)$$

dir. $|\mathcal{P}'| = n^2 + n + 1 - s$ yerine yazılarak eşitlik yeniden düzenlenirse,

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d^2(L) - \sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) = (n^2 + n + 1 - s).(n^2 + n - s) \quad (4.44)$$

elde edilir. Her bir $p \in \mathcal{P}'$ için $d(p) = n + 1$ ve $|\mathcal{P}'| = n^2 + n + 1 - s$ olduğundan dolayı $\sum_{p \in \mathcal{P}'} d(p) = (n + 1).(n^2 + n + 1 - s)$ dir. Lemma 4.9 den dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) = \sum_{p \in \mathcal{P}'} d(p)$$

olduğundan

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d(L) = (n + 1).(n^2 + n + 1 - s) \quad (4.45)$$

dir. (4.45) ifade (4.44) daki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d^2(L) = (n^2 + n + 1 - s).(n^2 + n - s) + (n + 1).(n^2 + n + 1 - s) \quad (4.46)$$

elde edilir. $d_{G'}(L) = n + 1 - d_L$ olduğundan dolayı

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} (n + 1 - d_L)^2 = \sum_{L \in \mathcal{L}} (n + 1)^2 - 2(n + 1) \sum_{L \in \mathcal{L}} d_L + \sum_{L \in \mathcal{L}} d_L^2 \quad (4.47)$$

dir. (i) den dolayı $\sum_{L \in \mathcal{L}} d_L = s.(n + 1)$ eşitliği ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ olduğu göz önüne alınarak (4.47) yeniden düzenlenirse

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d_L^2 = (n^2 + n + 1 - s).(n^2 + n - s) + (n + 1).(n^2 + n + 1 - s) - (n + 1)^2.(n^2 + n + 1) + 2.(n + 1)^2.s$$

dir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} d_L^2 = s.(n + s)$$

dir.

Tanım 4.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$\textbf{DP1. } |\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$$

$$\textbf{DP2. } \exists v \in V(G) \text{ için } d(v) = \frac{|V(G)|}{2} - 1 = |\mathcal{P}| - 1$$

şartlarını sağlıyorsa G ye dejenere projektif graf denir.

Örnek 4.20. Şekil 4.6 de verilen graf modeli bir dejenere projitif graftır.

Teorem 4.42. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ dejenere projektiv graf olmak üzere, $K \neq L$ olacak şekilde her bir $K, L \in \mathcal{L}$ için $cn(K, L) = 1$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ dejenere projektiv graf olsun. DP1 den dolayı $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ dir. Teorem 4.16 den dolayı $\forall K, L \in \mathcal{L}$ ve $K \neq L$ için $cn(K, L) = 1$ dir.

Lemma 4.24. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektiv graf olmak üzere, $\mathcal{P}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{L}| - 1, 2, \dots, 2)$ ve $\mathcal{L}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{P}| - 1, 2, \dots, 2)$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektiv graf ve $n \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = n$ olsun. Bu durumda $d(p) = n - 1$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Her bir $i, 1 \leq i \leq n - 1$ için $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. LG2 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n - 1$ için $\exists p_i \in N(L_i)$ vardır ki $p_i \neq p$ dir. Eğer p den farklı $p_i, p_j \in \mathcal{P}$ için $p_i = p_j$ ise $CN(L_i, L_j) = \{p, p_i\}$ olur. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $p_i \neq p_j$ dir.

Kabul edelim ki $\exists L_i \in N(p)$ için $d(L_i) \geq 3$ olsun. $\exists q \in N(L_i)$ vardır ki $q \neq p$ ve $q \neq p_i$ dir. Herhangi bir $j, 1 \leq j \neq i \leq n - 1$ için $q = p_j$ ise $CN(L_i, L_j) = \{p, q\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $q \neq p_j$ dir. Böylece $\{p, q, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\} \subseteq \mathcal{P}$ olur. Bu durumda $n + 1 \leq |\mathcal{P}|$ dir. Bu ise $|\mathcal{P}| = n$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. $\forall L_i \in N(p)$ için $d(L_i) = 2$ dir.

Ayrıca $|\mathcal{L}| = n$ olduğundan dolayı $\mathcal{L} = N(p) \cup \{L\}$ olacak şekilde bir tek L düğümü vardır. $\forall L_i \in N(p)$ için $d(L_i) = 2$ ve LG1 den dolayı $CN(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = \{L\}$ dir. Kabul edelim ki $\exists p_i \in N(L_i)$ için $d(p_i) \geq 3$ olsun. Bu durumda $\exists K \in \mathcal{L}$ vardır ki $K \neq L$ ve $K \neq L_i$ dir. Herhangi bir $j, 1 \leq j \neq i \leq n - 1$ için $K = L_j$ olması durumunda $CN(p, p_i) = \{L_i, K\}$ olur. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $K \neq L_j$ dir. Fakat bu durumda $\{L, K, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\} \subseteq \mathcal{L}$ ve dolayısıyla $n + 1 \leq |\mathcal{L}|$ olur ki bu ise $|\mathcal{L}| = n$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır ve $\forall p_i \in N(L)$ için $d(p_i) = 2$ dir. $CN(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = \{L\}$ olduğundan dolayı $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\} \subseteq N(L)$ olup $n - 1 \leq d(L)$ dir. Kabul edelim ki $n \leq d(L)$ olsun. Bu durumda $\exists q \in N(L)$ vardır ki her bir $i, 1 \leq i \leq n - 1$ için $q \neq p_i$ dir. Eğer $q = p$ ise $L \in N(p)$ olur ki bu durum $d(p) = n - 1$ olmasıyla çelişir. O halde $q \neq p$ dir. Fakat bu durumda $\{p, q, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\} \subseteq \mathcal{P}$ olacağından $n + 1 \leq |\mathcal{P}|$ olur ki bu durum $|\mathcal{P}| = n$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $d(L) = n - 1$ dir.

Teorem 4.43. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer olmak üzere, $\mathcal{P}$ parçasına ($\mathcal{L}$ parçasına) ait derece dizisi $(|\mathcal{L}| - 1, 2, \dots, 2)$ olması için gerek ve yeter koşul G nin dejenere projektiv graf olmasıdır.

İspat. G nin dejenere projektif graf olsun. Tanımdan dolayı G lineer graftır. Bu durumda Lemma 4.24 den dolayı $\mathcal{P}$ parçasına ($\mathcal{L}$ parçasına) ait derece dizisi $(|\mathcal{L}| - 1, 2, \dots, 2)$ $((|\mathcal{P}| - 1, 2, \dots, 2))$ dir.

Tersine, kabul edelim ki G , $\mathcal{P}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{L}| - 1, 2, \dots, 2)$ olan lineer graf olsun. O halde en az bir $p \in \mathcal{P}$ ve her bir $i, 1 \leq i \leq |\mathcal{L}| - 1$ için $N(p) = \{L_1, L_2, \dots, L_{|\mathcal{L}|-1}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. LG2 den dolayı herhangi bir i için $p_i \in N(L_i)$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ ve $p_i \neq p$ düğümü vardır. $j, 1 \leq i \neq j \leq |\mathcal{L}| - 1$ için $p_i = p_j$ ise $CN(L_i, L_j) = \{p, p_i\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $p_i \neq p_j$ dir. LG2 den dolayı en az bir $L \in \mathcal{L}$ vardır ki $L \in N(p_i)$ ve $L \neq L_i$ dir. Eğer $L = L_j$ ise $CN(p_i, p_j) = \{L_i, L\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. O halde $L \neq L_j$ dir. LG1 gözönüne alınırsa $CN(p_1, p_2, \dots, p_{|\mathcal{L}|-1}) = \{L\}$ dir. Böylece $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$ dir. O halde G dejenere projektif graftır.

Sonuç 4.27. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf ve $n \geq 4$ için $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = n$ olmak üzere, $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ parçaların her birinde derecesi $n - 1$ olan bir tek düğüm vardır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf ve $n \geq 4$ için $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = n$ olsun. Kabul edelim ki $d(p) = d(q) = n - 1$ olacak şekilde $p, q \in \mathcal{P}$ düğümleri için $p \neq q$ olsun. $N(p) \cup N(q) \subseteq \mathcal{L}$ olduğundan $|N(p) \cup N(q)| \leq |\mathcal{L}|$ dir. $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ olduğundan,

$$|N(p) \cup N(q)| \leq |\mathcal{P}|$$

elde edilir. Ayrıca, LG1 den dolayı,

$$cn(p, q) = |N(p) \cap N(q)| = 1$$

olduğundan,

$$|\mathcal{P}| \geq |N(p)| + |N(q)| - 1$$

dir. $|\mathcal{P}| = n$ ve $d(p) = d(q) = n - 1$ olduğundan,

$$n \leq 3$$

elde edilir. Bu durum $n \geq 4$ olmasıyla çelişir. Böylece, $p = q$.

Teorem 4.44. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olmak üzere G nin içerdiği tüm çevrelerin uzunluğu 6 dır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olsun. $n \geq 4$ olmak üzere G en az bir $C_{2n} \in G$ çevresi içersin. Bu durumda $C_{2n} : p_1 - L_1 - p_2 - L_2 - p_3 - L_3 - \dots - p_n - L_n - p_1$ olacak şekilde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ ve $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı $CN(p_1, p_3) = \{L\}$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Eğer herhangi bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $L \neq L_i$ ise $\{L_1, L_n, L\} \subseteq N(p_1)$ ve $\{L_2, L_3, L\} \subseteq N(p_3)$ olur ki bu

durumda $d(p_1) \geq 3$ ve $d(p_3) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. $L = L_1$ ya da $L = L_2$ olması durumunda sırasıyla $L_1 - p_2 - L_2 - p_3 - L_1$ ve $p_1 - L_1 - p_2 - L_2 - p_1$ olur ki bu durum Teorem 4.1 ile çelişir. $k, 4 \leq k \leq n-1$ için $L = L_k$ olması durumunda $d(p_1) \geq 3$ ve $d(p_3) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. Bu durumda $L = L_3$ ya da $L = L_n$ olmalıdır.

1. durum. $L = L_3$ olsun. LGI den dolayı $CN(p_2, p_4) = \{K\}$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Eğer herhangi bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $K \neq L_i$ ise $\{L_1, L_2, K\} \subseteq N(p_2)$ ve $\{L_3, L_4, K\} \subseteq N(p_4)$ olup $d(p_2) \geq 3$ ve $d(p_4) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. Benzer şekilde herhangi bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $K = L_i$ olması durumunda, $d(p_1) \geq 3$ olduğundan $d(p_2) \geq 3$ veya $d(p_4) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. Böylece, $L \neq L_3$ tür.

2. durum. $L = L_n$ olsun. LGI den dolayı $CN(p_2, p_4) = \{K\}$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Eğer herhangi bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $K \neq L_i$ ise $\{L_1, L_2, K\} \subseteq N(p_2)$ ve $\{L_3, L_4, K\} \subseteq N(p_4)$ olup $d(p_2) \geq 3$ ve $d(p_4) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. Benzer şekilde herhangi bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $K = L_i$ olması durumunda, $d(p_3) \geq 3$ olduğundan $d(p_2) \geq 3$ veya $d(p_4) \geq 3$ olacağından Sonuç 4.27 ile çelişir. Böylece, $L \neq L_n$ dir.

O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $n \leq 3$ ve Teorem 4.6 den dolayı $girt(G) = 6$ olduğundan $n = 3$ tür.

Sonuç 4.28. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olmak üzere $n \neq 3$ için G, C_n içermez.

Sonuç 4.29. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olmak üzere $n \neq 3$ için G, C_n içermezler.

Teorem 4.45. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olmak üzere, G , Euler graftır gerek ve yeter koşul $|\mathcal{P}| = 2k + 1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ olmasıdır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejere projektif graf olsun. Kabul edelim ki G Euler graf olsun. O halde Teorem 3.1 den dolayı G nin düğümlerinin derecesi çifttir. Lemma 4.24 den dolayı $\mathcal{L}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{P}| - 1, 2, \dots, 2)$ dir. Böylece $|\mathcal{P}| = 2k + 1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

Tersine, kabul edelim ki $|\mathcal{P}| = 2k + 1$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda Lemma 4.24 den dolayı $\mathcal{P}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{L}| - 1, 2, \dots, 2)$ ve $\mathcal{L}$ parçasına ait derece dizisi $(|\mathcal{P}| - 1, 2, \dots, 2)$ dir. DPI den dolayı $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = 2k + 1$ dir. Böylece G nin tüm düğümlerinin derecesi çifttir. O halde, Teorem 3.1 den dolayı G , Euler graftır.

4.3 $\{0, 1\}$ –Semi Graflar

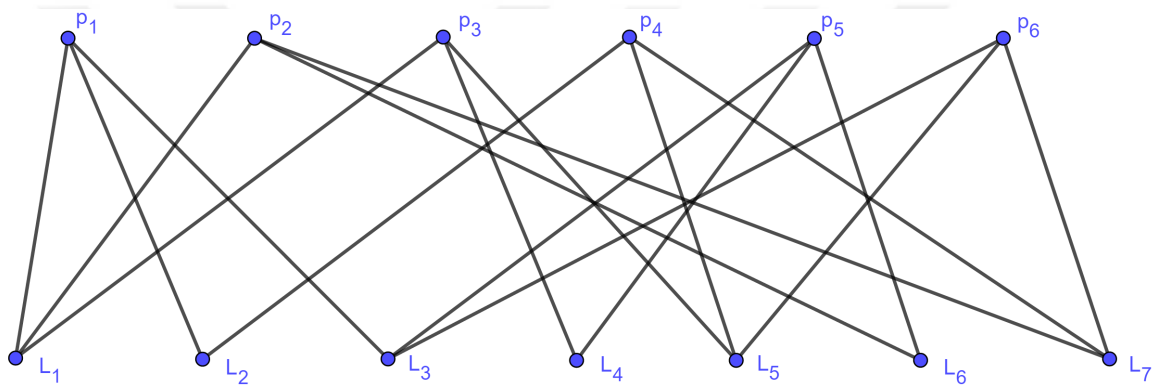
Bu kısımda $\{0, 1\}$ –semi graflarların temel özellikleri incelenmiş ve karakterizasyonları yapılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.6. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $p \notin N(L)$ olacak şekilde her bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{A}_{N(p)}^0(L) = \{K : cn(K, L) = 0 \text{ ve } K \in N(p)\}$ olmak üzere

$$|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| \in \{0, 1\}$$

ise G grafına $\{0, 1\}$ –semi graf denir.

Örnek 4.21. Şekil 4.11 de bir $\{0, 1\}$ –semi graf modeli verilmiştir.



Şekil 4.11 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$: bir $\{0, 1\}$ –semi graf modeli

Lemma 4.25. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ –semi graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(p) \in \{d(L), d(L) + 1\}$ dir.

İspat. G , $\{0, 1\}$ –semigraf olsun. Sonuç 4.6 dan dolayı $p \notin N(L)$ olacak şekilde $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. G , $\{0, 1\}$ –semi graf olduğundan dolayı $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| \in \{0, 1\}$ dir. O halde iki durum vardır.

1. durum. $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 0$ ise her bir $M \in N(p)$ için $CN(L, M) = \{q\}$ olacak şekilde $q \in N(L)$ düğümü vardır. Bu durumda $|N(p)| \leq |N(L)|$ dir. Teorem 4.9 göz önüne alınırsa

$$d(p) = d(L)$$

dir.

2. durum. $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ ise $K \in N(p)$ ve $cn(L, K) = 0$ olacak şekilde bir tek $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Bu durumda her bir $M \in N(p) - \{K\}$ için $CN(L, M) = \{r\}$ olacak şekilde

$r \in N(L)$ düğümü vardır. O halde $|N(p) - \{K\}| \leq |N(L)|$ dir. Teorem 4.9 göz önüne alınırsa $d(L) \leq d(p) \leq d(L) + 1$ dir. Böylece

$$d(p) \in \{d(L), d(L) + 1\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.30. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ -semi graf olsun. $p \notin N(L)$ olacak şekildeki $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{d(p) - 1, d(p)\}$ dir.

İspat. Lemma 4.25 den dolayı ispat açıktır.

Teorem 4.46. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ -semi graf olmak üzere $L, L' \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{P} = N(L) \cup N(L')$ ise G aşağıdakilerden biridir.

i. G , $(3, 2)$ -biregüler afin graftır.

ii. G dejenere projektif graftır.

iii. Şekil 4.12 da verilen graf modeline izomorftur.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ -semi graf ve $L, L' \in \mathcal{L}$ olsun. Lemma 4.3 den dolayı $cn(L, L') = \{0, 1\}$ dir.

1. durum. $cn(L, L') = 0$ olsun. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ dir. Bu durumda L ve L' düğümlerinin her birinin komşuluğunda en az iki düğüm vardır.

Kabul edelim ki $m \geq 3$ ve $n \geq 3$ için $d(L) = m$ ve $d(L') = n$ olsun. Bu durumda $\{p_1, p_2\} \subseteq N(L)$ ve $N(L') = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\}$ olacak şekilde $p_1, p_2, p'_1, p'_2, \dots, p'_n \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir $i, j, 1 \leq i, j \leq n$ için $CN(p_1, p'_i) = \{L_{1i}\}$ ve $CN(p_2, p'_j) = \{L_{2j}\}$ olacak şekilde $L_{1i}, L_{2j} \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $cn(L, L') = 0$ olduğundan herhangi bir i ve j için L_{1i}, L_{2j} düğümleri L, L' düğümlerinden farklıdır. Ayrıca $i \neq j$ için $L_{1i} = L_{1j}$ olması durumunda $CN(p'_i, p'_j) = \{L', L_{1i}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $L_{1i} \neq L_{1j}$ dir. Benzer şekilde $L_{2i} \neq L_{2j}$ dir. $L_{1i} = L_{2j}$ olması durumunda ise $CN(p_1, p_2) = \{L, L_{1i}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_{1i} \neq L_{2j}$ dir.

Ayrıca herhangi bir i için $d(L_{1i}) \geq 3$ ise $s \neq p_1$ ve $s \neq p'_i$ olacak şekilde en az bir $s \in N(L_{1i})$ düğümü vardır. Hipotezden dolayı $s \in N(L) \cup N(L')$ dir. $cn(L, L') = 0$ olduğundan $s \in N(L)$ ya da $s \in N(L')$ dir. $s \in N(L)$ ise $CN(p_1, s) = \{L, L_{1i}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $s \in N(L')$ dir. Bu durumda $CN(p'_1, s) = \{L', L_{1i}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla herhangi bir i için $d(L_{1i}) = 2$ dir. Benzer şekilde herhangi bir j için $d(L_{2j}) = 2$ dir. Bu durumda $N(L_{12}) = \{p_1, p'_2\}$, $N(L_{21}) = \{p_2, p'_1\}$ ve $N(L_{1n}) = \{p_1, p'_n\}$ ve $L_{12}, L_{1n} \in N(p_1)$ ve $cn(L_{12}, L_{21}) = 0$, $cn(L_{1n}, L_{21}) = 0$ dir. $n \geq 3$ olduğundan dolayı $L_{12} \neq L_{1n}$ dir. Bu durumda $|\mathcal{N}_{N(p_1)}^0(L_{21})| \geq 2$ dir. Bu ise G nin

$\{0, 1\}$ -semi graf olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla, $d(L') = 2$ dir. Benzer şekilde $d(L) = 2$ olduğuda gösterilebilir. Bu durumda $\mathcal{P} = N(L) \cup N(L')$ olduğundan $|\mathcal{P}| = 4$ tür. Ayrıca her bir $R \in \mathcal{L}$ için $d(R) = 2$ olduğundan Teorem 4.30 den dolayı $G(3, 2)$ -biregüler afın graftır.

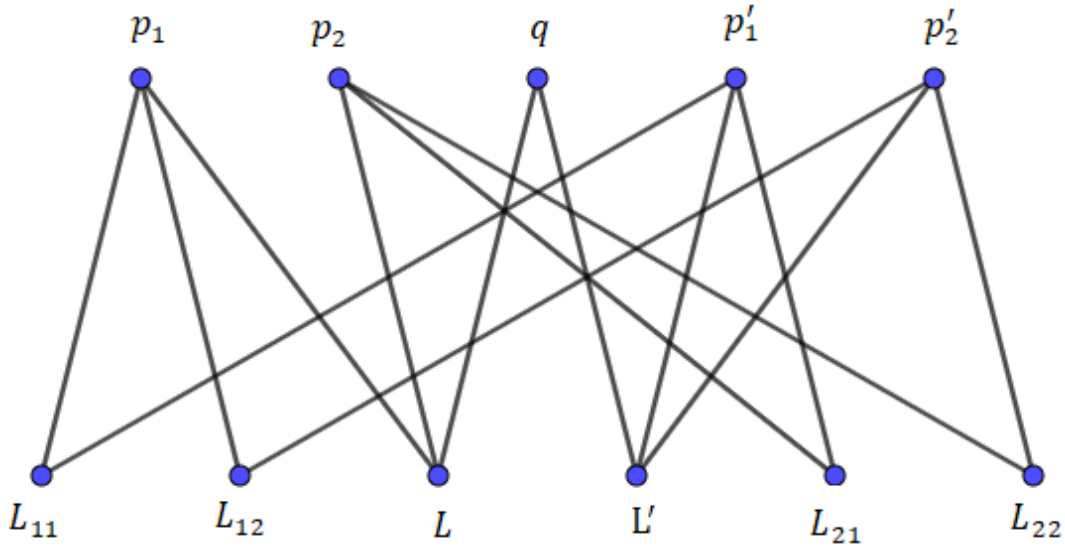
2. durum. $cn(L, L') = 1$ olsun. Bu durumda $CN(L, L') = \{q\}$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ dir.

(a) Kabul edelim ki L ve L' düğümleri için $d(L) = 2$ ve $d(L') = 2$ olsun. Bu durumda $N(L) = \{p, q\}$ ve $N(L') = \{q, p'\}$ olacak şekilde $p, p' \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı $CN(p, p') = \{K\}$ olacak şekilde $K \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $K = L$ olması durumunda $CN(p', q) = \{L, L'\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $K \neq L$ dir. Benzer şekilde $K \neq L'$ dir. $d(K) \geq 3$ ise en az bir $r \in N(K)$ vardır ki $r \neq p$ ve $r \neq p'$ dir. Hipotezden dolayı $\mathcal{P} = N(L) \cup N(L')$ ve $d(L) = d(L') = 2$ olduğundan $r = q$ dir. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişir. O halde $d(K) = 2$ dir. Böylece $G = C_6$ dir. Bu durumda G dejenere projektif graftır.

(b) Kabul edelim ki $d(L) = 2$ ve $n \geq 3$ olmak üzere $d(L') = n$ olsun. Bu durumda $N(L) = \{p, q\}$ ve her bir $i, 1 \leq i \leq n-1$ için $N(L') = \{q, p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}\}$ olacak şekilde $p, p'_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir i için $CN(p, p'_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $L_i = L$ olması durumunda $\{p, q, p'_i\} \subseteq N(L)$ dir. Bu ise $d(L) = 2$ olması ile çelişir. Böylece $L_i \neq L$ dir. $L_i = L'$ olması halinde $CN(p, q) = \{L, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_i \neq L'$ dir. Her bir $i, j, 1 \leq i, j \leq n-1$ ve $i \neq j$ için $L_i = L_j$ ise $CN(p'_i, p'_j) = \{L', L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_i \neq L_j$ dir. Kabulümüzden dolayı $\mathcal{P} = \{p, q, p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}\}$ olduğundan dolayı $|\mathcal{P}| = n+1$ dir. Ayrıca $\{L, L', L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\} \subseteq \mathcal{L}$ dir. Bu durumda $|\mathcal{L}| \geq n+1$ dir. Eğer $|\mathcal{L}| \geq n+2$ olması durumunda $S \notin \{L, L', L_1, L_2, \dots, L_{n-1}\}$ olacak şekilde en az bir ve $S \in \mathcal{L}$ vardır. Ayrıca LG2 den dolayı $\{x, y\} \subseteq N(S)$ olacak şekilde $x, y \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $\{x, y\} \in \{p, q, p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}\}$ dir. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişir. Böylece $|\mathcal{L}| = n+1$ dir. $d(L') = n$ olduğundan G dejenere projektif graftır.

(c) $d(L) = 3$ olsun. Kabul edelim ki $n \geq 4$ için $d(L') = n$ olsun. Bu durumda $N(L) = \{q, p_1, p_2\}$ ve $N(L') = \{q, p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_{n-1}\}$ olacak şekilde $q, p_1, p_2, p'_1, p'_2, p'_3, \dots, p'_{n-1} \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq 2$ ve her bir $j, 1 \leq j \leq n-1$ için $CN(p_i, p'_j) = \{L_{ij}\}$ olacak şekilde $L_{ij} \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $L_{ij} = L$ ise $CN(L, L') = \{q, p_i\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. Dolayısıyla $L_{ij} \neq L$ dir. Benzer şekilde $L_{ij} \neq L'$ dir. $s, 1 \leq s \leq 2$ ve $s \neq j$ için $L_{ij} = L_{is}$ ise $CN(p'_j, p'_s) = \{L', L_{ij}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $L_{ij} \neq L_{is}$ dir. Benzer şekilde, $r, 1 \leq r \leq 2$ ve $r \neq i$ için $L_{ij} \neq L_{rj}$ ve $L_{ij} \neq L_{rs}$ dir.

Bu durumda $p_1 \notin N(L_{23})$ için $cn(L_{23}, L_{11}) = 0$, $cn(L_{23}, L_{12}) = 0$ ve $L_{11}, L_{12} \in N(p_1)$ dir. $L_{11} \neq L_{12}$ olduğundan $| \mathcal{N}_{N(p_1)}^0(L_{23}) | \geq 2$ dir. Bu ise G nin $\{0, 1\}$ -semi graf olmasıyla çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır. Dolayısıyla, $d(L') = 3$ dür. Böylece, $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, q, p'_1, p'_2\}$, $N(L) = \{q, p_1, p_2\}$, $N(L') = \{q, p'_1, p'_2\}$ ve $\{L, L', L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\} \subseteq \mathcal{L}$ dir. Kabul edelim ki $K \notin \{L, L', L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ olacak şekilde en az bir $K \in \mathcal{L}$ olsun. LG2 den dolayı $\{a, b\} \subseteq N(K)$ olacak şekilde $a, b \in \{p_1, p_2, q, p'_1, p'_2\}$ dir. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişir. Dolayısıyla $\{L, L', L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\} = \mathcal{L}$ dir. Graf modeli Şekil 4.12 verilmiştir.



Şekil 4.12 $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$

Teorem 4.47. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ -semi graf olmak üzere $p \neq p'$ ve $p, p' \in \mathcal{P}$ için $\mathcal{L} = N(p) \cup N(p')$ ise G dejenere projektif graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $\{0, 1\}$ -semi graf ve $p, p' \in \mathcal{P}$ için $\mathcal{L} = N(p) \cup N(p')$ olsun. LG1 den dolayı $cn(p, p') = 1$ olduğundan $CN(p, p') = \{L_{pp'}\}$ olacak şekilde $L_{pp'} \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Sonuç 4.4 den dolayı $q \notin N(L_{pp'})$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{L_{pq}\}$ ve $CN(p', q) = \{L_{p'q}\}$ olacak şekilde $L_{pq}, L_{p'q} \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $q \notin N(L_{pp'})$ olduğundan $L_{pq} \neq L_{pp'}$ ve $L_{p'q} \neq L_{pp'}$ dir. $L_{pq} = L_{p'q}$ ise $CN(p, p') = \{L_{pp'}, L_{pq}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_{pq} \neq L_{p'q}$ dir. Eğer $d(q) \geq 3$ ise $K \neq L_{pq}$ ve $K \neq L_{p'q}$ olacak şekilde en az bir $K \in N(q)$ düğümü vardır.

$K \in N(p)$ olması durumunda $CN(p, q) = \{L_{pq}, K\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $K \notin N(p)$ dir. Hipotezden dolayı $K \in N(p')$ dir. Bu durumda $CN(p', q) = \{L_{p'q}, K\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde kabülümüz yanlıştır. Böylece $d(q) = 2$ dir. Benzer şekilde $d(L_{pp'}) = 2$ olduğuda gösterilebilir.

$y \in \mathcal{P} - \{p, p', q\}$ düğümü olsun. LG1 dolayı $cn(q, y) = 1$ dir. Bu durumda $N(q) = \{L_{pq}, L_{p'q}\}$ olduğundan dolayı $y \in N(L_{pq}) \cup N(L_{p'q})$ dir. $CN(L_{pq}, L_{p'q}) = \{q\}$ olduğundan dolayı $y \notin N(L_{pq}) \cap N(L_{p'q})$ dir. Böylece her bir $y \in \mathcal{P} - \{p, p', q\}$ için $y \in N(L_{pq})$ ya da $y \in N(L_{p'q})$ dir. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ olduğundan L_{pq} ve $L_{p'q}$ düğümlerin derecelerini üç farklı durumda inceleyelim.

1. durum. $d(L_{pq}) = d(L_{p'q}) = 2$ olsun. Bu durumda $G = C_6$ dir. Böylece G dejenere projektif graftır.

2. durum. L_{pq} ve $L_{p'q}$ düğümlerinden en az birinin derecesi 2 dir. (Burada L_{pq} ve $L_{p'q}$ düğümlerinden herhangi birini seçmek genelliği bozmaz.)

$d(L_{p'q}) = 2$ ve $n \geq 3$ için $d(L_{pq}) = n$ olsun. $N(L_{pq}) = \{p, q, p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_{n-2}\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n-2$ olmak üzere $CN(p', p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $d(L_{pp'}) = d(L_{p'q}) = 2$ olduğundan dolayı $L_i \neq L_{p'q}$ ve $L_i \neq L_{pp'}$ dir. $1 \leq i, j \leq n-2$ ve $i \neq j$ için $L_i = L_j$ ise $CN(p_i, p_j) = \{L_{pq}, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_i \neq L_j$ dir. Herhangi bir i için $d(L_i) \geq 3$ ise p_i ve p' den farklı en az bir $r \in N(L_i)$ düğümü vardır. $d(q) = 2$ olduğundan $r \neq q$ dir. $r = p$ ise $CN(p, p') = \{L_{pp'}, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde $r \neq p$ dir. $r \in L_{pq}$ ve $d(L_{pq}) = n$ olduğundan $j \neq i$ için $r = p_j$ dir. Bu durumda $CN(p_i, p_j) = \{L_{pq}, L_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. O halde herhangi bir i için $d(L_i) = 2$ dir. Böylece $\mathcal{P} = \{p, p', q, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$ ve $\{L_{pp'}, L_{pq}, L_{p'q}, L_1, \dots, L_{n-2}\} \subseteq \mathcal{L}$ dir. Eğer $|\mathcal{L}| \geq n+1$ ise $T \notin \{L_{pp'}, L_{pq}, L_{p'q}, L_1, \dots, L_{n-2}\}$ olacak şekilde en bir $T \in \mathcal{L}$ vardır. LG2 den dolayı $\{a, b\} \subseteq T$ olacak şekilde $a, b \in \mathcal{P} = \{p, p', q, p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$ vardır. Bu ise Teorem 4.1 ile çelişir. Böylece $|\mathcal{L}| = n$ dir. Bu durumda $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = n$ ve $d(L_{pq}) = n-1$ olduğundan dolayı G dejenere projektif graftır.

3. durum. $d(L_{pq}) \geq 3$ ve $d(L_{p'q}) \geq 3$ olsun. Bu durumda p ve q düğümünden farklı en az bir $y \in N(L_{pq})$ düğümü ve p' ve q düğümünden farklı en az bir $x \in N(L_{p'q})$ düğümü vardır. $x = y$ ise $CN(L_{pq}, L_{p'q}) = \{q, x\}$ dir. Bu ise Lemma 4.3 ile çelişir. Böylece $x \neq y$ dir. Ayrıca LG1 den dolayı $CN(y, x) = \{L_{xy}\}$ olacak şekilde $L_{xy} \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. $L_{xy} = L_{pq}$ ise $CN(q, x) = \{L_{pq}, L_{p'q}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $L_{xy} \neq L_{pq}$ dir. Benzer şekilde $L_{xy} \neq L_{p'q}$ dir. $d(L_{pp'}) = 2$ olduğundan $L_{xy} \neq L_{pp'}$ dir. Hipotezden dolayı $L_{xy} \in N(p) \cup N(p')$ dir. Eğer $L_{xy} \in N(p)$ ise $CN(p, y) = \{L_{pq}, L_{xy}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Böylece $L_{xy} \notin N(p)$ dir. O halde $L_{xy} \in N(p')$ dir. Bu durumda $CN(p', x) = \{L_{p'q}, L_{xy}\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O halde L_{pq} ve $L_{p'q}$ düğümlerinin en az birinin derecesi 2 dir. O halde G dejenere projektif graftır.

Şekil 4.11 de verilen $\{0, 1\}$ -semi graf modeli göz önüne alınırsa $\mathcal{P}$ parçasına ait herhangi iki düğümün komşuluğu dışında $\mathcal{L}$ parçasına ait bir düğüm ve $\mathcal{L}$ parçasına ait herhangi iki düğümün komşuluğu dışında $\mathcal{P}$ parçasına ait bir düğüm olduğu açıktır. Bu sebepten aşağıda art arda verilen Lemma 4.26, Lemma 4.27, Teorem 4.48 ve Teorem 4.49, G grafında $\mathcal{P}$ parçasına ait herhangi iki düğümün komşuluğu dışında $\mathcal{L}$ parçasına ait bir düğüm ve $\mathcal{L}$ parçalanmasına ait herhangi iki düğümün dışında $\mathcal{P}$ parçasına ait bir düğüm bulunan graflar ile ilgili sonuçlar elde edilmiş ve bu özelliğe sahip $\{0, 1\}$ - semi graflar kısaca $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ ile gösterilmiştir.

Lemma 4.26. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf olmak üzere herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ için $d(p) \in \{n, n + 1\}$ dir.

İspat. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ - semi graf olsun. Sonuç 4.7 den dolayı $d(p_0) = n + 1$ olacak şekilde en az bir $p_0 \in \mathcal{P}$ vardır. G^* in özelliğinden dolayı $p \neq p_0$ ve $p \in \mathcal{P}$ için $L \notin N(p) \cup N(p_0)$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Teorem 4.9 den dolayı $d(p_0) \geq d(L)$ dir. Bu durumda $d(L) \leq n + 1$ dir. Ayrıca $d(p_0) = n + 1$ olduğu göz önüne alınırsa Sonuç 4.30 den dolayı $d(L) \geq n$ dir. Bu durumda $d(L) \in \{n, n + 1\}$ elde edilir. G^* nin maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olduğu göz önüne alınırsa Lemma 4.25 den dolayı $d(p) \in \{n, n + 1\}$ dir.

Lemma 4.27. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf olmak üzere herhangi bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n, n + 1\}$ dir.

İspat. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf olsun. Her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \leq n + 1$ dir. Öncelikle $\mathcal{L}$ parçasındaki düğümlerin derecesi için alt sınırı belirlensin.

$M \in \mathcal{L}$ için $d(M) \leq n - 2$ olsun. Sonuç 4.4 den dolayı $x \notin N(M)$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathcal{P}$ vardır. Lemma 4.26 den dolayı $d(x) \in \{n, n + 1\}$ dir. Bu durumda $|\mathcal{A}_{N(x)}^0(M)| \geq 2$ dir. Bu ise G^* nin $\{0, 1\}$ -semi graf olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $d(M) \geq n - 1$ dir. Kabul edelim ki $d(M) = n - 1$ olsun. G^* , $\{0, 1\}$ -semi graf olduğundan dolayı $d(x) = n$ dir. G^* nin maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olduğu göz önüne alınırsa Sonuç 4.7 den dolayı $d(p_0) = n + 1$ olacak şekilde $p_0 \in \mathcal{P}$ vardır. G^* , $\{0, 1\}$ -semi graf olduğundan $M \in N(p_0)$ dir.

G^* in özelliğinden dolayı $q \notin N(L) \cup N(M)$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümünü vardır. $q \notin N(M)$ olduğundan $d(q) = n$ dir. $|\mathcal{A}_{N(q)}^0(L)| \in \{0, 1\}$ olduğundan dolayı $d(L) \in \{n - 1, n\}$ dir.

Eğer $p_0 \notin N(L)$ ise $d(L) = n$ olmalıdır.

Kabul edelim ki $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n - 1$ olan tek düğüm M olsun. Sonuç 4.6 den dolayı $r \notin N(M)$ olacak şekilde $r \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $d(M) = n - 1$ olduğundan $d(r) = n$ dir. Kabülümüzden dolayı $\mathcal{L}$ parçasına ait derecesi $n - 1$ olan tek düğüm M olduğundan $\mathcal{L}$

parçasına ait diğer düğümlerin derecesi n dir. Herhangi bir $i, 1 \leq i \leq d(r)$ için $L_i \in N(r)$ olsun. Teorem 4.11 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = \sum_{i=1}^{d(r)} (d(L_i) - 1) = d(r) \cdot (n - 1) = n \cdot (n - 1) \quad (4.48)$$

dir. Benzer şekilde herhangi bir $j, 1 \leq j \leq d(r) - 1$ için $L'_j \in N(p_0) - M$ olsun. $M \in N(p_0)$ ve Teorem 4.11 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = d(M) - 1 + \sum_{i=1}^{d(p_0)-1} (L'_j - 1) = d(M) - 1 + (d(p_0) - 1) \cdot (n - 1) = d(M) - 1 + n \cdot (n - 1) \quad (4.49)$$

dir. (4.48) ve (4.49) den dolayı $d(M) = 1$ dir. Bu ise LG2 ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n - 1$ olan en az iki düğüm vardır. Bu durumda $G^*, \{0, 1\}$ -semi graf olduğundan dolayı $p_0, n - 1$ dereceli düğümlerin komşuluğundadır. Böylece $\mathcal{L}$ parçasına ait $n - 1$ dereceli düğümlerin ortak komşuluğu p_0 dir. Bu durumda p_0 dan farklı $\mathcal{P}$ parçasına ait her bir düğümün komşuluğu dışında derecesi $n - 1$ olan en az bir düğüm vardır. $G^*, \{0, 1\}$ -sem igraf olduğundan dolayı p_0 dan farklı $\mathcal{P}$ parçasına her düğümün derecesi n dir.

Farzedelim ki p_0 düğümünün komşuluğunda en az bir tane derecesi n olan düğüm olsun. Bu durumda $F, K, H \in N(p_0)$ için $d(K) = d(H) = n - 1$ ve $d(F) = n$ olacak şekilde $F, K, H \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Ayrıca LG2 den dolayı $z \neq p_0$ olacak şekilde $z \in N(F)$ vardır. O halde $d(z) = n$ dir. $T \in N(z)$ için $d(T) = n - 1$ ise $T \in N(p_0)$ dir. Bu durumda $\{F, T\} \subseteq CN(p_0, z)$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla z düğümünün komşuluğundaki tüm düğümlerin derecesi n dir. Teorem 4.11 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| = d(z) \cdot (n - 1) + 1 = (n - 1) \cdot n + 1 = n^2 - n + 1 \quad (4.50)$$

dir. Benzer şekilde, LG2 den dolayı $s \neq p_0$ olacak şekilde $s \in N(H)$ vardır. $s \neq p_0$ olduğundan dolayı $d(s) = n$ dir. $T' \in N(s)$ ve $T' \neq H$ için $d(T') = n - 1$ ise $T' \in N(p_0)$ dir. Bu durumda $\{H, T'\} \subseteq CN(p_0, s)$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla s düğümünün komşuluğundaki H dan farklı düğümlerin derecesi n dir. Teorem 4.11 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| = 1 \cdot (n - 2) + (d(s) - 1) \cdot (n - 1) + 1 = n - 2 + (n - 1)^2 + 1 = n^2 - n \quad (4.51)$$

dir. (4.50) ve (4.51) den dolayı çelişki ortaya çıkar. Dolayısıyla p_0 düğümünün komşuluğundaki tüm düğümlerin derecesi $n - 1$ dir. Böylece Teorem 4.11 dan dolayı

$$|\mathcal{P}| = d(p_0) \cdot (n - 2) + 1 = (n + 1)(n - 2) + 1 = n^2 - n - 1 \quad (4.52)$$

dir. (4.51) ve (4.52) den dolayı çelişki ortaya çıkar. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n - 1$ olan düğüm yoktur. Böylece $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \geq n$ ve $d(L) \leq n + 1$ olduğundan dolayı $d(L) \in \{n, n + 1\}$ dir.

Örnek 4.22. Şekil 4.12 da verilen graf modeli $n = 2$ için Lemma 4.27 için bir örnek teşkil eder.

Teorem 4.48. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf olsun. Eğer $d(q) = n$ olacak şekilde $q \in \mathcal{P}$ düğümü varsa $G - \{q\}$, $(n + 1, n)$ - biregüler afin graftır.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf ve $q \in \mathcal{P}$ için $d(q) = n$ olsun. Sonuç 4.6 den dolayı $q \notin N(L)$ şeklindeki bir $L \in \mathcal{L}$ düğümünü vardır. Lemma 4.27 den dolayı $d(L) \in \{n, n + 1\}$ dir. $d(L) = n + 1$ ise Teorem 4.9 ile çelişir. Dolayısıyla $L \notin N(q)$ için $d(L) = n$ dir. G^* nin maksimum derecesi $n + 1$ olduğundan Sonuç 4.7 den dolayı $d(p') = n + 1$ olacak şekilde $p' \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. Her bir $L' \in \mathcal{L}$ için $d(L') = n$ ise Lemma 4.8 dan dolayı $\mathcal{P}$ parçası $n + 1$ regülerdir. Bu ise hipotezle çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n + 1$ olan en az bir düğüm vardır. $M \in \mathcal{L}$ için $d(M) = n + 1$ ise Teorem 4.9 den dolayı $M \in N(q)$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ parçasında ait $n + 1$ dereceli düğümlerin tamamı q düğümünün komşuluğundadır. Ayrıca Teorem 4.9 den ve Lemma 4.26 den dolayı $\mathcal{L}$ parçasına ait derecesi $n + 1$ olan herhangi bir düğümünün komşuluğunda olmayan $\mathcal{P}$ parçasına ait düğümlerin derecesi $n + 1$ dir.

Kabul edelim ki $\mathcal{L}$ parçasında $n + 1$ dereceli bir tek M düğümü olsun. Bu durumda $r \notin N(M)$ için $d(r) = n + 1$ ve Lemma 4.27 den dolayı her bir $L \in \mathcal{L} - \{M\}$ için $d(L) = n$ dir. Dolayısıyla r nin komşuluğundaki tüm düğümlerin derecesi n dir. Teorem 4.9 den dolayı

$$|\mathcal{P}| = d(r).(n - 1) + 1 = (n + 1).(n - 1) + 1 \quad (4.53)$$

dir. $\mathcal{L}$ parçasında ait tüm $n + 1$ dereceli düğümler q düğümünün komşuluğunda olduğundan, $M \in N(q)$ ve $\mathcal{L}$ parçasında derecesi $n + 1$ olan tek düğüm M olduğundan Teorem 4.11 göz önüne alınırsa

$$|\mathcal{P}| = n + (d(q) - 1).(n - 1) + 1 = n + (n - 1).(n - 1) + 1 \quad (4.54)$$

dir. (4.53) ve (4.54) den dolayı $n = 2$ dir. Böylece $|\mathcal{P}| = 4$ ve $d(M) = 3$ tür. Bu ise $\mathcal{L}$ parçasındaki herhangi iki düğümün komşuluğu dışında en az bir düğüm olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ parçasına ait derecesi $n + 1$ olan en az iki düğüm vardır. Bu düğümler q düğümünün komşuluğundadır. Her bir $p \in \mathcal{P} - \{q\}$ için Lemma 4.26 den dolayı $d(p) \in \{n, n + 1\}$ olmalıdır. Ayrıca q düğümünün komşuluğunda $n + 1$ dereceli en az iki düğüm olduğundan $R, S \in N(q)$ ve $d(R) = d(S) = n + 1$ olacak şekilde $R, S \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Bu durumda, her bir $p \in \mathcal{P} - \{q\}$ için düğümü ile ilgili üç durum vardır.

1. durum. $p \in N(R)$ ise $p \notin N(S)$ dir. O halde Teorem 4.9 den dolayı $d(p) = n + 1$ dir.

2. durum. $p \in N(S)$ ise $p \notin N(R)$ dir. O halde Teorem 4.9 den doLayısı $d(p) = n + 1$ dir.

3. durum. $p \notin N(R) \cup N(S)$ ise Teorem 4.9 den dolayı $d(p) = n + 1$ dir.

Böylece, her bir $p \in \mathcal{P} - \{q\}$ için $d(p) = n + 1$ dir. Kabul edelim ki en az bir $H \in N(q)$ için $d(H) = n$ olsun. Bu durumda $s \notin N(H)$ olacak şekilde $s \in \mathcal{P}$ için $d(s) = n + 1$ dir. $d(s) = n + 1$ ve $d(H) = n$ olduğundan dolayı $cn(H, F) = 0$ olacak şekilde bir tek $F \in N(s)$ vardır. $cn(H, F) = 0$ ve $q \in N(H)$ olduğundan dolayı $F \notin N(q)$ dir. Teorem 4.9 ve Lemma 4.27 den dolayı $d(F) = n$ dir. O halde $N(F) = \{s = p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $CN(q, p_i) = \{L_i\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $F \notin N(q)$ olduğundan dolayı $L_i \neq F$ dir. $L_i = H$ ise $CN(H, F) = \{p_i\}$ dir. Bu ise $cn(H, F) = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $L_i \neq H$ dir. Böylece $\{H, L_1, L_2, \dots, L_n\} \subseteq N(q)$ dir. Bu ise $d(q) = n$ olması ile çelişir. Dolayısıyla her bir $T \in N(q)$ için $d(T) = n + 1$ dir. Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| = d(q).n + 1 = n^2 + 1$$

dir. Ayrıca $\mathcal{L}$ parçasına ait $n + 1$ dereceli düğümleri tamamı q düğümünün komşuluğunda olduğundan $G^* - \{q\}$ grafi için $|\mathcal{P}| = n^2$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ dir. Teorem 4.30 den dolayı $G^* - \{q\}$ bir afin graftır.

Teorem 4.49. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1)$ -regüler ve $\mathcal{L}$ parçası n ve $n + 1$ dereceli düğümlerden oluşan $\{0, 1\}$ -semi graf olsun. $\mathcal{L}$ parçasına ait n dereceli düğümlerin ortak komşuluğu olacak şekilde bir x düğümü eklenirse, $G^* + \{x\}$ projektif graftır.

İspat. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$, $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1)$ -regüler ve $\mathcal{L}$ parçası n ve $n + 1$ dereceli düğümlerden oluşan $\{0, 1\}$ -semi graf olsun. Hipotezden dolayı $d(H) = n$ olacak şekilde $H \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Bu durumda

$$\mathcal{A}^0[H] = \{L : cn(L, H) = 0 \text{ ve } L \in \mathcal{L}\} \cup \{H\}$$

olsun. En az biri H dan farklı $R, S \in \mathcal{A}^0[H]$ için $R \neq S$ olsun. Eğer R ve S düğümlerinden biri H düğümüne eşitse $cn(R, S) = 0$ dir.

$R \neq H$ ve $S \neq H$ olmak üzere kabul edelim ki $cn(R, S) = 1$ olsun. Bu durumda $CN(R, S) = \{p'\}$ olacak şekilde $p' \in \mathcal{P}$ düğümü vardır. $\mathcal{A}^0[H]$ kümesinin tanımından dolayı $cn(R, H) = 0$ ve $cn(S, H) = 0$ dir. Dolayısıyla $p' \notin N(H)$ dir. Bu durumda $|\mathcal{A}_p^0(H)| \geq 2$ dir. Bu ise G^* nin $\{0, 1\}$ -semi graf olmasıyla çelişir. O halde birbirinden ve en az biri H dan farklı olacak şekilde $R, S \in \mathcal{A}^0(H)$ için $cn(R, S) = 0$ dir.

Kabul edelim ki en az bir $p_0 \in \mathcal{P}$ için $p_0 \notin \bigcup_{L \in \mathcal{A}^0[H]} N(L)$ olsun. $\mathcal{P}$ parçası $(n + 1)$ -regüler olduğundan dolayı $d(p_0) = n + 1$ dir. Bu durumda her bir $i, 1 \leq i \leq n + 1$ için $N(p_0) = \{L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_{n+1}\}$ olacak şekilde $L_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. Herhangi bir $L_i \in N(p_0)$ için $cn(L_i, H) = 0$ ise $L_i \in \mathcal{A}^0[H]$ dir. Bu ise p_0 düğümünün seçimi ile çelişir. Dolayısıyla her $L_i \in N(p_0)$ için $cn(H, L_i) = 1$ dir. Bu durumda her bir i

için $CN(H, L_i) = \{p_i\}$ olacak şekilde $p_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $j, 1 \leq j \leq n+1$ ve $i \neq j$ için $p_i = p_j$ ise $CN(p_0, p_i) = \{L_i, L_j\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $p_i \neq p_j$ dir. Bu durumda $\{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\} \subseteq N(H)$ dir. Bu ise $d(H) = n$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla her $p \in \mathcal{P}$ için $p \in \bigcup_{L \in \mathcal{A}^0[H]} N(L)$ dir.

Lemma 4.27 ten dolayı her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) \in \{n, n+1\}$ dir. Kabul edelim ki en az bir $L' \in \mathcal{A}^0[H]$ için $d(L') = n+1$ olsun. Bu durumda her bir $i, 1 \leq i \leq n+1$ için $N(L') = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{n+1}\}$ olacak şekilde $p'_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. $q \in N(H)$ için $q \notin N(L')$ dir. LG1 den dolayı her bir $i, 1 \leq i \leq n+1$ için $CN(q, p'_i) = \{L'_i\}$ olacak şekilde $L'_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $j, 1 \leq j \leq n+1$ ve $j \neq i$ için $L'_i = L'_j$ ise $CN(p'_i, p'_j) = \{L', L'_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $L'_i \neq L'_j$ dir. $cn(L', H) = 0$ olduğundan dolayı $L'_i \neq H$ dir. Böylece $\{H, L'_1, L'_2, \dots, L'_{n+1}\} \subseteq N(q)$ dir. Bu durumda $d(q) = n+2$ dir. Bu ise $\mathcal{P}$ parçasından $(n+1)$ -regüler olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her bir $L \in \mathcal{A}^0(H)$ için $d(L) = n$ dir.

$S \in \mathcal{L}$ için $d(S) = n+1$ olsun. Bu durumda $S \notin \mathcal{A}^0[H]$ dir. Kabul edelim ki en az bir $F \in \mathcal{A}^0[H]$ için $cn(S, F) = 0$ olsun. $d(S) = n+1$ olduğundan her bir $i, 1 \leq i \leq n+1$ için $N(S) = \{q_1, q_2, \dots, q_{n+1}\}$ olacak şekilde $q_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. LG1 den dolayı $p' \in N(F)$ için $CN(p', q_i) = \{H_i\}$ olacak şekilde $H_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $j, 1 \leq j \leq n+1$ ve $i \neq j$ için $H_i = H_j$ ise $CN(q_i, q_j) = \{S, H_i\}$ dir. Bu ise LG1 ile çelişir. Dolayısıyla $H_i \neq H_j$ dir. $cn(S, F) = 0$ olduğundan dolayı $H_i \neq S$ dir. Benzer şekilde $H_i \neq F$ dir. Böylece $N(p') = \{F, H_1, H_2, \dots, H_{n+1}\}$ dir. Bu durumda $d(p') \geq n+2$ dir. Bu ise $\mathcal{P}$ parçasının $(n+1)$ -regüler olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla her $D \in \mathcal{A}^0(H)$ için $cn(D, S) = 1$ dir. O halde $|\mathcal{A}^0(H)| \geq n+1$ dir. Kabul edelim ki $|\mathcal{A}^0(H)| \geq n+2$ olsun. Bu durumda $\mathcal{A}^0(H)$ ait her bir düğümünün S düğümü ile ortak komşuluğunun sayısı 1 olduğundan S düğümünün komşuluğundaki en az bir düğüm, $\mathcal{A}^0(H)$ kümesine ait en az iki düğümün komşuluğunda olur ki bu durum $\mathcal{A}^0(H)$ kümesine ait herhangi iki düğümün ortak komşuluğun sayısının sıfır olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $|\mathcal{A}^0(H)| \leq n+1$ dir. Böylece $|\mathcal{A}^0(H)| = n+1$ dir.

Kabul edelim ki en az bir $L' \notin \mathcal{A}^0(H)$ için $d(L') = n$ olsun. Bu durumda her bir $i, 1 \leq i \leq n$ için $N(L') = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\}$ olacak şekilde $p'_i \in \mathcal{P}$ düğümleri vardır. Bu durumda $p'_i \in \bigcup_{L \in \mathcal{A}^0[H]} N(L)$ dir. $|\mathcal{A}^0(H)| = n+1$ olduğundan dolayı $k, 1 \leq k \leq n+1$ için $\mathcal{A}^0(H) = \{H_1, H_2, \dots, H_{n+1}\}$ olacak şekilde $H_i \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $\mathcal{A}^0(H)$ kümesine ait herhangi iki düğümün komşuluğunda, $N(L')$ kümesine ait aynı düğümün bulunması halinde $\mathcal{A}^0(H)$ kümesinin tanımı ile çelişir. Bu durumda $\mathcal{A}^0(H)$ kümesine ait her bir düğümün komşuluğunda $N(L')$ kümesine ait farklı düğümler vardır. $d(L') = n$ olduğundan bir tek $H_k \in \mathcal{A}^0(H)$ için $cn(L', H_k) = 0$ dir. Bu durumda $p'_i \in N(L')$ için $p'_i \notin N(H_k)$ dir. Ayrıca $p'_i \in \bigcup_{L \in \mathcal{A}^0[H]} N(L)$ olduğundan dolayı $p'_i \in N(L'')$ olacak şekilde

en az bir $L'' \in \mathcal{A}^0[H]$ vardır. Bu durumda $cn(L'', H_k) = 0$ dir. Böylece $|\mathcal{A}_{p_i}^0(H_k)| \geq 2$ dir. Bu ise G nin $\{0, 1\}$ -semi graf olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her bir $K' \notin \mathcal{A}^0(H)$ için $d(K') = n + 1$ dir. $|\mathcal{A}^0(H)| = n + 1$, her bir $L \in \mathcal{A}^0(H)$ için $d(L) = n$ ve her bir $p \in \mathcal{P}$ için $p \in \bigcup_{L \in \mathcal{A}^0[H]} N(L)$ ve herhangi $L, K \in \mathcal{A}^0[H]$ için $N(L) \cap N(K) = \emptyset$ olduğundan dolayı Teorem 4.11 göz önüne alınırsa

$$|\mathcal{P}| = \sum_{L \in \mathcal{A}^0[H]} d(L) = |\mathcal{A}^0(H)| \cdot n = (n + 1) \cdot n = n^2 + n \quad (4.55)$$

dir. Ayrıca $\mathcal{P}$ parçasındaki herhangi bir düğümün komşuluğunda bulunan n dereceli düğümlerin sayısı α olsun. Teorem 4.11 den dolayı

$$|\mathcal{P}| - 1 = \alpha \cdot (n - 1) + (n + 1 - \alpha) \cdot n = \alpha \cdot n - \alpha + n \cdot (n + 1) - \alpha \cdot n = n \cdot (n + 1) - \alpha \quad (4.56)$$

dir. (4.55) ve (4.56) den dolayı $\alpha = 1$ dir. Bu durumda $\mathcal{P}$ parçasındaki tüm düğümler $\mathcal{A}^0(H)$ kümesinin elemanlarının komşuluğunda olduğundan dolayı $\mathcal{A}^0(H)$, $\mathcal{L}$ parçasına ait bütün n dereceli düğümlerin kümesidir. Bu durumda $\mathcal{A}^0(H)$ kümesinin elemanlarının her birine komşu olacak şekilde yeni bir x düğümü $\mathcal{P}$ parçasına ilave edilmesiyle oluşan $G^* + \{x\}$ grafi için, $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve her bir $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ olduğundan Lemma 4.36 den dolayı $G^* + \{x\}$ grafi projektif graftır.

Teorem 4.50. $G^* = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ maksimum düğüm derecesi $n + 1$ olan $\{0, 1\}$ -semi graf olmak üzere,

i. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ ise $G, (n + 1, n)$ -biregüler afın graftır.

ii. $\forall L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n + 1$ ise $G, (n + 1)$ -regüler projektif graftır.

Örnek 4.23. Şekil 4.9 de verilen afın graf modelinde $p \notin N(L)$ olacak şekildeki her bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 1$ olduğundan $\{0, 1\}$ -semi graftır.

Şekil 4.10 de verilen projektif graf modelinde ise $p \notin N(L)$ olacak şekildeki her bir $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| = 0$ olduğundan $\{0, 1\}$ -semi graftır.

5. LİNEER GRAFLARIN KOMŞULUK GRAFLARI

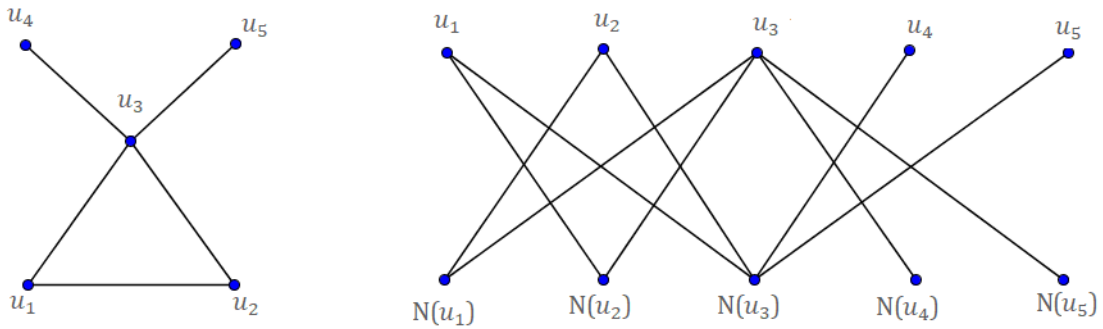
Herhangi bir grafın komşuluk grafları V. R. Kulli tarafından (Kulli, 2015) incelenmiştir. Bu çalışmada grafların komşuluk graflarıyla ilgili regülerlik, bağıllık ve Euler graf olma durumlarıyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin bu bölümünde öncelikle komşuluk graflarıyla ilgili bazı sonuçlar verilerek, lineer grafların komşuluk grafları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca komşuluk grafları lineer graf olan graflar karakterize edilmiştir.

$G = (V, E)$ bir graf ve $\mathcal{S}(V) = \{N(u) : u \in V\}$ olmak üzere $\mathcal{S}(V)$ kümesine G nin tüm açık komşuluklarının kümesi denir.

Tanım 5.1. $G = (V, E)$ bir graf ve $\mathcal{S}(V)$ kümesinde G nin tüm açık komşuluklarının kümesi olsun. $E' = \{uN(v) : u \in N(v), u \neq v \text{ ve } u, v \in V\}$ olmak üzere $\mathcal{N}(G) = (V \cup \mathcal{S}(V), E')$ grafına G nin komşuluk grafi denir. (Kulli, 2015)

Örnek 5.1. Şekil 5.1 de sırasıyla G ve G nin komşuluk grafi olan $\mathcal{N}(G)$ grafi verilmiştir. $N(u_1) = \{u_2, u_3\}$, $N(u_2) = \{u_1, u_3\}$, $N(u_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $N(u_4) = \{u_3\}$, $N(u_5) = \{u_3\}$ olduğundan $\mathcal{S} = \{N(u_1), N(u_2), N(u_3), N(u_4), N(u_5)\}$ dir.



Şekil 5.1 G ve $\mathcal{N}(G)$

Teorem 5.1. G , herhangi bir graf olmak üzere $\mathcal{N}(G)$ grafi iki kümelidir. (Kulli, 2015)

Sonuç 5.1. G , iki kümeli bir graf olmak üzere $\mathcal{N}(G)$ grafi bağlantısızdır. (Kulli, 2015)

Sonuç 5.2. $G = (V, E)$ herhangi bir graf olmak üzere $x, y \in V$ için $xy \notin E(\mathcal{N}(G))$ ve $N(x)N(y) \notin E(\mathcal{N}(G))$

İspat. Komşuluk grafi tanımından ispat açıktır.

Lemma 5.1. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G nin derece dizisi $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$ ise $\mathcal{N}(G)$ komşuluk grafinin derece dizisi $(d_1, d_1, d_2, d_2, \dots, d_{|V|}, d_{|V|})$ dir.

İspat. $x_i \in V$ ve her bir $i, 1 \leq i \leq |V|$ için $d(x_i) = d_i$ olsun. G grafinin derece dizisi $(d_1, d_2, \dots, d_{|V|})$ olduğundan dolayı $x_j \in V$ ve her bir $j, 1 \leq j \leq |V|$ için $N(x_j) = \{y_1, y_2, \dots, y_{d_j}\}$ olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_{d_j} \in V$ düğümleri vardır. O halde, $\mathcal{N}(G)$ grafinde $d(N(x_j)) = d_j$ dir. G grafinde x_j düğümü $y_1, y_2, \dots, y_{d_j}$ düğümlerinin komşuluğunda olduğundan $\mathcal{N}(G)$ de $N(x_j) = \{N(y_1), N(y_2), \dots, N(y_{d_j})\}$ olacağından $d(x_j) = d_j$ olur. $V(\mathcal{N}(G)) = V \cup \mathcal{S}(V)$ olduğundan $\mathcal{N}(G)$ nin derece dizisi $(d_1, d_1, d_2, d_2, \dots, d_{|V|}, d_{|V|})$ dir.

Sonuç 5.3. $G = (V, E)$ herhangi bir graf ve $u \in V$ ve $\mathcal{N}(G)$ G nin komşuluk grafi olmak üzere, $d_G(u) = d_{\mathcal{N}(G)}(u) = d_{\mathcal{N}(G)}(N(u))$ dir.

Lemma 5.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, G (r, s) -biregüler ise her bir $u \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(u) \in \{r, s\}$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ (r, s) -biregüler lineer graf olsun. Sonuç 5.3 den dolayı $p \in \mathcal{P}$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{N}(G)$ de $d(N(p)) = d(p) = r$ ve $d(N(L)) = d(L) = s$ dir. $V(\mathcal{N}(G)) = [(\mathcal{P} \cup \mathcal{L})] \cup [\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{S}(\mathcal{L})]$ olduğundan her bir $u \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(u) \in \{r, s\}$ dir.

Sonuç 5.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olmak üzere her bir $u \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(u) \in \{n+1, n\}$ dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. Bu durumda Teorem 4.27 ve Lemma 5.2 den dolayı $\forall u \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(u) \in \{n+1, n\}$ dir.

Sonuç 5.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olmak üzere, $\mathcal{N}(G)$, $(n+1)$ -regülerdir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ olsun. Bu durumda Teorem 4.35 ve Lemma 5.2 den dolayı her bir $u \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(u) = n+1$ dir.

Sonuç 5.6. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\mathcal{N}(G)$ izole ve sarkık düğüm içermez.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ dir. Bu durumda Sonuç 5.3 den dolayı $\delta(\mathcal{N}(G)) \geq 2$ dir. İzole düğümün derecesi sıfır ve sarkık düğümün derecesi 1 olduğundan $\mathcal{N}(G)$ grafi izole ve sarkık düğüm içermez.

Lemma 5.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\mathcal{N}(G)$ grafi bağlantısız graftır.

İspat. Lineer graf tanımı ve Sonuç 5.1 den dolayı ispat açıktır.

Lemma 5.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere $\mathcal{N}(G)$ grafi Euler graf değildir.

İspat. Lemma 5.3 den dolayı ispat açıktır.

Teorem 5.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ parçalarının her bir elemanının açık komşuluklarından oluşan kümeler sırasıyla

$S(\mathcal{P}) = \{N(p) : p \in \mathcal{P}\}$ ve $S(\mathcal{L}) = \{N(L) : L \in \mathcal{L}\}$ olsun.
 $E_1 = \{uv : u \in \mathcal{P} \text{ ve } v \in S(\mathcal{L})\}$ ve $E_2 = \{xy : x \in S(\mathcal{P}) \text{ ve } y \in \mathcal{L}\}$ olmak üzere aşağıda verilen ifadeler geçerlidir.

i. $G_1 = (\mathcal{P} \cup S(\mathcal{L}), E_1)$ ve $G_2 = (S(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}, E_2)$ birer lineer graftır.

ii. $G \cong G_1$ ve $G \cong G_2$

dir.

İspat. i. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Teorem 5.1 den dolayı $\mathcal{N}(G)$ grafi iki kümelidir. Her $p, q \in \mathcal{P}$ ve $p \neq q$ için LG1 den dolayı $CN(p, q) = \{L\}$ olacak şekilde bir tek $L \in \mathcal{L}$ düğümü vardır. Bu durumda $\{p, q\} \subseteq N(L)$ dir. Böylece $pN(L), qN(L) \in E(\mathcal{N}(G))$ dir. Burada $N(L)$ düğümü p ve q düğümlerin ikisiyle ayrıt belirten tek düğümdür. Böylece $G_1 = (\mathcal{P} \cup S(\mathcal{L}), E_1)$ grafında $CN(p, q) = \{N(L)\}$ olacak şekilde bir tek $N(L) \in S(\mathcal{L})$ dir. Dolayısıyla LG1 sağlanır. LG2 den dolayı $\delta(G) \geq 2$ olduğundan her bir $u \in V(G)$ için $d(u) \geq 2$ dir. Lemma 5.1 den dolayı $\mathcal{N}(G)$ grafi her bir $N(u) \in V(\mathcal{N}(G))$ için $d(N(u)) = d(u) \geq 2$ dir. Dolayısıyla $\delta(G_1) \geq 2$ dir. Böylece G_1 lineer graftır. Benzer şekilde G_2 grafıda lineer graftır.

ii.

$$f : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow S(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}$$

$$f(x) = \begin{cases} N(x), & x \in \mathcal{P} \\ x, & x \in \mathcal{L} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan f fonksiyonu için

1. durum. $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ için $x_1 \neq x_2$ olsun. f fonksiyonunun tanımından dolayı $f(x_1) = N(x_1)$ ve $f(x_2) = N(x_2)$ olacak şekilde $N(x_1), N(x_2) \in S(\mathcal{P})$ düğümleri vardır. Ayrıca $N(x_1), N(x_2) \in V(\mathcal{N}(G))$ olup $\mathcal{N}(G)$ grafının tanımından farklı düğümlerin açık komşuluk düğümleride farklıdır. Bu durumda $N(x_1) \neq N(x_2)$ dir. Böylece $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

2. durum. $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ için $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda $f(x_1) = x_1$ ve $f(x_2) = x_2$ dir. Böylece $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

3. durum. $x_1 \in \mathcal{P}$ ve $x_2 \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda G lineer graf olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. f fonksiyonunun tanımından dolayı $N(x_1) \in S(\mathcal{P})$ ve $x_2 \in \mathcal{L}$ düğümleri vardır. $\mathcal{N}(G)$

grafının tanımından dolayı bir düğüm ile açık komşuluk düğümü farklı olduğundan dolayı $N(x_1) \neq x_2$ dir. Böylece $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. Üç durumdan dolayı f fonksiyonu birebirdir. $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ olduğundan dolayı

$$|\mathcal{P} \cup \mathcal{L}| = |\mathcal{P}| + |\mathcal{L}| \quad (5.1)$$

dir. $\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{L} = \emptyset$ olduğundan dolayı

$$|\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}| = |\mathcal{S}(\mathcal{P})| + |\mathcal{L}| \quad (5.2)$$

dir. $\mathcal{P}$ parçasının her bir düğümüne karşılık bir tek açık komşuluk düğümü olduğundan

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{S}(\mathcal{P})| \quad (5.3)$$

dir. (5.1), (5.2) ve (5.3) den dolayı

$$|\mathcal{P} \cup \mathcal{L}| = |\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}| \quad (5.4)$$

elde edilir. Bu durumda f fonksiyonu birebir ve (5.3) den dolayı f örtendir.

$$f : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}$$

$xL \in E(G)$ için $f(xL) = N(x)L$ dir. G grafında $L \in N(x)$ olduğundan komşuluk grafının tanımı gereğince $LN(x) \in E(\mathcal{N}(G))$ dir. O halde f izomorfizmadır. Böylece $G \cong G_2$ dir. Benzer şekilde $G \cong G_1$ dir.

Lemma 5.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ parçalarının her bir elemanının açık komşuluklarından oluşan kümeler sırasıyla

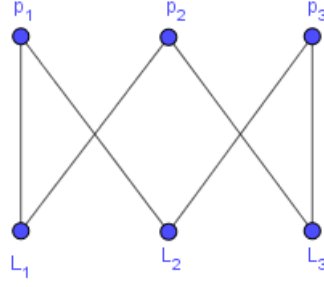
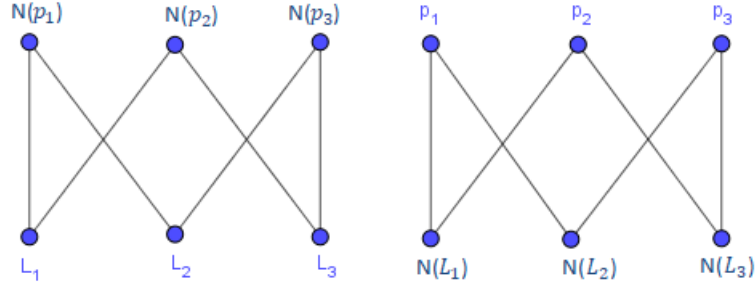
$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{N(p) : p \in \mathcal{P}\}$ ve $\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \{N(L) : L \in \mathcal{L}\}$ olsun. $G_1 = (\mathcal{P} \cup \mathcal{S}(\mathcal{L}), E_1)$ ve $G_2 = (\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}, E_2)$ olmak üzere $\mathcal{N}(G) = G_1 \cup G_2$ grafi iki bileşenlidir.

İspat. Teorem 5.2 den dolayı G_1 lineer graf olduğundan Teorem 4.4 den dolayı G_1 bağlantılıdır. Benzer şekilde G_2 de bağlantılıdır. Ayrıca Komşuluk grafi tanımından $V(\mathcal{N}(G)) = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}) \cup (\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{S}(\mathcal{L}))$ dir. Bu durumda Lemma 5.3 den dolayı $\mathcal{N}(G) = G_1 \cup G_2$ grafi iki bileşenlidir.

Sonuç 5.7. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $\mathcal{N}(G) \cong 2G$ dir.

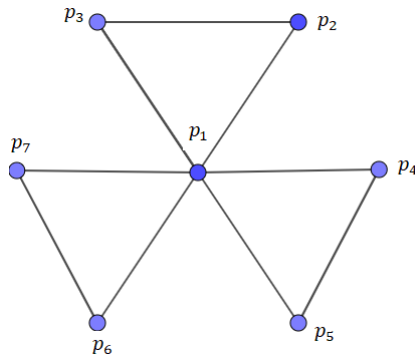
İspat. Teorem 5.2 (ii) ve Lemma 5.5 den dolayı $\mathcal{N}(G) = 2G$ dir.

Örnek 5.2. Şekil 5.2 de verilen graf modeli için $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ ve $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, L_3\}$ olmak üzere $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graftır. $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \{N(p_1), N(p_2), N(p_3)\}$ ve $\mathcal{S}(\mathcal{L}) = \{N(L_1), N(L_2), N(L_3)\}$ olmak üzere G nin komşuluk grafi $\mathcal{N}(G) = G_1 \cup G_2$ Şekil 5.3 da verilmiştir. Burada $G_1 = (\mathcal{S}(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}, E_1)$ ve $G_2 = (\mathcal{P} \cup \mathcal{S}(\mathcal{L}), E_2)$ dir. Burada $G \cong G_1$ ve $G \cong G_2$ olduğu açıktır.

Şekil 5.2 C_6 grafinin iki kümeli modeliŞekil 5.3 $G_1 = (S(\mathcal{P}) \cup \mathcal{L}, E_1)$ ve $G_2 = (\mathcal{P} \cup S(\mathcal{L}), E_2)$

Tanım 5.2. Farklı iki düğümünün ortak komşuluğunun sayısı 1 olan graflara arkadaşlık(friendship) grafları denir. (Chvátal vd., 1976) Sonlu arkadaşlık grafları $n \in \mathbb{Z}^+$ için F_n ile gösterilir ve F_n tam olarak bir ortak komşuya sahip n tane kenarları ayrık C_3 den oluşur. F_n grafi $2n + 1$ düğüm ve $3n$ kenar içerir.

Örnek 5.3. Şekil 5.4 de verilen graf bir Friendship grafidir.

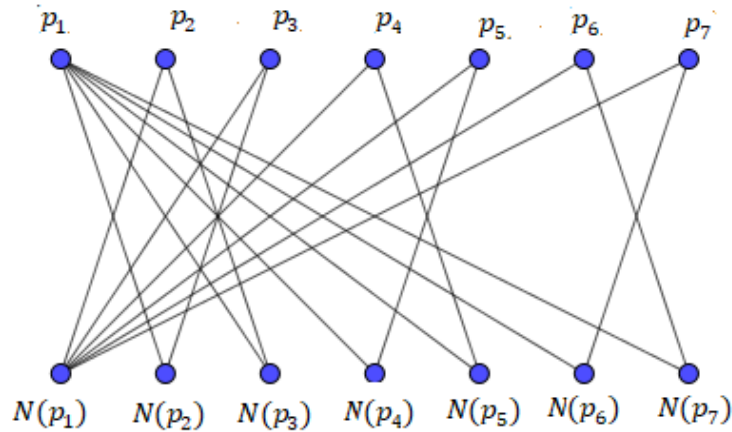
Şekil 5.4 $n = 3$ için Friendship graf modeli: F_3

Teorem 5.3. $G = (V, E)$ bir Friendship grafi olmak üzere, $\mathcal{N}(G)$ dejenere projektif graftır.

İspat. G bir Friendship grafi olsun. Teorem 5.1 den dolayı $\mathcal{N}(G)$ iki kümeli bir graftır. $V(\mathcal{N}(G)) = V \cup S(V)$ olduğundan herhangi farklı $x, y \in V$ için G de Tanım 5.2 den dolayı $CN(x, y) = \{z\}$ olacak şekilde bir tek $z \in V$ düğümü vardır. Bu durumda x ve y nin her ikisi birden sadece z düğümünün açık komşuluğundadır. Böylece, komşuluk grafinin tanımından dolayı $\mathcal{N}(G)$ de $cn(x, y) = \{N(z)\}$ olacak şekilde bir tek $N(z) \in S(V)$ vardır. Dolayısıyla LG1 sağlanır. Ayrıca Tanım 5.1 ve Sonuç 5.3 den dolayı $\delta(\mathcal{N}(G)) \geq 2$ dir. O halde LG2 de sağlanır. Böylece $\mathcal{N}(G)$ bir lineer graftır.

Ayrıca $V(\mathcal{N}(G)) = (V \cup S(V),)$ dir. $V(G)$ ait derece dizisi $(|V| - 1, 2, \dots, 2)$ olduğundan Sonuç 5.3 dan dolayı V ve $\mathcal{N}(V)$ parçalarına ait derece dizisinde $(|V| - 1, 2, \dots, 2)$ dir. Teorem 4.43 den dolayı $\mathcal{N}(G)$ dejenere projektif graftır.

Örnek 5.4. Şekil 5.4 de verilen Friendship grafin komşuluk grafi Şekil 5.5 de verilen $\mathcal{N}(F_3)$ grafına izomorftur. $\mathcal{N}(F_3)$ dejenere projektif graftır.



Şekil 5.5 $\mathcal{N}(F_3)$, F_3 grafinin komşuluk grafi

6. LİNEER GRAFLARIN WIENER İNDEKSLERİ

Bir graftaki tüm düğüm çiftleri(düğüm çiftlerinin sıralaması önemsiz olmak üzere) arasındaki uzaklıklar toplamı olarak tanımlanan Wiener indeks kavramı H. Wiener(Wiener, 1947) tarafından organik moleküllerin bazı fiziksel, kimyasal, biyolojik ve farmolojik özelliklerini incelemek amacıyla ileri atılmıştır. Sonraki yıllarda ise başta ağaçlar olmak üzere iki kümeli graflar, bazı özel graflar ile bu grafların line graflarının Wiener indekleriyle ilgili çalışmalar yapılmış graflar için önemli parametrelerden biri haline gelmiştir. Ayrıca bir grafin Wiener sayısının sınırlarıyla ilgili çalışmalar da yapılmıştır. Detaylar için aşağıda verilen kaynaklara bakılabilir. (Graovac ve Pisanski, 1991), (Dobrynin vd., 2001), (Walikar vd., 2004), (Cohen vd., 2010), (Li ve Song, 2014), (Knor vd., 2015), (Knor vd., 2015).

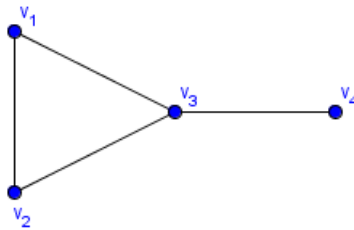
Bu bölümde lineer grafların Wiener indekleri incelenerek, lineer grafların Wiener indeksinin sınırları tespit edilmiştir. Ayrıca, önceki bölümlerde sınıflandırılan lineer grafların Wiener indekleri hesaplanarak bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 6.1. $G = (V, E)$ bağlı bir graf olsun. $W(G)$, G grafinin Wiener indeksi olmak üzere

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v)$$

dir.

Örnek 6.1. Şekil 6.1 da verilen $G = (V, E)$ grafinin Wiener indeksi hesaplanırsa,



Şekil 6.1 $G = (V, E)$ grafi

$d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_3, v_4) = 1$ ve

$$W(G) = 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8$$

elde edilir.

Teorem 6.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3 |\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2 |E(G)| + W(\mathcal{L})$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf, $\mathcal{P}(\mathcal{P})$ ve $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{L}$ parçalarının kuvvet kümesi olsun. Lineer graflar tanımı gereğince iki kümeli olduğundan,

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P})} d(u,v) + \sum_{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}} d(u,v) + \sum_{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})} d(u,v) \quad (6.1)$$

dir. LG1 den dolayı her $u, v \in \mathcal{P}$ için $cn(u,v) = 1$ dir. Lemma 4.5 den dolayı $d(u,v) = 2$ dir. Bu durumda

$$\sum_{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P})} d(u,v) = \binom{|\mathcal{P}|}{2} \cdot d(u,v) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) \quad (6.2)$$

dir. $u \in \mathcal{P}$ ve $v \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}} d(u,v) = \sum_{\substack{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \\ v \in N(u)}} d(u,v) + \sum_{\substack{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \\ v \notin N(u)}} d(u,v) \quad (6.3)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $v \in N(u)$ olacak şekilde v düğümlerinin sayısı; $d(u)$ ve $v \notin N(u)$ olacak şekilde v düğümlerinin sayısı; $|\mathcal{L}| - d(u)$ dir. O halde,

$$\sum_{\substack{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \\ v \in N(u)}} d(u,v) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} \sum_{j=1}^{d(u_i)} d(u_i, v_j) \quad (6.4)$$

ve

$$\sum_{\substack{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \\ v \notin N(u)}} d(u,v) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} \sum_{j=d(u_i)+1}^{|\mathcal{L}|} d(u_i, v_j) \quad (6.5)$$

dir. $uv \in E(G)$ ise $d(u,v) = 1$ ve $uv \notin E(G)$ ise Lemma 4.5 den dolayı $d(u,v) = 3$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} \sum_{j=1}^{d(u_i)} d(u_i, v_j) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} d(u_i) = |E(G)| \quad (6.6)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} \sum_{j=d(u_i)+1}^{|\mathcal{L}|} d(u_i, v_j) = 3 \cdot \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}|} (|\mathcal{L}| - d(u_i)) = 3(|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - |E(G)|) \quad (6.7)$$

dir. Bu durumda (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) ve (6.7) den dolayı

$$\sum_{(u,v) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}} d(u,v) = 3 \cdot |\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2 |E(G)| \quad (6.8)$$

dir. (6.1) ve (6.8) den dolayı aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3 |\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2 |E(G)| + W(\mathcal{L}).$$

Lemma 6.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $p \in \mathcal{P}$

$$W(\mathcal{L}) = 2 |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + |E(G)| - \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)^2$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Lemma 4.3 den dolayı $L_i \neq L_j$ olacak şekilde her bir $L_i, L_j \in \mathcal{L}$ çifti için $cn(L_i, L_j) \leq 1$ dir. Lemma 4.5, (4.10) ve Sonuç 4.11 den dolayı,

$$W(\mathcal{L}) = 2 \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)(d(p) - 1) \right) + 4 \left(\frac{1}{2} |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) - \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)(d(p) - 1) \right)$$

dir. Eşitlik (4.11) den $|E(G)| = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)$ olduğundan,

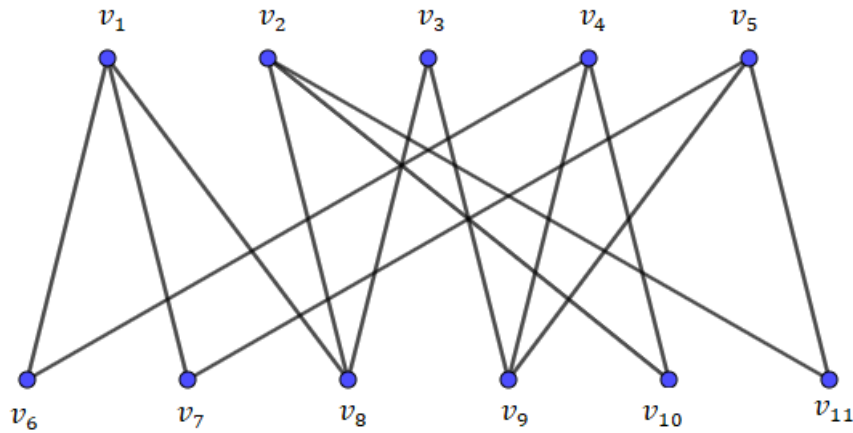
$$W(\mathcal{L}) = 2 |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + |E(G)| - \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)^2$$

Sonuç 6.1. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere, $p \in \mathcal{P}$ için

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 2 |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + 3 |\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - |E(G)| - \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)^2$$

İspat. Teorem 6.1 ve Lemma 6.1 dolayı ispat açıktır.

Örnek 6.2. Şekil 4.12 de verilen lineer graf modelinin düğümlerini yeniden adlandırılarak Şekil 6.2 verilsin. Burada $\mathcal{P} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve $\mathcal{L} = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ dir.



Şekil 6.2 Şekil 4.12 de verilen lineer graf modelinin yeniden adlandırılması

Bu grafın Wiener indeksinin hesaplanması için gerekli olan düğüm çiftleri arasındaki uzaklıklar Çizelge 6.1 de verilmiştir. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ olduğundan Tabloda

verilen uzaklıklar toplanırsa

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) = 116$$

dir.

Çizelge 6.1 Şekil 6.2 de verilen graf modelindeki farklı düğüm çiftleri arası uzaklıklar

$d(v_1, v_2) = 2$	$d(v_1, v_3) = 2$	$d(v_1, v_4) = 2$	$d(v_1, v_5) = 2$	$d(v_2, v_3) = 2$
$d(v_2, v_4) = 2$	$d(v_2, v_5) = 2$	$d(v_3, v_4) = 2$	$d(v_3, v_5) = 2$	$d(v_4, v_5) = 2$
$d(v_1, v_6) = 1$	$d(v_1, v_7) = 1$	$d(v_1, v_8) = 1$	$d(v_1, v_9) = 3$	$d(v_1, v_{10}) = 3$
$d(v_1, v_{11}) = 3$	$d(v_2, v_6) = 3$	$d(v_2, v_7) = 3$	$d(v_2, v_8) = 1$	$d(v_2, v_9) = 3$
$d(v_2, v_{10}) = 1$	$d(v_2, v_{11}) = 1$	$d(v_3, v_6) = 3$	$d(v_3, v_7) = 3$	$d(v_3, v_8) = 1$
$d(v_3, v_9) = 1$	$d(v_3, v_{10}) = 3$	$d(v_3, v_{11}) = 3$	$d(v_4, v_6) = 1$	$d(v_4, v_7) = 3$
$d(v_4, v_8) = 3$	$d(v_4, v_9) = 1$	$d(v_4, v_{10}) = 1$	$d(v_4, v_{11}) = 3$	$d(v_5, v_6) = 3$
$d(v_5, v_7) = 1$	$d(v_5, v_8) = 3$	$d(v_5, v_9) = 1$	$d(v_5, v_{10}) = 3$	$d(v_5, v_{11}) = 1$
$d(v_6, v_7) = 2$	$d(v_6, v_8) = 2$	$d(v_6, v_9) = 2$	$d(v_6, v_{10}) = 2$	$d(v_6, v_{11}) = 4$
$d(v_7, v_8) = 2$	$d(v_7, v_9) = 2$	$d(v_7, v_{10}) = 4$	$d(v_7, v_{11}) = 2$	$d(v_8, v_9) = 2$
$d(v_8, v_{10}) = 2$	$d(v_8, v_{11}) = 2$	$d(v_9, v_{10}) = 2$	$d(v_9, v_{11}) = 2$	$d(v_{10}, v_{11}) = 2$

Ayrıca $|\mathcal{P}| = 5$, $|\mathcal{L}| = 6$, $|E(G)| = 14$ ve $\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)^2 = 40$ olduğundan Sonuç 6.1 deki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$W(G) = 5.4 + 2.6.5 + 3.5.6 - 14 - 40 = 116$$

Teorem 6.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{P}$ parçası regüler olmak üzere,

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 2|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + 3|\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{L}| - |E(G)| - \left(\frac{|E(G)|^2}{|\mathcal{P}|} \right)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{P}$ parçası regüler olsun. Bu durumda,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} d(p)^2 = d(p)^2 \cdot |\mathcal{P}|$$

dir. Ayrıca,

$$d(p) = \frac{|E(G)|}{|\mathcal{P}|}$$

dir. Sonuç 6.1 den dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 2|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + 3|\mathcal{P}| \cdot |\mathcal{L}| - |E(G)| - \left(\frac{|E(G)|^2}{|\mathcal{P}|} \right)$$

dir.

Sonuç 6.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçası regüler olmak üzere,

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 2|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - |E(G)| - \left(\frac{|E(G)|^2}{|\mathcal{P}|} \right)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf ve $\mathcal{L}$ parçası regüler olsun. Bu durumda, Lemma 4.8 den dolayı $\mathcal{P}$ parçası regülerdir. Teorem 6.2 den dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 2|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - |E(G)| - \left(\frac{|E(G)|^2}{|\mathcal{P}|} \right)$$

dir.

Örnek 6.3. Şekil 4.1 deki graf modeli göz önüne alınırsa $\mathcal{P} = \{v_1, v_3, v_5\}$ ve $\mathcal{L} = \{v_2, v_4, v_6\}$ olmak üzere $\mathcal{L}$ parçası regülerdir. G nin düğüm çiftleri arasındaki uzaklıklar, $d(v_1, v_3) = d(v_1, v_5) = d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_2, v_4) = d(v_2, v_6) = d(v_4, v_6) = 2$ ve $d(v_1, v_2) = d(v_1, v_6) = 1$, $d(v_1, v_4) = 3$, $d(v_3, v_2) = d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_6) = 3$, $d(v_5, v_4) = d(v_5, v_6) = 1$, $d(v_5, v_2) = 3$ olduğundan dolayı

$$W(G) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 27$$

dir. $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = 3$ ve $|E(G)| = 6$ değerleri Sonuç 6.2 de yerine yazılırsa aynı sonuç elde edilir.

$$W(G) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 6 - \frac{6^2}{3} = 27$$

Lemma 6.2. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$W(\mathcal{L}) \geq |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olsun. Lemma 4.5 den dolayı, $L \neq K$ olacak şekilde her bir $L, K \in \mathcal{L}$ için

1. durum. $c(L, K) = 1$ ise $d(L, K) = 2$,

2. durum. $c(L, K) = 0$ ise $d(L, K) = 4$

dir. Ayrıca Lemma 4.3 dan dolayı $L \neq K$ olacak şekilde her bir $L, K \in \mathcal{L}$ düğümleri için $c_n(L, K) \leq 1$ olduğundan, $\mathcal{L}$ parçasındaki tüm farklı düğüm çiftlerinin ortak komşuluğunun sayısı 1 alınırsa,

$$W(\mathcal{L}) \geq |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

Örnek 6.4. Şekil 6.2 daki lineer graf modelinde $W(\mathcal{L}) = 34$ ve $|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) = 30$ dur. Şekil 4.1 lineer graf modelinde ise $W(\mathcal{L}) = 6$ ve $|\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) = 6$ dir.

Sonuç 6.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir lineer graf olmak üzere,

$$W(G) \geq |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

İspat. Teorem 6.1 ve Lemma 6.2 den dolayı ispat açıktır.

Lemma 6.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olmak üzere,

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. Teorem 6.1 den dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + W(\mathcal{L})$$

dir. Sonuç 4.23 den dolayı her $u, v \in \mathcal{L}$ çifti için $d(u, v) = 2$ dir. Bu durumda

$$W(\mathcal{L}) = \binom{|\mathcal{L}|}{2} \cdot d(u, v) = |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir. Böylece

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir.

Teorem 6.3. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $u \in V(G)$ için $d(u) = n + 1$ ise

$$W(G) = 5n^4 + 8n^3 + 9n^2 + 4n + 1$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir projektif graf olsun. Lemma 6.3 den dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1)$$

dir. G bir projektif graf ve $u \in V(G)$ olsun. Teorem 4.35 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n + 1$ dir. Ayrıca, Lemma 4.22 den dolayı $E(G) = n^3 + 2(n^2 + n) + 1$ dir. Böylece

$$W(G) = 5n^4 + 8n^3 + 9n^2 + 4n + 1$$

dir.

Teorem 6.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf olsun. $n \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$ ise

$$W(G) = 5n^4 + 4n^3 - 3n^2 - 2n$$

dir.

İspat. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir afin graf ve $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda G aynı zamanda lineer graf olduğundan dolayı Teorem 6.1 de dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3|\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2|E(G)| + W(\mathcal{L}) \quad (6.9)$$

dir. Ayrıca Lemma 4.3 den her $u, v \in \mathcal{L}$ çifti için $cn(u, v) \in \{0, 1\}$ olduğundan dolayı

$$W(\mathcal{L}) = \sum_{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L})} d(u, v) = \sum_{\substack{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}) \\ cn(u,v)=0}} d(u, v) + \sum_{\substack{\{u,v\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}) \\ cn(u,v)=1}} d(u, v) \quad (6.10)$$

dir. Ayrıca Lemma 4.5 den dolayı

$$d(u, v) = \begin{cases} 2, & c(u, v) = 1 \\ 4, & c(u, v) = 0 \end{cases}$$

dir. Bu durumda

$$W(G_{\mathcal{L}}) = 4 \binom{n}{2} (n+1) + 2(n.n.n + n.n.(n-1) + \dots + n.n.1)$$

dir. Eşitliğin sol tarafı düzenlenirse

$$W(\mathcal{L}) = 2n(n^2 - 1) + n^3(n+1) \quad (6.11)$$

elde edilir. Teorem 4.27 den dolayı $|\mathcal{P}| = n^2$ ve $|\mathcal{L}| = n^2 + n$ dir. Böylece (6.9) ve (6.11) den dolayı

$$W(G) = 5n^4 + 4n^3 - 3n^2 - 2n$$

dir.

Örnek 6.5. Şekil 4.9 deki afin graf modeline ait düğüm çiftleri arasındaki uzaklıklar; Çizelge 6.2 de verilmiştir. Buna göre G grafının Wiener indeksi çizelgede verilen uzaklıklar toplamıdır. Bu durumda

$$W(G) = 96$$

dir. Ayrıca $L \in \mathcal{L}$ için $d(L) = 2$ olduğundan Teorem 6.4 dan dolayı

$$W(G) = 5.2^4 + 4.2^3 - 3.2^2 - 2.2 = 96$$

dir.

Çizelge 6.2 Şekil 4.9 de verilen graf modelindeki farklı düğüm çiftleri arası uzaklıklar

$d(p_1, p_2) = 2$	$d(p_1, p_3) = 2$	$d(p_1, p_4) = 2$	$d(p_2, p_3) = 2$	$d(p_2, p_4) = 2$
$d(p_3, p_4) = 2$	$d(p_1, L_1) = 1$	$d(p_1, L_2) = 1$	$d(p_1, L_3) = 1$	$d(p_1, L_4) = 3$
$d(p_1, L_5) = 3$	$d(p_1, L_6) = 3$	$d(p_2, L_1) = 1$	$d(p_2, L_2) = 3$	$d(p_2, L_3) = 3$
$d(p_2, L_4) = 1$	$d(p_2, L_5) = 1$	$d(p_2, L_6) = 3$	$d(p_3, L_1) = 3$	$d(p_3, L_2) = 1$
$d(p_3, L_3) = 3$	$d(p_3, L_4) = 1$	$d(p_3, L_5) = 3$	$d(p_3, L_6) = 1$	$d(p_4, L_1) = 3$
$d(p_4, L_2) = 3$	$d(p_4, L_3) = 1$	$d(p_4, L_4) = 3$	$d(p_4, L_5) = 1$	$d(p_4, L_6) = 1$
$d(L_1, L_2) = 2$	$d(L_1, L_3) = 2$	$d(L_1, L_4) = 2$	$d(L_1, L_5) = 2$	$d(L_1, L_6) = 4$
$d(L_2, L_3) = 2$	$d(L_2, L_4) = 2$	$d(L_2, L_5) = 4$	$d(L_2, L_6) = 2$	$d(L_3, L_4) = 4$
$d(L_3, L_5) = 2$	$d(L_3, L_6) = 2$	$d(L_4, L_5) = 2$	$d(L_4, L_6) = 2$	$d(L_5, L_6) = 2$

Lemma 6.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf olmak üzere,

$$W(G) = 5 |\mathcal{P}|^2 - 8 |\mathcal{P}| + 6$$

dir.

İspat. Teorem 6.1 den dolayı

$$W(G) = |\mathcal{P}| \cdot (|\mathcal{P}| - 1) + 3 |\mathcal{P}| |\mathcal{L}| - 2 |E(G)| + W(\mathcal{L}) \quad (6.12)$$

dir. Sonuç 4.42 den dolayı $\forall L, K \in \mathcal{L}$ için $cn(L, K) = 1$ dir. Böylece Sonuç 4.23 den dolayı $d(L, K) = 2$ dir. Bu durumda

$$W(G_{\mathcal{L}}) = \binom{|\mathcal{L}|}{2} \cdot d(u, v) = |\mathcal{L}| \cdot (|\mathcal{L}| - 1) \quad (6.13)$$

dir. Ayrıca,

$$E(G) = \sum_{p \in \mathcal{P}} d(p) = |\mathcal{P}| - 1 + (|\mathcal{P}| - 1) \cdot 2 = 3 |\mathcal{P}| - 3 \quad (6.14)$$

dir. G dejenere projektif graf olduğundan $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ dir. Ayrıca (6.12), (6.13) ve (6.14) denklemleri gözönüne alınırsa,

$$W(G) = 5 |\mathcal{P}|^2 - 8 |\mathcal{P}| + 6$$

dir.

Sonuç 6.4. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir dejenere projektif graf ve $n \geq 3$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere $V(G) = 2n$ olsun. Bu durumda

$$W(G) = 5n^2 - 8n + 6$$

dir.

İspat. Lemma 6.4 ve dejenere projektif graf tanımından ispat açıktır.

Sonuç 6.5. $G = (\mathcal{P} \cup \mathcal{L}, E)$ bir $(n+1)$ -regüler projektif graf ve $G' = (\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}', E')$ bir dejenere projektif graf olmak üzere, $V(G) = V(G')$ ise $W(G) \geq W(G')$ dir.

İspat. Projektif graf tanımından $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}|$ ve benzer şekilde dejenere projektif graf tanımından dolayı $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{L}'|$ dir. Hipotezden dolayı $V(G) = V(G')$ olduğundan

$$|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'| = n^2 + n + 1$$

ve

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{L}'| = n^2 + n + 1$$

dir. Bu durumda Teorem 6.3, Lemma 6.4 ve $n \geq 3$ den dolayı

$$W(G') \geq W(G)$$

dir.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada iki kümeli graflar için ortak komşuluk sayısı göz önüne alınarak lineer graflar tanımlanmıştır. Lineer grafların temel özellikleri ortaya koyularak önemli bir kısmının sınıflandırılması yapılmıştır. Yapılan sınıflandırmalar düğüm dereceleri kullanılmak suretiyle karakterize edilmiştir. Daha sonra lineer graflarla bazı özel graflar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bağlamda tam graflardan, grafların düğüm genişlemesi kullanarak lineer graflar elde edilmiş ve k düğümlü tam graflardan elde edilen lineer graflar $(k - 1, 2)$ – biregüler lineer graflar olarak karakterize edilmiştir.

Sınıflandırılan lineer graflar arasındaki ilişkiler incelenerek birbirini alt graf olarak içermesi için sahip olunması gereken parametrelerle ilgili sonuçlar ortaya koyulmuştur. V.R. Kulli tarafından yapılan bazı özel grafların komşuluk graflarıyla ilgili çalışmalar incelenerek lineer grafların komşuluk graflarıyla ilgili çalışmalar yapılmış ve önemli sonuçlar ortaya çıkarılmıştır. Bu bağlamda geniş bir uygulama alanı olan Friendship graflarının komşuluk graflarından belirli parametrelere sahip lineer graflar elde edilmiştir. Ayrıca lineer grafların Wiener indeksleri incelenerek önemli sonuçlar verilmiştir.

Geçtiğimiz on yıl içerisinde İ. Günaltı'nın öncülük ettiği $(0, 1)$ – graflarıyla ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu bağlamda bu tezde çalışılan lineer graflar gerek bazı geometrik yapıların temsili gerekse $(0, 1)$ –graflarının sınıflandırılması çalışmalarına önemli katkı sağlayarak bu yöndeki çalışmalara ışık tutacaktır.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sunulan tez çalışmamızda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Öncelikle teze ilgili tanım ve kavramlararak sunularak bazı önemli teoremler verilmiştir. İlerleyen kısımlarda teze temel teşkil eden lineer graf kavramı tanımlanarak, lineer grafların temel özellikleri elde edilmiş ve bu graflardan bazıları sınıflandırılmıştır. Bu bağlamda tanımlanan afin graflar, projektif graflar ve dejenere projektifler graf parçalarının regülerlikleri kullanılarak, $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(n + 1)-$ regüler lineer graflar projektif graf, $(n + 1, n)-$ biregüler lineer grafların afin graflar, $\mathcal{P}$ parçası $(n - 1, 2)-$ biregüler lineer grafların tam graflardan elde edilen graflar ve $\mathcal{P}$ parçası $(n - 1, 2)$ biregüler ve $\mathcal{L}$ parçası $(n - 1, 2)-$ biregüler olan lineer grafların dejenere projektif graf olarak karakterizasyonu yapılmıştır. Ayrıca

i. Lineer graf olan çevre grafları karakterize edilmiştir.

ii. Tam graflardan lineer graflar elde edilmiştir.

iii. Lineer grafların bazı yasaklı grafları karakterize edilmiş ve lineer grafların C_4 ü alt graf olarak içermedikleri ortaya koyulmuştur. Dejenere projektif graflarının $n \neq 6$ olmak üzere C_n alt graf olarak içermedikleri gösterilmiştir.

iv. Lineer graflarda bağlantı sayısı tanımlanmış ve lineer graflarının projektif graf veya afin graf olmaları için gerekli bağlantı sayısı ile düğüm dereceleri arasındaki ilişkiler ortaya koyulmuştur.

v. Sınıflandırılan lineer graflardan bazılarının Euler graf olması için gerekli koşullar incelenmiştir.

vi. Komşuluk grafları incelenerek lineer grafların komşuluk graflarıyla ilgili özellikler elde edilmiştir. Ayrıca Friendship graflarının komşuluk graflarının lineer graf olduğu ortaya koyulmuştur.

vii. Graflar için önemli bir özellik olan Wiener indeks kavramı kullanılarak lineer grafların Wiener indeksleri hesaplanmıştır.

Bu sonuçlar ışıında $n, r, m, s \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere (n, r) –biregüler lineer graflar ve $\mathcal{P}$ parçası (n, r) , $\mathcal{L}$ parçası (m, s) – biregüler olan lineer grafların sınıflandırılması yapılabilir. $\{0, 1\}$ –semi graflarla ilgili sonuçlardan hareketle $0 < a < b$ olacak şekildeki a ve b tamsayıları için $|\mathcal{A}_{N(p)}^0(L)| \in \{0, a, b\}$ olan lineer graflar araştırılabilir. Bazı özel graflardan lineer graf elde edilme koşulları incelenebilir. Ayrıca lineer graflardan ağaçlar elde edilip bunların Wiener indekleri tespit edilerek kimyasal graflarla ilişkilerine bakılabilir ve lineer grafların enerjileriyle ilgili çalışmalar yapılabilir. $k \geq 2$ ve $t \geq 1$ olacak şekilde birer tamsayı olmak üzere iki kümeli grafların parçasından birinin herhangi k tane düğümün ortak komşulunun t olması halinde elde edilen graflarla çeşitli geometrik yapılar arasında ilişki kurulabilir.

Son olarakta, lineer grafların bir uygulaması olarak özellikle projektif graf ve afin graflar kullanılarak Kodlama Teorisinde önemli bir rolü olan Düşük Yoğunluklu Eşlik Denetim Kodlarının(LCPC) elde edilmesine yönelik çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Asratian, A. S., Denley T.M.J., Häggkvist R., 1998, Bipartite graphs and their applications, Cambridge university press, 131.
- Batten, L. M., 1997, Combinatorics of finite geometries, 2nd ed. English, Cambridge University Press.
- Brouwer, A. E., 2006, Classification of small (0,2)-graphs, J. Comb. Theory, Ser. A 113, 1636–1645, DOI: 10.1016/j.jcta.2006.03.023.
- Brouwer, A. E., Mulder H. M., 1997, The vertex connectivity of a (0,2)-graph equals its degree, Discrete Math., 169: 153–155, DOI: 10.1016/S0012-365X(96) 00367-6.
- Brouwer, A. E., Östergård P. R. J., 2009, Classification of the (0, 2)-graphs of valency 8, English, Discrete Math., 309(3): 532–547, ISSN: 0012-365X.
- Camille, J., 1869, Sur les assemblages de lignes, French, J. Reine Angew. Math., 70: 185–190, ISSN: 0075-4102; 1435-5345/e.
- Cayley, A., 1857, On the theory of the analytical forms called trees, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 13.85, 172–176. DOI: 10.1080 / 14786445708642275.
- Chartrand, G., Lesniak, L., 2005, Graphs and Digraphs, fourth ed., Chapman and Hall/CRC, London.
- Chvátal, V., Kotzig A., Rosenberg, I. G., Davies, R. O., 1976, There are $2^{\aleph_\alpha}$ friendship graphs of cardinal $\aleph_\alpha$, Canadian Mathematical Bulletin, 19(4): 431–433.
- Cohen, N., Dimitrov D., Krakovski R., Skrekovski R. ve Vukašinović V, 2010, On Wiener index of graphs and their line graphs, Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64(3): 683–698.
- Dobrynin, A.A., Entringer R. ve Gutman I., 2001, Wiener index of trees: theory and applications, Acta Applicandae Mathematica, 66(3): 211–249.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- Graovac, A. ve T. Pisanski, 1991, On the Wiener index of a graph, Journal of mathematical chemistry, 8(1): 53–62.
- Günaltılı, İ., Ulukan A. ve Olgun Ş., 2013, Some properties of finite $\{0,1\}$ -graphs, Konuralp Journal of Mathematics, 1(1): 34-39.
- Günaltılı, İ., 2013, Finite Regular 0,1-bigraphs, Procedia - Social and Behavioral Sciences 89. 2nd Cyprus International Conference on Educational Research (CY-ICER 2013), 529–532. ISSN: 1877-0428.
- Güney, Y., 2005, Sonlu Graf Teorisi Ve Bazı Geometrik Uygulamaları Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kaya, R., 2005, Projektif geometri, Osmangazi Üniversitesi.
- Knor, M., Škrekovski R., Tepeh A., 2015, Mathematical aspects of Wiener index, arXiv preprint arXiv:1510.00800.
- Knor, M., Luzar, B., Skrekovski, R., Gutman, I., 2014, On Wiener index of common neighborhood graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 72(1) : 321–332.
- König, D., 1915, Line systems and determinants, Math. Termész. Ert, 33: 221-229.
- König, D., 1916, Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und Mengenlehre. Mathematische Annalen, 77(4): 453-465.
- Kulli, V. R., 2015, The neighborhood graph of a graph, International Journal of Fuzzy Mathematical Archive, 8(2): 93-99.
- Levi, F. W., 1942, Finite geometrical systems, six public lectures delivered in February, 1940, at the University of Calcutta, University of Calcutta.
- Li, S., Song, Y., 2014, On the sum of all distances in bipartite graphs, Discrete Applied Mathematics, 169: 176-185.
- Mulder, H. M., 1979, $(0, \lambda)$ -graphs and n-cubes, Discrete mathematics, 28(2): 179–188.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- Sunar, R., Günaltılı, İ., 2021, On The Basic Properties of Linear Graphs-I, Konuralp Journal of Mathematics (KJM), 9(1): 154-158.
- Sylvester, J. J., 1875, On recent discoveries in mechanical conversion of motion, Van Nostrand's Eclectic Engineering Magazine (1869-1879), 12(76): 313.
- Ulukan, A., 2012, Sonlu Bitişik İki Kümeli Graflar Üzerine, Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Vasudev, C., 2006, Graph theory with applications, New Age International.
- Walikar, H.B., Shigehalli V.S., Ramane H.S., 2004, Bounds on the Wiener number of a graph, Match-Communication In Mathematical And In Computer Chemistry, 50: 117–132.
- West, D.B., 2001, Introduction to graph theory, Upper Saddle River: Prentice hall, 2.
- Wiener, H., 1947, Structural determination of paraffin boiling points, Journal of the American chemical society, 69(1): 17–20.