

Maksimum Metrik İle Donatılmış Düzlemde Ve Uzayda İnversonlar

Yunus Cırık

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2022

The Inversions In The Plane And The Space Donated With The Maximum Metric

Yunus Cırık

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

Ocak 2022

Maksimum Metrik İle Donatılmış Düzlemde Ve Uzayda İnversonlar

Yunus Cırık

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Ocak 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi danışmanlığında hazırlamış olduğum “Maksimum Metrik İle Donatılmış Düzlemde ve Uzayda İnversonlar” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 12/01/2022

Yunus Cırık

ÖZET

Bu tez d_M maksimum metriği ile donatılmış \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde ve \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında sırasıyla maksimum çemberine ve maksimum kürelerine göre inversiyon dönüşümleri çalışılmıştır.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin giriş ve amacı bulunmaktadır. İkinci bölümünde tez konusu ile ilgili literatür araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde maksimum düzlem ve maksimum uzay geometrisindeki temel tanım ve kavramlardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde maksimum çemberine göre inversiyon dönüşümü ve sonuçları verilmektedir. Beşinci bölümde ise 3-boyutlu maksimum uzayında küresel inversiyon tanımlanmakta ve bununla ilgili tanım, teorem ve sonuçlar sunulmaktadır. Altıncı bölümde bu tez çalışması ile ilgili bulgular ve tartışmalara yer verilmiştir. Son bölüm olan yedinci bölümde tez ile ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Maksimum uzaklık, Chebyshev Uzaklığı, Maksimum düzlem, Maksimum uzay, İversiyon

SUMMARY

In this thesis the circle inversion and the spherical inversion is studied in \mathbb{R}_M^2 maximum plane and \mathbb{R}_M^3 maximum space donated with d_M maximum metric, respectively.

It consists of seven chapters. The first chapter contains the introduction and purpose of the thesis. In the second chapter, the literature research related to the topic is given. In the third chapter, the basic definitions and concepts in maximum plane and maximum space geometry are mentioned. In the fourth chapter, the circle inversion in the maximum plane and its results are given. In the fifth chapter, the spherical inversion is defined in 3-dimensional maximum space and definitions, theorems and results related to the spherical inversion are presented. In the sixth chapter, the findings and discussions related to this thesis study are given. In the last chapter, the conclusions and suggestions are given.

Keywords: The maximum distance, The Chebyshev distance, The maximum plane, The maximum space, Inversion

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	4
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
3.2 Maksimum Düzleminde İzometrilere	7
3.3 Maksimum Uzayında İzometrilere	8
4. MAKSİMUM DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYONLAR	9
4.1 Maksimum Düzleminde Çembere Göre İncersiyonlar	10
4.2 Çifte Oran	30
4.3 Harmonik Eşlenik	36
5. 3-BOYUTLU MAKSİMUM UZAYINDA MAKSİMUM KÜRESEL İNVERSİYONLAR	39
5.1 Maksimum Uzayda Küresel İncersiyonlar	40
5.2 Çifte Oran	70
5.3 Harmonik Eşlenik	75
6. BULGULAR VE TARTIŞMA	78
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	80
KAYNAKLAR DİZİNİ	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. \mathbb{R}_M^2 Maksimum Düzleminde Birim Çember	9
4.2. Maksimum İvers Noktalar	11
4.3. Merkezil Maksimum Çemberine Göre Eksenler Üzerindeki Noktaların İversleri	15
4.4. İversiyon Merkezinden Geçen Doğrunun İvaryantlığı	17
4.5. $a = 0, b \neq 0$ İken İversiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İversi	19
4.6. $a \neq 0, b = 0$ İken İversiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İversi	20
4.7. $a \neq 0, b \neq 0$ İken İversiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İversi	21
4.8. $a = 0, b \neq 0$ İken İversiyon Çemberini İki Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi	22
4.9. $a \neq 0, b = 0$ İken İversiyon Çemberini İki Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi	23
4.10. $a \neq 0, b \neq 0$ İken İversiyon Çemberini İki Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi	24
4.11. $m = \infty$ İken İversiyon Çemberini Sonsuz Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi	25
4.12. $m = 0$ İken İversiyon Çemberini Sonsuz Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi	26
4.13. ℓ Doğrusunun \mathcal{C} Çemberini A1 Noktasında Kesmesi Durumu	27
4.14. ℓ Doğrusunun \mathcal{C} Çemberini A2 Noktasında Kesmesi Durumu	28
4.15. ℓ doğrusunun \mathcal{C} çemberini A3 noktasında kesmesi durumu	28
4.16. ℓ Doğrusunun \mathcal{C} Çemberini A4 Noktasında Kesmesi Durumu	29
4.17. \mathbb{R}_M^2 Maksimum Düzleminde O Merkezli Bir Çemberin Maksimum Çember İversi	30
4.18. Yön Değişimi	34
4.19. Ayırma Özelliği	35
5.1. \mathbb{R}_M^3 Maksimum Uzayında Birim Küre	40
5.2. Merkezil Maksimum Küresinde İvers Noktalar	42
5.3. Yön Değişimi	74
5.4. Ayırma Özelliği	74

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**Simgeler****Açıklama**

\mathcal{C}	Maksimum çemberi
\mathcal{K}	Maksimum küresi

Kısaltmalar**Açıklama**

\mathbb{R}_M^2	Maksimum düzlemi
\mathbb{R}_M^3	Maksimum uzayı
d_M	Maksimum uzaklık
d_E	Öklidyen uzaklık
\mathfrak{S}_M	Maksimum düzlemde izometrik yansımalarının kümesi
\mathcal{R}_θ	Maksimum düzlemde izometrik dönmelerin kümesi

1. GİRİŞ VE AMAÇ

n – boyutlu Öklidyen uzay \mathbb{R}^n deki $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(X, Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

ile hesaplanır.

Öklidyen uzaklık, verilen uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı elde etmede her zaman yeterli olmayabilir. Örneğin iki yerleşim yeri arasındaki mesafe kuş uçuşundaki gibi düz bir doğru üzerinden değil de, bunun yerine sokak planı birbirine dik ya da paralel olan yollardan gidilerek ölçülmesi gerekebilir. Bu durumda uzaklık taxicab uzaklığı ile ölçülmelidir. Minkowski tarafından sunulmuş, Öklidyen uzaklık ve taxicab uzaklığını da içeren Minkowski uzaklığı

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile ifade edilir. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dir. Minkowski uzaklığı bir metrik ailesidir. Minkowski uzaklığı ile verilen norma p – norm (\mathcal{L}^p – norm) denir. n – boyutlu Öklidyen uzaydaki herhangi bir $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün p – normu

$$\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile hesaplanır. $p = 2$ iken Öklidyen (\mathcal{L}^2 – norm) $p = 1$ iken taxicab norm (\mathcal{L}^1 – norm) dir. $p \rightarrow \infty$ iken \mathcal{L}^p – normlarının limiti maximum norma (\mathcal{L}^∞ – norm) karşılık gelir. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün maksimum normu

$$\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

dir.

n – boyutlu uzayda X ve Y noktaları arasındaki maksimum uzaklık $X - Y$ vektörünün maksimum normu olup

$$d_M(X, Y) = \|X - Y\|_M = \|X - Y\|_\infty = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

dir. Literatürde maksimum norm yerine Chebyshev normu, uniform norm, supremum norm, infinity norm, ifadeleri de kullanılmaktadır.

Matematik, fizik ve bilgisayar gibi alanlarda uygulamalara sahiptir. $K - NN$ ve $K - Means$ gibi birçok denetim ve denetimsiz makine öğrenme modellerinin çıktığı tahmin etmesi iki veri noktası arasındaki uzaklığa bağlıdır. Bu nedenle metrik bu modellerde uzaklığı hesaplamada önemli rol oynar. Makine öğrenme modellerinde kullanılan bazı metrikler Minkowski, Manhattan, Öklidyen, Hamming ve Kosinüs gibidir.

Maksimum metriği ticari hisse senetleri, kripto para birimleri gibi varlıkların hacim, teklif, talep gibi özelliklerinin incelenmesinde kullanılır. Mesela kayıplar ve kazançlar arasında büyük fark olan kripto para birimlerini belirleyen bir yol olarak kullanılabilir.

Çembere göre inversiyon Pergalı Apollonius tarafından “Plane Loci” eserinde sunulmuştur, 1830 larda Steiner tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir, (Ramirez vd., 2015). Bu dönüşümün geometrideki çeşitli teoremlere ve problemlere bu dönüşüm uygulamasıyla daha anlaşılır hale gelmiştir. Örneğin Pappus zinciri, Feuerbach’s teoremi, Ptolemy teoremi, Steiner Porism, Apollonius problemi gibi.

Öklidyen düzlemde O herhangi bir nokta ve $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $O -$ merkezli $r -$ yarıçaplı bir P noktasının görüntüsü \overline{OP} ışını üzerinde bulunan P' noktasıdır ve $d_E(O, P)$ ve $d_E(O, P')$ uzunluklarının çarpımı r^2 dir. Yani $d_E(O, P) \cdot d_E(O, P') = r^2$ dir. Burada r çembere göre inversiyonun yarıçapı O ise çembere göre inversiyonun merkezidir. Bu dönüşüm bölge içindeki noktaları dışarı, dışarıdaki noktaları ise içeri taşır. Çembere göre inversiyon açıları korur. Dönüşümün temel özelliklerinden birisi bir doğrunun çembere dönüşmesidir, (Ramirez vd., 2015).

İnversiyon çemberi yerine bir konik veya yıldız şekilli küme (star-shaped set) kullanılarak inversiyonların bir genellemesi verilmiştir, (K. Gdawiec, 2014 – J. Ramirez ve G. Rubiano, 2014). Daha sonra Öklidyen uzaklık yerine farklı Öklidyen olmayan uzaklıklar kullanılarak çembere göre inversiyonlar incelenmiştir, (Bayar ve Ekmekçi, 2014). İ inversiyon tanımında küre ve elipsoid kullanılarak Öklidyen uzayda inversiyon dönüşümü tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir, (J. Ramirez ve G. Rubiano, 2016). Taxicab ve Çin Dama uzaklığı kullanılarak 3-boyutlu uzayda küresel inversiyonlar verilmiştir, (Pekzorlu, 2019).

Bu çalışmada maksimum uzaklık fonksiyonu kullanılarak, düzlemde ve uzayda sırasıyla maksimum çembere ve maksimum küreye göre inversiyon dönüşümleri sunularak, özellikleri verilmektedir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çembere göre inversiyon Pergalı Apollonius tarafından “Plane Loci” eserinde sunulmuştur. 1830 larda Steiner tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir. Geometrideki çeşitli teoremlere ve problemlere bu dönüşüm uygulanarak daha incelenebilir duruma getirilmiştir. Örneğin Pappus zinciri, Feuerbach’s teoremi, Ptolemy teoremi, Steiner Porism, Apollonius problemi gibi.

Coxeter'e göre çember üzerinde inversiyon ile dönüşüm 1831'de L. I. Magnus tarafından icat edildi. 1831'de matematikçi Ludwig Immanuel Magnus, R yarıçaplı bir çember içinde inversiyon ile oluşturulan düzlemin dönüşümleri hakkında bilgileri zamanla yayınlamaya başladı.

Ramirez (2014), Çembere göre klasik inversiyonun bir genelmesi olan bir elipse göre inversiyonu tanımlamış ve bazı özellikleri incelemiştir. Elipse göre inversiyonlar altında doğrular, elipsler ve diğer eğriler çalışılmıştır. Son olarakta elipse göre Pappus zincirinden bahsedilmiştir.

Bayar ve Ekmekçi (2014), Taksi düzleminde çembere göre inversiyon tanımını vererek nokta, doğru, çifte oran, harmonik eşlenik taxicab koniklerinin inverslerini incelemişlerdir.

Bayar ve Pekzorlu (2020), Üç boyutlu Çin Dama uzayında Çin Dama inversiyonları incelediler. Ayrıca bu uzayda harmonik eşlenik, çifte oran doğru, düzlemlerin Çin Dama kürelerine göre inversiyonlarını incelediler.

Pekzorlu (2019), Bazı Öklidyen olmayan geometrilere inversiyonlar üzerine başlıklı tez çalışmasında Çin Dama düzleminde çembere göre inversiyonu tanımlayarak özellikleri incelemiştir. Daha sonra 3-boyutlu taksi uzayında küresel inversiyon tanımını yapmış ve Çin Dama uzayında küresel inversiyonları tanımlayarak, özelliklerini vermiştir.

Salihova (2006), Maksimum metriğinin geometrisi üzerine yaptığı tez çalışmasında maksimum uzaklık ve maksimum düzlemi incelemiştir. Daha sonra Öklid düzlemi ile maksimum düzlem geometrisinin yapılarını karşılaştırılarak Öklidyen uzaklık ve maksimum uzaklık arasındaki fonksiyonel ilişki verilmiştir. Öklidyen düzlemdeki bazı teoremlerin maksimum düzlemdeki karşılıkları, maksimum düzlemin izometri grubu, maksimum düzleminde konikler ile ilgili teorem ve özellikleri incelenmiştir.

Ermış ve Kaya (2015), d_M maksimum uzaklık fonksiyonu ile \mathbb{R}_M^3 uzay geometrisini sunmuşlar ve \mathbb{R}_M^3 ün izometrilerini incelemiştir.

Gelişgen ve Ermış (2019), Alpha düzleminde inversiyon tanımını vererek bu inversiyonla ilgili özellikleri vermişlerdir.

Sezgin (2014), Öklidyen düzlemde inversiyon tanımını, bir noktanın inversiyonunu, bir noktanın inversiyonun analitik incelemesini ayrıca doğruların, çemberlerin ve açılarının inversiyonunu inceledikten sonra inversiyonun uzaklık ile ilişkisini de incelemiş ve daha sonra taksi düzlemde inversiyon tanımını yapmış ve taksi düzlemde noktanın doğruların inversiyonunu incelemiştir.

Yıldırım (2018), Maksimum metriği geometrisinde uzaklık formülleri üzerine tez çalışmasında Öklid uzayındaki bazı temel kavramlar, maksimum uzaklık, maksimum düzlemi ve maksimum uzay geometrisinde maksimum metrik ve bazı uzaklık formüllerini incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1.1: n – boyutlu Öklidyen uzay \mathbb{R}^n deki $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktaları arasındaki maksimum uzaklık

$$d_M(X, Y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu uzaklık ile donatılmış uzaya n -boyutlu maksimum uzay denir. Bu uzaklık \mathbb{R}_M^n ile gösterilir. Özel olarak $n = 2$ ve $n = 3$ iken \mathbb{R}_M^2 ve \mathbb{R}_M^3 ile sırasıyla maksimum düzlem ve 3-boyutlu maksimum uzay belirtilir. Maksimum düzlem ve maksimum uzayın noktaları, doğruları, açıları öklidyen düzlem ve öklidyen uzay ile aynıdır.

Teorem 3.1.2: d_M uzaklık fonksiyonu bir metrik belirtir, (Salihova, 2006).

Tanım 3.1.3: $d \dots ax + by + c = 0$ maksimum düzleminde bir doğru olsun. d doğrusunun eğimi m olmak üzere;

- a) $|m| > 1$ ise doğru, dikeysel doğru
- b) $|m| < 1$ ise doğru, yataysal doğru
- c) $|m| = 1$ ise doğru, ayıraç doğru

olarak adlandırılır, (Ekmekçi, 2001).

Tanım 3.1.4: $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_M$ noktasının $d \dots ax + by + c = 0$ doğrusuna olan d_M uzaklığı $d_M(P, d)$; $X(x, y) \in d_M$ olmak üzere $d_M(P, X)$ değerlerinin en küçüğü

$$d_M(P, d) = \min_{X \in d} d_M(P, X)$$

olarak tanımlanır, (Salihova, 2006).

Teorem 3.1.5: $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_M^2$ noktasının $ax + by + c = 0$ denklemlerle d doğrusuna olan maksimum uzaklığı

$$d_M(P, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

şeklindedir, (Salihova, 2006).

3.2 Maksimum Düzleminde İzometriler

Teorem 3.2.1: \mathbb{R}_M^2 de her öteleme bir izometridir. (Salihova, 2006).

Teorem 3.2.2: \mathbb{R}_M^2 de izometrik yansımalarının kümesi

$$\mathfrak{S}_M = \{x = 0, y = 0, y = \mp x\}$$

doğrularına göre dört yansımadan oluşur, (Salihova, 2006).

Teorem 3.2.3: Maksimum düzlemin izometri belirten sadece dört tane dönmesi vardır. \mathbb{R}_M^2 de bu izometrik dönmelerin kümesi;

$$\mathcal{R}_\theta = \left\{ r(\theta) \mid k \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

(Salihova, 2001).

Böylece \mathbb{R}_M^2 dört yansıma ve dört dönmeden oluşan D_4 dihedral grubu elde edilir.

$$O_M(2) = \mathcal{R}_\theta \cup \mathfrak{S}_M$$

ortogonal grubu dört yansıma ve dört dönmeden oluşur.

Yani $O_M(2)$ ortogonal grubu karenin simetri olan D_4 dihedral grubudur. Ayrıca \mathbb{R}_M^2 deki tüm izometrilere

$$T(2).O_M(2)$$

den meydana gelir. Burada $T(2)$, \mathbb{R}_M^2 nin ötelemeler grubudur, (Salihova, 2001).

Tanım 3.2.4: \mathbb{R}_M^2 de $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki minimum uzaklıklar kümesi

$$\{X \mid d_M(A, X) + d_M(X, B) = d_M(A, B)\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca \square_{AB} şeklinde gösterilir.

Bu iki noktanın eğimi m olsun. $m = 1$ iken \square_{AB} , \overline{AB} doğru parçasına eşittir. Yani

$$\square_{AB} = \overline{AB}$$

dir. $m \rightarrow \infty$ ve $m = 0$ iken \square_{AB} , köşegeni \overline{AB} , kenarları ± 1 eğimli doğrular olan dikdörtgendir. Buna **standart dikdörtgen** denir, (Salihova, 2006).

3.3 Maksimum Uzayında İzometrilere

Teorem 3.3.1: \mathbb{R}^3 de her öteleme \mathbb{R}_M^3 de izometri belirtir, (Ermiş, Kaya, 2015).

Teorem 3.3.2: \mathbb{R}_M^3 de sahip olduğu düzlemlere göre dokuz Öklid yansıması

$$\{x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x - y = 0, x + z = 0, x - z = 0, y + z = 0, y - z = 0\}$$

düzlemine göre yansımalar izometridir, (Ermiş, Kaya, 2015).

Teorem 3.3.3: $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ denklemleri ℓ doğrusuna göre $r_\theta : \mathbb{R}_M^3 \rightarrow \mathbb{R}_M^3$ bir dönmesinin

izometri olması için gerek ve yeter koşul $r_\theta \in \mathbb{R}_M = \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2 \cup \mathbb{R}_3$ olmasıdır öyle ki:

$$R_1 = \left\{ r_\theta : \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}, \text{ dönme eksenini } D_1 \text{ de bir doğrultu vektörüdür.} \right\}$$

$$R_2 = \left\{ r_\theta : \theta \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}, \text{ dönme eksenini } D_2 \text{ de bir doğrultu vektörüdür.} \right\}$$

$$R_3 = \{ r_\theta : \theta \in \{\pi\}, \text{ dönme eksenini } D_3 \text{ de bir doğrultu vektörüdür.} \}$$

ve burada

$$D_1 = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1),$$

$$D_2 = (1,1,1), (-1,1,1), (1, -1,1), (1,1, -1),$$

$$D_3 = (1,1,0), (1, -1,0), (1,0,1), (1,0, -1), (0,1,1), (0,1, -1)$$

dir, (Ermiş, Kaya, 2015).

4. MAKSİMUM DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYONLAR

Öklidyen düzlem \mathbb{R}^2 deki herhangi iki $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ nokta arasındaki Öklid uzaklık

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

ile hesaplanır. Öklidyen uzaklık yerine maksimum uzaklık kullanıldığında bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d_M(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

ile hesaplanır. Bu uzaklık ile donatılmış düzleme **Maksimum düzlem** denir ve \mathbb{R}_M^2 ile gösterilir. \mathbb{R}_M^2 düzlemi Öklid düzleme benzemektedir. Noktaları, doğruları Öklid düzlem ile aynıdır. Açılar aynı yolla ölçülür. İki nokta arasındaki uzaklık farklı olduğundan bu kavramı içeren tanım ve teoremler değişiklik göstermektedir.

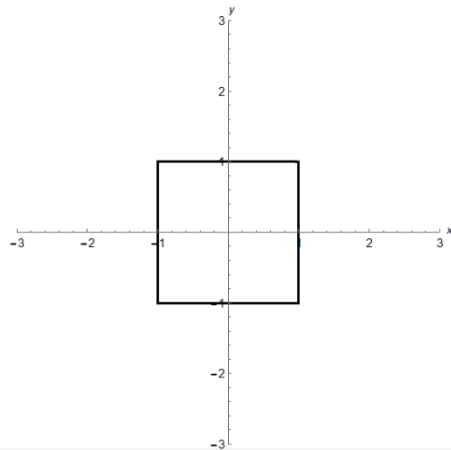
\mathbb{R}_M^2 de bir $M = (m_1, m_2)$ merkezli r – yarıçaplı ($r > 0$) çember

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{X = (x, y) | d_M(M, X) = r, r > 0\} \\ &= \{(x, y) | \max\{|x - m_1|, |y - m_2|\} = r, r > 0\} \end{aligned}$$

kümesidir. \mathbb{R}_M^2 nin **birim çemberi**, $M = (0,0)$ ve $r = 1$ alınarak

$$\mathcal{C} = \{(x, y) | \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

dir. (Şekil 4.1.1)



Şekil 4.1. \mathbb{R}_M^2 Maksimum Düzleminde Birim Çember

4.1 Maksimum Düzleminde Çembere Göre İncersiyonlar

Tanım 4.1.1: \mathbb{R}_M^2 de Maksimum düzleminde \mathcal{C} çemberi, O merkezli ve r yarıçaplı olsun. \mathcal{C} çemberine göre incersiyon $I_{(O,r)}$ dönüşümü

$$I_{(O,r)}: \mathbb{R}_M^2 - O \rightarrow \mathbb{R}_M^2 - O$$

$$I_{(O,r)}(P) = P'$$

biçiminde tanımlanır ve aşağıdaki şartları sağlar:

- i) P', \overline{OP} ışını üzerindedir.
- ii) $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$

P' noktasına P noktasının \mathcal{C} çemberine göre incersi denir. Üstelik P ve P' noktaları da maksimum incerstir. \mathcal{C} ye incersiyon çemberi ve O noktasına incersiyon merkezi denir.

Öklidyen anlamda çembere göre incersiyonların çemberin içinde kalan noktaları çemberin dışına, çemberin dışında kalan noktaları çemberin içine taşıdığı biliniyor. Aşağıdaki teoreminde bu özelliğın maksimum anlamda da geçerli olduğunu gösteriyor.

Teorem 4.1.2: \mathbb{R}_M^2 de O -merkezli, r -yarıçaplı çember \mathcal{C} olmak üzere $I_{(O,r)}$ incersiyonuna göre \mathcal{C} çemberinin dışındaki noktaların maksimum incersi \mathcal{C} çemberinin içinde yer alır. Terside doğrudur.

İspat: \mathbb{R}_M^2 de $\mathcal{C} = \{X | d_M(O, X) = r, r \geq 0\}$ olmak üzere P noktası \mathcal{C} çemberinin dışında ise $d_M(O, P) > r$ olur. $I_{(O,r)}(P) = P'$ ise

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. Buradan

$$r^2 = d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') > r \cdot d_M(O, P')$$

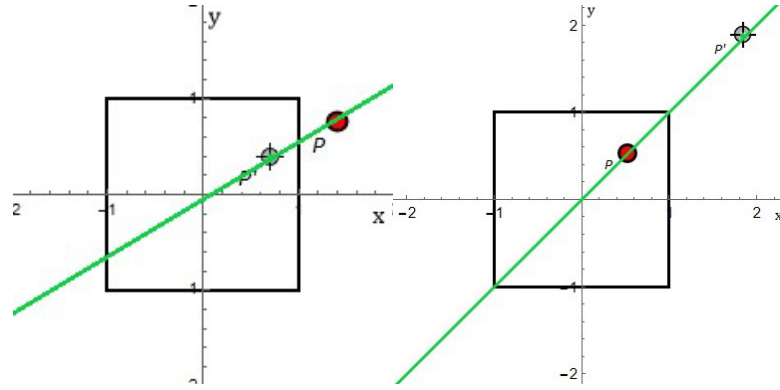
olduğundan $r > d_M(O, P')$ olur. Bu P nin maksimum incersi olan P' noktasının çemberin içinde kaldığını gösterir. Tersini de benzer şekilde gösterebiliriz. P noktası \mathcal{C} çemberinin içinde ise $d_M(O, P) < r$ olur. $I_{(O,r)}(P) = P'$ olduğundan

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dır. Buradan

$$r^2 = d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') < r \cdot d_M(O, P')$$

olduğundan $r < d_M(O, P')$ olur. Yani P' noktası çemberin dışındadır. (Şekil 4.1.2)



Şekil 4.2. Maksimum İvers Noktalar

$I_{(0,r)}$ inversiyonu, inversiyon çemberinin merkezinde tanımlı değildir. İversiyon tanımı gereğince P noktası inversiyon çemberinin merkezine yaklaştıkça inversi olan P' noktası PP' ışını yönünde sonsuza doğru uzaklaşır. Buradan hareket ile düzlemde bulunmayan sonsuzda bir noktanın eklenmesiyle inversiyon merkezinin inversi oluşturulabilir. Yani maksimum düzlemine O_∞ noktası ekleyerek düzlem genişletildiğinde, $\mathbb{R}_M^2 \cup \{O_\infty\}$ inversiyon merkezi O noktasının inversi O_∞ sonsuz noktası olur. Böylece dönüşüm genişletilmiş maksimum düzlemde birebir-örten bir dönüşümdür. Üstelik \mathbb{R}_M^2 maksimum uzayında $I_{(0,r)}^2(P) = P$ olduğundan maksimum çembere göre inversiyonlar involusyonludur. \square

Teorem 4.1.3: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde \mathcal{C} , $O=(0,0)$ merkezi ve r yarıçaplı çember olsun. $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ noktaları $I_{(0,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise P ve P' noktalarının koordinatları arasında

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

eşitlikleri vardır.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde \mathcal{C} , $O = (0,0)$ merkezi ve r yarıçaplı çember olsun.

$$\mathcal{C} = \{(x,y) | \max\{|x|, |y|\} = r, r \geq 0\}$$

ve $P \neq O$ olmak üzere $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ noktaları $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise O, P, P' noktaları doğrudadır. \overrightarrow{OP} ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı yönlü olduğundan $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, $k \in \mathbb{R}^+$ ve

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. Buradan

$$(x', y') = (kx, ky) \quad (1)$$

ve

$$(\max\{|x|, |y|\}) \cdot (\max\{|x'|, |y'|\}) = r^2 \quad (2)$$

$$|k| \cdot (\max\{|x|, |y|\})^2 = r^2$$

$$|k| = \frac{r^2}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

elde edilir. $(x, y), (x', y')$ ile doğruduş olduğundan $k > 0$ dir.

$$k = \frac{r^2}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

ve

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

dir. \square

İnversiyon çemberinin merkezinin (a, b) olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde \mathcal{C} , $O = (a, b)$ merkezi ve r yarıçaplı çember olsun. $P \neq O$ olmak üzere $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ noktaları $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise P ve P' noktaları arasında

$$x' = a + \frac{r^2(x - a)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y - b)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

eşitlikleri vardır.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde \mathcal{C} , $O = (a, b)$ merkezi ve r yarıçaplı çember olsun.

$$\mathcal{C} = \{(x, y) | \max\{|x - a|, |y - b|\} = r, r \geq 0\}$$

ve $P \neq O$ olmak üzere $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ noktaları $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise O, P, P' noktaları doğrudadır. \overrightarrow{OP} ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı yönlü olduğundan $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ $k \in \mathbb{R}^+$ ve

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. Buradan

$$(x' - a, y' - b) = (k(x - a), k(y - b)) \quad (3)$$

ve

$$(\max\{|x - a|, |y - b|\}) \cdot (\max\{|x' - a|, |y' - b|\}) = r^2 \quad (4)$$

$$(\max\{|x - a|, |y - b|\}) \cdot (\max\{k|x - a|, k|y - b|\}) = r^2$$

$$|k| \cdot (\max\{|x - a|, |y - b|\})^2 = r^2$$

elde edilir. $k > 0$ olduğundan

$$k = \frac{r^2}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

ve

$$x' = a + \frac{r^2(x - a)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y - b)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

dır. Ayrıca bu ispat maksimum düzlemde bütün ötelemeler uzaklıkları koruduğundan Teorem 4.1.3 den için inversiyon çemberinin merkezi (a, b) noktasına ötelenerek x' ve y' koordinatlarının değerleri bulunabilir. \square

Teorem 4.1.5: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde üç farklı doğrudaki nokta O, P ve Q olsun. P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre inversleri sırasıyla P' ve Q' ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \quad (5)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde O , P ve Q noktaları doğruduş olsun $I_{(O,r)}$ inversiyona göre P , Q noktalarının inversleri sırasıyla P' ve Q' olduğuna göre

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2 = d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q')$$

dir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= |d_M(O, P') - d_M(O, Q')| \\ &= \left| \frac{r^2}{d_M(O, P)} - \frac{r^2}{d_M(O, Q)} \right| \\ &= \left| \frac{r^2(d_M(O, Q) - d_M(O, P))}{d_M(O, P)d_M(O, Q)} \right| \\ &= \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \end{aligned}$$

elde edilir. \square

\mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde O , P , Q noktaları doğruduş değil iken (5) eşitliği genelde geçerli değildir. Bunu bir örnek ile aşağıda açıklayalım.

Örnek 4.1.6: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (2,2)$ doğruduş olmayan noktalarını göz önüne alalım. İncersiyon çemberinin yarıçapı $r = 1$ olsun. $I_{(O,1)}$ inversiyonuna göre P ve Q noktalarının inversleri sırasıyla $P' = (1,0)$ ve $Q' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{1}{2}, \quad d_M(P, Q) = 2 \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q) = 2 \quad \text{ve}$$

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} = 1$$

olup (5) eşitliği sağlanmaz.

Teorem 4.1.7: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde doğruduş olmayan üç farklı nokta O , P , Q olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre P ve Q noktalarının inversleri sırasıyla P' ve Q' olsun. \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} vektörlerinin eğimleri

$$D_1 = \{0, \infty\} \quad \text{veya} \quad D_2 = \{1, -1\}$$

kümelerinden birisine ait ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

I.DURUM: \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} vektörlerinin eğimleri D_1 kümesine ait olsun. Bu noktaların x ve y- eksenleri üzerinde olması demektir. \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde ötelemeler uzaklıkları koruduğu için $I_{(0,r)}$ inversiyonunun merkezini $O = (0,0)$ almak genelliği bozmaz.

$P = (p, 0)$ ve $Q = (0, q)$ olsun. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, P) = |q|$ olup $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$ ve $d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$ eşitliklerinden $d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$ dir. Teorem 4.1.3 gereğince P ve Q noktalarının $I_{(0,r)}$ inversiyonuna göre inversleri

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q} \right)$$

dır. Buradan

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} = r^2 \max \left\{ \frac{1}{|p|}, \frac{1}{|q|} \right\}$$

elde edilir. Aşağıdaki durumları inceleyelim.

i) $|p| \leq |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(P, Q) = |q|$ olup

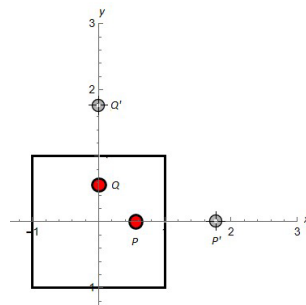
$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |q|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|p|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

ii) $|p| > |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|q|}$ ve $d_M(P, Q) = |p|$ olup

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|q|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir, (Şekil 4. 3.)



Şekil 4.3. Merkezil Maksimum Çemberine Göre Eksenler Üzerindeki Noktaların İversleri

II.DURUM: \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} vektörlerinin eğimleri D_2 kümesine ait olsun. Bu noktaların $y = x$ ve $y = -x$ doğruları üzerinde olması demektir.

$P = (p, p)$ ve $Q = (q, -q)$ olsun. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup, $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$ ve $d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$ eşitliklerinden $d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$ dir. Teorem 4.1.3 gereğince P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonuna inversleri

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{q-p}{p \cdot q} \right|, \left| \frac{q+p}{p \cdot q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p \cdot q|} \max\{|q-p|, |q+p|\} \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki durumları inceleyelim.

i) $|q-p| \leq |q+p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q+p|}{|p \cdot q|} \quad (6)$$

dir. $d_M(P, Q) = \max\{|p-q|, |p+q|\} = |p+q|$

olup (6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|q-p| > |q+p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q-p|}{|p \cdot q|} \quad (7)$$

dir. $d_M(P, Q) = \max\{|p-q|, |p+q|\} = |p-q|$

olup (7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)}$$

elde edilir. \square

Öklidyen düzlemde çembere göre inversiyon altında inversiyon merkezinden geçen doğrular değişmez kalırken merkezden geçmeyen doğrular inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşür. Aşağıdaki teoremlerde bu özelliklerin maksimum düzlemdeki versiyonları sunulmaktadır.

Teorem 4.1.8: Maksimum çember inversiyonunun merkezinden geçen doğrular değişmez kalır.

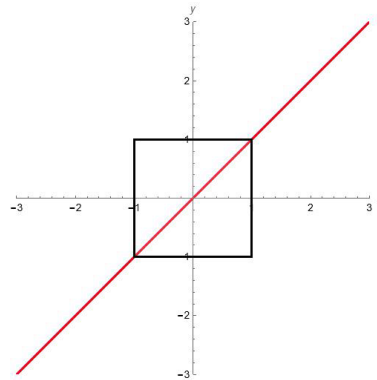
İspat: Öklidyen ötelemeler \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde birer izometri belirttiğinden inversiyon merkezini orijin almak genelliği bozmaz. \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde inversiyon çemberi \mathcal{C} , merkezi $O = (0,0)$ ve yarıçapı r olan bir çember ve $ax + by = 0$ denklemlerli doğru ℓ olsun. ℓ nin maksimum çember inversiyonu $I_{(O,r)}$ altındaki görüntüsü Teorem 4.1.3 gereğince

$$a \frac{x'r^2}{(\max(|x'|, |y'|))^2} + b \frac{y'r^2}{(\max(|x'|, |y'|))^2} = 0$$

dir. Buradan

$$ax'r^2 + by'r^2 = 0$$

olup, ℓ doğrusu maksimum çember inversiyonu altında değişmez kalır. (Şekil 4. 4.)



Şekil 4.4. İncersiyon Merkezinden Geçen Doğrunun İncervantlığı

Teorem 4.1.9: Maksimum çember inversiyonunun merkezinden geçmeyen doğrular inversiyon altında çemberlere dönüşmez.

İspat: Öklidyen ötelemeler \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde birer izometri belirttiğinden inversiyon merkezini orijin almak genelliği bozamaz. \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde inversiyon çemberi \mathcal{C} , merkezi $O = (0,0)$ yarıçapı r olan bir çember ve $ax + by + c = 0$ denklemler merkezden geçmeyen doğru ℓ olsun. Bu durumda $c \neq 0$ dir. O noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı Teorem 3.2.3 gereğince

$$d_M(O, \ell) = \frac{|c|}{|a| + |b|}$$

dir. ℓ doğrusu ile \mathcal{C} çemberinin arakesitteki nokta sayısı $S(\ell \wedge \mathcal{C})$ ile gösterilsin.

Bu durumda

$$S(\ell \wedge \mathcal{C}) = \begin{cases} 2, & d_M(O, \ell) < r \\ 1 \text{ veya } \infty, & d_M(O, \ell) = r \\ 0, & d_M(O, \ell) > r \end{cases}$$

ℓ doğrusunun maksimum çember inversiyonu $I_{(0,r)}$ altındaki görüntüsü Teorem 4.1.3 gereğince

$$a \frac{x'r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\})^2} + b \frac{y'r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\})^2} + c = 0$$

dir. Buradan

$$ax'r^2 + by'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

elde edilir.

1) $S(\ell \wedge \mathcal{C}) = 0$ olsun. Yani ℓ doğrusu \mathcal{C} çemberini kesmesin. Bu durumda

$$d_M(O, \ell) = \frac{|c|}{|a| + |b|} > r$$

dir.

i) $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise

$$d_M(O, \ell) = \left| \frac{c}{b} \right| > r$$

dir. Bu durumda ℓ nin maksimum çember inversi

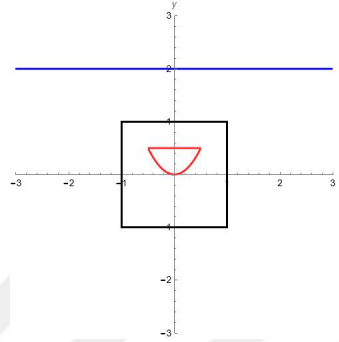
$$by'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir. Bu denklem incelenirse,

- $|x'| > |y'|$ ise $by'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|x'| \leq |y'|$ ise $by'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede ℓ doğrusuna paralel doğru parçası olur.

Böylece ℓ doğrusunun maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen parabol parçası ve ℓ doğrusuna paralel bir doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 5.)



Şekil 4.5. $a = 0$, $b \neq 0$ İken İncersiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İncersi

ii) $a \neq 0$ ve $b = 0$ ise

$$d_M(O, \ell) = \left| \frac{c}{a} \right| > r$$

dir.

Bu durumda ℓ doğrusunun maksimum çember inversi

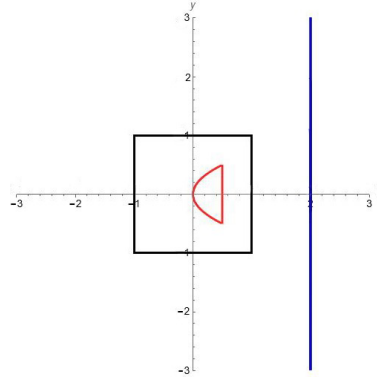
$$ax'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dır. Bu denklem incelenirse,

- $|x'| > |y'|$ ise $ax'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede ℓ doğrusuna paralel doğru parçası parçasıdır.

- $|x'| \leq |y'|$ ise $ax'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen parabol parçası ve ℓ doğrusuna paralel bir doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 6.)



Şekil 4.6. $a \neq 0, b = 0$ İken İncersiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İncersi

iii) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olsun. Burada eğim $m = -\frac{b}{a}$ dir. Şimdi eğimin $|m| = \left| -\frac{b}{a} \right| = 1$ ve $|m| \neq 1$ olması durumlarını inceleyelim.

I. Durum: $|m| = \left| -\frac{b}{a} \right| = 1$ olması durumunda ℓ doğrusu

$$x + y + c = 0 \text{ veya } -x + y + c = 0$$

dir. ℓ doğrusunun $x + y + c = 0$ denklemine sahip iken maksimum çember incersi

$$x' + y' + \frac{c}{r^2} (\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $x' + y' + \frac{c}{r^2} (x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede incersiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $x' + y' + \frac{c}{r^2} (y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede incersiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember incersi, incersiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. Ayrıca bu eğri incersiyon merkezinden geçen ve ℓ ye dik olan doğruya göre de simetriktir. $-x + y + c = 0$ durumunda da aynı sonuçlar elde edilir.

II. Durum: $|m| \neq 1$ olması durumunda ℓ doğrusu

$$ax + by + c = 0 \text{ veya } -ax + by + c = 0$$

dir. $\ell \dots ax + by + c = 0$ iken maksimum çember incersi

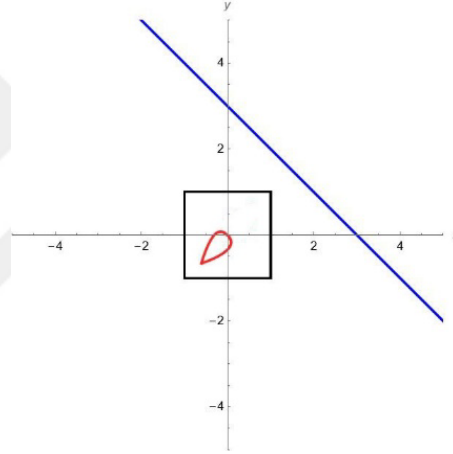
$$ax' + by' + \frac{c}{r^2} (\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $ax' + by' + \frac{c}{r^2} (x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|x'| \leq |y'|$ ise $ax' + by' + \frac{c}{r^2} (y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. Ayrıca bu eğri inversiyon merkezinden geçen ve ℓ ye dik olan doğruya göre de simetriktir. $-ax + by + c = 0$ durumunda da aynı sonuçlar elde edilir. (Şekil 4. 7.)



Şekil 4.7. $a \neq 0, b \neq 0$ İken İversiyon Çemberini Kesmeyen ℓ nin Maksimum Çember İversisi

2) $S(\ell \wedge \mathcal{C}) = 2$ olsun. Yani ℓ doğrusu \mathcal{C} inversiyon çemberini iki noktada kessin. Bu durumda

$$d_M(0, \ell) = \frac{|c|}{|a| + |b|} < r$$

dir.

i) $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise

$$d_M(0, \ell) = \left| \frac{c}{b} \right| < r$$

dir. Bu durumda ℓ nin maksimum çember inversi

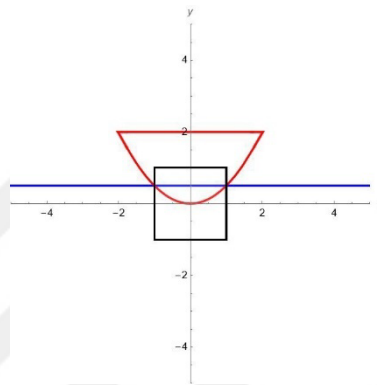
$$by'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $by'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede ℓ doğrusu ve inversiyon çemberinin arakesit noktalarından ve inversiyon merkezinden geçen bir parabol parçasıdır.

- $|x'| \leq |y'|$ ise $by'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede ℓ doğrusuna paralel doğru parçası olur.

Böylece ℓ doğrusunun maksimum çember inversi, ℓ doğrusu ve maksimum çemberinin arakesit noktaları ve inversiyon merkezinden geçen bir parabol parçası ve ℓ doğrusuna paralel doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 8.)



Şekil 4.8. $a = 0$, $b \neq 0$ İken İncersiyon Çemberini İki Noktada Kesin ℓ nin Maksimum Çember İncersi

ii) $a \neq 0$ ve $b = 0$ ise

$$d_M(O, \ell) = \left| \frac{c}{a} \right| < r$$

dir.

Bu durumda ℓ nin maksimum çember inversi

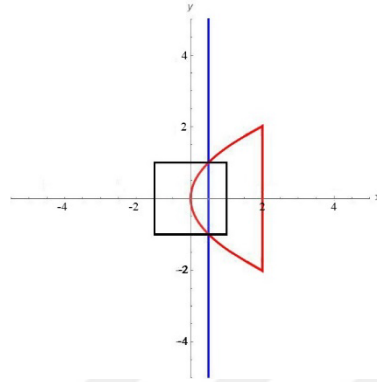
$$ax'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dır.

- $|x'| > |y'|$ ise $ax'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede ℓ doğrusuna paralel doğru parçası olur.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $ax'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezinde ℓ doğrusu ve maksimum çemberinin arakesit noktalarından geçen bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden, ℓ doğrusu ve maksimum çemberinin arakesit noktalarından geçen bir parabol parçası ile ℓ doğrusuna paralel doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 9.)



Şekil 4.9. $a \neq 0, b = 0$ İken İversiyon Çemberini İki Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi

iii) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olsun. O zaman ℓ , $ax + by + c = 0$ denklemlili bir doğrudur. Bu doğrunun eğimine göre aşağıdaki durumlar incelenecektir.

I. Durum: $|m| = \left| -\frac{b}{a} \right| = 1$ olsun. Bu durumda $|a| = |b|$ dir. ℓ doğrusu

$$x + y + c = 0 \text{ veya } -x + y + c = 0 \quad (|c| < r)$$

biçimindedir. $\ell \dots x + y + c = 0$ iken maksimum çember inversi

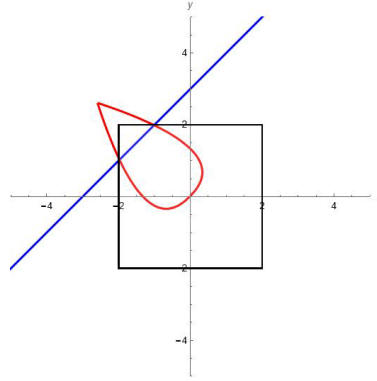
$$x' + y' + \frac{c}{r^2} (\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $x' + y' + \frac{c}{r^2} (x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $x' + y' + \frac{c}{r^2} (y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. Ayrıca bu eğri inversiyon merkezinden geçen ve ℓ ye dik olan doğruya göre de simetriktir. $-x + y + c = 0$ durumunda da aynı sonuçlar elde edilir. Bu durumla ilgili grafik aşağıdaki gibidir. (Şekil 4. 10.)



Şekil 4.10. $a \neq 0, b \neq 0$ İken İncersiyon Çemberini İki Noktada Kesken ℓ nin Maksimum Çember İncersi

II. Durum: $|m| \neq 1$ olsun. Bu durumda $|a| \neq |b|$ dir. ℓ doğrusu

$$ax + by + c = 0 \text{ veya } -ax + by + c = 0$$

dir. $\ell \dots ax + by + c = 0$ iken maksimum çember inversi

$$ax' + by' + \frac{c}{r^2} (\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $ax' + by' + \frac{c}{r^2} (x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede incersiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $ax' + by' + \frac{c}{r^2} (y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede incersiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, incersiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. Ayrıca bu eğri incersiyon merkezinden geçen ve ℓ ye dik olan doğruya göre de simetriktir. $-ax + by + c = 0$ durumunda da aynı sonuçlar elde edilir.

3) $S(\ell \wedge \mathcal{C}) = 1$ veya ∞ olsun. Yani ℓ doğrusu \mathcal{C} incersiyon çemberini tek noktada veya sonsuz noktada kessin. Bu durumda

$$d_M(0, \ell) = \frac{|c|}{|a| + |b|} = r$$

dir.

i) $|m| = \left| \frac{b}{a} \right| = \infty$ olsun. Bu durumda $a = 0$ ve $b \neq 0$ dir. Ayrıca

$$d_M(O, \ell) = \left| \frac{c}{b} \right| = r$$

dir. Yani ℓ doğrusu \mathcal{C} inversiyon çemberini sonsuz noktada keser. Bu durumda ℓ nin maksimum çember inversi

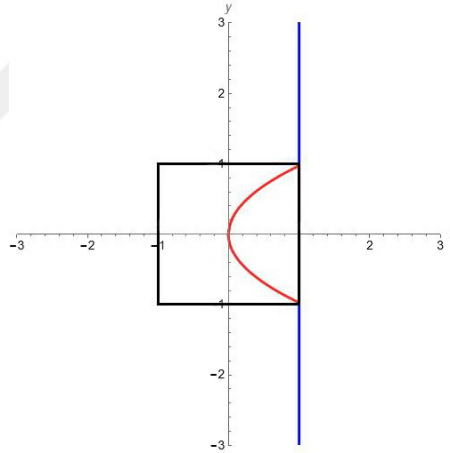
$$by'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dır.

- $|x'| > |y'|$ ise $by'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren ve ℓ doğrusu ve maksimum çemberinin ortak köşe noktalarında noktada kesen bir parabol parçasıdır.

- $|x'| \leq |y'|$ ise $by'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgedeki ℓ doğrusu ile çakışık doğru parçası olur.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen bir parabol parçası ve ℓ doğrusu ile çakışık doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 11.)



Şekil 4.11. $m = \infty$ İken İversiyon Çemberini Sonsuz Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi

ii) $|m| = \left| \frac{b}{a} \right| = 0$ olsun. Bu durumda $a \neq 0$ ve $b = 0$ dir. Ayrıca

$$d_M(O, \ell) = \left| \frac{c}{a} \right| = r$$

dir. Yani ℓ doğrusu \mathcal{C} inversiyon çemberini sonsuz noktada keser. Bu durumda ℓ nin maksimum çember inversi

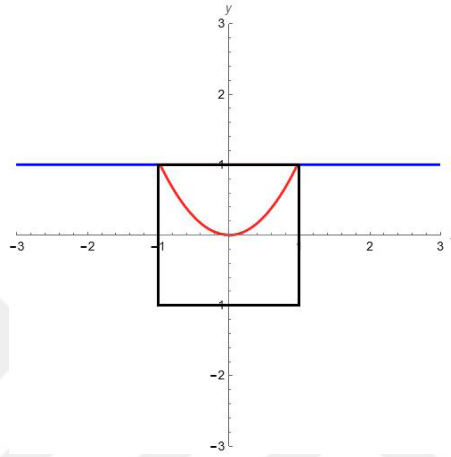
$$ax'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$$

dır.

- $|x'| > |y'|$ ise $ax'r^2 + c(x')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon çemberinin bir kenarıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $ax'r^2 + c(y')^2 = 0$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren ve inversiyon çemberinin iki köşe noktasından geçen bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen bir parabol parçası ve ℓ doğrusu ile çakışık doğru parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 12.)



Şekil 4.12. $m = 0$ İken İversiyon Çemberini Sonsuz Noktada Kesen ℓ nin Maksimum Çember İversi

iii) $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olsun. $\ell \cap \mathcal{C}$ tek noktada olması durumunda

$$d_M(0, \ell) = r, m \neq 0 \text{ ve } m \neq \infty$$

olur.

I. Durum: ℓ ve \mathcal{C} çemberi $A_1(r, r)$ köşe noktasında kesişirse ℓ doğrusunun denklemi

$$y = mx + r(1 - m),$$

$m < 0$ olmalıdır. ℓ doğrusunun maksimum çember inversi

$$y' = mx' + \frac{1}{r}(1 - m)(\max\{|x'|, |y'|\})^2$$

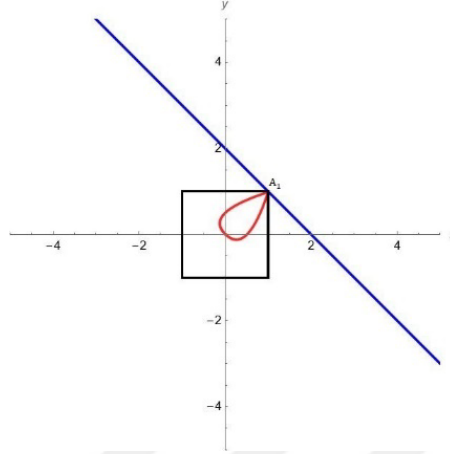
dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(1 - m)(x')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(1 - m)(y')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede

inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 13.)



Şekil 4.13. ℓ Doğrusunun C Çemberini A_1 Noktasında Kesmesi Durumu

II. Durum: ℓ ve C çemberi $A_2(-r, r)$ köşe noktasında kesişirse ℓ doğrusunun denklemi

$$y = mx + r(1 + m),$$

$m > 0$ olmalıdır. ℓ doğrusunun maksimum çember inversi

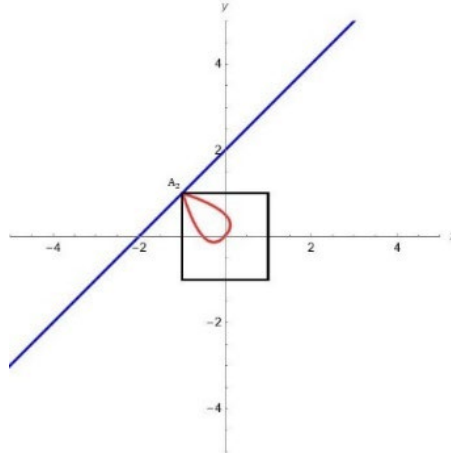
$$y' = mx' + \frac{1}{r}(1 + m)(\max\{|x'|, |y'|\})^2$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(1 + m)(x')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(1 + m)(y')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 14.)



Şekil 4.14. ℓ Doğrusunun \mathcal{C} Çemberini A_2 Noktasında Kesmesi Durumu

III. Durum: ℓ ve \mathcal{C} çemberi $A_3(-r, -r)$ köşe noktasında kesişirse ℓ doğrusunun denklemi

$$y = mx + r(m - 1),$$

$m < 0$ olmalıdır. ℓ doğrusunun maksimum çember inversi

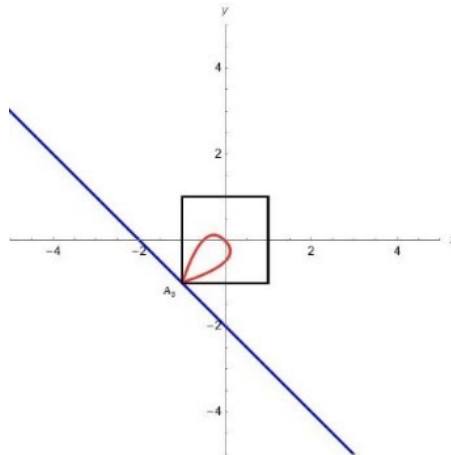
$$y' = mx' + \frac{1}{r}(m - 1)(\max\{|x'|, |y'|\})^2$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(m - 1)(x')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(m - 1)(y')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 15.)



Şekil 4.15. ℓ doğrusunun \mathcal{C} çemberini A_3 noktasında kesmesi durumu

IV. Durum: ℓ ve \mathcal{C} çemberi $A_4(r, -r)$ köşe noktasında kesişirse ℓ doğrusun denklemleri

$$y = mx + r(-m - 1),$$

$m > 0$ olmalıdır. ℓ doğrusunun maksimum çember inversi

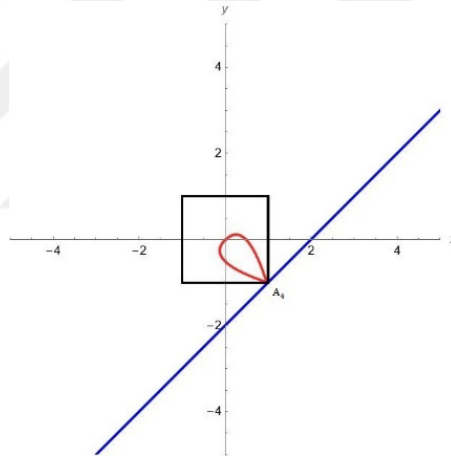
$$y' = mx' + \frac{1}{r}(-m - 1)(\max\{|x'|, |y'|\})^2$$

dir.

- $|x'| > |y'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(-m - 1)(x')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

- $|y'| \geq |x'|$ ise $y' = mx' + \frac{1}{r}(m - 1)(y')^2$ olup, bu denklem ilgili bölgede inversiyon merkezini içeren bir parabol parçasıdır.

Böylece ℓ nin maksimum çember inversi, inversiyon merkezinden geçen iki parabol parçasının belirlediği kapalı bir eğridir. (Şekil 4. 16.)



Şekil 4.16. ℓ Doğrusunun \mathcal{C} Çemberini A_4 Noktasında Kesmesi Durumu

Teorem 4.1.10: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde O merkezli bir çember maksimum çember inversiyonu $I_{(0,r)}$ altında yine O merkezli bir çembere dönüşür.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde ötelemeler koruduğundan maksimum çember inversiyonun merkezini orijin almak genelliği bozmaz. Bu yüzden \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde $I_{(0,r)}$ maksimum çember inversiyonu olmak üzere \mathcal{C}' , merkezi $O = (0,0)$ ve yarıçapı r' olan maksimum çember

$$\mathcal{C}' = \{(x, y) | \max\{|x|, |y|\} = r', r' \in \mathbb{R}^+\}$$

dır.

C' çemberinin $I_{(0,r)}$ maksimum çember inversiyonu altında görüntüsü

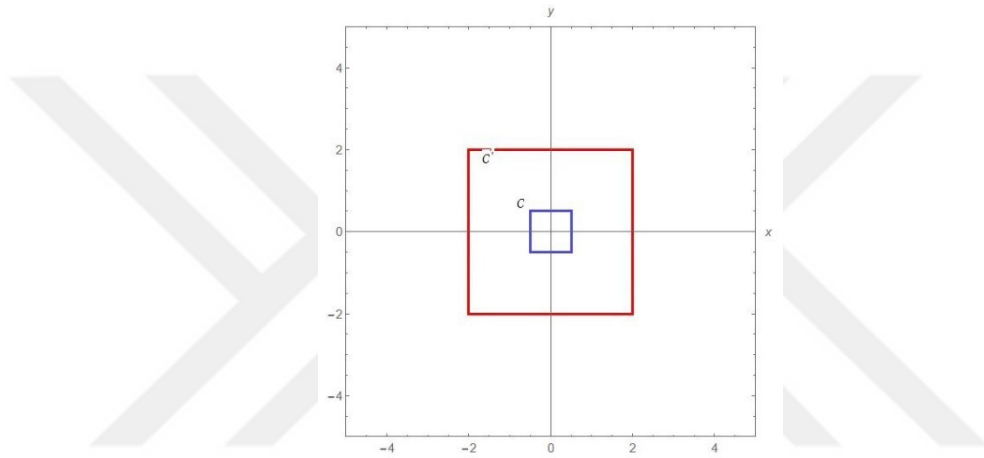
$\forall x, y \in \mathbb{R}_M^2$ için

$$\max\{|x|, |y|\} = \frac{r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\})^2} (\max\{|x'|, |y'|\}) = r'$$

ifadesinden

$$\max\{|x'|, |y'|\} = r'', r'' = \frac{r^2}{r'}$$

elde edilir. Bu merkezi $O = (0,0)$ ve $r'' = \frac{r^2}{r'}$ yarıçaplı maksimum çemberdir. (Şekil 4. 17.)



Şekil 4.17. \mathbb{R}_M^2 Maksimum Düzleminde O Merkezli Bir Çemberin Maksimum Çember İncersi

4.2 Çifte Oran

Tanım 4.2.1: X ve Y noktaları ℓ yönlü doğrusu üzerinde iki nokta olmak üzere \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde \overline{XY} doğru parçasının yönlü maksimum uzunluğu

$$d_M[XY] = \begin{cases} d_M(X, Y), & \overline{XY} \text{ ve } \ell \text{ aynı yönde ise} \\ -d_M(X, Y), & \overline{XY} \text{ ve } \ell \text{ ters yönde ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $d_M[XY] = -d_M[YX]$ dir.

X, Y, Z noktaları aynı yönlü doğru üzerinde ve Z noktası X ve Y noktaları arasında ise bu XZY biçiminde ifade edilir. (Salihova,2006)

Tanım 4.2.2: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğrudan dört farklı nokta olsun. Bu noktaların maksimum çifte oranı $(AB, CD)_M$

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]}$$

biçiminde ifade edilir.

Sonuç 4.2.3: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde A, B, C, D yönlü doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. C ve D noktalarının her ikisi A ve B noktalarının arasında olma ve olmama durumlarında $(AB, CD)_M$ çifte oranı pozitiftir.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde A, B, C, D yönlü doğru üzerinde dört farklı nokta olsun.

a) C ve D noktalarının her ikisi de A ve B arasında olsun. Yani noktaların dizilişi ACDB, ADCB, BCDA, BDCA dizilişlerinden birisidir. Her bir diziliş için çifte oran incelenirse:

i) ACDB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ii) ADCB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

iii) BCDA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

iv) BDCA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

b) C ve D noktalarının her ikisi de A ve B arasında olmasın. Yani noktaların dizilişi CABD, DABC, CBAD, DBAC, CDAB, DCAB, CDBA, DCBA, ABCD, ABDC, BACD, BADC dizilişlerinden biridir.

i) CABD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ii) DABC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} > 0$$

iii) CBAD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} > 0$$

iv) DBAC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} > 0$$

v) CDAB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

vi) DCAB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

vii) CDBA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

viii) DCBA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ix) ABCD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

x) ABDC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

xi) BACD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

xii) BADC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

Sonuç 4.2.4: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta ikililerinin her biri diğerini ayırır ise $(AB, CD)_M$ maksimum çifte oranı negatiftir.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemde A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta ikililerinin her biri diğerini ayırıyorsa nokta dizilişleri ACBD, CADB, DACB, AD BC, CBDA, DBCA, BCAD, BDAC biçimindedir. Her bir diziliş için noktaların çifte oranı incelenirse:

i) ACBD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} < 0$$

ii) CADB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} < 0$$

iii) DACB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} < 0$$

iv) AD BC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} < 0$$

v) CBDA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} < 0$$

vi) DBCA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} < 0$$

vii) BCAD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} < 0$$

viii) BDAC dizilişi için noktaların çifte oranı

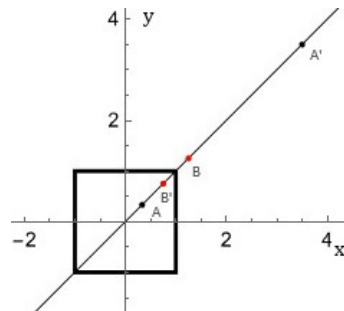
$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} < 0$$

Öklidyen düzlemde inversiyon çemberinin merkezinden farklı doğrudaki dört A, B, C, D noktasının çifte oranı inversiyon invariant kalır. Bu özellik maksimum düzlemde aşağıdaki teoremden incelenmiştir.

Teorem 4.2.5: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde inversiyon merkezinden farklı doğrudaki dört noktanın maksimum çifte oranı maksimum çembere göre inversiyon altında invariant kalır.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde doğrudaki dört nokta O merkezli r yarıçaplı çembere göre inversiyon $I_{(O,r)}$ ve O noktasının farklı doğrudaki dört nokta A, B, C, D olsun. A, B, C, D noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre inversleri sırasıyla A', B', C', D' olsun.

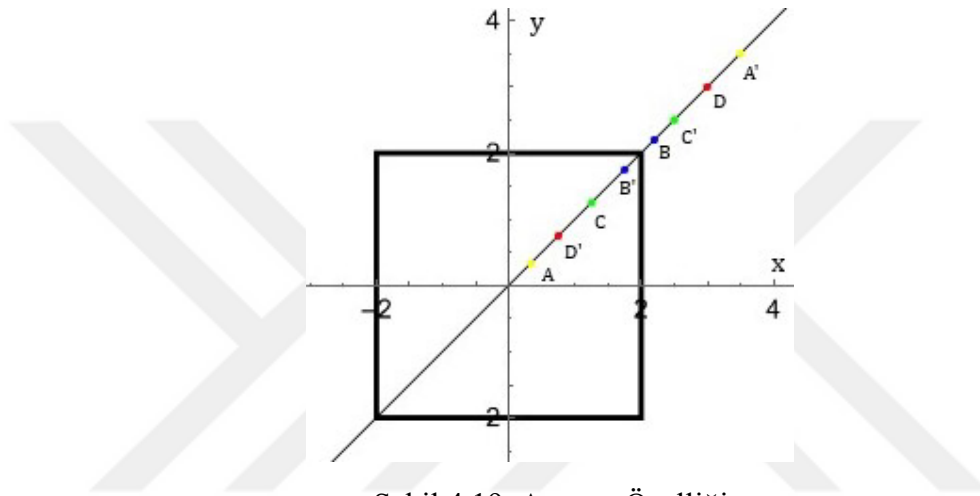
(Şekil 4. 18.)



Şekil 4.18. Yön Değişimi

\mathbb{R}_M^2 de inversiyon çemberinin merkezine yaklaştıkça noktaların inversiyon altındaki görüntüleri merkezden uzaklaşır. İversiyonun bu özelliğinden dolayı (Öklidyen düzlemde olduğu gibi) \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde çembere göre inversiyon altında \overrightarrow{AB} yönlü doğru parçasının inversi olan $\overrightarrow{A'B'}$ yönlü doğru parçasının yönleri zıttır.

Üstelik $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta çiftleri için herbirinin diğerini ayırması veya ayırmaması özelliği inversleri olan $\{A', B'\}$ ve $\{C', D'\}$ nokta çiftlerinde de geçerlidir. Yani bu özellik maksimum düzlemde çembere göre inversiyonlar altında korunur. (Şekil 4. 19.)



Şekil 4.19. Ayırma Özelliği

O zaman A, B, C, D noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre inversleri olan A', B', C', D' noktalarının maksimum çifte oranını inceleyelim:

$$\begin{aligned}
 |(A'B', C'D')_M| &= \left| \frac{d_M[A'C'] \cdot d_M[B'D']}{d_M[A'D'] \cdot d_M[B'C']} \right| = \frac{d_M(A', C') \cdot d_M(B', D')}{d_M(A', D') \cdot d_M(B', C')} \\
 &= \frac{\frac{r^2 d_M(A, C)}{d_M(O, A) \cdot d_M(O, C)} \cdot \frac{r^2 d_M(B, D)}{d_M(O, B) \cdot d_M(O, D)}}{\frac{r^2 d_M(A, D)}{d_M(O, A) \cdot d_M(O, D)} \cdot \frac{r^2 d_M(B, C)}{d_M(O, B) \cdot d_M(O, C)}} \\
 &= \frac{d_M(A, C) \cdot d_M(B, D)}{d_M(A, D) \cdot d_M(B, C)} \\
 &= \frac{d_M[AC] \cdot d_M[BD]}{d_M[AD] \cdot d_M[BC]}
 \end{aligned}$$

elde edilir. \square

4.3 Harmonik Eşlenik

A, B, C noktaları aynı yönlü doğru üzerinde ve C noktası A ve B nin arasında ise C noktası \overline{AB} doğru parçasını böler ve oluşan yönlü maksimum uzunlukların oranı

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \lambda > 0$$

dır. Eğer C noktası \overline{AB} doğru parçasını dıştan bölüyorsa oran

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \lambda < 0$$

dır. Buradaki C noktasına **bölme noktası** denir. Yani C noktası \overline{AB} doğru parçasını λ oranında böler.

$$C \neq B, C = A \Leftrightarrow \lambda = 0$$

dır.

C ve C' noktaları \overline{AB} doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan aynı oranda ve ters yönde bölen iki nokta olsun. Bu durumda

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = -\frac{d_M[AC']}{d_M[C'B]}$$

dir.

Ayrıca doğrudan A, B, C noktaları için

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \frac{d_E[AC]}{d_E[CB]}$$

dir. (Salihova, 2006)

Tanım 4.3.1: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzlemindeki iki nokta A ve B olsun. \overline{AB} doğrusunu

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \frac{d_M[AD]}{d_M[DB]}$$

oranında bölen \overline{AB} doğru parçası üzerindeki C ve D noktalarına A ve B yi harmonik böler denir.

C ve D noktalarına A ve B noktalarına göre maksimum harmonik eşleniktir denir. A, B, C, D doğrudan noktalarına maksimum harmonik küme denir ve $H(AB, CD)_M$ ile gösterilir.

Sonuç 4.3.2: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde A ve B noktalarına göre C ve D noktalarının maksimum harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul $(AB, CD)_M = -1$ olmasıdır.

İspat: C ve D noktaları A ve B noktalarına göre maksimum harmonik eşlenik ise

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = -1$$

dir. Tersine $(AB, CD)_M = -1$ iken

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = -1 \Rightarrow \frac{d_M[AC]}{d_M[BC]} = -\frac{d_M[AD]}{d_M[BD]} = \frac{d_M[AD]}{d_M[DB]}$$

olup C ve D noktaları A ve B ye göre maksimum harmonik eşleniktir. \square

Teorem 4.3.3: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde merkezi $O = (0,0)$ ve çapı \overline{AB} doğru parçası olan çember \mathcal{C} ile belirtilsin. C ve C' noktaları \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan bölen noktalar olsun. Bu durumda A ve B noktalarına göre C ve C' noktalarının maksimum harmonik eşlenik olmaları için gerek ve yeter koşul \mathcal{C} çemberine göre maksimum inversiyon altında C ve C' noktalarının invers noktalar olmasıdır.

İspat: \mathbb{R}_M^2 maksimum düzleminde \mathcal{C} maksimum çemberinin merkezi $O = (0,0)$ ve çapı \overline{AB} doğru parçası olsun. ($r = d_M(O, A) = d_M(O, B)$) C ve C' noktaları \overline{AB} doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan bölen noktalar ise

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = -\frac{d_M[AC']}{d_M[C'B]}$$

dir. Kabul edelim ki A ve B noktalarına göre C ve C' noktaları maksimum harmonik eşlenik olsun. Bu durumda

$$(AB, CC')_M = -1$$

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[AC']} \cdot \frac{d_M[BC']}{d_M[BC]} = -1$$

dir. Burada $d_M[BC] = -d_M(C, B)$ dir.

C noktası \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını içten böldüğü için \mathcal{C} çemberinin içinde olup

$$d_M(C, B) = r - d_M(O, C),$$

$$d_M(A, C) = r + d_M(O, C)$$

dir. Benzer şekilde C' noktası \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını dıştan böldüğünden dolayı C' , \mathcal{C} çemberinin dışında olup

$$d_M(A, C') = r + d_M(O, C'),$$

$$d_M(B, C') = d_M(O, C') - r$$

dir. Buradan

$$\frac{(r + d_M(O, C))}{(r + d_M(O, C'))} \cdot \frac{(d_M(O, C') - r)}{(-r + d_M(O, C))} = -1,$$

$$(r + d_M(O, C)) \cdot (d_M(O, C') - r) = -(r + d_M(O, C')) \cdot (-r + d_M(O, C))$$

$$\Rightarrow rd_M(O, C') - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C)$$

$$= -rd_M(O, C) + r^2 - d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) + rd_M(O, C')$$

$$\Rightarrow d_M(O, C) \cdot d_M(O, C') = r^2$$

dir. Buna göre C ve C' noktaları \mathcal{C} çemberine göre maksimum inverstir.

Tersine C ve C' noktaları \mathcal{C} çemberine göre maksimum invers noktalar olsun. Bu durumda

$$d_M(O, C) \cdot d_M(O, C') = r^2$$

dir.

$$(AB, CC')_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AC']} \cdot \frac{d_M[BC']}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, C')} \cdot \frac{d_M(B, C')}{-d_M(B, C)}$$

$$= \frac{rd_M(O, C') - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C)}{-rd_M(O, C) - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C')}$$

$$= \frac{r(d_M(O, C') - rd_M(O, C))}{r(d_M(O, C) - rd_M(O, C'))}$$

$$= -1$$

elde edilir. Böylece C ve C' noktaları A ve B noktalarına göre harmonik eşleniktir. \square

5. 3–BOYUTLU MAKSİMUM UZAYINDA MAKSİMUM KÜRESEL İNVERSİYONLAR

Bu bölümde maksimum metrik ile donatılmış uzayda maksimum küresine göre inversiyon tanımlanmaktadır. Maksimum uzayda tanımlanan bu yeni dönüşümün bazı özellikleri verilmektedir. Maksimum uzayda düzlemlerin, kürelerin ve diğer eğrilerin maksimum inversleri incelenmektedir.

İnversiyon dönüşümünün pek çok genellemesi literatürde mevcuttur. Örneğin \mathcal{C} inversiyon çemberi yerine paralel doğrular, merkezsiz konikler veya star shape kümeleri alınarak inversiyon dönüşümleri elde edilmektedir. (Childress, 1965; Nickel, J. 1995; Ramirez, 2013; Gdawiec, 2014; Ramirez, 2014; Ramirez and Rubian, 2014). Farklı uzaklıklar (Örneğin; taxicab uzaklığı, p-uzaklık, Çin Dama uzaklığı, α uzaklığı gibi) kullanılarak da öklidyen olmayan düzlemlerde inversiyon dönüşümleri elde edilmektedir. (Bayar ve Ekmekçi, 2014; Gelişgen ve Ermiş, 2019; Nickel, 1995; Pekzorlu, 2019; Ramirez et al, 2015).

İnversiyon dönüşümü küre ve elipsoid kullanılarak 3-boyutlu uzaya genelleştirilmiş ve bu dönüşümün özellikleri incelenmiştir. (Ramirez and Rubian, 2016). 3-boyutlu uzayda inversiyon tanımında taxicab uzaklığı ve Çin Dama uzaklığı kullanılarak Öklidyen olmayan uzaylarda inversiyon dönüşümleri elde edilmiştir, (Pekzorlu ve Bayar, 2020(a); Pekzorlu ve Bayar, 2020(b); Pekzorlu, 2019).

\mathbb{R}^3 Öklidyen uzayında herhangi iki nokta $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere bu iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

ile hesaplanır. Öklidyen uzaklık, d_E , yerine maksimum uzaklık, d_M , kullanıldığında bu iki nokta arasında maksimum uzaklığı

$$d_M(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}$$

dir. Bu uzaklık ile donatılmış uzaya **Maksimum uzay** denir, \mathbb{R}_M^3 ile gösterilir. \mathbb{R}_M^3 uzayının lineer yapısı, uzaklık fonksiyonu hariç , doğruları, düzlemleri aynı olup, açılar aynı şekilde ölçülür.

\mathbb{R}_M^3 uzayında $M = (m_1, m_2, m_3)$ merkezli r –yarıçaplı küre

$$\mathcal{K} = \{X \mid d_M(M, X) = r, r > 0\}$$

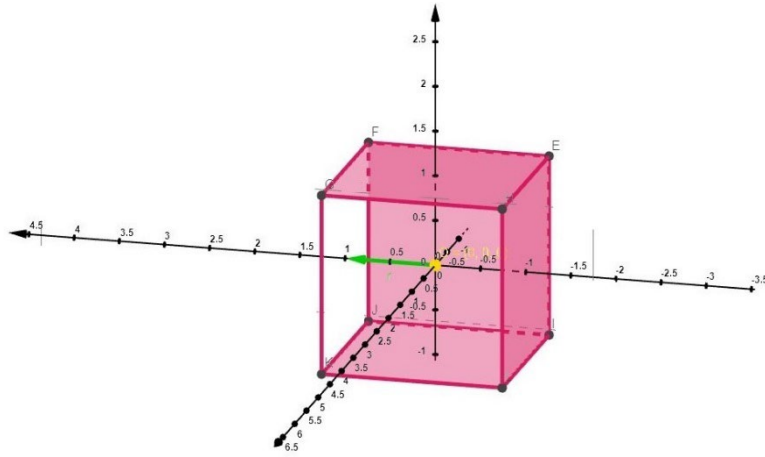
$$= \{(x, y, z) \mid \max\{|x - m_1|, |y - m_2|, |z - m_3|\} = r, r > 0\}$$

noktalar kümesidir.

$M = (0,0,0)$ ve $r = 1$ alınarak **maksimum birim küresi**

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$$

noktalar kümesidir. (Şekil 5. 1.)



Şekil 5.1. \mathbb{R}_M^3 Maksimum Uzayında Birim Küre

\mathbb{R}_M^3 deki maksimum birim küresi \mathbb{R}^3 Öklidyen uzayın düzgün altıyüzlüsü yani küptür.

5.1 Maksimum Uzayda Küresel İncersiyonlar

\mathbb{R}_M^3 Maksimum uzayında O merkezli ve r yarıçaplı küre \mathcal{K} olsun. \mathcal{K} maksimum küresine göre

$$I_{\mathcal{K}}: \mathbb{R}_M^3 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}_M^3 - \{O\}$$

$$I_{\mathcal{K}}(P) = P'$$

dönüşümü olup P' noktası \overline{OP} ışını üzerinde ve

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. \mathcal{K} maksimum küresine “**incersiyon küresi**”, O noktasına “**incersiyonun merkezi**”, r –yarıçapına “**incersiyon yarıçapı**” denir.

\mathbb{R}_M^3 de inversiyon merkezi O dan farklı her P noktası için

$$I_{\mathcal{K}}(P) = P'$$

olsun. Bu durumda $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$ ve $P' \in \overrightarrow{OP}$ dir. Eğer

$$I_{\mathcal{K}}(P') = P''$$

ise $d_M(O, P') \cdot d_M(O, P'') = r^2$ ve $P'' \in \overrightarrow{OP'}$ dir. Buradan

$$d_M(O, P') = d_M(O, P'')$$

olup, $P' = P$ elde edilir. Yani \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayındaki her $P \neq O$ noktası için

$$I_{\mathcal{K}}(I_{\mathcal{K}}(P)) = P$$

olduğundan $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonu involusyonludur.

Öklidyen uzayda küresel inversiyonların kürenin içindeki noktaları kürenin dışına taşıdığı bilinmektedir. Aşağıdaki teoremde bu özelliğın maksimum uzayda geçerli olduğu gösterilmektedir.

Teorem 5.1.1: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında O – merkezli, r – yarıçaplı küre \mathcal{K} olmak üzere $I_{\mathcal{K}}$ küresel inversiyonu \mathcal{K} küresinin dışındaki her noktanın inversini \mathcal{K} küresinin içine taşır. Terside doğrudur.

İspat: \mathbb{R}_M^3 de O – merkezli, r – yarıçaplı küre

$$\mathcal{K} = \{X | d_M(O, X) = r, r > 0\}$$

dir.

\mathcal{K} küresinin dışındaki her P noktası için

$$d_M(O, P) > r$$

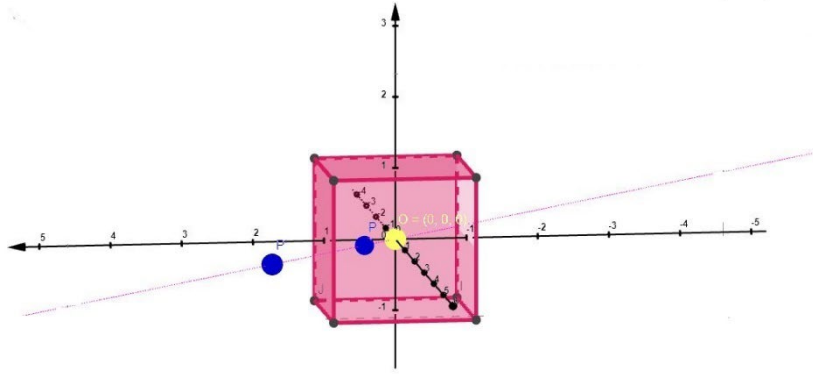
dir. $I_{\mathcal{K}}$ ya göre P noktasının inversi P' ise

$$I_{\mathcal{K}}(P) = P' \text{ ve } d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir.

$$r^2 = d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') > r \cdot d_M(O, P'), \\ r > d_M(O, P')$$

olup, P' noktası geometrik olarak \mathcal{K} küresinin içindedir, (Şekil 5. 2.)□



Şekil 5.2. Merkezil Maksimum Küresinde İvers Noktalar

Teorem 5.1.2: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında O – merkezli r – yarıçaplı küre \mathcal{K} olmak üzere $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonu \mathcal{K} küresi üzerindeki her noktayı değişmez bırakır, yani $P \in \mathcal{K}$ için $I_{\mathcal{K}}(P) = P$ dir.

İspat: $\forall P \in \mathcal{K}$ için $d_M(O, P) = r$ dir. Kabul edelim ki P noktasının maksimum küresel inversi P' olsun. Bu durumda $I_{\mathcal{K}}(P) = P'$ olup,

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. Buradan

$$d_M(O, P') = r$$

elde edilir. Yani $P' \in \mathcal{K}$ dir. Aynı zamanda P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan $P = P'$ elde edilir. \square

Örnek 5.1.3: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında küresel inversiyon merkezi $O = (0,0,0)$ ve inversiyon yarıçapı $r = 1$ olmak üzere $P = (1,0,0)$ noktasının maksimum küresel inversini bulalım.

$$d_M(O, P) = 1 = r$$

dir. P nin maksimum küresel inversi P' noktası ise $I_{\mathcal{K}}(P) = P'$ olup,

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = 1$$

$$d_M(O, P') = 1$$

dir. P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan

$$P' = P = (1,0,0)$$

dir.

Örnek 5.1.4: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında küresel inversiyon merkezi $O = (0,0,0)$ ve inversiyon yarıçapı $r = 1$ olmak üzere $P = (2,2,2)$ noktasının maksimum küresel inversini bulalım.

$$d_M(O, P) = 2$$

dir. P nin maksimum küresel inversi P' noktası ise $I_{\mathcal{K}}(P) = P'$ olup,

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = 1$$

$$d_M(O, P') = \frac{1}{2}$$

dir.

P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan

$$P' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

dır.

Örnek 5.1.5: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında küresel inversiyon merkezi $O = (0,0,0)$ ve inversiyon yarıçapı $r = 1$ olmak üzere $P = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ noktasının maksimum küresel inversini bulalım.

$$d_M(O, P) = \frac{1}{3}$$

dir. P nin maksimum küresel inversi P' noktası ise $I_{\mathcal{K}}(P) = P'$ olup,

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = 1$$

$$d_M(O, P') = 3$$

dir. P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan

$$P' = (3, 0, 0)$$

dır.

Teorem 5.1.6: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı r olsun. Her $P \neq O$ noktasının $I_{\mathcal{K}}$ ya göre maksimum küresel inversi P' ise

$$P' = \left(\frac{r}{d_M(O, P)}\right)^2 P$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında \mathcal{K} inversiyon küresi $O = (0,0,0)$ merkezli ve r – yarıçaplı ise

$$\mathcal{K} = \{X | d_M(O, X) = r, r > 0\}$$

dir.

Her $P = (x, y, z) \neq O$ noktasının $I_{\mathcal{K}}$ ya göre maksimum küresel inversi $P' = (x', y', z')$ olsun. Bu durumda

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir.

P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan O, P, P' noktaları doğrudan olup

$$\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vardır. Buradan

$$(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$$

dir.

$$d_M(O, P') = \lambda d_M(O, P)$$

olup

$$\lambda d_M(O, P)^2 = r^2$$

$$\lambda = \frac{r^2}{d_M(O, P)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$P' = \left(\frac{r}{d_M(O, P)} \right)^2 P$$

dir. \square

Sonuç 5.1.7: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı r olmak üzere her $P = (x, y, z) \neq O$ noktasının maksimum küresel inversi $P' = (x', y', z')$ noktası ise

$$x' = \left(\frac{r}{\max\{|x|, |y|, |z|\}} \right)^2 x$$

$$y' = \left(\frac{r}{\max\{|x|, |y|, |z|\}} \right)^2 y$$

$$z' = \left(\frac{r}{\max\{|x|, |y|, |z|\}} \right)^2 z$$

dir.

Teorem 5.1.8: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi

$O = (a, b, c)$ ve yarıçapı r olsun. Her $P \neq O$ noktasını, $I_{\mathcal{K}}$ ya göre maksimum küresel inversi P' noktası ise

$$P' - O = \left(\frac{r}{d_M(O, P)} \right)^2 (P - O)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında \mathcal{K} inversiyon küresi

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid \max\{|x - a|, |y - b|, |z - c|\} = r, \quad r > 0\}$$

dir. Her $P \neq O$ noktasının $I_{\mathcal{K}}$ ya göre maksimum küresel inversi P' noktası olsun. Bu durumda

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde olduğundan

$$\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

$$P' - O = \lambda(P - O)$$

dir. Buradan

$$|P' - O|_M = |\lambda(P - O)|_M = \lambda|(P - O)|_M$$

dir. Yani

$$d_M(O, P') = \lambda d_M(O, P)$$

dir.

$$\lambda(d_M(O, P))^2 = r^2$$

$$\lambda = \frac{r^2}{d_M(O, P)^2}$$

dir. Böylece

$$P' - O = \left(\frac{r}{d_M(O, P)} \right)^2 (P - O)$$

elde edilir. \square

Sonuç 5.1.9: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi

$O = (a, b, c)$ ve yarıçapı r olmak üzere O dan farklı her $P = (x, y, z)$ noktasının maksimum küresel inversi $P' = (x', y', z')$ noktası ise

$$x' = \left(\frac{r}{\max\{|x - a|, |y - b|, |z - c|\}} \right)^2 (x - a) + a$$

$$y' = \left(\frac{r}{\max\{|x-a|, |y-b|, |z-c|\}} \right)^2 (y-b) + b$$

$$z' = \left(\frac{r}{\max\{|x-a|, |y-b|, |z-c|\}} \right)^2 (z-c) + c$$

dir.

\mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında bütün ötelemeler izometri olduğundan yukarıda verilen teorem ve sonuç $(0,0,0)$ noktasını (a,b,c) noktasına dönüştüren öteleme dönüşümü kullanılarak da hemen elde edilir.

Teorem 5.1.10: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi O ve yarıçapı r olsun. O, P, Q üç farklı doğrudan nokta olmak üzere P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında O, P, Q üç farklı doğrudan nokta olsun. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olsun. Bu durumda

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2,$$

$$d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. O, P', Q' doğrudan olduğundan

$$d_M(P', Q') = |d_M(O, P') - d_M(O, Q')|$$

$$= \left| \frac{r^2}{d_M(O, P)} - \frac{r^2}{d_M(O, Q)} \right|$$

$$= \left| \frac{r^2 (d_M(O, Q) - d_M(O, P))}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \right|$$

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir. \square

\mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında doğrudan olmayan üç nokta için Teorem 5.1.10 daki eşitlik her zaman geçerli değildir. Bu eşitliğin geçerli olduğu durumlar aşağıdaki teoremde ifade edilmektedir.

Teorem 5.1.11: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi O ve yarıçapı r olsun. $P \neq O$ ve $Q \neq O$ olmak üzere O, P, Q üç farklı doğrudan olmayan noktaları için P ve Q nun maksimum küresel inversleri P' ve Q' olsun. \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} ışınlarının doğrultuları

$$D_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

veya

$$D_2 = \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\}$$

veya

$$D_3 = \{(1,1,0), (1,-1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$$

kümelerinin birine ait ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

I.DURUM: \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} ışınlarının doğrultuları D_1 kümesine ait olsun.

1) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,0,0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0,1,0)$ iken P ve Q noktaları sırasıyla x ve y eksenleri üzerinde olup $P = (p, 0, 0)$ ve $Q = (0, q, 0)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \frac{r^2}{d_M(O, P)^2} P = \frac{r^2}{|p|^2} (p, 0, 0) = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0 \right),$$

$$Q' = \frac{r^2}{d_M(O, Q)^2} Q = \frac{r^2}{|q|^2} (0, q, 0) = \left(0, \frac{r^2}{q}, 0\right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right|, 0 \right\} = r^2 \max \left\{ \frac{1}{|p|}, \frac{1}{|q|}, 0 \right\}$$

dir.

i) $|p| \leq |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(P, Q) = |q|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |q|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|p|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

ii) $|p| > |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|q|}$ ve $d_M(P, Q) = |p|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|q|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

2) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, 0, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 0, 1)$ iken P ve Q noktaları sırasıyla x ve z eksenleri üzerinde olup $P = (p, 0, 0)$ ve $Q = (0, 0, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \frac{r^2}{d_M(O, P)^2} P = \frac{r^2}{|p|^2} (p, 0, 0) = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right),$$

$$Q' = \frac{r^2}{d_M(O, Q)^2} Q = \frac{r^2}{|q|^2} (0, q, 0) = \left(0, 0, \frac{r^2}{q}\right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, 0, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} = r^2 \max \left\{ \frac{1}{|p|}, 0, \frac{1}{|q|} \right\}$$

dir.

i) $|p| \leq |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(P, Q) = |q|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |q|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|p|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

ii) $|p| > |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|q|}$ ve $d_M(P, Q) = |p|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|q|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

3) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(0, 1, 0)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 0, 1)$ iken P ve Q noktalarının sırasıyla y ve z eksenleri üzerinde olup $P = (0, p, 0)$ ve $Q = (0, 0, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \frac{r^2}{d_M(O, P)^2} P = \frac{r^2}{|p|^2} (p, 0) = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right),$$

$$Q' = \frac{r^2}{d_M(O, Q)^2} Q = \frac{r^2}{|q|^2} (0, q, 0) = \left(0, 0, \frac{r^2}{q}\right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ 0, \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} = r^2 \max \left\{ 0, \frac{1}{|p|}, \frac{1}{|q|} \right\}$$

dir.

i) $|p| \leq |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|p|}$ ve $d_M(P, Q) = |q|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |q|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|p|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

ii) $|p| > |q|$ iken $d_M(P', Q') = \frac{r^2}{|q|}$ ve $d_M(P, Q) = |p|$ olup,

$$\frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)} = \frac{r^2 |p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2}{|q|} = d_M(P', Q')$$

elde edilir.

İLDURUM: \overline{OP} ve \overline{OQ} ışınlarının doğrultuları D_2 kümesine ait olsun.

1) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(1,1,1)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(-1,1,1)$ iken $P = (p, p, p)$ ve $Q = (-q, q, q)$ dır. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(-\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q + p|, |q - p|\} \end{aligned}$$

dir.

i) $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 |q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q + p|, |q - p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 |q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|q - p| > |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q + p|, |q - p|\} = |q - p|$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

2) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(1, 1, 1)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(1, -1, 1)$ iken $P = (p, p, p)$ ve $Q = (q, -q, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q + p|\} \end{aligned}$$

dir.

i) $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q + p|, |q - p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|q - p| > |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q + p|, |q - p|\} = |q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

3) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(1, 1, 1)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 1, -1)$ iken $P = (p, p, p)$ ve $Q = (q, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q + p|\} \end{aligned}$$

dir.

i) $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q - p|, |q + p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|q - p| > |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|q - p|, |q + p|\} = |q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

4) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(-1, 1, 1)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(1, -1, 1)$ iken $P = (-p, p, p)$ ve $Q = (q, -q, q)$ dır. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} \end{aligned}$$

dir.

i) $|-q - p| \leq |q + p|$ ve $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|-q - p| \leq |q - p|$ ve $|q + p| \leq |q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

iii) $|q - p| \leq |-q - p|$ ve $|q + p| \leq |-q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |-q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

5) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(-1, 1, 1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 1, -1)$ iken $P = (-p, p, p)$ ve $Q = (q, q, -q)$ dır. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dır. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|-q - p|, |q - p|, |q + p|\} \end{aligned}$$

dir.

i) $|-q - p| \leq |q + p|$ ve $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|-q - p| \leq |q - p|$ ve $|q + p| \leq |q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

iii) $|q - p| \leq |-q - p|$ ve $|q + p| \leq |-q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |-q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

6) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, -1, 1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 1, -1)$ iken $P = (p, -p, p)$ ve $Q = (q, q, -q)$ dır. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, -\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |-q - p|, |q + p|\}
\end{aligned}$$

dir.

i) $|-q - p| \leq |q + p|$ ve $|q - p| \leq |q + p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q + p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q + p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|-q - p| \leq |q - p|$ ve $|q + p| \leq |q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

iii) $|q - p| \leq |-q - p|$ ve $|q + p| \leq |-q - p|$ iken

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} \text{ ve } d_M(P, Q) = \max\{|-q - p|, |q + p|, |q - p|\} = |-q - p|$$

dir.

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2|-q - p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

III.DURUM: \overrightarrow{OP} ve \overrightarrow{OQ} ışınlarının doğrultuları D_3 kümesine ait olsun.

1) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, 1, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1, -1, 0)$ iken $P = (p, p, 0)$ ve $Q = (q, -q, 0)$ dir. $I_{\mathcal{X}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q}, 0 \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right|, 0 \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right|, 0 \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q + p|, 0\} \end{aligned}$$

ve

$$d_M(P, Q) = \max\{|p - q|, |p + q|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

2) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(1,1,0)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(1,0,1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, p, 0)$ ve $Q = (q, 0, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, 0, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} \right|, \left| \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q|, |p|\}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q - p|, |q|, |p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

3) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, 1, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 0, -1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, p, 0)$ ve $Q = (q, 0, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, 0 \right) \quad \text{ve} \quad Q' = \left(\frac{r^2}{q}, 0, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right| \right\} \\
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q|, |-p|\}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q - p|, |q|, |-p|\}$$

dir.

Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

4) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,1,0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0,1,1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, p, 0)$ ve $Q = (0, q, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$\begin{aligned} d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') &= r^2, \\ d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') &= r^2 \end{aligned}$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |q - p|, |p|\} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |q - p|, |p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

5) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,1,0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0,1,-1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, p, 0)$ ve $Q = (0, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |q - p|, |-p|\} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |q - p|, |-p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

6) \overline{OP} ışınının doğrultusu $(1, -1, 0)$ ve \overline{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 0, 1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, -p, 0)$ ve $Q = (q, 0, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{-r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, 0, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max \{ |q - p|, |-q|, |-p| \}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max \{ |q - p|, |-q|, |-p| \}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

7) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, -1, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1, 0, -1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, -p, 0)$ ve $Q = (q, 0, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{-r^2}{p}, 0 \right) \quad \text{ve} \quad Q' = \left(\frac{r^2}{q}, 0, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{p} \right|, \left| \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max \{ |q - p|, |-q|, |p| \}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max \{ |q - p|, |-q|, |p| \}$$

dir.

Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

8) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, -1, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 1, 1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, -p, 0)$ ve $Q = (0, q, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{-r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |-q - p|, |-p|\} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |-q - p|, |-p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

9) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, -1, 0)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 1, -1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, -p, 0)$ ve $Q = (0, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dır. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, \frac{-r^2}{p}, 0 \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |-q - p|, |p|\} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |-q - p|, |p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

10) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,0,1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(1,0,-1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0, p)$ ve $Q = (q, 0, -q)$ dır. I_K maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dır. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{q}, 0, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, 0, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q - p|, |q + p|\}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q - p|, |q + p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

11) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1, 0, 1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 1, 1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0, p)$ ve $Q = (0, q, q)$ dır. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, \frac{r^2}{p} \right) \quad \text{ve} \quad Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |-p|, |q - p|\}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |-p|, |q - p|\}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

12) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,0,1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0,1,-1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0, p)$ ve $Q = (0, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, \frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max\{|q|, |-p|, |q + p|\} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max\{|q|, |-p|, |q + p|\}$$

dir.

Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

13) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(1,0,-1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0,1,1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0, -p)$ ve $Q = (0, q, q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, -\frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, \frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} d_M(P', Q') &= \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\ &= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \right\} \\ &= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max \{ |q|, |-p|, |-q - p| \} \end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max \{ |q|, |-p|, |-q - p| \}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

14) \vec{OP} ışınının doğrultusu $(1, 0, -1)$ ve \vec{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 1, -1)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0, -p)$ ve $Q = (0, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir.

$d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \text{ ve } d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, -\frac{r^2}{p} \right) \text{ ve } Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$d_M(P', Q') = \max \left\{ \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| -\frac{r^2}{q} \right|, \left| -\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} \right|, \left| -\frac{1}{q} \right|, \left| -\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max \{ |q|, |-p|, |-q + p| \}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max \{ |q|, |-p|, |-q + p| \}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

15) \overrightarrow{OP} ışınının doğrultusu $(0, 1, 1)$ ve \overrightarrow{OQ} ışınının doğrultusu $(0, 1, -1)$ olsun. Bu durumda $P = (0, p, p)$ ve $Q = (0, q, -q)$ dir. $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre P ve Q noktalarının maksimum küresel inversleri P' ve Q' olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2, \quad d_M(O, Q) \cdot d_M(O, Q') = r^2$$

dir. $d_M(O, P) = |p|$ ve $d_M(O, Q) = |q|$ olup,

$$d_M(O, P') = \frac{r^2}{|p|} \quad \text{ve} \quad d_M(O, Q') = \frac{r^2}{|q|}$$

dir. Teorem 5.1.6 ve Sonuç 5.1.7 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, \frac{r^2}{p} \right) \quad \text{ve} \quad Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q} \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d_M(P', Q') &= \max \left\{ 0, \left| \frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q} \right|, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\} \\
&= r^2 \max \left\{ \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right|, \left| \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right| \right\} \\
&= \frac{r^2}{|p| \cdot |q|} \max \{ |q - p|, |q + p| \}
\end{aligned}$$

dir.

$$d_M(P, Q) = \max \{ |q - p|, |q + p| \}$$

dir. Buradan

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) d_M(O, Q)}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.12: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında maksimum küresel inversiyon çemberinin merkezinden geçen düzlemler maksimum küresel inversiyonlar altında değişmez kalır.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi O ve yarıçapı r olsun. Ötelemeler maksimum uzaklığı koruduğundan $I_{\mathcal{K}}$ inversiyonunun merkezini orijin olarak almak genelliği bozmaz. $O = (0,0,0)$ noktasından geçen

$$Ax + By + Cz = 0$$

denklemler α düzleminin $I_{\mathcal{K}}$ altındaki görüntüsü

$$A \frac{r^2 x'}{(\max\{|x'|, |y'|, |z'|\})^2} + B \frac{r^2 y'}{(\max\{|x'|, |y'|, |z'|\})^2} + C \frac{r^2 z'}{(\max\{|x'|, |y'|, |z'|\})^2} = 0$$

olup

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

elde edilir. Bu α düzleminin $I_{\mathcal{K}}$ altında değişmez kaldığını gösterir. \square

Sonuç 5.1.13: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezinden geçen doğrular değişmez kalır.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi O ve yarıçapı r olsun ayrıca \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre inversiyonun merkezinden geçen her düzlemin görüntüsü kendisidir. Ötelemeler maksimum uzaklığı koruduğundan $I_{\mathcal{K}}$ nın merkezi orijin almak genelliği bozmaz. O dan geçen bir ℓ doğrusu orijinden geçen iki düzlemin arakesiti olarak ifade edilebilir. \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında α ve β sırasıyla orijinden geçen $A_1x + B_1y + C_1z = 0$ ve $A_2x + B_2y + C_2z = 0$ denklemler α ve β düzlemler ve A_i, B_i, C_i ($i = 1,2$) lerden en az bir tanesi sıfırdan farklı olsun.

$$\ell = \alpha \wedge \beta$$

$$\ell = \{(x, y, z) \mid A_i x + B_i y + C_i z = 0, i = 1,2\}$$

olup, Teorem 5.1.12 gereğince α ve β , $I_{\mathcal{K}}$ altında değişmez kaldığı için ℓ de değişmez kalır. \square

Teorem 5.1.14: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında merkezi maksimum küresel inversiyonun merkezi olan herhangi bir kürenin maksimum küresel inversi yine merkezi maksimum küresel inversiyonun merkezi olan başka bir küredir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi O ve yarıçapı r olsun. Ötelemeler maksimum uzaklığı koruduğundan $I_{\mathcal{K}}$ nin merkezi orjin olarak almak genelliği bozmaz. \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonun merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı r olsun. \mathbb{R}_M^3 de O –merkezli ve r' –yarıçaplı küre

$$\mathcal{K}' = \{(x, y, z): \max\{|x|, |y|, |z|\} = r'\}$$

dir.

\mathcal{K}' maksimum küresine $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonu uygulanırsa

$$\left(\frac{r}{\max\{|x'|, |y'|, |z'|\}}\right)^2 \max\{|x'|, |y'|, |z'|\} = r',$$

$$\max\{|x'|, |y'|, |z'|\} = \frac{r^2}{r'}$$

elde edilir. Bu O –merkezli ve $r'' = \frac{r^2}{r'}$ –yarıçaplı başka bir maksimum küresidir.

Örnek 5.1.15: \mathbb{R}_M^3 de maksimum küresel inversiyon merkezi $O = (0,0,0)$ ve yarıçapı $r = 1$ olmak üzere O –merkezli ve yarıçapı 2 olan kürenin maksimum küresel inversini bulalım.

$O = (0,0,0)$ – merkezli r' yani $r' = 2$ yarıçaplı küre

$$\mathcal{K}' = \{(x, y, z): \max\{|x|, |y|, |z|\} = 2\}$$

dir. \mathcal{K}' ye $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonu uygulanırsa

$$\left(\frac{1}{\max\{|x'|, |y'|, |z'|\}}\right)^2 \max\{|x'|, |y'|, |z'|\} = 2$$

$$\max\{|x'|, |y'|, |z'|\} = \frac{1^2}{2}$$

elde edilir. Bu O –merkezli ve $r'' = \frac{1}{2}$ –yarıçaplı başka bir maksimum küresidir.

Teorem 5.1.16: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında maksimum küresel inversiyon küresinin bütün yüzleri, köşeleri ve kenarları değişmez kalır.

İspat: $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyon küresi inversiyon altında değişmez kaldığından ispat açıktır. \square

5.2 Çifte Oran

Tanım 5.2.1: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğruduş dört farklı nokta olsun. Bu noktaların maksimum çifte oranı $(AB, CD)_M$

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]}$$

biçiminde ifade edilir.

Sonuç 5.2.3: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. C ve D noktalarının her ikisi A ve B noktalarının arasında olma ve olmama durumlarında $(AB, CD)_M$ çifte oranı pozitiftir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun.

a) C ve D noktalarının her ikisi de A ve B arasında olsun. Yani noktaların ACDB, ADCB, BCDA, BDCA dizilişlerinden birisidir.

i) ACDB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ii) ADCB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

iii) BCDA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

iv) BDCA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

b) C ve D noktalarının her ikisi de A ve B arasında değil ise çifte oran pozitiftir. Yani noktaların dizilişi CABD, DABC, CBAD, DBAC, CDAB, DCAB, CDBA, DCBA, ABCD, ABDC, BACD, BADC dizilişlerinden biridir.

i) CABD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ii) DABC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} > 0$$

iii) CBAD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} > 0$$

iv) DBAC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} > 0$$

v) CDAB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

vi) DCAB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

vii) CDBA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

viii) DCBA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} > 0$$

ix) ABCD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

x) ABDC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

xi) BACD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

xii) BADC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} > 0$$

Sonuç 5.2.4: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta ikililerinin her biri diğerini ayırır ise $(AB, CD)_M$ maksimum çifte oranı negatiftir.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A, B, C, D yönlü doğru üzerinde doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta ikililerinin her biri diğerini ayırıyorsa nokta dizilişleri ACBD, CADB, DACB, ADBC, CBDA, DBCA, BCAD, BDAC biçimindedir. Her bir diziliş için noktaların çifte oranı incelenirse:

i) ACBD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} < 0$$

ii) CADB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} < 0$$

iii) DACB dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{(-d_M(B, C))} < 0$$

iv) ADBC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} < 0$$

v) CBDA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{(-d_M(B, C))} < 0$$

vi) DBCA dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{(-d_M(B, D))}{d_M(B, C)} < 0$$

vii) BCAD dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{(-d_M(A, C))}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} < 0$$

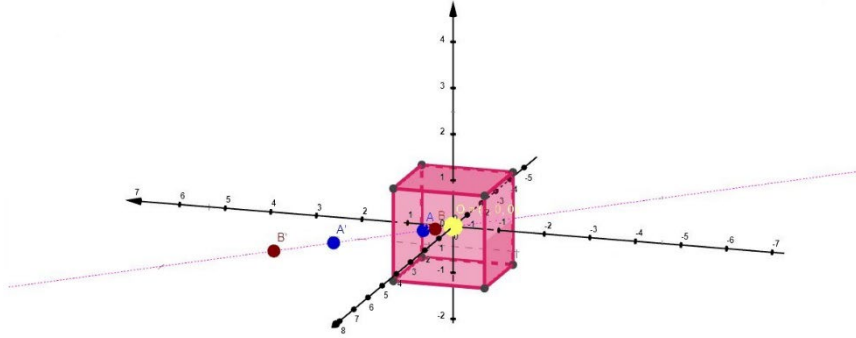
viii) BDAC dizilişi için noktaların çifte oranı

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{(-d_M(A, D))} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} < 0$$

A, B, C, D noktalarından herhangi biri kürenin merkezinde değil ise inversiyon altında çifte oran değişmez kalır. \square

Teorem 5.2.5: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında maksimum çifte oranı küreye göre inversiyon altında değişmez kalır.

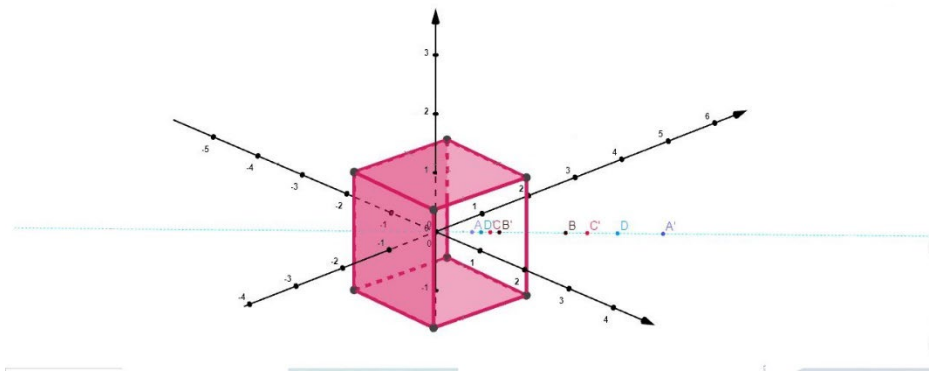
İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında doğrudan dört nokta A, B, C, D ve O merkezli r yarıçaplı küre göre inversiyon $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonu olsun. A, B, C, D noktalarının $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre inversleri sırasıyla A', B', C', D' olsun. Öklidyen uzayda olduğu gibi \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında küreye göre inversiyonları altında \overrightarrow{AB} yönlü doğru parçasının inversi olan $\overrightarrow{A'B'}$ yönlü doğru parçasının yönleri zıttır. (Şekil 5. 3.)



Şekil 5.3. Yön Değişimi

İnversiyon küresinin merkezine yaklaştıkça noktaların inversiyon altındaki görüntüleri merkezden uzaklaşır. İnversiyonun bu özelliğinden dolayı Öklidyen uzayında olduğu gibi \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında küreye göre inversiyonları altında \overline{AB} yönlü doğru parçasının inversi olan $\overline{A'B'}$ yönlü doğru parçasının yönleri zıttır.

Üstelik $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ nokta çiftleri için herbirinin diğerini ayırması veya ayırmaması özelliği inversleri olan $\{A', B'\}$ ve $\{C', D'\}$ nokta çiftlerinde de geçerlidir. Yani bu özellik maksimum uzayda küreye göre inversiyonlar altında korunur. (Şekil 5. 4.)



Şekil 5.4. Ayırma Özelliği

O zaman A, B, C, D noktalarının $I_{\mathcal{K}}$ maksimum küresel inversiyonuna göre inversleri olan A', B', C', D' noktalarının maksimum çifte oranını inceleyelim:

$$\begin{aligned}
|(A'B', C'D')_M| &= \left| \frac{d_M[A'C']}{d_M[A'D']} \cdot \frac{d_M[B'D']}{d_M[B'C']} \right| = \frac{d_M(A', C')}{d_M(A', D')} \cdot \frac{d_M(B', D')}{d_M(B', C')} \\
&= \frac{\frac{r^2 d_M(A, C)}{d_M(O, A) \cdot d_M(O, C)}}{\frac{r^2 d_M(A, D)}{d_M(O, A) \cdot d_M(O, D)}} \cdot \frac{\frac{r^2 d_M(B, D)}{d_M(O, B) \cdot d_M(O, D)}}{\frac{r^2 d_M(B, C)}{d_M(O, B) \cdot d_M(O, C)}} \\
&= \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, D)} \cdot \frac{d_M(B, D)}{d_M(B, C)} \\
&= \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]}
\end{aligned}$$

elde edilir. \square

5.3 Harmonik Eşlenik

Tanım 5.3.1: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında iki nokta A ve B olsun. \overline{AB} doğrusunu

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = \frac{d_M[AD]}{d_M[DB]}$$

oranında bölen \overline{AB} doğru parçası üzerindeki C ve D noktalarına A ve B yi harmonik böler denir. C ve D noktalarına A ve B noktalarına göre maksimum anlamda harmonik eşleniktir denir. A, B, C, D doğrudaki noktalarına maksimum harmonik küme denir ve $H(AB, CD)_M$ ile gösterilir.

Sonuç 5.3.2: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında A ve B noktalarına göre C ve D noktalarının maksimum harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul $(AB, CD)_M = -1$ olmasıdır.

İspat: C ve D noktaları A ve B noktalarına göre maksimum harmonik eşlenik ise

$$(AB, CD)_M = \frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = -1$$

dir. Tersine $(AB, CD)_M = -1$ iken

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[AD]} \cdot \frac{d_M[BD]}{d_M[BC]} = -1 \Rightarrow \frac{d_M[AC]}{d_M[BC]} = -\frac{d_M[AD]}{d_M[BD]} = \frac{d_M[AD]}{d_M[DB]}$$

olup C ve D noktaları A ve B ye göre maksimum harmonik eşleniktir.

Teorem 5.3.2: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında merkezi $O = (0,0,0)$ ve çapı \overline{AB} doğru parçası olan küre \mathcal{K} ile belirtilsin. C ve C' noktaları \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan bölen noktalar olsun. Bu durumda A ve B noktalarına göre C ve C' noktalarının maksimum harmonik eşlenik olmaları için gerek ve yeter koşul \mathcal{K} küresine göre maksimum küresel inversiyonu altında C ve C' nün invers noktalar olmasıdır.

İspat: \mathbb{R}_M^3 maksimum uzayında \mathcal{K} maksimum küresinin merkezi $O = (0,0,0)$ ve çapı \overline{AB} doğru parçası olsun. ($r = d_M(O, A) = d_M(O, B)$). C ve C' noktaları \overline{AB} doğru parçasını sırasıyla içten ve dıştan bölen noktalar ise

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[CB]} = -\frac{d_M[AC']}{d_M[C'B]}$$

dir. Kabul edelim ki A ve B noktalarına göre C ve C' noktaları maksimum harmonik eşlenik olsun. Bu durumda

$$(AB, CC')_M = -1$$

$$\frac{d_M[AC]}{d_M[AC']} \cdot \frac{d_M[BC']}{d_M[BC]} = -1$$

dir. Burada $d_M[BC] = -d_M(C, B)$ dir. C noktası \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını içten böldüğü için \mathcal{K} küresinin içinde olup

$$d_M(C, B) = r - d_M(O, C),$$

$$d_M(A, C) = r + d_M(O, C)$$

dir. Benzer şekilde C' noktası \overrightarrow{OB} ışını üzerinde \overline{AB} doğru parçasını dıştan böldüğünden dolayı C' , \mathcal{K} küresinin dışında olup

$$d_M(A, C') = r + d_M(O, C'),$$

$$d_M(B, C') = d_M(O, C') - r$$

dir. Buradan

$$\frac{(r + d_M(O, C))}{(r + d_M(O, C'))} \cdot \frac{(d_M(O, C') - r)}{(-r + d_M(O, C))} = -1,$$

$$(r + d_M(O, C)) \cdot (d_M(O, C') - r) = -(r + d_M(O, C')) \cdot (-r + d_M(O, C))$$

$$\Rightarrow rd_M(O, C') - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C)$$

$$= -rd_M(O, C) + r^2 - d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) + rd_M(O, C')$$

$$\Rightarrow d_M(O, C) \cdot d_M(O, C') = r^2$$

dir. Buna göre C ve C' noktaları \mathcal{K} küresine göre maksimum inverstir.

Tersine C ve C' noktaları \mathcal{K} küresine göre maksimum invers noktalar olsun. Bu durumda

$$d_M(O, C) \cdot d_M(O, C') = r^2$$

dir.

$$\begin{aligned} (AB, CC')_M &= \frac{d_M[AC]}{d_M[AC']} \cdot \frac{d_M[BC']}{d_M[BC]} = \frac{d_M(A, C)}{d_M(A, C')} \cdot \frac{d_M(B, C')}{-d_M(B, C)} \\ &= \frac{rd_M(O, C') - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C)}{-rd_M(O, C) - r^2 + d_M(O, C') \cdot d_M(O, C) - rd_M(O, C')} \\ &= \frac{r(d_M(O, C') - rd_M(O, C))}{r(d_M(O, C) - rd_M(O, C'))} \\ &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece C ve C' noktaları A ve B noktalarına göre harmonik eşleniktir. \square

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Genel olarak yedi bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde, $n -$ boyutlu Öklidyen uzay \mathbb{R}^n de $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık tanımı yapılmıştır. $n -$ boyutlu Öklidyen uzayda herhangi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün $p -$ normu tanımlanmış buradan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün maksimum normu tanımlanıp X ve Y noktaları arasındaki Maksimum uzaklık tanımı yapılmıştır ve Öklidyen düzlemde inversiyon hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; Taksi düzleminde, Taksi uzayında, Çin Dama uzayında ve çembere göre klasik inversiyon ve Maksimum metrik, Maksimum düzlem üzerine yapılmış çalışmalar hakkında çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Maksimum düzleminde ve maksimum uzayındaki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Maksimum düzleminde bir $M(m_1, m_2)$, merkezli $r -$ yarıçaplı ($r > 0$) çember

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{X(x, y) \mid d_M(M, X) = r, r > 0\} \\ &= \{(x, y) \mid \max\{|x - m_1|, |y - m_1|\} = r, r > 0\} \end{aligned}$$

kümesidir. \mathbb{R}_M^2 nin **birim çemberi**, $M = (0,0)$ ve $r = 1$ alınarak

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

kümesidir. \mathbb{R}_M^2 de O merkezli ve r yarıçaplı \mathcal{C} çemberine göre inversiyon $I_{(0,r)}$ dönüşümü

$$\begin{aligned} I_{(0,r)}: \mathbb{R}_M^2 - 0 &\rightarrow \mathbb{R}_M^2 - 0 \\ I_{(0,r)}(P) &= P' \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve aşağıdaki şartları sağlar:

- i) P', \overline{OP} ışını üzerindedir.
- ii) $d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$.

P' noktasına, P noktasının \mathcal{C} çemberine göre inversi denir.

Daha sonra maksimum düzleminde çember göre inversiyonu ile ilgili teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca Maksimum düzleminde çifte oran ve harmonik eşlenik kavramları ile maksimum çember inversiyonu arasındaki ilişki incelenmiştir.

Beşinci bölümde, 3– boyutlu Maksimum uzayında $M = (m_1, m_2, m_3)$ merkezli, r –yarıçaplı küre

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{X \mid d_M(M, X) = r, \quad r > 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid \max\{|x - m_1|, |y - m_2|, |z - m_3|\} = r, \quad r > 0\}\end{aligned}$$

noktalar kümesidir.

$M = (0,0,0)$ ve $r = 1$ alınarak **maksimum birim küresi**

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$$

noktalar kümesi olduğu belirtilmiştir. Daha sonra \mathbb{R}_M^3 Maksimum uzayında O merkezli ve r –yarıçaplı \mathcal{K} küresine göre

$$I_{\mathcal{K}}: \mathbb{R}_M^3 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}_M^3 - \{O\}$$

$$I_{\mathcal{K}}(P) = P'$$

dönüşümü olup P' noktası \overrightarrow{OP} ışını üzerinde ve

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2$$

dir. \mathcal{K} maksimum küresine “**inversiyon küresi**”, O noktasına “**inversiyonun merkezi**”, r –yarıçapına “**inversiyon yarıçapı**” denir.

Maksimum uzayında küresel inversiyon tanımından hareketle elde edilen teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca Maksimum uzayında çifte oran ve harmonik eşlenik tanımları verilip, Maksimum küresel inversiyonlar altında bu kavramlar incelenmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde önce Maksimum düzlemde çembere göre inversiyon tanımı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra Maksimum çember ve doğruların arakesitleri incelenmiş ve bunlara göre doğruların Maksimum çember inversiyonları altında görüntüleri ayrıntılı olarak tespit edilmiş ve Mathematica programı kullanılarak doğrular ve inversilerinin grafikleri çizilmiştir. Son olarak 3-Boyutlu Maksimum uzayında inversiyon tanımı verilerek doğru, nokta, düzlem ve kürenin inversleri ile ilgili sonuçlar ve teoremler verilmiş, Maksimum küresel inversiyonlar altında harmonik eşlenik ve çifte oran kavramları incelenmiştir.

İnversiyon kavramı Öklidyen olmayan diğer geometrilere de tanımlanabilir ve geliştirilebilir. n -boyutlu uzaylarda hiperküreler ile inversiyon tanımı yapılabilir. Öklidyen düzlemde inversiyonun uygulandığı problemler, Öklidyen olmayan düzlemlerde incelenerek, tanımlanan inversiyonlar bunlara uygulanabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bayar A., Ekmekçi S. (2014), On circular inversions in taxicab plane, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, Vol. 6, Issue 4, 33-39.

Blair, D. E. (2000), Inversion Theory and Conformal Mapping, American Math. Society, 9,1.

Childress, N. (1965), Inversion with Respect to the Central Conics, Mathematics Magazine, Vol.38(3).

Ermış, T., Kaya, R. (2013), On The Isometries of 3-Dimensional Maximum Space, Konuralp Journal of Mathematics, 3,1,103-114.

Gdawiec, K. (2014), Star-shaped set inversion fractals, Fractals, 22, 4, 1-7.

Gelişgen Ö., Ermış T. (2019), Some Properties of Inversions in Alpha Plane, Forum Geometricorum, 19, 1-9.

Gelişgen Ö., Yıldırım K., Can Z., Çolak Z.(2021), A Note On Some Distance Formulae In 3-Dimensional Maximum Space, Journal Of Mahani Matematical Research Center, Vol.10, Issue 1, 95-102.

Nickel, J.A. (1995), A Budget of Inversion, Math. Comput. Modelling, Vol:21,6,87-93.

Pekzorlu, A. (2019), Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Pekzorlu, A., Bayar, A. (2020)(a), On The Chinese Checkers Spherical Inversions In Three Dimensional Chinese Checker Space, Com. Fac. of Sci. Univ. of Ank. Ser. A1 Math. and Stat., 69, 2, 1498-1507.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pekzorlu, A., Bayar, A. (2020)(b), Taxicab Spherical Invesions In Taxicab Space, Journal of Mahani Math. Research Center, Vol:9, no 1-2, 45-54.

Ramirez, J. L. (2013), An Introduction to Inversion in an Ellipse, arXiv:1309.6378v1.

Ramirez, J. L. (2014), Inversions in an Ellipse, Forum Geometricorum Vol. 14,107–115.

Ramirez, J.L., Rubiano G. N. (2014), A Geometrical Construction of Inverse Points With Respect To An Ellipse,International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, Vol. 45, Issue 8, 1254-1259

Ramirez, J.L., Rubiano G.N., Jurcic-Zlobec B. (2015), A Generating fractal patterns by sing p-circle inversion, Fractals, 23(4), 1-13.

Ramirez, J.L., Rubiano G.N. (2016), A Generalization of the spherical inversion, International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, Vol. 48, Issue 1, 132-149.

Salihova, S. (2006), Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Sezgin, N. (2014), Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Yüca, G., Can, Z. (2020), On The Circular Inversion in Maximum Plane, Ikonion Journal Of Mathhematics, Vol.2, Issue 2