

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

HİLBERT ÇEKİRDEKLİ LİNEER OLMAYAN  
SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN  
VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Filiz İBRİM

Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Bölümü

Haziran – 2001

HİLBERT ÇEKİRDEKLİ LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL  
DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Filiz İBRİM

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Dumlupınar Üniversitesi  
Yüksek Lisans Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Ana Bilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. Binali MUSAYEV  
Ortak Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

109419

Haziran - 2001

Filiz İBRİM' in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “HİLBERT ÇEKİRDEKLİ LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

06 / 06 / 2001

Üye: Prof. Dr. Binali MUSAVERE



Üye: Doç. Dr. Mehmet Naci ÖZEL



Üye: Yrd. Doç. Dr. İsmail ŞİVİCİOĞLU



Üye: Yrd. Doç. Dr. Alın AĞAÇAVAN



Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat AÇI



Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun .... / .... / 2001 gün ve .....  
sayılı kararıyla onaylanmıştır.



.....  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ VE TEMEL BİLGİLER	1
1.1 Metrik Uzaylar	1
1.2 Normlu Uzaylar	11
1.3 Banach Sabit Nokta ve Schauder Prensipleri	20
2. HİLBERT ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	26
2.1 Hilbert Çekirdekli Singüler İntegralin Bazı Özellikleri	26
2.2 Hilbert Çekirdekli Lineer İntegral Denklemlerin Ardışık Yaklaşımlar Yöntemiyle Çözümü	37
2.3 Hilbert Çekirdekli Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Schauder Prensipleri Yardımlarıyla İncelenmesi	39
2.4 Hilbert Çekirdekli Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Ardışık Yaklaşımlar Yöntemiyle İncelenmesi	43
2.5 Bir Konform Dönüşümü Problemi Üzerine	53
3. KAYNAKLAR DİZİNİ	57

# HİLBERT ÇEKİRDEKLİ LINEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Filiz İBRİM

Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2001

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Ortak Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

## ÖZET

Bu çalışmada Hilbert çekirdekli lineer ve lineer olmayan singüler integral denklemler için varlık ve teklık teoremleri incelenmiştir.

Birinci bölüm yapacağımız incelemede kullanılan esas kavramları ve temel bilgileri içermektedir. Bu bölümde metrik uzaylar, normlu uzaylar, metrik uzaylarda Banach sabit nokta prensibi, normlu uzaylarda Schauder prensibi ve metrik uzaylarda Banach sabit nokta prensibinin bir değiştirilmiş şekli verilmektedir.

İkinci bölümde Hilbert çekirdekli singüler integralin gerekli özellikleri incelenmiş ve bu bilgiler esasında Hilbert çekirdekli lineer ve lineer olmayan singüler integral denklemler için varlık ve teklık teoremleri ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçların bir konform dönüşümü probleminin çözümüne uygulaması gösterilmiştir. Teorem 2.2.1, Teorem 2.4.1 ve bu teoremin Teorem 2.4.7 de verilen uygulaması orjinaldir.

**Anahtar kelimeler :** Hilbert uzayı, Hilbert çekirdekli lineer ve lineer olmayan singüler operatörler ve denklemler, kompakt küme, tamamen sürekli operatör, konform dönüşümü.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR NONLINEAR SINGULAR  
INTEGRAL EQUATIONS WITH HILBERT KERNEL

FİLİZ İBRİM

The Department of Mathematics, Master Thesis, 2001

Thesis Supervisor : Prof. Dr. Binali MUSAYEV, Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

**SUMMARY**

In this study, existence and uniqueness for linear and nonlinear singular integral equations with Hilbert kernel is examined.

First section contains the base concepts and basic knowledge that we have used in our examination. In the first part, metric spaces, norm spaces, the fixed point principle of Banach in metric spaces, the principle of Schauder in norm spaces and a changed form of the mixed point principle of Banach in metric spaces are given.

In the second part, the important peculiarities of Hilbert kernels singular integral is examined and in principle of this knowledge the existence on uniqueness theorems for linear and nonlinear singular integral equations with Hilbert kernels are proved. The provided results is applied to the solution of a conform transformation problem. Theorem 2.2.1, Theorem 2.4.1 which are proved about this subject and its applications in the Theorem of 2.4.7 are original.

**The key words:** Hilbert space, Hilbert kernels linear and nonlinear singular operators and equations ,compact pile, completely continual operator, conform transformation.

## TEŐEKKÖRLER

Yüksek lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bu tezi hazırlama imkanı veren, çalışmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Binali MUSAYEV' e , çalışmalarımızın yürütülmesinde her imkanı sağlayan D.P.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat ALP' e , tezin yazımında yardımcı olan eşime , kardeşim Fatma İBRİM' e , beni her konuda destekleyen, güvenen sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

**Filiz İBRİM**



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### SİMGELER

### AÇIKLAMALAR

$R$	Reel sayılar kümesi
$R_+$	$[0, +\infty)$ aralığı
$d(.,.)$	Bir uzayda tanımlı metrik
$\  \cdot \ $	Bir uzayda tanımlı norm
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$d_\infty(.,.)$	$C[a, b]$ uzayında tanımlı metrik
$\  \cdot \ _\infty$	$H_\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ ) uzayında tanımlı norm
$H_\alpha[a, b]$	$[a, b]$ aralığında $0 < \alpha \leq 1$ üssü ile Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi
$H u(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$	Hilbert çekirdekli lineer singüler integral
$A u(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$	Hilbert çekirdekli lineer olmayan singüler integral

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride ele alınacak lineer ve lineer olmayan singüler integral denklemlerin incelenmesinde temel teşkil eden kavram ve sonuçlar ile ilgili ön bilgiler verilmektedir. Bu bilgiler kaynaklarda gösterilen (Musayev,Alp,2000) kitabından alınmıştır.

#### 1.1 Metrik Uzaylar

**Tanım 1.1.1:** Boş olmayan bir  $X$  kümesi ve bir

$$d: X \times X \rightarrow R_+, \quad (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu  $d$  dönüşümü  $\forall x, y, z \in X$  için

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa,  $X$  üzerinde uzaklık fonksiyonu yada metrik adını alır. Bu durumda  $(X, d)$  ikilisine bir *metrik uzay* denir.

**Örnek 1.1.2:**  $X = R$  olmak üzere

$$d: R \times R \rightarrow R_+, \quad (x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan  $d$  dönüşümü  $R$  üzerinde bir metriktir. Bu metriğe  $R$  üzerinde *mutlak değer metriği* denir. Gerçekten:

1.  $\forall x, y \in R$  için

$$d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

2.  $\forall x, y \in R$  için

$$d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |(-1)| \cdot |y - x| = d(y, x),$$

3.  $\forall x, y, z \in R$  için

$$|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

olduğundan

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. O halde  $(R, d)$  bir metrik uzaydır.

İleride reel (kompleks) sayı n-lilerinin kümesini  $R^n (C^n)$  ile göstereceğiz.

**Örnek 1.1.3:**  $X = R^n$  (veya  $X = C^n$ ) olsun.

(a)  $d_1: X \times X \rightarrow R_+$ ,

$$(x, y) \rightarrow d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|;$$

(b)  $d_p: X \times X \rightarrow R_+$ ,

$$(x, y) \rightarrow d_p(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty);$$

(c)  $d_\infty: X \times X \rightarrow R_+$ ,

$$(x, y) \rightarrow d_\infty(x, y) = \max \{ |x_k - y_k| : k = 1, \dots, n \}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler  $X = R^n$  (veya  $X = C^n$ ) üzerinde birer metriktir.

**Örnek 1.1.4:**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $B(X)$  de  $X$  den  $R$  ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun.

$$d: B(X) \times B(X) \rightarrow R_+, (f, g) \rightarrow d(f, g) = \sup \{ |f(t) - g(t)| : t \in X \}$$

şeklinde tanımlı  $d$  dönüşümü  $B(X)$  kümesi üzerinde bir metriktir.

**Örnek 1.1.5 :**  $[a, b] \subset R (a, b \in R)$  üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi  $C[a, b]$  olsun.  $f, g \in C[a, b]$  için

$$d_\infty(f, g) = \max \{ |f(t) - g(t)| : t \in [a, b] \}$$

şeklinde tanımlanan  $d_\infty : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dönüşümü  $C[a, b]$  üzerinde bir metriktir.

**Örnek 1.1.6 :**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $f, g \in C[a, b]$  için

$$d_p(f, g) = \left( \int_a^b |f(s) - g(s)|^p ds \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan  $d_p : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dönüşümü  $C[a, b]$  üzerinde bir metrik ve dolayısıyla  $(C[a, b], d_p)$  bir metrik uzaydır.

**Tanım 1.1.7 :**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (-\infty < a < b < +\infty)$  fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her bir  $t_1, t_2 \in [a, b]$  için

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A |t_1 - t_2|^\alpha$$

olacak şekilde  $A > 0$  ve  $\alpha \in (0, 1]$  sayıları varsa  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  üzerinde *Hölder Koşulunu sağlar* denir.  $A$  ve  $\alpha$  sayılarına sırasıyla *Hölder katsayısı* ve *Hölder üssü* denir.  $[a, b]$  üzerinde  $\alpha$  üssü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün fonksiyonlar kümesi  $H_\alpha[a, b]$  (veya kısaca  $H_\alpha$ ) ile gösterilir.

$H_\alpha[a, b] \subset C[a, b]$  olduğu açıktır.  $\alpha_1 < \alpha_2$  ise  $H_{\alpha_2}[a, b] \subset H_{\alpha_1}[a, b]$  olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Fakat bunun tersi doğru olmayabilir. Örneğin, herhangi

$$t_1, t_2 \in [0, 1] \text{ için } |t_1^\alpha - t_2^\alpha| \leq |t_1 - t_2|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

olduğundan

$$u(t) = t^\alpha \in H_\alpha[0, 1]$$

olur. Öte yandan herhangi  $t \in [0, 1]$  için

$$|u(t) - u(0)| = t^\alpha$$

olduğundan  $\alpha^1 \in (\alpha, 1)$  sayısı için  $t \rightarrow 0$  iken

$$|u(t) - u(0)| t^{-\alpha} = t^{\alpha - \alpha} \rightarrow +\infty$$

dolayısıyla  $u \notin H_\alpha$  dır.

$H_\alpha[a, b]$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) kümesi verilsin.

$$u \in H_\alpha[a, b] \text{ için } H(u; \alpha) = \sup \left\{ |u(t_1) - u(t_2)| \cdot |t_1 - t_2|^{-\alpha} : t_1, t_2 \in [a, b] \right\} \text{ olsun.}$$

$u, v \in H_\alpha[a, b]$  için

$$d(u, v) = d_\infty(u, v) + H(u - v; \alpha) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan  $d : H_\alpha[a, b] \times H_\alpha[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dönüşümünün  $H_\alpha[a, b]$  üzerinde bir metrik olduğu gösterilebilir. (Hüseynov, Muhtarov, 1980)

**Tanım 1.1.8 :** Bir  $(X, d)$  metrik uzayı,  $x_0 \in X$  noktası ve pozitif  $r$  sayısı verilsin.

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\bar{S}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

ve

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümelerine sırasıyla  $x_0$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı *açık yuvar*, *kapalı yuvar* ve *yuvar yüzeyi* denir.  $S_r(x_0)$  açık yuvarına  $x_0 \in X$  noktasının bir *komşuluğu* (*r-komşuluğu*).

$\overset{\circ}{S}_r(x_0) = S_r(x_0) / \{x_0\}$  kümesine de  $x_0 \in X$  noktasının *delinmiş komşuluğu* (*delinmiş r-komşuluğu*) denir.

$(X, d)$  bir metrik uzayı,  $A \subset X$  alt kümesi ve  $x \in X$  noktası verilsin. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$  ise,  $x$  noktasına  $A$  nın bir *limit noktası* denir.  $A \subset X$  kümesinin bütün limit noktalarından oluşan  $A'$  kümesi ile  $A$  nın noktalarından oluşan kümeye  $A$  nın *kapamışı* adı verilir ve  $\bar{A}$  ile gösterilir.  $A = \bar{A}$  ise  $A$  kümesine  $X$  de *kapalı bir küme* adı verilir.  $B \subset X$  ve  $x \in B$  olsun.  $S_\varepsilon(x) \subset B$  olacak şekilde bir  $\varepsilon > 0$  sayısı varsa,  $x$  noktasına  $B$  nin bir *iç noktası* denir.  $B$  nin iç noktalarının

kümesine  $B$  kümesinin içi denir ve  $\overset{\circ}{B}$  ile gösterilir.  $B = \overset{\circ}{B}$  ise  $B$  kümesine  $X$  de *açık bir küme* denir.

**Tanım 1.1.9 :**  $(X, d)$  bir metrik uzay olmak üzere  $f: N \rightarrow X$  fonksiyonuna  $X$  de (veya  $X$  içinde) bir *dizi* adı verilir ve  $f(n) = f(x_n)$  ile gösterilir.  $(n_k), N$  içinde  $n_k < n_{k+1}, k = 1, 2, \dots$  ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$  koşullarını sağlayan herhangi bir dizi olmak üzere  $(x_{n_k}), k \in N$  dizisine  $(x_n)$  dizisinin bir *alt dizisi* denir.

**Tanım 1.1.10 :**  $(X, d)$  metrik uzayı içinde bir dizi  $(x_n)$  ve  $x_0 \in X$  olsun. Eğer,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$  ise, başka bir deyişle, eğer  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $\exists n_\varepsilon \in N \ni \forall n > n_\varepsilon$  için  $d(x_n, x_0) < \varepsilon$  oluyorsa,  $(x_n)$  dizisi  $x_0$  noktasına *yakınsıyor* denir ve

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ yada } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.1.11 :**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $A, X$  in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

sayısına  $A$  kümesinin *çapı* denir.  $d(A) < \infty$  ise  $A$  ya  $X$  de *sınırlı bir küme* denir.  $X$  içindeki  $(x_n)$  dizisinin terimlerinden oluşan küme  $X$  de sınırlı ise  $(x_n)$  dizisine  $X$  de *sınırlı bir dizi* denir.

**Tanım 1.1.12 :**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $X$  in içinde bir dizi  $(x_n)$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $m, n > n_\varepsilon$  olduğunda  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$  sayısına bağlı bir  $n_\varepsilon \in N$  sayısı varsa  $(x_n)$  dizisine  $X$  içinde bir *Cauchy dizisi* adı verilir.

**Teorem 1.1.13 :** Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(a) Metrik uzay içindeki yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

- (b) Metrik uzay içindeki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
- (c) Bir  $(X, d)$  metrik uzayında bir  $(x_n)$  Cauchy dizisi  $x \in X$  noktasına yakınsak bir  $(x_{n_k})$  alt dizisine sahipse  $(x_n)$  dizisinin kendisi de  $x$  e yakınsaktır.
- (d)  $(X, d)$  bir metrik uzay olmak üzere  $(x_n)$  ve  $(y_n)$ ,  $X$  içinde bir Cauchy dizisi ise  $(d(x_n, y_n))$  reel sayı dizisi yakınsaktır.

**Tanım 1.1.14 :** Bir  $(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  içinde bir limite sahipse, bu  $(X, d)$  metrik uzayına *tam metrik uzay* adı verilir.

**Örnek 1.1.15 :**  $R$  kümesi  $R$  üzerindeki mutlak değer metriğine göre tamdır.

**Örnek 1.1.16 :**  $R^n$  kümesi Örnek 1.1.3 deki  $d_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) metriğine göre tamdır.

**Örnek 1.1.17 :**  $(C[a, b], d_\infty)$  uzayı tamdır.

**Lemma 1.1.18 :**  $u, v \in H_\alpha[a, b]$  için  $d(u, v) = d_\infty(u, v) + H(u - v; \alpha)$  olmak üzere  $(H_\alpha[a, b], d)$  metrik uzayı tamdır.

**İspat:**  $H_\alpha[a, b]$  içinde bir Cauchy dizisi  $(f_n)$  olsun. Bu durumda  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists n_\varepsilon \in N$  öyle ki  $n \geq n_\varepsilon, m \geq n_\varepsilon$  eşitsizliklerini sağlayan  $\forall n, m \in N$  sayıları için

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \quad (1.2)$$

olur. Şu halde (1.1) 'e göre  $\forall n, m \in n_\varepsilon$  için

$$d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \quad (1.3)$$

olur.  $(C[a, b], d_\infty)$  uzayı tam olduğundan  $\exists f_0 \in C[a, b]$  öyle ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f_0) = 0 \quad (1.4)$$

dir.

$f_0 \in H_\alpha[a, b]$  olduğunu gösterelim.  $(f_n)$  dizisi  $H_\alpha[a, b]$  içinde bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır, yani  $\exists M > 0$  sayısı vardır ki,

$$d(f_n, \theta) \leq M, n = 1, 2, \dots$$

dir. O zaman  $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$  noktaları ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikte  $n \rightarrow \infty$  iken limite geçeceğinde (1.4)'e göre

$$|f_0(t_1) - f_0(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu ve dolayısıyla  $f_0 \in H_\alpha[a, b]$  olduğu görülür. Şimdi  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f_0) = 0$  olduğunu görelim.

(1.2)'ye göre herhangi  $t_1, t_2 \in [a, b]$  noktaları ve  $\forall n, m \geq n_\varepsilon$  sayıları için

$$H(f_n - f_m; \alpha) < \varepsilon$$

veya

$$|f_n(t_1) - f_m(t_1) - [f_n(t_2) - f_m(t_2)]| < \varepsilon |t_1 - t_2|^\alpha$$

olur. Bu eşitsizlikte sabit  $n \geq n_\varepsilon$  için  $m \rightarrow \infty$  iken limite geçerse  $\forall n \geq n_\varepsilon$  sayısı ve  $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$  noktaları için ((1.4)'e göre  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) = f_0(t)$  olduğundan)

$$|f_n(t_1) - f_0(t_1) - [f_n(t_2) - f_0(t_2)]| < \varepsilon |t_1 - t_2|^\alpha \quad (1.5)$$

olduğu elde edilir. (1.4) ve (1.5) ten  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f_0) = 0$  olduğu ve dolayısıyla  $(H_\alpha[a, b], d)$  metrik uzayının tam olduğu görülür.

$R$  üzerinde tanımlı gerçel değerli ve  $\alpha \in (0, 1]$  üssü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün  $2\pi$ -periyotlu fonksiyonlardan oluşan küme (1.1) metriğine göre tam metrik uzaydır. Bu uzaya kaynaklarda Hölder uzayı denir ve  $\tilde{H}_\alpha[0, 2\pi]$  (veya kısaca  $\tilde{H}_\alpha$ ) ile gösterilir.

**Tanım 1.1.19 :**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $E \subset X$  kümesi verilmiş olsun.  $E$  içindeki her dizinin, limiti  $E$  den olan yakınsak bir alt dizi varsa,  $E$  kümesine  $X$  de *kompakt*

*küme* adı verilir.  $X$  kompakt küme ise  $(X, d)$  metrik uzayına *kompakt metrik uzay* adı verilir.

**Tanım 1.1.20 :**  $(X, d)$  metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi  $D = (D_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$  olsun. Eğer bir  $E \subset X$  kümesi için  $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Omega} D_\lambda$  oluyorsa  $D$  ailesine  $E$  kümesinin bir *açık örtüsü* denir. Eğer  $\Omega_0 \subset \Omega$  sonlu ve  $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Omega_0} D_\lambda$  ise  $D_0 = \bigcup_{\lambda \in \Omega_0} D_\lambda$  ailesine  $E$  kümesinin sonlu alt örtüsü adı verilir.  $E$  kümesini örten  $D$  ailesinin her kümesinin çapı  $\varepsilon > 0$  sayısından büyük değilse  $D$  örtüsüne  $E$  kümesinin  $\varepsilon$ -örtüsü denir.

**Tanım 1.1.21 :**  $(X, d)$  metrik uzayı ve  $E \subset X$  kümesi verilsin. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  sayısı için  $E$  kümesinin sonlu  $\varepsilon$ -örtüsü varsa  $E$  kümesine  $X$  'de *tamamen sınırlı bir küme* denir. Tamamen sınırlı bir kümenin sınırlı olduğu açıktır.

**Teorem 1.1.22 :** (Hausdorff)

$(X, d)$  metrik uzayı ve  $E \subset X$  kümesi verilmiş olsun.  $E$  'nin  $X$  'de kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $\forall \varepsilon > 0$  için  $E$  'nin sonlu  $\varepsilon$ -örtüsünün var olmasıdır.

**Sonuç 1.1.23 :**  $(X, d)$  tam metrik uzayının her kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

**Teorem 1.1.24 :** Kompakt  $(X, d)$  metrik uzayı tamdır.

**İspat:**  $X$  içinde bir Cauchy dizisi  $(f_n)$  olsun.  $(X, d)$  metrik uzayı kompakt olduğundan  $(f_n)$  dizisinin limiti  $f_0 \in X$  olan yakınsak bir  $(f_{n_k})$  alt dizisi vardır.

$\forall k \in \mathbb{N}$  için

$$d(f_k, f_0) \leq d(f_k, f_{n_k}) + d(f_{n_k}, f_0)$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limite geçerssek

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, f_0) = 0 \quad ((f_n)\text{-Cauchy dizisi olduğundan})$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f_{n_k}, f_0) = 0$$

olduğuna gore

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f_k, f_0) = 0$$

olduğu ve dolayısıyla  $(f_n)$  dizisinin  $X$  de yakınsak olduğu elde edilir. Demek ki,  $(X, d)$  tam metrik uzaydır.

**Tanım 1.1.25 :**  $(C[a, b], d_\infty)$  metrik uzayı ve  $E \subset C[a, b]$  alt kumesi verilsin.

(a) Eğer  $\forall f \in E$  ve  $\forall t \in [a, b]$  için  $|f(t)| \leq M$  olacak Şekilde bir  $M > 0$  sayısı varsa  $E$  kumesi *düzgün sınırlıdır* denir.

(b) Eğer  $\forall f \in E$  ve  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$  için

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$$

olacak Şekilde bir  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sayısı varsa,  $E$  kumesinin elemanları *aynı dereceden sürekli* denir.

**Teorem 1.1.26 :** (Arzela- Ascoli)

Kapalı ve sınırlı  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  aralığı ve  $C[a, b]$  uzayının bir  $E$  alt kumesi verilsin.  $E$  kumesinin  $C[a, b]$  de kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $E$ 'nin düzgün sınırlı ve elemanlarının da aynı dereceden düzgün sürekli olmasıdır.

**Örnek 1.1.27 :**  $M > 0$  olmak üzere  $(H_\alpha[a, b], d)$  Hölder uzayının

$H_\alpha(M) = \{x \in H_\alpha[a, b] : d(x, \theta) \leq M\} = \bar{S}_M(\theta)$  kapalı kumesi  $(C[a, b], d_\infty)$ 'de kompakt

bir kumedir.

Gerçekten,  $\forall f \in H_\alpha(M)$  için

$$d(f, \theta) = d_\alpha(f, \theta) + H(f; \alpha) \leq M$$

olduğundan,  $\forall f \in H_\alpha(M)$  ve  $\forall t \in |a,b|$  için  $|f(t)| \leq M$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

alırsak,  $\forall t_1, t_2 \in |a,b|$  ve  $\forall f \in H_\alpha(M)$  için

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha < M\delta^\alpha = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla,  $H_\alpha(M)$  kümesi  $(C|a,b|, d_\infty)$ 'de düzgün sınırlı ve aynı dereceden süreklidir. Buradan da Teorem 1.1.26 gereğince  $H_\alpha(M)$ 'nin  $(C|a,b|, d_\infty)$ 'de kompakt bir küme olduğu görülür.

Teorem 1.1.24 ve Örnek 1.1.27 den aşağıdaki lemmanın doğruluğu görülür.

**Lemma 1.1.28 :**  $H_\alpha(M)$  kümesi  $(C|a,b|, d_\infty)$  uzayının tam alt uzayıdır.

$u, v \in H_\alpha(M)$  için

$$d_2(u, v) = \left( \int_a^b |u(t) - v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan  $d_2 : H_\alpha(M) \times H_\alpha(M) \rightarrow \mathbb{R}_+$  dönüşümünün bir metrik olduğu açıktır.

**Lemma 1.1.29 :**  $(H_\alpha(M), d_2)$  metrik uzayı tamdır.

**İspat :**  $(f_n), (H_\alpha(M), d_2)$  içinde bir Cauchy dizisi olsun. Lemma 1.1.28'e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f_n, f_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f_0) = 0$$

olacak şekilde bir  $f_0 \in H_\alpha(M)$  fonksiyonu vardır. Buradan  $f_0 \in L_2[a,b]$  ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f_n, f_0) = 0 \text{ olduğu elde edilir.}$$

**Lemma 1.1.30 :**  $H_\alpha(M)$  kümesinde  $d_\infty$  ve  $d_2$  metriklere göre yakınsamalar denktir.

**İspat :**  $u_0, u_n \in H_\alpha(M)$  ,  $n = 1, 2, \dots$  olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(u_n, u_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(u_n, u_0) = 0$$

olduğu açıktır. Bu sonucun tersinin de doğru olduğunu gösterelim.

$x, x+h \in [a, b]$  ve  $f \in H_\alpha(M)$  olsun.  $h > 0$  için

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(x) - f(t)] dt$$

ve  $h < 0$  için

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(t) dt + \frac{1}{h} \int_{x-h}^x [f(x) - f(t)] dt$$

olduğundan  $\forall x \in [a, b]$  ve  $h \neq 0$  için

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{|h|}} d_2(f, \theta) + \frac{M}{1+\alpha} h^\alpha$$

olduğu elde edilir.

$u_0, u_n \in H_\alpha(M)$ ,  $(n = 1, 2, \dots)$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(u_n, u_0) = 0$  olsun. Yeteri kadar

büyük  $n$ -ler için sonuncu eşitsizlikte  $h = d_2(u_n, u_0)$  alırsak

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq d_2^{1/2}(u_n, u_0) + \frac{2M}{1+\alpha} d_2^\alpha(u_n, u_0)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(u_n, u_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(u_n, u_0) = 0$$

olduğu anlaşılır.

## 1.2 Normlu Uzaylar

**Tanım 1.2.1 :**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $K$  cismi  $R$  veya  $C$  olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \rightarrow ax$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her  $x, y, z \in X$  ve

$a, b \in K$  için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;

3. Her  $x \in X$  için  $x + \theta = x$  eşitliğini sağlayan bir tek  $\theta \in X$  (sıfır elemanı) vardır;

4. Her  $x \in X$  için  $x + (-x) = 0$  eşitliğini sağlayan bir tek  $-x \in X$  vardır;

5. Her  $x \in X$  için  $1 \cdot x = x$ ;

6.  $a(x + y) = ax + ay$ ;

7.  $(a + b)x = ax + bx$ ;

8.  $(ab)(x) = a(bx)$ .

Bu durumda  $X$  kümesine  $K$  cisimi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir.  $K = \mathbb{R}$  alınırsa  $X$  bir reel vektör uzayı ve  $K = \mathbb{C}$  alınırsa  $X$  bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Vektör uzayın tanımından şu basit sonuçları elde edebileceğimiz kolayca görülür:

(a) Her  $x \in X$  için  $0x = \theta$ ;

(b) Her  $a \in K$  için  $a\theta = \theta$ ;

(c)  $(-1)x = -x$ ;

(d)  $x \neq \theta$  olmak üzere  $ax = bx$  ise  $a = b$ ;

(e)  $a \neq 0$  ve  $ax = ay$  ise  $x = y$ ;

(f)  $y, z \in X$  vektörleri verildiğinde  $x + y = z$  denkleminin tek bir  $x \in X$  çözümü vardır.

**Tanım 1.2.2 :**  $X$  bir vektör uzayı ve  $Y, X$  in bir boş olmayan alt kümesi olsun.  $Y, X$  vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa,  $Y$  ye  $X$  in bir (lineer) alt uzayı denir.

**Tanım 1.2.3 :**  $X$  bir vektör uzayı olmak üzere  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  verilsin.  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

şeklindeki bir toplama  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nin bir lineer kombinasyonu denir.

$$\emptyset \neq M \subset X$$

ise  $M$  den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine  $M$  nin *gereni* (*Span*) denir ve  $\text{Span } M$  olarak gösterilir.  $\text{Span } M$ ,  $X$  in bir alt uzayıdır ve bu alt uzaya  $M$  nin ürettiği *alt uzay* denir.  $M = \emptyset$  ise  $\text{Span } M = \theta$  olur.

**Tanım 1.2.4 :**  $X$  bir vektör uzayı ve  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$  olsun.

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in K$$

olmak üzere  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$  eşitliği, ancak ve ancak,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vektörlerine *lineer bağımsız*, aksi halde *lineer bağımlı*dır denir.

**Tanım 1.2.5 :**  $X$  bir vektör uzayı ve  $M$ ,  $X$  in boş olmayan bir alt kümesi için

1.  $M$  lineer bağımsızdır;
2.  $X = \text{Span } M$

ise,  $M$  ye  $X$  in bir *tabanı* veya bir *bazı* denir.

Eğer  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   $X$  in bir tabanı ise her  $x \in X$  vektörü

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in K$$

olmak üzere  $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$  şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer  $X$  vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa  $X$  e *sonlu boyutlu bir vektör uzayı*, aksi halde *sonsuz boyutlu bir vektör uzayı* adı verilir. Sonlu boyutlu bir  $X$  vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerin sayısına  $X$  in *boyutu* denir ve  $\text{Boy } X$  ile gösterilir.

**Tanım 1.2.6 :**  $Y_1$  ve  $Y_2$ ,  $X$  vektör uzayının iki alt uzayı olsun. Eğer  $\forall x \in X$  elemanı  $y_1 \in Y_1$  ve  $y_2 \in Y_2$  olmak üzere  $x = y_1 + y_2$  şeklinde tek bir gösterime sahip ise,  $X$  vektör uzayı  $Y_1$  ve  $Y_2$  uzaylarının direkt toplamıdır denir ve  $X = Y_1 \oplus Y_2$  olarak yazılır.  $Y_2$  ye  $Y_1$  in (yada  $Y_1$  e  $Y_2$  nin)  $X$  deki *cebirsal tümleyeni* denir.

Eğer  $Y_1$  ve  $Y_2$ ,  $X$  vektör uzayının iki alt uzayı ise

$$Y = \{y_1 + y_2 : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$$

olmak üzere

$$\text{Boy}(Y_1 + Y_2) = \text{Boy}Y_1 + \text{Boy}Y_2 - \text{Boy}(Y_1 \cap Y_2)$$

dir. Bu durumda,

$$\text{Boy}(Y_1 \oplus Y_2) = \text{Boy}Y_1 + \text{Boy}Y_2$$

olduğu açıktır.

Eğer  $X_1$  ve  $X_2$  aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzayı ise  $x_1, y_1 \in X_1$  ve  $x_2, y_2 \in X_2$  vektörleri üzerindeki cebirsel işlemleri

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

şeklinde tanımlarsak  $X = X_1 \times X_2$  kartezyen çarpımı bir vektör uzayına dönüştürülür.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzaylarının kartezyen çarpımı

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

ve bu çarpım üzerinde cebirsel işlemler aşikar biçimde tanımlanır.

$$X_1 = X_2 = \dots = X$$

durumunda

$$X \times X \times \dots \times X$$

çarpımı  $X^n$  ile gösterilir.

Bir  $X$  vektör uzayının bir  $Y$  alt kümesi verilsin. Eğer  $y_1, y_2 \in Y$  olduğunda

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa,  $Y$  alt kümesi *dışbükeydir (konvektir)* denir.

Herhangi bir  $D$  kümesi ve bir  $X$  vektör uzayı verilsin. Tanım kümesi  $D$  ve görüntü kümesi  $X$  in bir alt kümesi olan bütün fonksiyonlar kümesi

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), (af)(t) = af(t), t \in D, a \in K \quad (1.6)$$

cebirsel işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur ve  $E(D; X)$  ile gösterilir. Farklı  $D$  kümeleri ve farklı  $X$  vektör uzayları durumunda çeşitli  $E(D; X)$  vektör uzayları elde edilir.

**Örnek 1.2.7 :**  $C([a,b];R)$  uzayı.  $D = [a,b]$  ve  $X = C([a,b],[a,b])$  üzerinde sürekli ve (1.6) işlemleri altında reel bir vektör uzayı oluşturan reel değerli bütün fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda  $C([a,b];R) = E([a,b];C([a,b]))$  reel bir vektör uzayıdır. Benzer şekilde,  $C([a,b];C)$  kompleks vektör uzayı tanımlanır.

Eğer  $X$  vektör uzayı hem de metrik uzay ise  $X$  e lineer metrik uzay adı verilir.

**Tanım 1.2.8 :**  $X$  bir  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow R_+, x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall a \in K$  için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a|\|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa  $X$  üzerinde norm adını alır ve bu durumda  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine bir *normlu vektör uzayı* denir. (N1) - (N3) özelliklerine *norm aksiyomları* denir.

$(X, \|\cdot\|)$  normlu bir uzay olmak üzere

$$d : X \times X \rightarrow R_+, d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun  $X$  üzerinde bir metrik olduğu kolayca görülür. Gerçekten,  $\forall x, y, z \in X$  için

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Rightarrow x = y,$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

ve (N3) aksiyomundan dolayı

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

olduğundan  $d$ ,  $X$  üzerinde bir metriktir. Böylece,  $\forall (X, \|\cdot\|)$  normlu uzaydan bir  $(X, d)$  metrik uzayı elde edilebilir. Bu yolla elde edilen  $d$  metriğine  $\|\cdot\|$  normunun *indirgenliği metriği* denir.

**Lemma 1.2.9 :**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu bir uzay,  $x, y \in X$  için  $d(x, y) = \|x - y\|$  ve  $\alpha \in K$  olsun. Bu durumda

$$(a) \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (d \text{ nin öteleme özelliği}),$$

$$(b) d(ax, ay) = |\alpha| d(x, y) \quad (d \text{ nin mutlak homojenlik özelliği})$$

özellikleri doğrudur.

**Tanım 1.2.10 :**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzay içine bir dizi  $(x_n)$  ve  $x_0 \in X$  olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise  $(x_n)$  dizisi  $x_0$  noktasına *yakınsıyor* denir ve

$$x_n \rightarrow x_0 \text{ yada } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre *yakınsama* adı verilir.

Bir normlu uzay  $(X, \|\cdot\|)$  ve bunun bir alt kümesi  $A$  olsun.

$$d(A) = \sup\{\|x - y\| : x \in A, y \in A\} \geq 0$$

sayısına  $A$  kümesinin *çapı* denir. Eğer bir  $A \subset X$  kümesinin çapı sonlu ise  $A$  kümesine *sınırlı küme* denir.  $X$  içindeki  $(x_n)$  dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise  $(x_n)$  dizisine *sınırlı dizi* adı verilir.

**Tanım 1.2.11 :**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu bir uzayı ve bunun içinde bir dizi  $(x_n)$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_\varepsilon$  olduğunda  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $n_\varepsilon$  bulunabiliyorsa  $(x_n)$  dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

**Lemma 1.2.12 :**  $(X, d)$  bir metrik vektör uzayı ve  $d$  metriği öteleme ve mutlak homojenlik özelliklerine sahip olsun. O halde  $x \in X$  için  $\|x\| = d(x, \theta)$  olmak üzere  $(X, d)$  ve  $(X, \|\cdot\|)$  uzaylarının topolojik yapıları aynıdır, yani  $(X, d)$   $(X, \|\cdot\|)$  içinde her

yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi  $(X, \|\cdot\|)$   $(X, d)$  içinde sırasıyla yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir.

**Tanım 1.2.13 :** Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzaydaki her Cauchy dizisi  $X$  içinde bir limite yakınsıyorsa, bu  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayına *tam normlu uzay veya Banach uzayı* denir.

**Örnek 1.2.14 :**  $(C[a, b], K)$  uzayı  $\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : t \in [a, b]\}$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

**Örnek 1.2.15 :**  $H_{\alpha}[a, b]$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) uzayı  $\|f\|_{\alpha} = d(f, \theta) = \|f\|_{\alpha} + H(f, \alpha)$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

**Örnek 1.2.16 :** (Riesz-Fischer Teoremi)

$L_p(E)$ ,  $1 \leq \infty$  vektör uzayı  $f \in L_p(E)$  için

$$\|f\|_p = \|f\|_p = \left( \int_E |f(t)|^p \right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

**Tanım 1.2.17 :**  $X$  ve  $Y$  boş olmayan kümeler ve  $D \subset X$  olsun.  $D$  nin her elemanına  $Y$  nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala  $D$  den  $Y$  ye bir *operatör veya dönüşüm* denir.  $A$  operatörünün  $x$  e karşılık getirdiği eleman  $A(x)$  ile gösterilir.  $A$  operatörünün  $x \in D$  yi,  $A(x) \in Y$  ye götürdüğünü belirtmek için,  $A : D \rightarrow Y$  gösterimi kullanır. (Bu gösterim,  $D$  yi  $Y$  ye gönderen  $A$  operatörü veya  $A, D$  'den  $Y$  ye şeklinde okunur).

Bu durumda  $D$  ye  $A$  operatörünün *tanım kümesi* denir ve genellikle  $D(A)$  ile gösterilir.

$$R = R(A) = \{y \in Y : y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine  $A$  operatörünün *değer (veya görüntü) kümesi* denir.  $A$  operatörünün yaptığı bu işlem

$$X \supset D(A) \xrightarrow{A} R(A) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca  $A: X \rightarrow Y$  biçiminde gösterilir. Bu gösterimde

$$D(A) \neq X \text{ veya } R(A) \neq Y$$

olabilir.

**Tanım 1.2.18 :**  $X, Y$  ve  $Z$  kümeleri ve  $A: X \rightarrow Y$  ve  $B: Y \rightarrow Z$  operatörleri verilsin.  $R(A) \subset D(B)$  ise  $\forall x \in X$  için  $A(x) \in Y$  olduğundan

$$B(A(x)) \in Z$$

dir.  $X$  den  $Z$  ye  $(BA)(x) = B(A(x)), x \in D(A)$  ile tanımlı operatöre  $B$  ile  $A$  nun *bileşkesi* denir ve  $BA$  ile gösterilir. Hatta  $AB$  operatörünün tanımlı olması (Bu yalnız  $Z = X$  olması halinde geçerlidir.) durumunda da genellikle  $AB \neq BA$  olur.

**Tanım 1.2.19 :**  $A: X \rightarrow Y$  operatörü için  $A(X) = Y$  oluyorsa,  $A$  operatörüne *örten* veya *surjektif*, aksi takdirde operatöre *içine operatör* adı verilir. Buna göre eğer  $A$  örten bir operatör ise  $\forall y \in Y$  için  $A(x) = y$  olacak şekilde  $x \in X$  vardır.

**Tanım 1.2.20 :**  $A: X \rightarrow Y$  operatörü için herhangi  $x_1, x_2 \in X$  için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$$

yada, buna eşdeğer bir başka deyişle

$$A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa,  $A$  operatörüne *birebir* veya *injektif operatör* denir.

**Tanım 1.2.21 :** Hem birebir hem de örten olan operatöre *birebir örten* veya *bijektif operatör* denir.

**Tanım 1.2.22 :**  $X$  ve  $Y$  metrik uzayları ve  $A: X \rightarrow Y$  operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağlandığında  $A$  operatörü  $x_0 \in D(A)$  noktasında *süreklidir* denir.

- (a)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(A)$  için  $d_x(x, x_0) < \delta$  iken  $d_y(A(x), A(x_0)) < \varepsilon$  dir.
- (b)  $x_0 \in D(A)$  noktasına yakınsayan  $\forall (x_n) \subset D(A)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(x_0)$  (veya  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_y(A(x_n), A(x_0)) = 0$ ) dir.

**Tanım 1.2.23 :** Eğer  $A: X \rightarrow Y$  operatörü  $D(A)$ 'nın her noktasında sürekli ise,  $A$  operatörü  $D(A)$  üzerinde *sürekli* denir.

**Teorem 1.2.24 :**  $X$  ve  $Y$  normlu uzayları ve  $A: X \rightarrow Y$  operatörü verilsin.  $A$  operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul  $Y$  uzayında açık (veya kapalı)  $\forall F \subset R(A)$  kümesi için  $A^{-1}(F) \subset D(A)$  kümesinin  $X$  uzayında açık (veya kapalı) bir küme olmasıdır.

**Tanım 1.2.25 :**  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar ve  $A$  tanım kümesi  $D(A) \subset X$  ve görüntü kümesi  $R(A) \subset Y$  olan bir operatör olsun. Eğer  $A$  operatörü  $D(A)$ 'nın  $X$  de sınırlı her kümesine  $R(A)$  nın  $Y$  de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa  $A$  operatörüne *sınırlı bir operatör* adı verilir.

**Tanım 1.2.26 :**  $X$  ve  $Y$  aynı bir  $K$  cisimi üzerinde iki lineer uzay ve  $A: X \rightarrow Y$  operatörü verilsin. Eğer  $D(A)$ ,  $X$  in bir alt uzayı,  $\forall x, y \in D(A)$  ve  $\forall \alpha, \beta \in K$  için  $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$  ise  $A$  operatörüne *lineer operatör* denir.

**Teorem 1.2.27 :**  $A: X \rightarrow Y$  bir lineer operatör olsun.  $A$  tek bir noktada sürekli ise, her noktada *sürekli*dir.

**Tanım 1.2.28 :**  $A: X \rightarrow Y$  bir lineer operatörü verildiğinde  $\forall x \in D(A)$  için

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad (1.7)$$

olacak şekilde sabit bir  $c > 0$  sayısı varsa  $A$  operatörü  $D(A)$  üzerinde *sınırlıdır* denir.

(1.7) eşitsizliğini sağlayan  $c > 0$  sayılarının en küçük alt sınırına  $A: X \rightarrow Y$  *sınırlı lineer operatörünün normu* denir ve  $\|A\|$  ile gösterilir.

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in D(A) \text{ için } \|Ax\| = c\|x\|\}$$

### 1.3 Banach Sabit Nokta ve Schauder Prensipleri

**Tanım 1.3.1 :**  $(X, d)$  bir metrik uzayı,  $D \subset X$  kapalı kümesi ve  $A: D \rightarrow D$  operatörü (veya dönüşümü) verilmiş olsun. Eğer her bir  $\forall x, y \in D$  için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad (1.8)$$

olacak şekilde  $0 \leq \alpha < 1$  sayısı varsa  $A: D \rightarrow D$  operatörüne *daralma operatörü* (*daralma dönüşümü*) denir.

$$Ax^* = x^*$$

olacak şekilde  $x^* \in D$  vektörüne  $A: D \rightarrow D$  operatörünün *sabit noktası* denir.

Banach uzayında Banach sabit nokta prensibinin ispatı (Musayev, Alp, 2000) kitabında verilmiştir. Biz bu prensibin tam metrik uzayda ispatını vereceğiz.

**Teorem 1.3.2 :** (Metrik uzaylarda daralma dönüşümü prensibi)

$(X, d)$  tam metrik uzayının  $D \subset X$  kapalı kümesinde  $A: D \rightarrow D$  daralma operatörünün tek bir  $x^* \in D$  sabit noktası vardır ve her bir  $x_0 \in D$  başlangıç noktası için

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanan  $(x_n)$  dizisi (iterasyon prosesi)  $x^*$  vektörüne yaklaşır ve  $(x_n)$  dizisinin  $x^*$  a yakınsama hızı

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \quad (1.10)$$

eşitsizliği ile verilir.

**İspat:**  $x_{n+1} = Ax_n$ ,  $x_n = Ax_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  olduğundan (1.8) e göre

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

dir. Benzer eşitsizlikler sırayla kullanılarak

$$d(x_{n+1}, x_0) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

elde edilir. Bundan dolayı  $\forall p, n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$  olduğundan son eşitsizliğe göre  $(x_n)$  dizisi Cauchy dizisidir.  $X$  tam

metrik uzay olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  olacak şekilde bir  $x^* \in X$  vektörü vardır.

$\forall n = 0, 1, 2, \dots$  için  $x_n \in D$  ve  $D$  kapalı olduğundan  $x^* \in D$  dir. (1.8) e göre

$$d(x_{n+1}, Ax^*) = d(Ax_n, Ax^*) \leq \alpha d(x_n, x^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$$

olduğuna göre  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Ax^*) = 0$  veya  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = Ax^*$  dir. Buradan  $x^* = Ax^*$ , yani

$x^* \in D$  vektörü  $x = Ax$  denkleminin bir çözümüdür. Bunun tek bir çözüm olduğunu gösterelim.  $y^* \in D$  vektörü de  $x = Ax$  denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\|x^* - y^*\| = \|Ax^* - Ay^*\| \leq \alpha \|x^* - y^*\|$$

dir ve dolayısıyla  $\|x^* - y^*\| = 0$ , yani  $x^* = y^*$  alınır. (1.11) eşitsizliğinde  $p \rightarrow \infty$  iken

limite geçerse (1.10) eşitsizliği elde edilir.

Kaynaklarda daralma dönüşümü prensibine Banach sabit nokta prensibi de denir.

**Sonuç 1.3.3 :**  $A$  operatörü  $(X, d)$  tam metrik uzayında tanımlı ve  $A(X) \subset X$  olsun. Eğer  $A$  operatörü  $X$  üzerinde daralma operatörü ise,  $A$  operatörünün tek bir  $x^* \in D$  sabit noktası vardır ve her bir başlangıç  $x_0 \in D$  vektörü için (1.9) şeklinde tanımlanan  $(x_n)$  dizisi  $x^*$  vektörüne (1.10) hızla yaklaşır.

**Sonuç 1.3.4 :**  $(X, d)$  tam metrik uzayının  $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$  kapalı yuvarında tanımlı  $A : \bar{S}_r(a) \rightarrow X$  operatörü verilmiş olsun.  $A$  operatörü  $\bar{S}_r(a)$  üzerinde daralma operatörü ve  $d(Aa, a) \leq (1-\alpha)r$  ise  $A$  operatörünün tek bir  $x^* \in \bar{S}_r(a)$  sabit noktası vardır. Her bir başlangıç  $x_0 \in \bar{S}_r(a)$  vektörü için (1.9) şeklinde tanımlanan  $(x_n)$  dizisi  $x^*$  vektörüne (1.10) hızla yaklaşır.

**Tanım 1.3.5 :**  $X$  ve  $Y$  birer metrik uzay,  $F : X \rightarrow Y$  tanım kümesi

$$D(F) \subset X$$

olan lineer olmayan bir operatör ve  $x_0 \in D(F)$  olsun. Eğer :

(a)  $D(F)$  kümesinde  $x_0$  noktasına yakınsayan  $\forall (x_n) \subset D(F)$  dizisi için  $Y$  içindeki  $(F(x_n))$  dizisi de  $F(x_0) \in Y$  noktasına yakınsarsa  $F$  operatörü  $x_0$  noktasında *sürekli* denir.

(b)  $F$  operatörü  $\forall x \in D(F)$  noktasında sürekli ise,  $F$  ye  $D(F)$  üzerinde *sürekli* denir.

(c)  $F$  operatörü  $D(F)$  üzerinde sürekli ve  $D(F)$  içinde her sınırlı alt kümeye  $Y$  nin kompakt bir kümesini karşılık getiriyorsa,  $F$  ye *tamamen sürekli bir operatör* denir.

(d)  $M \subset D(F)$  olmak üzere  $\sup\{\|F(x)\| : x \in M\} < +\infty$  ise,  $F$  ye  $M$  üzerinde *sınırlı operatör* denir.

**Tanım 1.3.6 :**  $X$  lineer uzayının sonlu  $S = \{x_i \in X : i = 1, 2, \dots, k\}$  kümesi verilmiş olsun.

$\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$  ve  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  olmak üzere  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  biçimindeki bütün lineer kombinasyonlardan oluşan kümeye  $S$  nin *dışbükey gereni* denir ve  $C_0(S)$  ile gösterilir. Bu durumda  $C_0(S)$  nin dışbükey ve kapalı bir küme olduğu açıktır.

**Teorem 1.3.7 :** (Brauer)

$D$  sonlu boyutlu  $X$  normlu vektör uzayının sınırlı kapalı dışbükey bir alt kümesi olsun.  $A : D \rightarrow X$  operatörü sürekli ve  $A(D) \subset D$  ise,  $A$  nın  $D$  üzerinde sabit noktası vardır.

**Teorem 1.3.8 :** (Schauder)

$F$  operatörü  $X$  normlu uzayının dışbükey kapalı  $D$  alt kümesini kendisine dönüştürür, yani  $F(D) \subset D$ . Eğer  $F$  operatörü  $D$  üzerinde tamamen sürekli ise onun  $D$  üzerinde sabit noktası vardır.

**İspat :**  $D \subset X$  dışbükey kapalı bir küme,  $F : D \rightarrow D$  operatörü sürekli ve  $F(D) \subset D$  kompakt bir küme olsun. O zaman Hausdorff teoremi dolayısıyla her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $F(D)$  kümesinin sonlu  $\{S_\varepsilon(y_1), \dots, S_\varepsilon(y_n)\}$  örtüsü vardır.  $C_0\{y_1, \dots, y_n\} = D_0$  dersek  $D_0 \subset D$  olduğu ve ayrıca  $D_0$  in  $X$  uzayının sonlu boyutlu lineer alt uzayının bir alt kümesi olduğu açıktır. Bu alt uzayın boyutu  $\{y_1, \dots, y_n\}$  kümesinin lineer bağımsız elemanlarının sayısına bağlıdır.

Her  $x \in D_0$  için

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n l_i y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n l_i \|y_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|y_i\|$$

olduğundan  $D_0$  sınırlı bir kümedir.  $D_0$  kümesinin kapalı olduğu açıktır. Dolayısıyla  $D_0$  sonlu boyutlu uzayın dışbükey kapalı ve sınırlı bir kümesi olduğuna göre  $D_0$  kümesi için Brauer teoremi geçerlidir.

Brauer teoremindeki söz konusu olan operatörü oluşturalım.  $x \in D$  için

$$\mu_k(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|Fx - y_k\|, & \|Fx - y_k\| < \varepsilon \text{ ise;} \\ 0, & \|Fx - y_k\| \geq \varepsilon \text{ ise, } k = 1, \dots, n \end{cases}$$

olsun.  $\mu_k(x) : D \rightarrow R (k = 1, \dots, n)$  fonksiyonlarının  $D$  üzerinde sürekli olduğunu gösterelim.

$(x_p) \subset D, p \rightarrow \infty$  iken  $x_p \rightarrow x_0$  ve  $\|Fx_0 - y_k\| < \varepsilon$  olsun. O zaman  $F$  operatörü  $D$  üzerinde sürekli olduğundan  $Fx_p \rightarrow Fx_0$  olur. Bu durumda  $\forall p \geq p_0$  için  $\|Fx_p - y_k\| < \varepsilon$  olacak şekilde  $p_0 \in N$  sayısı vardır. Dolayısıyla,  $\mu_k(x_p), (k = 1, 2, \dots, n)$  fonksiyonlarının tanımına göre  $p \rightarrow \infty$  iken

$$\mu_k(x_p) = \varepsilon - \|F(x_p) - y_k\| \rightarrow \varepsilon - \|Fx_0 - y_k\| = \mu_k(x_0)$$

olur.  $\|F(x_0) - y_k\| \geq \varepsilon$  olduğunda  $\mu_k(x)$  fonksiyonunun sürekliliği tanımdan görülür.

Böylece  $\mu_k(x) \in C(D; R), k = 1, \dots, n$ .

Her  $x \in D$  için  $g(x) = \sum_{k=1}^n \mu_k(x) > 0$  ve  $g(x) \in C(D; R)$  olduğu açıktır.

$$F_0 x = \frac{1}{g(x)} \sum_{k=1}^n \mu_k(x) y_k$$

biçiminde tanımlı  $F_0 : D \rightarrow X$  operatörünü göz önüne alalım.  $D_0$  dışbükey bir küme olduğundan  $F_0(D_0) \subset D_0$  ve  $F_0$  nin  $D$  üzerinde sürekli olduğu açıktır.

Dolayısıyla, Brauer teoremine göre,  $F_0 x_0 = x_0$  olacak biçimde  $x_0 \in D_0$  noktası vardır. Şimdi  $F$  nin  $D$  de sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Bu nedenle  $\|Fx_0 - x_0\|$  büyüklüğünü değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
\|Fx_0 - x_0\| &= \|Fx_0 - F_0x_0\| \\
&= \frac{1}{g(x_0)} \left\| \sum_{k=1}^n \mu_k(x_0) [Fx_0 - y_k] \right\| \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^n \mu_k(x_0) \|Fx_0 - y_k\|}{\sum_{k=1}^n \mu_k(x_0)} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. Monoton azalan ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$$

olan her  $(\varepsilon_m)$  dizisi için benzer olarak

$$\|Fx_m - x_m\| < \varepsilon_m$$

olacak biçimde  $x_m \in D_0$  noktalarının varlığı gösterilebilir.  $F(D)$  kompakt bir küme olduğundan  $(Fx_m) \subset F(D)$  dizisinin yakınsak  $(Fx_{m_k})$  alt dizisi vardır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Fx_{m_k} = x^*$$

dersek,  $D$  kapalı olduğundan  $x^* \in D$  olur.

$$\|x_{m_k} - x^*\| \leq \|x_{m_k} - Fx_{m_k}\| + \|Fx_{m_k} - x^*\|$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limite geçerse

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Fx_{m_k} = x^*$$

ve  $F, x^*$  noktasında sürekli olduğundan  $Fx^* = x^*$  olduğu, yani  $F$  operatörünün

$x^* \in D$  sabit noktasına sahip olduğu elde edilir.

## 2. HİLBERT ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

### 2.1 Hilbert Çekirdekli Singüler İntegralin Bazı Özellikleri

Bilindiği gibi  $\int_a^b f(x)dx$  belirli (Riemann) integrali tanımlanırken hem  $[a,b]$

integrasyon aralığının hem de  $f(x)$  integrant fonksiyonunun sınırlı olduğu kabul edilir. Bu integral kavramının integrasyon aralığının sınırsız, integrantın sınırsız ve hem integrasyon aralığının hem de integrantın sınırsız olduğu durumlar için genişletilmesi gerekir. Bu tür integrallere *has olmayan integraller* adı verilir.

$a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $[a, b - \varepsilon]$  ( $0 < \varepsilon < b - a$ ) aralığında Riemann anlamında integrallenebilen olsun. Bu durumda  $f$ 'in  $[a, b]$  üzerinde has olmayan integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (2.1)$$

limiti olarak tanımlanır. Eğer (2.1) limiti var ve sonlu ise  $\int_a^b f(x)dx$  integrali yakınsak, limiti yoksa veya  $\infty$  ( $-\infty$  yada  $+\infty$ ) ise *integral ıraksaktır* denir.

Benzer şekilde,  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $[a, b]$  üzerinde has olmayan integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (2.2)$$

limiti olarak tanımlanır.

$f$  fonksiyonu  $[a, b]$  kapalı aralığının bir  $c \in (a, b)$  noktasında sınırsız ve  $[a, c - \varepsilon_1]$  ve  $[c + \varepsilon_2, b]$  ( $\varepsilon_1 \in (0, c - a)$ ,  $\varepsilon_2 \in (0, b - c)$ ) aralıkları üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen olsun. Bu durumda  $f$ 'nin  $[a, b]$  aralığında has olmayan integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \right) \quad (2.3)$$

limiti olarak tanımlanır. Eğer (2.3) limiti  $\varepsilon_1$  ve  $\varepsilon_2$  sayıları birbirinden bağımsız olarak sıfıra yaklaştığında mevcut ise (2.3) integrali yakınsak, limit yoksa veya  $\infty$  ( $-\infty$  yada  $+\infty$ ) ise *integral iraksaktır* denir.

Eğer (2.3) limiti yalnızca  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow 0$  durumunda mevcut ise  $\int_a^b f(x) dx$  integrali Cauchy esas değeri anlamında yakınsaktır denir. Bu limite has olmayan  $\int_a^b f(x) dx$  integralinin Cauchy esas değeri adı verilir ve

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right) \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.1.1.** Has olmayan  $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\lambda}$ ,  $\lambda > 0$  integralinin yakınsaklık durumunu inceleyelim.

**Çözüm:**  $\lambda > 0, \lambda \neq 1$  olsun. Bu durumda (2.1)'e göre

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^\lambda} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{(1-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_0^{1-\varepsilon} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \\ &= \begin{cases} 0 & , \lambda < 1 \text{ ise} \\ +\infty & , \lambda > 1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda = 1$  ise (2.1)'e göre

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln(1-x) \Big|_0^{1-\varepsilon} \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon \\ &= +\infty \end{aligned}$$

olur. Demek ki, verilen has olmayan integral  $\lambda < 1$  olduğunda yakınsak,  $\lambda \geq 1$  olduğunda ise iraksaktır.

**Örnek 2.1.2.** Has olmayan  $\int_0^5 \frac{dx}{x-2}$  integralinin yakınsak olup olmadığını gösterelim. Iraksaklık durumunda Cauchy esas değerini hesaplayalım.

**Çözüm:** (2.3)'e göre

$$\begin{aligned} \int_0^5 \frac{dx}{x-2} &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \int_0^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+\varepsilon_2}^5 \frac{dx}{x-2} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \ln(2-x) \Big|_0^{2-\varepsilon_1} + \ln(x-2) \Big|_{2+\varepsilon_2}^5 \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} (\ln \varepsilon_1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln \varepsilon_2) \\ &= \ln \frac{3}{2} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} (\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}) \end{aligned}$$

yazabiliriz.  $\varepsilon_1$  ve  $\varepsilon_2$  sayıları birbirinden bağımsız olarak sıfıra yaklaştığında  $\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} (\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})$  limiti

mevcut olmadığından  $\int_0^5 \frac{dx}{x-2}$  has olmayan integrali yoktur. Bu integralin Cauchy esas değerini bulalım.

$$\int_0^5 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+\varepsilon}^5 \frac{dx}{x-2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \ln(2-x) \Big|_0^{2-\varepsilon} + \ln(x-2) \Big|_{2+\varepsilon}^5 \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln 3 - \ln 2) \\
&= \ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\text{p.v.} \int_0^5 \frac{dx}{x-2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

dır. Benzer şekilde

$$\text{p.v.} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ctg} \frac{s}{2} ds = 0$$

ve genel olarak  $\forall t \in \mathbb{R}$  ve  $\forall a > 0$  için

$$\text{p.v.} \int_{t-a}^{t+a} \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds = 0$$

olduğu gösterilebilir.

**Örnek 2.1.3 :**  $x \in H_{\alpha}[0, 2\pi]$  ( $0 < \alpha < 1$ ) olmak üzere has olmayan

$$\int_0^{2\pi} x(s) \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

integralinin Cauchy esas değeri anlamında yakınsak olduğunu gösterelim.

**Çözüm :** Verilen integral

$$\int_0^{2\pi} x(s) \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds = \int_0^{2\pi} [x(s) - x(t)] \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds + x(t) \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

biçiminde yazılabilir.

$$\text{p.v.} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{s-t}{2} ds = 0$$

olduğundan son eşitlikten

$$\text{p.v.} \int_0^{2\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds = \text{p.v.} \int_0^{2\pi} [x(s) - x(t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

eşitliği elde edilir.

Öte yandan herhangi  $s, t \in [0, 2\pi]$  için

$$\begin{aligned} \left| [x(s) - x(t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} \right| &\leq H(x, \alpha) \frac{|s-t|^\alpha}{\left| \sin \frac{s-t}{2} \right|} \left| \cos \frac{s-t}{2} \right| \\ &\leq \frac{2H(x, \alpha)}{|s-t|^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

olduğundan ve  $0 < \alpha < 1$  için has olmayan  $\int_0^{2\pi} \frac{ds}{|s-t|^{1-\alpha}}$  integrali yakınsak olduğundan

$$\int_0^{2\pi} [x(s) - x(t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

integrali yakınsaktır. Buna göre

$$\text{p.v.} \int_0^{2\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds = \int_0^{2\pi} [x(s) - x(t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

olur. Dolayısıyla, verilen integral Cauchy esas değer anlamında yakınsaktır.

$x \in H_\alpha[0, 2\pi]$  olmak üzere Cauchy esas değer anlamında tanımlı

$$H x(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds \quad (2.5)$$

operatörüne bakalım. Kaynaklarda bu operatöre *Hilbert Dönüşümü (Operatörü)* adı veriliyor.

$H$  operatörünün  $(\tilde{H}_\alpha[0, 2\pi], \|\cdot\|_\alpha)$  uzayında incelenmesinde aşağıda ispat edeceğimiz Teorem 2.1.4 ve Sonuç 2.1.5 önem taşımaktadır.

**Teorem 2.1.4 :**  $t$  ve  $s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $f(t, s)$  fonksiyonu için herhangi  $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in [0, 2\pi]^2$  için

$$|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| \leq K_1 |t_1 - t_2|^{\alpha_1} + K_2 |s_1 - s_2|^{\alpha} \quad (2.6)$$

olacak şekilde  $K_1 > 0, K_2 > 0$  sabitleri ve  $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$  sayıları varsa

$$\tilde{f}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

fonksiyonu her bir  $t \in [0, 2\pi]$  için

$$|\tilde{f}(t)| \leq \frac{4\pi^{\alpha}}{\alpha} K_2 \quad (2.7)$$

ve herhangi  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$  noktaları için

$$|\tilde{f}(t_1) - \tilde{f}(t_2)| \leq (c_1 K_1 + c_2 K_2) |t_1 - t_2|^{\alpha} \quad (2.8)$$

koşullarını sağlar. Burada  $c_1 > 0, c_2 > 0$  sabit sayıları  $K_1$  ve  $K_2$  sayılarına bağlı değildir.

(Hüseynov, 1947)

**İspat:**  $\forall \varepsilon \in (0, \pi)$  ve  $\forall x \in [-\pi, \pi]$  için esas değer anlamında

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds = 0$$

ve  $2\pi$  periyotlu  $g$  fonksiyonu ve herhangi  $\eta$  reel sayısı için

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(s) ds = \int_{-\pi+\eta}^{\pi+\eta} g(s) ds$$

olduğundan  $\tilde{f}(t)$  integralini,  $s = s+t$  dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t, s) - f(t, t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t, s+t) - f(t, t)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz.

(2.6) koşulu dikkate alınır

$$|\tilde{f}(t)| \leq K_2 \int_{-\pi}^{\pi} |s|^{\alpha} \left| \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right| ds = 2K_2 \int_0^{\pi} s^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds$$

elde edilir.

Herhangi  $s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  için  $\text{ctg } s < \frac{1}{s}$  olduğuna göre son eşitsizlikten

$$|\tilde{f}(t)| \leq 4K_2 \int_0^{\pi} s^{\alpha-1} ds = \frac{4K_2 \pi^{\alpha}}{\alpha}$$

elde ederiz. Buradan da (2.7) eşitsizliğinin doğru olduğu anlaşılır.

Şimdi (2.7) eşitsizliğinin doğru olduğunu görelim. Bu eşitsizliğin herhangi  $t, t + \Delta t \in [-\pi, \pi]$   $\left(0 \leq \Delta t \leq \frac{\pi}{8}\right)$  noktaları için gösterilmesi yeterlidir.  $t, t + \Delta t \in [-\pi, \pi]$

ve  $0 \leq \Delta t \leq \frac{\pi}{8}$  olsun.

Bu durumda  $\tilde{f}(t + \Delta t) - \tilde{f}(t)$  farkı

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t + \Delta t) - \tilde{f}(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \Delta t, s) \text{ctg} \frac{s - t - \Delta t}{2} ds - \int_{-\pi}^{\pi} f(t, s) \text{ctg} \frac{s - t}{2} ds \\ &= \left( \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} + \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} + \int_{t+2\Delta t}^{\pi+t} \right) f(t + \Delta t, s) \text{ctg} \frac{s - t - \Delta t}{2} ds \\ &\quad - \left( \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} + \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} + \int_{t+2\Delta t}^{\pi+t} \right) f(t, s) \text{ctg} \frac{s - t}{2} ds \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Öte yandan

$$\left( \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} + \int_{t+2\Delta t}^{\pi+t} \right) \text{ctg} \frac{s - t}{2} ds = 0, \text{ esas değer anlamında}$$

$$\int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} \text{ctg} \frac{s - t}{2} ds = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} \text{ctg} \frac{s - t - \Delta t}{2} ds = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t+\Delta t) - \tilde{f}(t) &= \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} [f(t+\Delta t, s) - f(t+\Delta t, t+\Delta t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t-\Delta t}{2} ds - \\
&\quad - \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} [f(t, s) - f(t, t)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds + \\
&\quad + \left( \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} + \int_{t+2\Delta t}^{\pi+t} \right) [f(t+\Delta t, s) - f(t+\Delta t, t+\Delta t)] \left( \operatorname{ctg} \frac{s-t-\Delta t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} \right) ds \\
&\quad + \left( \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} + \int_{t+2\Delta t}^{\pi+t} \right) [f(t+\Delta t, s) - f(t, s)] \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrallere sırasıyla  $J_1, J_2, \dots, J_6$  deyip onları değerlendirelim.

(2.6) hipotezinden dolayı

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq K_2 \int_{t-2\Delta t}^{t+2\Delta t} |s-t-\Delta t|^\alpha \left| \operatorname{ctg} \frac{s-t-\Delta t}{2} \right| ds \\
&= K_2 \int_{t-2\Delta t}^{t+\Delta t} (s+\Delta t-s)^\alpha \operatorname{ctg} \frac{s+\Delta t-s}{2} ds + K_2 \int_{t+\Delta t}^{t+2\Delta t} (s-t-\Delta t)^\alpha \operatorname{ctg} \frac{s-t-\Delta t}{2} ds \\
&= 2K_2 \int_0^{3\Delta t} s^\alpha \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&\leq \frac{4 \cdot 3^\alpha \cdot K_2}{\alpha} (\Delta t)^\alpha
\end{aligned}$$

buluruz. Benzer şekilde

$$|J_2| \leq \frac{4 \cdot 2^\alpha \cdot K_2}{\alpha} (\Delta t)^\alpha$$

eşitsizliğinin doğru olduğu da gösterilebilir. Şimdi  $J_3$  integralini değerlendirelim.

$$\operatorname{ctg} \frac{s-t-\Delta t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta t}{2}}{\sin \frac{s-t-\Delta t}{2} \sin \frac{s-t}{2}}$$

olduğuna göre

$$|J_3| \leq K_2 \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \int_{-\pi+t}^{t-2\Delta t} \frac{|s-t-\Delta t|^\alpha}{\left| \sin \frac{s-t}{2} \right| \left| \sin \frac{s-t-\Delta t}{2} \right|} ds$$

$\left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \leq \frac{\Delta t}{2}$  olduğundan)

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \frac{K_2}{2} \Delta t \int_{2\Delta t}^{\pi} \frac{(\tau + \Delta t)^\alpha}{\sin \frac{\tau}{2} \left| \sin \frac{\tau + \Delta t}{2} \right|} d\tau \\ &\leq 2^{\delta-1} K_2 \Delta t \left( \int_{2\Delta t}^{\pi-\Delta t} + \int_{\pi-\Delta t}^{\pi} \right) \frac{\tau^\alpha}{\sin \frac{\tau}{2} \left| \sin \frac{\tau + \Delta t}{2} \right|} d\tau \end{aligned}$$

olur.

$2\Delta t \leq \tau \leq \pi - \Delta t \Rightarrow 0 < \tau < \tau + \Delta t \leq \pi$  ve buna göre

$\left| \sin \frac{\tau + \Delta t}{2} \right| = \sin \frac{\tau + \Delta t}{2} > \sin \frac{\tau}{2}$  ve  $0 < \pi - \Delta t \leq \tau \leq \pi$  olduğunda ise

$$\sin \frac{\pi}{2} \geq \sin \frac{\pi - \Delta t}{2} > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq 2^{\alpha-1} K_2 \Delta t \left( \int_{2\Delta t}^{\pi-\Delta t} \frac{t^\alpha}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt + \sqrt{2} \int_{\pi-\Delta t}^{\pi} \frac{t^\alpha}{\sin \frac{t + \Delta t}{2}} dt \right) \\ &\leq 2^{\alpha-1} K_2 \Delta t \left( \pi^2 \int_{2\Delta t}^{\pi-\Delta t} t^{\alpha-2} dt + \sqrt{2} \pi^\alpha \int_{\pi-\Delta t}^{\pi} \frac{dt}{\sin \frac{t + \Delta t}{2}} \right) \\ &= 2^{\alpha-1} K_2 \Delta t \left( \pi^2 \frac{(\pi - \Delta t)^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \pi^2 \frac{2^{\alpha-1} (\Delta t)^{\alpha-1}}{\alpha-1} + \sqrt{2} \pi^\alpha 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi + \Delta t}{4} \right| \right) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi + \Delta t}{4} \right| &= \ln \left( 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Delta t}{4} \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \ln \left( 1 + \frac{\sin \frac{\Delta t}{4}}{\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Delta t}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sin \frac{\Delta t}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta t}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&< \frac{\Delta t}{2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta t}{4}\right)} \\
&< \frac{\pi}{16\sqrt{2} \cos \frac{9\pi}{32}}
\end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq 2^{\alpha-1} K_2 \Delta t \left( \pi^2 \frac{2^{\alpha-1} (\Delta t)^{\alpha-1}}{\alpha-1} + 2\sqrt{2} \pi^\alpha \frac{\pi}{16\sqrt{2} \cos \frac{9\pi}{32}} \right) \\
&< \left( \frac{4^{\alpha-1} \pi^2 K_2}{1-\alpha} + \frac{\pi^2 2^{\alpha-4} K_2}{\cos \frac{9\pi}{12}} \right) (\Delta t)^\alpha
\end{aligned}$$

olur. Şimdi  $J_4$  integralini değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
|J_4| &\leq K_2 \left| \sin \frac{\Delta t}{2} \right| \int_{t+\Delta t}^{\pi+t} \frac{(s-t-\Delta t)^\alpha}{\left| \sin \frac{s-t}{2} \right| \left| \sin \frac{s-t-\Delta t}{2} \right|} ds \\
&\leq \frac{K_2}{2} \Delta t \int_{2\Delta t}^{\pi} \frac{(\tau-\Delta t)^\alpha}{\sin \frac{\tau}{2} \left| \sin \frac{\tau-\Delta t}{2} \right|} d\tau \\
&\leq \frac{K_2}{2} \Delta t \int_{2\Delta t}^{\pi} \frac{\tau^\alpha d\tau}{\sin \frac{\tau}{2} \cdot \sin \frac{\tau-\Delta t}{2}} \\
&\leq \pi^2 K_2 \Delta t \int_{2\Delta t}^{\pi} \tau^{\alpha-2} d\tau \\
&\leq \frac{2^{\alpha-1} \pi^2 K_2}{1-\alpha} (\Delta t)^\alpha
\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$|J_6| \leq 2K_1 d (\Delta t)^\alpha$$

olduğu anlaşılır.

Demek ki,  $0 < \Delta t \leq \frac{\pi}{8}$  olmak üzere herhangi  $t, t + \Delta t \in [-\pi, \pi]$  için

$$|\tilde{f}(t + \Delta t) - \tilde{f}(t)| \leq \left\{ \left[ \frac{4(2^\alpha + 3^\alpha)}{\alpha} + \frac{(2^{\alpha-1} + 4^{\alpha-1})\pi^2}{1-\alpha} + \frac{2^{\alpha-4}\pi^2}{\cos \frac{9\pi}{32}} \right] K_2 + 4dK_1 \right\} (\Delta t)^\alpha \quad (2.9)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi  $\frac{\pi}{8} \leq \Delta t \leq 2\pi$  ve  $t, t + \Delta t \in [-\pi, \pi]$  olsun. Bu durumda (1.8) den

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t + \Delta t) - \tilde{f}(t)| &\leq |\tilde{f}(t + \Delta t)| - |\tilde{f}(t)| \\ &\leq \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} K_2 + \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} K_2 \\ &= \frac{8\pi^\alpha}{\alpha} K_2 \\ &= \frac{8\pi^\alpha}{\alpha} K_2 \left( \frac{8}{\pi} \right)^\alpha \left( \frac{\pi}{8} \right)^\alpha \\ &\leq \frac{8^{1+\alpha}}{\alpha \pi^{1-\alpha}} K_2 (\Delta t)^\alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

olduğu elde edilir. (2.6) ve (2.7) den

$$c_1 = 4d \text{ ve } c_2 = \max \left\{ \frac{8^{1+\alpha}}{\alpha \pi^{1-\alpha}}, \frac{4(2^\alpha + 3^\alpha)}{\alpha} + \frac{(2^{\alpha-1} + 4^{\alpha-1})\pi^2}{1-\alpha} + \frac{2^{\alpha-4}\pi^2}{\cos \frac{9\pi}{32}} \right\}$$

olmak üzere (2.8) eşitsizliğinin doğru olduğunu elde ederiz.

**Sonuç 2.1.5:**  $2\pi$  periyotlu  $x(t)$  fonksiyonu ve  $\forall t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$  için

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq l |t_1 - t_2|^\alpha \quad (2.11)$$

olacak şekilde  $l > 0$  sabiti ve  $0 < \alpha < 1$  sayısı varsa

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} ds$$

fonksiyonu her bir  $t \in [0, 2\pi]$  için

$$|\tilde{x}(t)| \leq \frac{2\pi}{\alpha} l \quad (2.12)$$

ve herhangi  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$  için

$$|\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_2)| \leq L(\alpha) \cdot l |t_1 - t_2|^\alpha \quad (2.13)$$

koşullarını sağlar. Burada

$$L(\alpha) = \left\{ \frac{1 + 2^{1+\alpha} + 3^\alpha}{\pi \cdot \alpha} + \frac{\pi}{1-\alpha}, \frac{4}{\pi \cdot \alpha} \right\}$$

dır. (Privalov, 1950)

**Teorem 2.1.6 :** (2.5) ifadesiyle tanımlı  $H$  operatörü  $\tilde{H}_\alpha [0, 2\pi]$  ( $0 < \alpha < 1$ ) uzayında sınırlı lineer

bir operatördür ve  $D(\alpha) = L(\alpha) + \frac{2\pi}{\alpha}$  olmak üzere

$$\|H\| \leq D(\alpha) \quad (2.14)$$

eşitsizliği doğrudur. (Gakhov, 1966, Mushelişvili, 1968)

**İspat :** (2.12) ve (2.13)' den sırasıyla her bir  $t \in [0, 2\pi]$  için

$$\begin{aligned} |H(x)(t)| &= |\tilde{x}(t)| \leq \frac{2\pi}{\alpha} l && (l \leq H(x; \alpha) \text{ olduğundan}) \\ &\leq \frac{2\pi}{\alpha} H(x; \alpha) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ve  $\forall t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$  için

$$\begin{aligned} |H(x)(t_1) - H(x)(t_2)| &= |\tilde{x}(t_1) - \tilde{x}(t_2)| \\ &\leq L(\alpha) \cdot l |t_1 - t_2|^\alpha \\ &= L(\alpha) H(x; \alpha) |t_1 - t_2|^\alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

olduğu elde edilir. (2.15) ve (2.16) den

$$\|H(x)\| = \|H(x)\|_\alpha + H(H(x); \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2\pi}{3} H(x; \alpha) + L_\alpha H(x; \alpha) \\
&= L(\alpha) H(x; \alpha) \quad [ H(x; \alpha) \leq \|x\|_\alpha \text{ olduğundan } ] \\
&\leq L(\alpha) \|x\|_\alpha
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla (2.14) çöşitsizliğinin doğru olduğu anlaşılır.

$t$  ve  $s$  deđiřkenlere göre  $2\pi$  periyotlu  $g(t, s)$  fonksiyonu için  $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$  ve  $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0$  sabit sayılar olmak üzere  $\forall (t_1, s_1), (t_2, s_2) \in D = [-\pi, \pi]^2$  için

$$|g(t_1, s_1) - g(t_2, s_2)| \leq l_1 |t_1 - t_2|^{\alpha_1} + l_2 |s_1 - s_2|^{\alpha_1}$$

çöşitsizliği sağlanıyorsa,  $g(t, s)$  fonksiyonu  $H_{\alpha_1, \alpha}(l_1, l_2, D)$  sınıfına aittir diyecceğiz.

$g \in H_{\alpha_1, \alpha}(l_1, l_2, D)$  ve  $x \in \tilde{H}_\alpha[0, 2\pi]$  olmak üzere

$$H_g x(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t, s) x(s) c t g \frac{s-t}{2} ds \quad (2.17)$$

operatörünü göz önüne alalım.

**Teorem 2.1.7 :**  $g \in H_{\alpha_1, \alpha}(l_1, l_2, D)$  ise (2.17) ifadesiyle tanımlı  $H_g$  operatörü  $H_\alpha[0, 2\pi]$

$(0 < \alpha < 1)$  uzayında sınırlı lineer bir operatördür ve

$$M(\alpha, \alpha_1) = \frac{4\pi^{\alpha_1}}{\alpha} (l_2 + d_0) + c_1 l_1 + c_2 (l_2 + d_0) \text{ olmak üzere } \|H_g\| \leq M(\alpha, \alpha_1) \text{ çöşitsizliđi}$$

doğrudur.

**İspat:**  $g(t, s) \in H_{\alpha_1, \alpha}(K_1, K_2, D)$ ,  $x \in H_\alpha[0, 2\pi]$ ,  $f(t, s) = g(t, s)x(s)$  ve

$(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in D$  olsun.

$$\begin{aligned}
|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| &= |g(t_1, s_1)x(s_1) - g(t_2, s_2)x(s_2)| \\
&= |[g(t_1, s_1) - g(t_2, s_1)]x(s_1) + [g(t_2, s_1) - g(t_2, s_2)]x(s_1) + g(t_2, s_2)[x(s_1) - x(s_2)]| \\
&\leq |[g(t_1, s_1) - g(t_2, s_1)]x(s_1)| + |[g(t_2, s_1) - g(t_2, s_2)]x(s_1)| + |g(t_2, s_2)[x(s_1) - x(s_2)]|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |g(t_1, s_1) - g(t_2, s_1)| |x(s_1)| + |g(t_2, s_1) - g(t_2, s_2)| |x(s_1)| + |g(t_2, s_2)| |x(s_1) - x(s_2)| \\
&\leq l_1 |t_1 - t_2|^\alpha \|x\|_\alpha + l_2 |s_1 - s_2|^\alpha \|x\|_\alpha + d_0 |s_1 - s_2|^\alpha \|x\|_\alpha \\
&= [l_1 |t_1 - t_2|^\alpha + (l_2 + d_0) |s_1 - s_2|^\alpha] \|x\|_\alpha
\end{aligned}$$

olur, burada  $d_0 = \max\{|g(t, s)| : (t, s) \in D\}$ ,  $K_1 = l_1 \|x\|_\alpha$ ,  $K_2 = (l_2 + d_0) \|x\|_\alpha$  olmak üzere Teorem 2.1.4'den dolayı

$$|H_g x(t)| \leq \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (l_2 + d_0) \|x\|_\alpha \text{ ve } \forall t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$$

$$|H_g x(t_1) - H_g x(t_2)| \leq [c_1 l_1 + c_2 (l_2 + d_0)] \|x\|_\alpha |t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu elde edilir. Son iki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
\|H_g(x)\|_\alpha &= \|H_g(x)c\|_\alpha + H(H_g(x); \alpha) \\
&\leq \left[ \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (l_2 + d_0) + c_1 l_1 + c_2 (l_2 + d_0) \right] \|x\|_\alpha
\end{aligned}$$

veya

$$\|H_g\| \leq \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (l_2 + d_0) + c_1 l_1 + c_2 (l_2 + d_0)$$

olduğu elde edilir.

## 2.2 Hilbert Çekirdekli Lineer Singüler İntegral Denklemlerin Ardışık Yaklaşım Yöntemiyle Çözümü

Bu kesimde  $g(x, s)$ ,  $x$  ve  $s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu ve  $h(x) \in \tilde{H}_\alpha[0, 2\pi]$  sınıfında verilen fonksiyon,  $\lambda$  herhangi bir parametre,  $u(x)$  ise bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, s) u(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds + h(x) \quad (2.18)$$

şeklinde lineer singüler integral denklem için varlık ve teklik teoremi ispatlanmaktadır.

(2.18) denklemiindeki integral Cauchy esas değeri anlamında tanımlandığından bu denkleme *singüler integral denklem* adı verilir.

$$D = [0, 2\pi]^2, \quad g(x, s) \in H_{\alpha, \alpha}(l_1, l_2, D) \quad (0 < \alpha < \alpha_1 < 1) \quad \text{ve} \quad u \in \tilde{H}_\alpha[0, 2\pi]$$

olmak üzere  $G(x, s) = g(x, s)u(s)$  olsun. Bu durumda  $\forall (x_1, s_1), (x_2, s_2) \in D$  için

$$\begin{aligned} |G(x_1, s_1) - G(x_2, s_2)| &= |g(x_1, s_1)u(s_1) - g(x_2, s_2)u(s_2)| \\ &\leq |g(x_1, s_1) - g(x_2, s_2)| \cdot |u(s_1)| + |g(x_2, s_2)| \cdot |u(s_1) - u(s_2)| \\ &\leq [l_1|x_1 - x_2|^{\alpha_1} + l_2|s_1 - s_2|^\alpha] [d_\infty(u, \theta) + d_0 H(u; \alpha)] |s_1 - s_2|^\alpha \\ &= l_1 d_\infty(u, \theta) |x_1 - x_2|^{\alpha_1} + [l_2 d_\infty(u, \theta) + d_0 H(u; \alpha)] |s_1 - s_2|^\alpha \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada  $d_0 = \max\{|g(x, s)| : (x, s) \in D\}$ .

O halde Teorem.2.1.4 ye göre

$$\tilde{G}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x, s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

fonksiyonu için

$$|\tilde{G}(x)| \leq \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} [l_2 d_\infty(u, \theta) + d_0 H(u; \alpha)]$$

ve  $\forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$  için

$$|\tilde{G}(x)| \leq |\tilde{G}(x_1) - \tilde{G}(x_2)| \leq \{c_1 l_1 d_\infty(u, \theta) + c_2 [l_2 d_\infty(u, \theta) + d_0 H(u; \alpha)]\} |s_1 - s_2|^\alpha$$

olur. Buradan

$$d(\tilde{G}, \theta) \leq \left[ \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} l_2 + (l_1 c_1 + l_2 c_2) \right] d_\infty(u, \theta) + \left[ \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} d_0 + c_2 d_0 \right] H(u; \alpha) = L d(u, \theta) \quad (2.19)$$

yazabiliriz. Burada

$$L = \max \left\{ \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} l_2 + l_1 c_1 + l_2 c_2, \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} d_0 + c_2 d_0 \right\}$$

dır.  $u \in \tilde{H}_\alpha[0, 2\pi]$  ve

$$(H_g u)(x) = H_g u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, s) u(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

vc

$$Au = \lambda H_g u + h \quad (2.20)$$

olmak üzere (2.18) denklemini

$$u = Au \quad (2.21)$$

operatör denklemi şeklinde yazabiliriz.

(2.19) ve (2.20) den  $A$  operatörünün  $(\tilde{H}_\alpha[0,2\pi], d)$  metrik uzayını  $(\tilde{H}_\alpha[0,2\pi], d)$  uzayına dönüştürdüğü görülür. Bu operatörün bir daralma dönüşümü olduğunu görelim.  $u_1, u_2 \in \tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$  olsun. (2.19) den

$$d(Au_1, Au_2) = |\lambda| d(H_g u_1, H_g u_2) = |\lambda| d(H_g(u_1 - u_2), \theta) \leq |\lambda| L d(u_1, u_2)$$

elde edilir. Buna göre  $|\lambda| L < 1$  ise

$$A : (\tilde{H}_\alpha[0,2\pi], d) \rightarrow (\tilde{H}_\alpha[0,2\pi], d)$$

operatörü bir daralma dönüşümü olur.

Böylece, daralma dönüşüm prensibine göre (Bkz. Teorem 1.3.2) aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 2.2.1 :**  $g \in H_{\alpha_1, \alpha_2}(l_1, l_2, D)$ ,  $(0 < \alpha < \alpha_1 < 1)$  ve  $h \in \tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$  fonksiyonları verilmiş olsun.  $l = |\lambda| L < 1$  ise (2.18) denkleminin  $\tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$  uzayında tek bir  $u^* \in \tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$  çözümü vardır. Herhangi başlangıç  $u_0 \in \tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$  fonksiyonu için terimleri

$$u_n(x) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, s) u_{n-1}(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds + h(x)$$

şeklinde tanımlanan  $(u_n(x))$  dizisi  $u^*(x)$  fonksiyonuna ve  $d(u, v) = d_\infty(u, v) + H(u - v; \alpha)$  metriğine göre yakınsaktır. Ayrıca

$$d(u_n, u^*) \leq \frac{(|\lambda| L)^n}{1 - |\lambda| L} d(u_1, u_0)$$

eşitsizliği doğrudur.

### 2.3 Hilbert Çekirdekli Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerin Schauder Prensibi Yardımıyla İncelenmesi

$D = [-\pi, \pi]^* \times (-\infty, \infty)$  kümesinde tanımlı ve  $x, s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u): D \rightarrow R$  fonksiyonu verilmiş olsun. Bu kesimde

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \quad (2.22)$$

şeklinde lineer olmayan singüler integral denklemleri için varlık ve teklik teoremleri verilecektir.

$x$  ve  $s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu,  $\phi(x, s, u): D \rightarrow R$  fonksiyonu ve  $\forall (x_1, s_1, u_1), (x_2, s_2, u_2) \in D$  için

$$|\phi(x_1, s_1, u_1) - \phi(x_2, s_2, u_2)| \leq l_1 |x_1 - x_2|^{\alpha_1} + l_2 |s_1 - s_2|^{\alpha} + l_3 |u_1 - u_2| \quad (2.23)$$

olacak şekilde  $0 < \alpha < \alpha_1 < 1$  ve  $l_1, l_2, l_3$  pozitif sayıları mevcut olsun. Bu durumda  $\phi(x, s, u)$  fonksiyonu  $H_{\alpha_1, \alpha, 1}(l_1, l_2, l_3; D)$  sınıfına aittir diyeceğiz.

**Lemma 2.3.1:**  $x$  ve  $s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u): D \rightarrow R$  fonksiyonu için (2.23) koşulu sağlansın. Bu durumda öyle  $\lambda_0 > 0$  sayısı vardır ki  $\forall 0 < |\lambda| < \lambda_0$  için

$$(Au)(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

biçiminde tanımlı  $A$  operatörü  $H_{\alpha}(M)$  kümesini kendisine dönüştürür (çevirir):  $A(H_{\alpha}(M)) \subset H_{\alpha}(M)$

**İspat :**  $u \in H_{\alpha}(M)$  olmak üzere  $f(x, s) = \phi(x, s, u(s))$  olsun. Bu  $f(x, s)$  fonksiyonu için Teorem 2.1.4 koşullarının sağlandığını görelim.

$$\forall (x, s), (x + \Delta x, s + \Delta s) \in [-\pi, \pi]^2 \text{ için (2.8) koşulundan dolayı}$$

$$\begin{aligned}
|f(x + \Delta x, s + \Delta s) - f(x, s)| &= |\phi(x + \Delta x, s + \Delta s, u(s + \Delta s)) - \phi(x, s, u(s))| \\
&\leq l_1 |\Delta x|^{\alpha_1} + l_2 |\Delta s|^{\alpha} + l_3 |u(s + \Delta s) - u(s)| \\
&\leq l_1 |\Delta x|^{\alpha_1} + (l_2 + l_3 M) |\Delta s|^{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f(x, s)| &= |\phi(x, s, u(s))| \leq |\phi(x, s, u(s)) - \phi(x, s, 0)| + |\phi(x, s, 0)| \\
&\leq l_3 |u(s)| + |\phi(x, s, 0)| \\
&\leq l_3 M + m
\end{aligned}$$

olur. Burada  $m = \max \{|\phi(x, s, 0)| : (x, s) \in [0, 2\pi]^2\}$  dir.

$u(x) = (Au)(x)$  derssek Teorem 2.1.4 ' e göre

$$|u(x)| \leq |\lambda| \frac{4\pi^{\alpha}}{\alpha} (m + l_3 M)$$

$$|u(x + \Delta x) - u(x)| \leq |\lambda| [c_1 l_1 + c_2 (l_2 + l_3 M)] |\Delta x|^{\alpha}$$

bulunur. Buna göre

$$0 < |\lambda| < \lambda_0 = \min \left\{ \frac{\alpha m}{4\pi^{\alpha} (m + l_3 M)}, \frac{M}{c_1 l_1 + c_2 (l_2 + l_3 M)} \right\}$$

olduğunda  $u \in H_{\alpha}(M)$ , yani  $A$  operatörü  $H_{\alpha}(M)$  kümesini kendisine dönüştürür.

**Lemma 2.3.2 :**  $x$  ve  $s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u)$  fonksiyonu için

(2.23) koşulu sağlandığında  $A : H_{\alpha}(M) \rightarrow H_{\alpha}(M)$  operatörü  $d_{\infty}(u, v) = \|u - v\|_{\infty}$

metriğine göre süreklidir.

**İspat :**  $u_0, u_n \in H_{\alpha}(M)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\infty}(u_n, u_0) = 0$  olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\infty}(Au_n, Au_0) = 0$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(Au_n)(x) - (Au_0)(x) &= \lambda \int_{-\pi}^{\pi} [\phi(x, s, u_n(s)) - \phi(x, s, u_0(s))] \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \\
&= \lambda \int_{-\pi}^{\pi} [\phi(x, x+s, u_n(x+s)) - \phi(x, x+s, u_0(x+s))] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds
\end{aligned}$$

olduğu açıktır.  $\eta \in (0, \pi)$  herhangi bir sayı olmak üzere  $Au_n - Au_0$  farkını şu şekilde

yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
(Au_n)(x) - (Au_0)(x) &= \lambda \int_{-\pi}^{\eta} [\phi(x, x+s, u_n(x+s)) - \phi(x, x+s, u_0(x+s))] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&+ \lambda \int_{-\eta}^{\eta} [\phi(x, x+s, u_n(x+s)) - \phi(x, x, u_n(x)) - \phi(x, x+s, u_0(x+s)) + \phi(x, x, u_0(x))] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&+ \lambda \int_{\eta}^{\pi} [\phi(x, x+s, u_n(x+s)) - \phi(x, x+s, u_0(x+s))] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki integralleri sırasıyla  $J_1, J_2, J_3$  gibi işaretleyelim.

$\forall x, s \in [-\pi, \pi]$  için

$$\begin{aligned}
\|\phi(x, x+s, u_n(x+s)) - \phi(x, x+s, u_0(x+s))\| &\leq l_3 |u_n(x+s) - u_0(x+s)| \\
&\leq l_3 \|u_n - u_0\|_{\infty}
\end{aligned}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq |\lambda| l_3 \|u_n - u_0\|_{\infty} \int_{-\pi}^{-\eta} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&= |\lambda| l_3 \|u_n - u_0\|_{\infty} \int_{\eta}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&\leq 2 |\lambda| l_3 \|u_n - u_0\|_{\infty} \int_{\eta}^{\pi} \frac{ds}{2} \\
&= 2 |\lambda| l_3 d_{\infty}(u_n, u_0) \ln \frac{\pi}{\eta}
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$|J_2| = 2 |\lambda| l_3 d_{\infty}(u_n, u_0) \ln \frac{\pi}{\eta}$$

bulunur. Şimdi de  $J_3$  integralini değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq |\lambda| \int_{-\eta}^{\eta} [2l_2 |s|^{\alpha} + l_3 |u_n(x+s) - u_n(x)| + l_3 |u_0(x+s) - u_0(x)|] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&\leq 2(l_2 + l_3 M) |\lambda| \int_{-\eta}^{\eta} |s|^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&= 4(l_2 + l_3 M) |\lambda| \int_0^{\eta} s^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds \\
&\leq 8(l_2 + l_3 M) |\lambda| \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha}
\end{aligned}$$

buluruz. Demek ki,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ve  $\forall 0 < \eta < \pi$  için

$$|(Au_n)(x) - (Au_0)(x)| \leq 4|\lambda|l_3d_\infty(u_n, u_0)\ln\frac{\pi}{\eta} + 8(l_2 + l_3M)|\lambda|\frac{\eta^\alpha}{\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yeteri kadar büyük  $n$  doğal sayısı için bu eşitsizlikte  $\eta = d_\infty(u_n, u_0)$  alırsak

$$d_\infty(Au_n, Au_0) \leq 4|\lambda|l_3d_\infty(u_n, u_0)\ln\frac{\pi}{d_\infty(u_n, u_0)} + 8(l_2 + l_3M)|\lambda|\frac{d_\infty^\alpha(u_n, u_0)}{\alpha}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(u_n, u_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(Au_n, Au_0) = 0$$

bulunur.

$H_\alpha(M)$  kümesi  $(C[0, 2\pi], d_\infty)$  uzayında dışbükey ve kapalıdır. Sürekli  $A : (H_\alpha(M), d_\infty) \rightarrow (H_\alpha(M), d_\infty)$  operatörü  $(C[0, 2\pi], d_\infty)$  uzayının dışbükey ve kapalı  $H_\alpha(M)$  kümesini onun kompakt bir altkümeye dönüştürdüğünden Schauder Prensbine göre  $A$  operatörünün  $H_\alpha(M)$  kümesinde en az bir sabit noktası vardır.

Demek ki, Schauder teoremi gereğince şu teoremin doğru olduğunu söyleyebiliriz.

**Teorem 2.3.3:**  $D = [-\pi, \pi]^2 \times (-\infty, \infty)$  kümesi üzerinde tanımlı ve  $x, s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u) : D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $\forall (x_1, s_1, u_1), (x_2, s_2, u_2) \in D$  için  $|\phi(x_1, s_1, u_1) - \phi(x_2, s_2, u_2)| \leq l_1|x_1 - x_2|^{\alpha_1} + l_2|s_1 - s_2|^\alpha + l_3|u_1 - u_2|$  olacak şekilde  $0 < \alpha_1 < 1$  ve  $l_1, l_2, l_3$  pozitif sayıları varsa, öyle  $\lambda_0 > 0$  sayısı vardır ki  $\forall 0 < |\lambda| \leq \lambda_0$  için (2.22) denkleminin  $H_\alpha(M)$  kümesinde en az bir çözümü vardır.

§2.3 deki sonuçları incelerken kaynaklarda gösterilen (Hüseynov, 1947; Hüseynov, Muhtarov, 1980; Hüseynov, 1980) eserlerinden yararlanılmıştır.

## 2.4 Hilbert Çekirdekli Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemlerinin Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi ile İncelenmesi

Önce Banach sabit nokta prensibinin (Teorem 1.3.1) aşağıdaki değiştirilmiş formunun ispatını verelim.

**Teorem 2.4.1 :**  $(X, d')$  bir kompakt metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer

(a)  $X$  üzerinde öyle  $d''$  metriği tanımlanmıştır ki  $X$  içinde  $d'$  metriğine göre yakınsak her  $(x_n)$  dizisi  $d''$  metriğine göre de yakınsaktır;

(b)  $A : X \rightarrow X$  operatörü  $d''$  metriğine göre daralma dönüşümüdür, yani  $\forall x, y \in X$  için

$$d''(Ax, Ay) \leq l d''(x, y)$$

olacak şekilde  $l \geq 0$  sayısı vardır;

koşulları sağlanıyorsa  $x = Ax$  denkleminin tek çözümü ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bulunabilir. Ardışık yaklaşımlar  $d'$  metriğine göre yakınsaktır.

**İspat:** Banach sabit nokta prensibinin uygulanabilmesi için  $(X, d')$  metrik uzayının  $d''$  metriğine göre de tam olduğunu gösterelim.  $(x_n)$ ,  $X$  içinde  $d''$  metriğine göre bir Cauchy dizisi olsun.  $(X, d')$  metrik uzayı kompakt olduğuna göre  $(x_n)$  dizisinin  $d'$  metriğine göre yakınsayan  $(x_{n_k})$  alt dizisi vardır.

$d'$  metriğine göre  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$ , yani  $\lim_{k \rightarrow \infty} d'(x_{n_k}, x_0) = 0$  olsun. Teoremin (a) hipotezine göre  $\lim_{k \rightarrow \infty} d''(x_{n_k}, x_0) = 0$  yazabiliriz.

$$d''(x_k, x_0) \leq d''(x_k, x_{n_k}) + d''(x_{n_k}, x_0)$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limite geçerse,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d''(x_k, x_{n_k}) = 0$  ( $(x_n), d''$  metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğuna göre) ve  $\lim_{k \rightarrow \infty} d''(x_{n_k}, x_0) = 0$  olduğuna göre

$\lim_{k \rightarrow \infty} d^n(x_k, x_0) = 0$  olduğu ve dolayısıyla  $(x_n)$  dizisinin  $d^n$  metriğine göre yakınsak olduğu anlaşılır. Buda  $(X, d^n)$  metrik uzayının tam olduğunu gösterir.

$x = Ax$  denkleminin çözümü  $x_0^*$  olsun.  $x_0 \in X, x_n = Ax_{n-1}, n = 1, 2, \dots$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, x_0^*) = 0 \quad (2.24)$$

olduğunu gösterelim.  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$$d^n(x_n, x_0^*) = d^n(Ax_{n-1}, Ax_0^*) \leq l d^n(x_{n-1}, x_0^*) \leq l^2 d^n(x_{n-2}, x_0^*) \leq \dots \leq l^n d^n(x_0, x_0^*)$$

eşitsizliği doğru olduğundan ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} l^n = 0$  olduğuna göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^n(x_n, x_0^*) = 0 \quad (2.25)$$

elde ederiz.

$(x_n)$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, x_0^*) \neq 0$  olsun. Bu durumda  $(x_n)$  dizisinin

$$d'(x_{n_k}, x_0^*) \geq d \quad (2.26)$$

olacak şekilde  $(x_{n_k})$  bir alt dizisi ve bir  $d > 0$  sayısı vardır.  $(X, d')$  metrik uzayı kompakt olduğundan  $(x_{n_k})$  dizisinin  $d'$  metriğine göre yakınsak  $(x_{n_{k_m}})$  alt dizisi vardır.

$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{k_m}} = \tilde{x}_0^*$ , yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d'(x_{n_{k_m}}, \tilde{x}_0^*) = 0 \quad (2.27)$$

olsun.  $x_0^* = \tilde{x}_0^*$  olduğunu gösterelim.

$d'$  üzere yakınsamadan  $d^n$  üzere yakınsama çıktığından (2.27) 'c göre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^n(x_{n_{k_m}}, \tilde{x}_0^*) = 0 \quad (2.28)$$

olur. (2.25) den dolayı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^n(x_{n_{k_m}}, x_0^*) = 0 \quad (2.29)$$

dır. (2.28) ve (2.29) dan  $x_0^* = \tilde{x}_0^*$  olduğu, yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d'(x_{n_{k_m}}, x_0^*) = 0 \quad (2.30)$$

olduğu elde edilir.

(1.3) eşitsizliğinde  $(x_{n_k})$  dizisi yerine onun  $(x_{n_{k_m}})$  alt dizisini alırsak

$$d'(x_{n_{k_m}}, x_0^*) \geq d \quad (2.31)$$

olduğu elde edilir. (2.30) ve (2.31) den  $d = 0$  olduğu anlaşılır. Bu ise  $d > 0$  olması ile bir çelişki olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, x_0^*) \neq 0$  olması yanlıştır. Demek ki,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(x_n, x_0^*) = 0$  dır.

**NOT:** İspatlanmış teoremden  $A$  operatörü  $d'$  metriğine göre bir daralma dönüşümü olmayabilir.

(2.22) denkleminin çözümü için ardışık yaklaşımlar yöntemine göre,  $u_0(x) \in H_\alpha(M)$

herhangi bir başlangıç yaklaşım olmak üzere terimleri:

$$u_n(x) = \lambda \int_{\pi}^{\pi} \phi(x, s, u_{n-1}(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanan  $(u_n(x))$  yaklaşık çözümler dizisi (iterasyon prosesi) oluşturulur. Belirtelim ki Teorem 2.1.4 den faydalanarak  $\forall 0 < |\lambda| \leq \lambda_0$  ve  $\forall n = 1, 2, 3, \dots$  için  $u_n(x) \in H_\alpha(M)$  olacak şekilde bir  $\lambda_0 > 0$  sayısının var olduğunu gösterebiliriz. Şimdi (2.20) formülleri yardımıyla tanımlanan  $(u_n(x))$  dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim.

**Lemma 2.4.2 :**  $V_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$  fonksiyonu için

$$|V_n(x)| \leq K_n,$$

$$|V_n(x + \Delta x) - V_n(x)| \leq K_n |\Delta x|^\alpha$$

koşulları sağlansın. Eğer  $x, s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u) : D \rightarrow R$  fonksiyonu  $D$  üzerinde  $u$  değişkenine göre türevlenebilir ve  $\forall (x_1, s_1, u_1), (x_2, s_2, u_2) \in D$  için

$$|\phi'_n(x_1, s_1, u_1) - \phi'_n(x_2, s_2, u_2)| \leq a|x_1 - x_2|^{\alpha_1} + b|s_1 - s_2|^\alpha + c|u_1 - u_2| \quad (2.33)$$

olacak şekilde  $0 < \alpha_1 < 1$  ve  $a, b, c$  pozitif tam sayıları var olsun. Bu durumda,

$W_n(x, s) = \phi(x, s, u_n(s)) - \phi(x, s, u_{n-1}(s))$  fonksiyonu  $\forall (x, s), (x + \Delta x, s + \Delta s) \in [-\pi, \pi]^2$

için

$$|W_n(x + \Delta x, s + \Delta s) - W_n(x, s)| \leq K_n \left[ a_1 |\Delta x|^{\alpha_1} + b_1 |\Delta s|^{\alpha} \right] \quad (2.34)$$

koşulunu sağlar. Burada  $a_1$  ve  $b_1$  pozitif sabitleri  $n$  den bağımsızdırlar.

**İspat:**  $(x, s), (x + \Delta x, s + \Delta s) \in [-\pi, \pi]^2$  olsun.

$$\phi(x, s, u_2) - \phi(x, s, u_1) = \int_0^1 \phi'_n[x, s, (1-t)u_1 + tu_2](u_2 - u_1) dt$$

eşitliği doğru olduğuna göre

$$\begin{aligned} W_n(x + \Delta x, s + \Delta s) - W_n(x, s) &= \\ &= \phi(x + \Delta x, s + \Delta s, u_n(s + \Delta s)) - \phi(x + \Delta x, s + \Delta s, u_{n-1}(s + \Delta s)) - \phi(x, s, u_n(s)) + \phi(x, s, u_{n-1}(s)) \\ &= \int_0^1 \phi'_n(x + \Delta x, s + \Delta s, (1-t)u_{n-1}(s + \Delta s) + tu_n(s + \Delta s)) V_n(s + \Delta s) dt - \\ &- \int_0^1 \phi'_n(x, s, (1-t)u_{n-1}(s) + tu_n(s)) V_n(s) dt \\ &= \int_0^1 \left[ \phi'_n(x + \Delta x, s + \Delta s, (1-t)u_{n-1}(s + \Delta s) + tu_n(s + \Delta s)) - \phi'_n(x, s, (1-t)u_{n-1}(s) + tu_n(s)) \right] \\ &V_n(s + \Delta s) dt + \int_0^1 \phi'_n(x, s, (1-t)u_{n-1}(s) + tu_n(s)) (V_n(s + \Delta s) - V_n(s)) dt \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$\forall (x, s) \in [-\pi, \pi]^2$  ve  $\forall n \in [-M, M]$  için

$$\begin{aligned} |\phi'_n(x, s, u)| &\leq |\phi'_n(x, s, u) - \phi'_n(x, s, 0)| + |\phi'_n(x, s, 0)| \\ &\leq c|u| + |\phi'_n(x, s, 0)| \\ &\leq cM + d \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $d = \max \{ |\phi(x, s, 0)| : (x, s) \in [-\pi, \pi]^2 \}$  dir.

Şimdi (2.34) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. (2.33) koşulundan

$$\begin{aligned}
& |W_n(x + \Delta x, s + \Delta s) - W_n(x, s)| \leq \\
& \leq \int_0^1 |\phi'_n(x + \Delta x, s + \Delta s, (1-t)u_{n-1}(s + \Delta s) + tu_n(s + \Delta s)) - \phi'_n(x, s, (1-t)u_{n-1}(s))| \\
& |V_n(s + \Delta s)| dt + \int_0^1 [|\phi'_n(x, s, (1-t)u_{n-1}(s) + tu_n(s)) - \phi'_n(x, s, 0)| + |\phi'_n(x, s, 0)|] \\
& |V_n(s + \Delta s) - V_n(s)| dt \\
& \leq (a|\Delta x|^{\alpha_1} + b|\Delta s|^\alpha + cM|\Delta s|^\alpha)K_n + (d + cM)K_n|\Delta s|^\alpha \\
& = K_n [a|\Delta x|^{\alpha_1} + (b + d + 2cM)|\Delta s|^\alpha]
\end{aligned}$$

olduğu anlaşılır.

Teorem 2.1.4 den yararlanarak şu lemma ispatlanabilir.

**Lemma 2.4.3 :**  $V_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$  fonksiyonu Lemma 2.4.2 in koşullarını sağlarsa

$$V_{n+1}(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} W_n(x, s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \text{ fonksiyonu } \forall x, x + \Delta x \in [-\pi, \pi] \text{ için}$$

$$|V_{n+1}(x)| \leq |\lambda| \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (b + d + 2cM)$$

$$|V_{n+1}(x + \Delta x) - V_{n+1}(x)| \leq |\lambda| (c_1 a + c_2 (b + d + 2cM)) |\Delta x|^\alpha$$

koşullarını sağlar, buradaki  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri Teorem 2.1.4 deki sabitlerdir.

Şimdi terimleri (2.32) formülleri yardımıyla tanımlanan  $(u_n(x))$  dizisinin limiti (2.22)

integral denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için

$$u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) + \dots + (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \dots \quad (2.35)$$

fonksiyon serisinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

Lemma 2.4.3'e göre  $|V_{n+1}(x)| = |u_{n+1}(x) - u_n(x)| < |\lambda| \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (b + d + 2cM) K_n$  olur.

Herhangi  $q \in (0,1)$  sayısı için  $\lambda^\alpha$  parametresini

$$|\lambda| \frac{4\pi^\alpha}{\alpha} (b + d + 2cM) < q$$

gibi seçelim. O halde

$$K_{n+1} < q K_n < \dots < q^n K_0$$

olacaktır. Pozitif terimli  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n K_0$  serisi yakınsak olduğundan Weierstrass testine göre (2.35)

fonksiyon serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. (2.35) fonksiyon serisinin  $n$ . kısmi toplamı  $S_n(x) = u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) + \dots + (u_n(x) - u_{n-1}(x)) = u_n(x)$  olduğundan  $(u_n(x))$  dizisi de düzgün yakınsaktır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$  olsun.  $u(x)$  fonksiyonunun (2.22) integral denkleminin bir çözümü

olduğunu gösterelim.

$$(Au)(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds : (H_\alpha(M), \rho_\alpha) \rightarrow (H_\alpha(M), \rho_\alpha)$$

operatörü sürekli olduğundan

$$u_n(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, u_{n-1}(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

eşitliklerinde  $n \rightarrow \infty$  iken limite geçerse

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, u(x)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

olduğu, dolayısıyla  $u(x)$  fonksiyonunun (2.22) denkleminin bir çözümü olduğu elde edilir.

$v(x)$  fonksiyonu da (2.22) denkleminin bir çözümü, yani

$$v(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x, s, v(s)) \operatorname{ctg} \frac{x-s}{2} ds$$

eşitliği de sağlansın.

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = v(x)$  olduğunu gösterelim.

$$\Omega_n(x, s) = \phi(x, s, v(s)) - \phi(x, s, u_{n-1}(s))$$

olmak üzere

$$\Psi_n(x) = v(x) - u_n(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \Omega_n(x, s) \operatorname{ctg} \frac{x-s}{2} ds$$

olsun.  $\Psi_n(x)$  fonksiyonu için

$$|\Psi_n(x)| \leq h_n$$

$$|\Psi_n(x + \Delta x) - \Psi_n(x)| \leq h_n |\Delta x|^\alpha$$

koşullarının ve  $x, s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u)$  fonksiyonu için Lemma 2.3.2 nin koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda Lemma 2.3.2 de olduğu gibi  $\forall (x, s), (x + \Delta x, s + \Delta s) \in [-\pi, \pi]^2$  için

$$|\Omega_n(x + \Delta x, s + \Delta s) - \Omega_n(x, s)| \leq h_{n-1} [r_1 |\Delta x|^\alpha + r_2 |\Delta s|^\alpha]$$

eşitsizliğinin doğruluğu gösterilebilir. Burada  $r_1$  ve  $r_2$   $n$  den bağımsız pozitif sayılardır.

Buna göre Teorem 2.1.4 gereğince

$$|\Psi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| R h_n,$$

$$|\Psi_{n+1}(x + \Delta x) - \Psi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| R h_n |\Delta x|^\alpha$$

bulunur. Burada  $R$ ,  $n$  indisinden bağımsız pozitif sabit sayıdır.  $\forall 0 < r < 1$  için  $\lambda$  parametresini  $|\lambda| R < r < 1$  koşulundan seçersek  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = 0$ , dolayısıyla  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = v(x)$  olduğu elde edilir. Yakınsak dizinin limiti tek olduğundan  $u(x) = v(x)$ , yani (2.22) integral denkleminin çözümünün tek olduğu ispatlanmış oldu.

Böylece aşağıdaki sonucun doğru olduğu ispatlanmış oldu.

**Teorem 2.4.4 :**  $D = [-\pi, \pi]^2 \times R$  kümesinde tanımlı  $x, s$  değişkenlerine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(x, s, u): D \rightarrow R$  fonksiyonunun  $D$  üzerinde  $u$  değişkenine göre  $\phi'_n$  türevi varsa ve  $\forall (x_1, s_1, u_1), (x_2, s_2, u_2) \in D$  için

$$|\phi(x_1, s_1, u_1) - \phi(x_2, s_2, u_2)| \leq l_1 |x_1 - x_2|^{\alpha_1} + l_2 |s_1 - s_2|^{\alpha} + l_3 |u_1 - u_2|,$$

$$|\phi'_n(x_1, s_1, u_1) - \phi'_n(x_2, s_2, u_2)| \leq a |x_1 - x_2|^{\alpha_1} + b |s_1 - s_2|^{\alpha} + c |u_1 - u_2|$$

koşulları sağlandığında ( $0 < \alpha < 1$  ve  $l_1, l_2, l_3, a, b, c$  sabit sayılardır.) öyle  $\lambda_0 > 0$  sayısı vardır ki  $0 < |\lambda| \leq \lambda_0$  olacak şekilde her  $\lambda$  için (2.22) denkleminin Hölder koşulunu sağlayan tek çözümü vardır ve bu çözüm ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bulunabilir.

(2.22) denkleminin özel bir hali olan

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \quad (2.36)$$

şeklindeki denklemi göz önüne alalım.

$$(\phi u)(s) = \phi(s, u(s)) \text{ ve } (Jv)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} v(s) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \text{ dersek}$$

$$(Cu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(s, u(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds \text{ operatörü } \phi \text{ ve } J \text{ operatörlerinin bileşkesi, yani } C = J\phi$$

biçiminde yazabiliriz.

**Lemma 2.4.5 :**  $D_0 = [-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty)$  kümesinde tanımlı  $s$  değişkenine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(s, u)$  fonksiyonu  $\forall (s_1, u_1), (s_2, u_2) \in D_0$  için

$$|\phi(s_1, u_1) - \phi(s_2, u_2)| \leq l_4 |s_1 - s_2|^{\alpha} + l_5 |u_1 - u_2| \quad (2.37)$$

koşulunu sağlasın. Burada  $0 < \alpha < 1$  ve  $l_4, l_5$  negatif olmayan sabit sayılardır. Bu durumda

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{1}{l_5}, \frac{M}{(l_4 + l_5 M) \|J\|_{\alpha}} \right\}$$

olmak üzere  $0 < |\lambda| \leq \lambda_0$  olduğunda  $C$  operatörü  $H_{\alpha}(M)$  kümesini kendisine çeviriyor, yani  $C(H_{\alpha}(M)) \subset H_{\alpha}(M)$  dir.

**İspat:**  $u \in H_{\alpha}(M)$  ve  $V(s) = \phi(s, u(s))$  olsun. (2.25)'e göre  $\forall s_1, s_2 \in [-\pi, \pi]$  için

$$|V(s_1) - V(s_2)| = |\phi(s_1, u(s_1)) - \phi(s_2, u(s_2))|$$

$$\begin{aligned} &\leq l_4 |s_1 - s_2|^\alpha + l_5 |u(s_1) - u(s_2)| \\ &\leq (l_4 + l_5 M) |s_1 - s_2|^\alpha \end{aligned}$$

ve  $\forall s \in [-\pi, \pi]$  için,  $l_6 = \max \{|\phi(s, 0)| : s \in [-\pi, \pi]\}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} |V(s)| &= |\phi(s, u(s)) - \phi(s, 0)| + |\phi(s, 0)| \\ &\leq l_5 M + l_6 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.  $l_6 < l_4$  gibi seçersek son iki eşitsizlikten

$$V(s) = \phi(s, u(s)) \in H_\alpha(l_4 + l_5 M)$$

olduğu anlaşılır. Sonuç 2.1.5 e göre  $C'$  operatörü  $H_\alpha(0 < \alpha < 1)$  uzayında sınırlı olduğundan

$$\|C'u\|_\alpha \leq \|J\|_\alpha \|\phi u\|_\alpha \leq (l_4 + l_5 M) \|J\|_\alpha$$

buluruz. Burada

$$\|J\|_\alpha = \sup \{ \|Ju\|_\alpha : \|u\|_\alpha \leq 1 \}$$

dır.

**Lemma 2.4.6 :** Lemma 2.4.5 in koşulları sağlandığında  $\forall u_1, u_2 \in H_\alpha(M)$  için

$$d_2(C'u_1, C'u_2) \leq l_5 d_2(u_1, u_2)$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat:** N.N.Lusin teoremine (Mihlin, 1962) göre  $\|J_u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}$  olduğundan  $\forall u_1, u_2 \in H_\alpha(M)$

için

$$\begin{aligned} d_2(C'u_1, C'u_2) &= \|C'u_1 - C'u_2\|_{L^2} \\ &= \|J\phi u_1 - J\phi u_2\|_{L^2} \\ &\leq \|\phi u_1 - \phi u_2\|_{L^2} \\ &= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(s, u_1(s)) - \phi(s, u_2(s))|^2 ds \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_5 \left\{ \int_{\pi}^{\pi} |u_1(s) - u_2(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \\
&= I_5 d_2(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$|\lambda| \leq \lambda'_0 = \min \left\{ \frac{1}{I_5}, \frac{M}{(I_4 + I_5 M) \|J\|_{\alpha}} \right\}$$

olduğunda  $\lambda C'$  operatörü  $H_{\alpha}(M)$  kümesini kendisine dönüştürür ve  $d_2$  metriğine göre bir daralma operatörüdür. Dolayısıyla Teorem 2.4.1'e göre aşağıdaki teoremin doğru olduğu anlaşılır.

**Teorem 2.4.7 :**  $D_0 = [-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty)$  kümesinde tanımlı  $s$  değişkenine göre  $2\pi$  periyotlu  $\phi(s, u)$  fonksiyonu için (2.37) koşulu sağlandığında  $\forall 0 < |\lambda| < \lambda'_0$  için (2.36) denkleminin  $H_{\alpha}(M)$  kümesinde tek bir  $u \in H_{\alpha}(M)$  çözümü vardır ve bu çözüm  $u_0 \in H_{\alpha}(M)$  herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere

$$u_n(x) = \lambda \int_{\pi}^{\pi} \phi(s, u_{n-1}(s)) \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

biçiminde tanımlı  $(u_n(x))$  dizisinin limiti gibi bulunabilir. Üstelik,

$$d_2(u_n, u^*) \leq \frac{(|\lambda| I_5)^n}{1 - |\lambda| I_5} d_2(u_1, u_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.39)$$

eşitsizliği doğrudur.

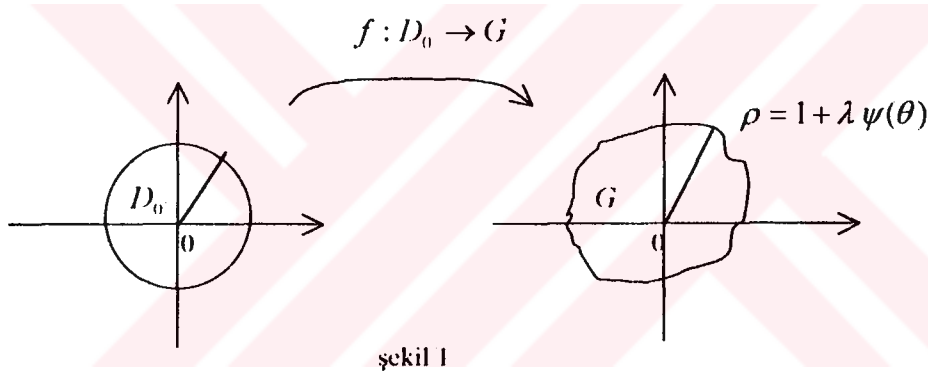
**Not:**  $H_{\alpha}(M)$  kümesinde  $d_2$  ve  $d_r$  metriklerine göre yakınsamalar denk olduğuna göre terimleri (2.38) formülleri yardımıyla tanımlanan  $(u_n)$  dizisi  $u^*$  çözümüne (2.39) den dolayı  $d_2$  metriğine göre yakınsak olduğundan  $d_r$  metriğine göre de yakınsaktır.

§2.4 deki sonuçları incelerken kaynaklarda gösterilen (Hüseynov, Muhtarov, 1980; Hüseynov, 1980; Babayev, 1960; Geht, 1955) eserlerinden yararlanılmıştır.

## 2.5 Bir Konform Dönüşümü Problemi Üzerine

$z$  ve  $w$  kompleks düzlemleri sırası ile  $D$  ve  $G$  bölgelerinde  $f: D \rightarrow G$ ,  $w=f(z)$  dönüşümü (fonksiyonu) verilsin. Aynı zamanda açı ve ölçü değiştirmeyen dönüşüme *konform dönüşümü* adı verilir. Bilindiği gibi,  $f'(z) \neq 0$  olacak şekilde her  $z \in D$  noktasında  $f: D \rightarrow G$  dönüşümü bir konform dönüşümdür.

$C$  kompleks düzleminde  $\lambda$  bir parametre ve  $(\theta, \rho)$  kutupsal koordinatlar olmak üzere sınır denklemi  $\rho = 1 + \lambda \psi(\theta)$  olan  $G$  bölgesi verilmiş olsun. (Bkz. Şekil 1)



şekil 1

$f(z), D_0 = \{z \in C : |z| \leq 1\}$  dairesini  $G$  bölgesine dönüştüren bir fonksiyon olsun.

$z = e^{i\varphi}$  için

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \ln(1 + \lambda \psi(\theta)) + i(\theta - \varphi) \quad (2.40)$$

olduğu açıktır.

$$\ln \frac{f(z)}{z} \Big|_{z=1} = u + iv \quad \text{dersek} \quad D_0 \quad \text{daresinde} \quad \text{harmonik} \quad u(x, y) + iv(x, y)$$

fonksiyonu için  $u(\cos \varphi, \sin \varphi) = u(\varphi)$ ,  $v(\cos \varphi, \sin \varphi) = v(\varphi)$  ve  $v(0, 0) = 0$  olmak üzere

$$u = \ln(1 + \lambda \psi(\theta)), \quad v = \theta - \varphi$$

olur.

$$v(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} u(s) \cotg \frac{s - \varphi}{2} ds$$

bağıntısı doğru olduğundan az önce sözü edilen  $f(z)$  fonksiyonunun bulunması problemi

$$\theta(\varphi) - \varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \ln(1 + \lambda \psi(\theta(s))) \operatorname{ctg} \frac{s-\varphi}{2} ds \quad (2.41)$$

biçimindeki lineer olmayan singüler integral denklemin çözümüne dönüştürülür. (İlüseynov, 1946)

Eğer (2.41) denkleminin bir  $\theta_*(\varphi)$  çözümü bulunmuşsa,  $v_*(\varphi) = \theta_*(\varphi) - \varphi$  fonksiyonu bulunur. Buna göre

$$f(z) = f(re^{i\varphi}) = iv(0,0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} u(R,s) \frac{\operatorname{Re}^{is} + re^{i\varphi}}{\operatorname{Re}^{is} - re^{i\varphi}} ds$$

ifadesinden

$$F'(z) = \lim_{R \rightarrow 1} \ln \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} u(1,s) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds$$

ve buradan da istenen

$$f(z) = z \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \ln(1 + \lambda \psi(\theta_*(s))) \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds \right)$$

fonksiyonu bulunmuş olur.

Şimdi (2.41) denkleminin tek bir  $\theta_*(\varphi)$  çözümüne sahip olduğunu görelim. Bunun için,  $\phi(\theta) = \ln(1 + \lambda\theta)$  fonksiyonu için (2.37) koşulunun, yani  $\forall \theta_1, \theta_2$  için

$$|\phi(\theta_1) - \phi(\theta_2)| \leq l_5 |\theta_1 - \theta_2|$$

koşulunu sağladığını göstereyim.

**Lemma 2.5.1 :**  $\psi(\theta)$  ve  $\theta(\varphi)$  fonksiyonları için

$$|\psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)| \leq l_6 |\theta_1 - \theta_2|, \quad (2.42)$$

$$|\theta(\varphi_1) - \theta(\varphi_2)| \leq l_7 |\varphi_1 - \varphi_2|^{\beta} \quad (2.43)$$

$0 < \beta < 1$  koşulları sağlandığında  $\phi(\theta) = \ln(1 + \lambda\theta)$  ve

$T(\varphi) = \phi(\theta(\varphi)) = \ln(1 + \lambda\psi(\theta(\varphi)))$  fonksiyonları için  $\forall \theta_1, \theta_2$  ve  $\forall \varphi_1, \varphi_2$  için sırasıyla

$$|\phi(\theta_1) - \phi(\theta_2)| \leq l_8 |\theta_1 - \theta_2|,$$

$$|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)| \leq l_9 |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

koşulları sağlanır. Burada  $l_6, l_7$  ve  $M$  pozitif sabit sayılar olmak üzere,  $l_8$  ve  $l_9$  pozitif sayıları  $M, l_6, l_7, \lambda$  sayıları yardımıyla bulunur:  $l_9 = M l_6 l_7 |\lambda|$

**İspat :** Ortalama değer teoremine göre

$$\ln(1 + \lambda \psi(\theta(\varphi_1))) - \ln(1 + \lambda \psi(\theta(\varphi_2))) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \psi(\bar{\theta})} (\psi(\theta(\varphi_1)) - \psi(\theta(\varphi_2))) \quad (2.44)$$

dir.  $\lambda$  parametresini yeteri kadar küçük seçmekle herhangi  $c > 0$  sayısı için

$$|1 + \lambda \psi(\theta(\varphi))| > c$$

olacak şekilde bir  $\lambda \neq 0$  sayısı bulunabilir. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{1 + \lambda \psi(\bar{\theta})} \right| \leq M$$

dir. Buna göre, (2.44) den

$$|\phi(\theta_1) - \phi(\theta_2)| \leq M |\lambda| l_6 |\theta_1 - \theta_2| = l_8 |\theta_1 - \theta_2|$$

elde edilir. Üstelik, (2.42) ve (2.43) i kullanarak (2.44) den

$$|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)| \leq M |\lambda| l_6 |\theta(\varphi_1) - \theta(\varphi_2)| \leq M |\lambda| l_6 l_7 |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta = l_9 |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

bulunur.

$$\theta_0(\varphi) = \varphi,$$

$$\theta_n(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \ln(1 + \lambda \psi(\theta_{n-1}(s))) \operatorname{ctg} \frac{s - \varphi}{2} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlı  $(\theta_n(\varphi))$  dizisini gözönüne alalım.

$\theta_0(\varphi) \in \tilde{H}_\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ) olduğu aşıkardır. Eğer  $\theta_n(\varphi)$  fonksiyonu  $L$  katsayısı ve  $0 < \beta < 1$  üssü ile Hölder koşulunu sağlarsa Lemma 2.5.1 e göre  $\theta_{n+1}(\varphi)$  fonksiyonu için

$$|\theta_{n+1}(\varphi_1) - \theta_{n+1}(\varphi_2)| \leq |\varphi_1 - \varphi_2| + |\lambda| A L |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

koşulunun sağlandığı gösterilebilir.  $A'$  sayısı

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < A' L |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

olacak şekilde seçildiğinde  $|\lambda| < \frac{1-A'}{A}$  için

$$|\theta_{n+1}(\varphi_1) - \theta_{n+1}(\varphi_2)| < L |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

olduğu elde edilir. Demek ki,  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$|\theta_n(\varphi_1) - \theta_n(\varphi_2)| < L |\varphi_1 - \varphi_2|^\beta$$

olur.

$(\theta_n(\varphi))$  dizisinin yakınsak olduğunu görelim.  $\psi(\theta)$  fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu ve  $\forall \theta_1, \theta_2$  için

$$|\psi'(\theta_1) - \psi'(\theta_2)| \leq L_{10} |\theta_1 - \theta_2| \quad (2.45)$$

koşulunun sağlandığını farzedelim. (2.42) ve (2.45) koşulları sağlandığında Lemma 2.4.1 e benzer olarak aşağıdaki lemmanın doğruluğu ispatlanabilir.

**Lemma 2.5.2 :**  $\psi_n(s) = \theta_n(s) - \theta_{n-1}(s)$  fonksiyonu için

$$|\psi_n(s)| \leq K_n$$

$$|\psi_n(s_1) - \psi_n(s_2)| \leq K_n |s_1 - s_2|^\beta$$

koşulları sağlandığında

$$\omega_n(s) = \ln(1 + \lambda \psi(\theta_n(s))) - \ln(1 + \lambda \psi(\theta_{n-1}(s)))$$

fonksiyonu için

$$|\omega_n(s_1) - \omega_n(s_2)| \leq B K_n |\lambda| |s_1 - s_2|^\beta$$

koşulu sağlanır. Burada  $B$ ,  $n$  ve  $\lambda$  dan bağımsız olan sabit sayıdır.

Bu lemmadan faydalanarak  $(\theta_n(\varphi))$  dizisinin bir  $\theta_*(\varphi)$  fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaklığı gösterilebilir.  $\theta_*(\varphi)$  fonksiyonunun (2.39) denkleminin bir tek çözümü olduğu §2.4 dekine benzer şekilde gösterilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Babayev, A.A., 1960, O Haraktere Shodimosti Posledovatelniñ Pribligniy, “Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı Üzerine”, Uç.sapiski AGU. Ser. “ Fiz.-Mat. i him. n. ” , N4.
- Gakhov, F.D., 1966, Boundary Value Problems, Dover Publications, Inc., New York.
- Geht, B.İ., 1955, Razreşimost NSIU i İntegro-differensialniñ Metodom Posledovatelniñ Pribligniy, “Lineer Olmayan Singüler Denklemler ve İntegro-diferansiyel Denklemlerin Ardışık Yaklaşımlar Yöntemiyle Çözümü”, Trudı Novoçerkasskoro Politehniçeskogo instituta, N26.
- Hüseynov, A.İ., 1947, Teoremi Suşestvovaniya i Yedinstvennosti dlya Nelineyniñ Singulyarniñ İntegralniñ Uravneniy, “Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemler İçin Varlık ve Teklik Teoremleri”, Matematiçeskiy sbornik, 20(62), N2.
- Hüseynov, A.İ., Muhtarov, H.Ş., 1980, Vvedeniye v Teoriyu Nelineyniñ Singulyarniñ İntegralniñ Uravneniy, “Lineer Olmayan Singüler İntegral Denklemler Teorisine Giriş”, Nauka, Moskova.
- Hüseynov, A.İ., 1980, İntegral Teknikler , “ İntegral Denklemler” , Maarif, Bakü.
- Hüseynov, A.İ., 1946, O Konformnonı Otobrajenii Kruga na Oblast, Biliskuyu k Krugu, “Dairenin Daireye Yakın Bölgeye Konform Dönüşümü Üzerine”, Trudı Sektora Matematiki AN Azerb. SSR, N2

Hutson, V., Pym, J., 1980, Applications of Fonctional Analıysis and Operator Teory, Acad. Press London, New York.

Krasnoselskiy, M.A., 1956, Topologıçeskiye Metodu u Teorii Nelineynıch İntegralnıh Uravneniy, "Lineer Olmayan İntegral Teorisinde Topolojik Metodlar", Gostehizdat, Moskova.

Krasnoselskiy, M.A. ve b., 1969, Priblignennoye Reşeniye Operatornıh Uravneniy, " Operatör Denklemlerin Tahmini Çözümü ", Nauka, Moskova.

Lyusternik, L.A., Sobolev, L.İ., 1965, Elementı Funksionalnogo Analiza, Nauka, Moskova.

Mihlin, S.G., 1962, Muogomernıye Singulyarnıye İntegralı i İntegralnıye Uravneniya, "Çok Katlı Singüler İntegraller ve İntegral Denklemler", Fizmatgiz, Moskova

Mushelişvili, N.İ., 1968, Singularnıye İntegralnıye Uravneniya, Nauka, Moskova.

Musayev, B., Alp, M., 2000, Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

Privalov, İ.İ., 1950, Graniçnıye Svoystva Analitiçeskih Fonksiy, " Analitik Fonksiyonların Sınır Özellikleri", Gostehizdat, Moskova- Leningrad

Trenogin, V.A., 1980, Fonksiyonalnıy Analiz, Nauka, Moskova.