

105648

METRİKLENEBİLİR TOPOLOJİK UZAYLAR

METRISABLE TOPOLOGICAL SPACES

Ayşegül ALTAY

**Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ
olarak hazırlanmıştır.**

2001

105648
T.C. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN YASAYON MÜHÜRÜ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Mus. Çiçek
Prof. Dr. Mustafa ÇİÇEK

Üye (Danışman)

M. Diker
Doç. Dr. Murat DİKER

Üye

L. M. Brown
Prof. Dr. Lawrence. M. BROWN

ONAY

Bu tez ... / ... /2001 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca
belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2001

Prof.Dr. Seyfi KULAKSIZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde metrik uzaylarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde σ - yerel sonlu ve σ - ayırık örtüler aracılığıyla Stone Teoremi ve iyi bilinen Nagata-Smirnow metriklenebilme teoremlerine yer verilmiştir. Yine bu bölümde Nagata-Smirnow Teoreminin bir sonucu olan Bing Metriklenebilme Teoremi anlatılmıştır. Bu bölüm Hanai-Morita-Stone Teoremi ile bitirilmiştir.

Üçüncü bölümde parakompaktlık, collection-wise normallik ve zayıf parakompaktlık kavramları tanımlanarak Bing(Bing Metriklenebilme Kriteri), Arhangel'skii, Alexandroff ve Alexandroff-Urysohn metriklenebilme teoremlerine yer verilmiştir.

Son bölümde birinci sayılabilir uzayların yerel tabanları üzerine basit bir koşul konularak bazı yeni ve iyi bilinen metriklenebilme teoremleri anlatılmıştır.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to fundamental definitions and basic results on metric spaces.

In the second chapter the Stone Theorem and the well-known Nagata-Smirnov metrization theorem are given by using the σ -local finite and σ -discrete coverings. The Bing Metrization Theorem is also obtained as a result of the Nagata-Smirnov Theorem. The chapter closes with the Hanai-Morita-Stone Theorem.

In the third chapter the concept of paracompactness, collectionwise normality and weak paracompactness are defined to establish the famous results of Bing (Bing Metrization Criterion), Arhangel'skii, Alexandroff and Alexandroff-Urysohn.

In the final chapter, a simple condition on local basis of a first countable space is considered and it is shown that some new and some well-known metrization theorems can be deduced from it.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması sırasında engin bilgi ve tecrübesiyle çok değerli katkıları bulunan tez danışmanım değerli Doç. Dr. Murat DİKER 'e, tezin her aşamasında sabrını ve desteğini esirgemeyen Prof. Dr. Lawrence M. BROWN 'a, değerli arkadaşım Araş. Gör. Şenol DOST' a ve canım aileme en içten duygularıyla teşekkür ediyorum.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. TEMEL TANIM VE SONUÇLAR	
Fonksiyonel Kapalı Küme	3
Toplam Uzayı	5
2. METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ I	
Stone Teoremi	9
Kusursuz Normal Uzay	14
Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi	16
Bing Metriklenebilme Teoremi	18
Hanai-Morita-Stone Teoremi	37
3. METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ II	
Collectionwise-normal Uzay	42
Açılım	42
Bing Metriklenebilme Kriteri	46
Moore Metriklenebilme Teoremi	48
Regüler Taban	51
Arhangels'kii Metriklenebilme Teoremi	54
Alexandroff Metriklenebilme Kriteri	59
Alexandroff-Urysohn Metriklenebilme Teoremi	59

METRİKLENEBİLİRLİK İÇİN KRİTERLER

Yerel Quasi-Düzgün Uzay	71
Yerel Metrik	74
Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi	75
Arhangels'kii-Stone Metriklenebilme Teoremi	76
5. KAYNAKLAR DİZİNİ	81



1. Temel Tanım ve Sonuçlar

Topolojik uzaylar içerisinde metriklenebilir uzaylar sınıfının çok önemli bir yeri bulunmaktadır. Bu nedenle topolojik uzaylar için uygun metriklenebilme koşullarının araştırılması, bu alanda çalışanların üzerinde sık durdukları konular arasındadır. Konuyla ilgili literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmada, ilginç olması açısından, özellikle çok iyi bilinen Nagata-Smirnov, Arhangelskii-Stone ve Bing metriklenebilme gibi teoremlere yer verilmiş, daha sonra bu teoremler ve bazı yeni sonuçlar Collins ve Roscoe'nin[6] verdikleri metriklenebilme koşulları kullanılarak, kolayca yeniden elde edilmiştir. Bu bölüme çalışma için gerekli tanımlar ve sonuçlarla başlıyoruz.

1.1. Tanım: $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

1.2. Tanım: $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$(M1') \quad d(x, x) = 0$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna **pseudo-metrik** denir.

Pseudo metrik olup metrik olmayan uzay örnekleri bulabiliriz. Bunun için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

1.3. Örnek: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $d(x, y) = |x_1 - y_1|$ ile tanımlı $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun pseudo-metrik olduğunu gösterelim.

Çözüm: (M1'),(M2) ve (M3) koşullarının sağlandığını göstermeliyiz:

(M1') $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $d(x, x) = |x_1 - x_1| = 0$ olduğu için (M1') koşulu sağlanır.

(M2) $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| = |(-1) \cdot (y_1 - x_1)| = |y_1 - x_1| = d(y, x)$$

dir.

(M3) $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ ve $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d(x, y) = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \leq d(x, z) + d(z, y)$$

olduğundan d fonksiyonu \mathbb{R}^2 üzerinde bir pseudo-metrikdir.

Ancak metrik değildir. Çünkü $d(x, y) = |x_1 - y_1| = 0$ ise $x_1 = y_1$ dir. Ama $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ olabilir.

Biz (X, d) metrik uzayı üzerinde, d metriği ile üretilen topolojinin

$$\mathcal{T}_d = \{G \subseteq X : (\forall x \in G)(\exists \epsilon_x > 0)(x \in B(x, \epsilon_x) \subseteq G)\}$$

olduğunu biliyoruz. Bir (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı verildiğinde, X üzerinde $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ koşulunu sağlayan bir d metriği varsa, bu \mathcal{T} topolojisine **metrik topoloji** ve (X, \mathcal{T}) topolojik uzayına **metriklenebilir topolojik uzay** denir.

(X, \mathcal{T}) topolojik uzayı verildiğinde X kümesi üzerinde böyle bir metriğin bulunabilmesi için sadece açık kümelere dayalı bir takım koşulların bulunup bulunamayacağı ile ilgili araştırmalar Urysohn'nun bazı çalışmalarına rağmen 1950'li yılların başına kadar arzu edilen sonucu vermemiştir. Bu yıllarda ise üç matematikçi Bing, Nagata ve Simirnov birbirinden bağımsız olarak bir genel metriklenebilme teoremini ispat ederek Genel Topolojinin başlıca problemlerinden birini çözmüş oldular.

1.4. Tanım : (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\delta(A) = \sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\}$$

sayısına A kümesinin **çapı** denir. $\delta(X) < r$ olacak şekilde bir r sayısı varsa X üzerindeki d metriğine **r ile sınırlıdır** denir.

1.5. Teorem : (X, d) metrik uzay olsun. Bu durumda d metriğine denk olan ve 1 ile sınırlı bir d_1 metriği vardır.

1.6. Tanım : (X, d) metrik uzay olmak üzere $x \in X$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. Şimdi $d(x, \emptyset) = 1$ olmak üzere

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

biçiminde tanımlanan $d(x, A)$ sayısına x noktasının A kümesine olan **uzaklığı** denir.

1.7. Yardımcı Teorem: (X, d) metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $x, y \in X$ noktaları için

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

dir.

Kanıt: $A = \emptyset$ ise durum açıktır. $A \neq \emptyset$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf\{d(x, z) : z \in A\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, z) : z \in A\} \\ &= d(x, y) + \inf\{d(y, z) : z \in A\} = d(x, y) + d(y, A), (y \in X) \end{aligned}$$

olduğundan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, yani $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ olduğu görülür. Aynı şekilde $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ elde edilebileceğinden ikisi ile birlikte

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

sonucu elde edilir.

NOT: İlk üç bölümde bir noktanın komşuluğu açık küme olarak alınmıştır.

1.8. Teorem: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $f(x) = d(x, A)$ biçiminde tanımlı $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

Kanıt: $\epsilon > 0$ keyfi verildiğinde $\delta = \epsilon$ olarak seçilirse $d(x, y) < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < \epsilon$$

elde edilmiş olur. O halde f süreklidir.

1.9. Sonuç: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$ dir.

1.10. Tanım: X bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow I = [0, 1]$ sürekli bir fonksiyon olsun. $A = f^{-1}(0)$ kümesine **fonksiyonel kapalı küme** denir.

Her fonksiyonel kapalı kümenin kapalı olduğunu kolayca söyleyebiliriz.

1.11. Sonuç: Metriklenebilir bir uzayın her kapalı altkümesi fonksiyonel kapalıdır.

Kanıt: X metriklenebilir bir uzay ve $A \subseteq X$ kapalı olsun. X metriklenebilir bir uzay olduğundan üzerinde topolojisini üreten bir d metriği vardır. Bu durumda d metriğine denk ve 1 ile sınırlı olan bir d_1 metriği vardır. Şimdi $f(x) = d_1(x, A)$ ile tanımlı $f : X \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$A = \bar{A} = \{x : d_1(x, A) = f(x) = 0\}$$

eşitliği gözönüne alınırsa, $A = f^{-1}(0)$ olduğu kolayca görülebilir. O halde A fonksiyonel kapalıdır.

1.12. Teorem: X bir metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(a) X uzayı 2. sayılabilirdir.

(b) X uzayı ayrılabilirdir.

Kanıt: (a) \Rightarrow (b): (X, d) bir metrik uzay ve \mathcal{T}_d , d metriği ile üretilen topoloji olsun. (X, \mathcal{T}_d) uzayı 2. sayılabilir olduğundan \mathcal{T}_d 'nin $\mathcal{B}_d = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ olacak biçimde sayılabilir bir tabanı vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i \neq \emptyset$ kabul edebiliriz. Çünkü \mathcal{B}_d ailesinden boş kümeleri attığımızda geri kalan aile hem sayılabilirdir hem de \mathcal{T}_d 'nin tabanıdır. Her $i \in I$ için bir tek $x_i \in B_i$ ögesi seçelim. $A = \{x_i : i \in I\}$ kümesi sayılabilirdir. $\bar{A} = X$ olduğunu görelim: Bunun için

$T_d \in \mathcal{T}_d, T_d \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $B_i \subseteq T_d$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Böylece $x_i \in B_i \subseteq T_d$ ve $x_i \in A$ olduğundan $A \cap T_d \neq \emptyset$ olup $\bar{A} = X$ bulunur.

(b) \Rightarrow (a): (X, d) metrik uzayı ayrılabilir olsun. $A = \{a_i : i \in I\}$ kümesini X 'de yoğun sayılabilir bir küme olarak alalım. Şimdi

$$\mathcal{B} = \{B(a, 1/2n) : a \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlı \mathcal{B} ailesinin d metriğinin tanımladığı \mathcal{T}_d 'nin bir tabanı olduğunu görelim: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$ dir. $x \in T \in \mathcal{T}_d$ olsun. Bu durumda $B(x, \epsilon) \subseteq T$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ vardır. Ayrıca $1/n < \epsilon$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ seçebileceğimizden $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, \epsilon) \subset T$ olur. $B(x, \frac{1}{2n}) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $d(x, a) < \frac{1}{2n}$ olacak biçimde bir $a \in A$ vardır. Sonuç olarak $x \in B(a, \frac{1}{2n}) \subset B(x, \frac{1}{n}) \subset T$ elde edilir. O halde \mathcal{B} topolojinin tabanıdır. Böylece X metrik uzayı 2. sayılabilirdir.

Bu arada herhangi ayrılabilir topolojik uzayın 2. sayılabilir olması gerekmediğini hemen söyleyelim.

1.13. Tanım: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı T_2 olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, X uzayına **kompakt uzay** denir.

1.14. Tanım: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzayı T_2 olsun. X uzayının sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa bu uzaya **sayılabilir kompakt** denir.

1.15. Tanım: Bir T_2 topolojik uzayında her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa, bu uzaya **dizisel kompakt** denir.

Metrik(pseudo-metrik) uzaylarda kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık özellikleri denktir. Her metrik uzay T_1 olduğundan bu özellikler "her sonsuz kümenin en az bir yığılma noktasının var olması" özelliğine denktir.

1.16. Tanım: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı T_1 , $F \subset X$ kapalı ve $x \notin F$ olsun. Eğer $x \in U_1$, $F \subset U_2$ ve $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ olacak biçimde U_1, U_2 açık kümeleri mevcut ise, (X, \mathcal{T}) uzayına **regüler uzay** denir.

1.17. Tanım: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı T_1 olsun. Eğer her ayrık kapalı $A, B \subset X$ için $A \subset U$, $B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açık kümeleri mevcut ise, (X, \mathcal{T}) uzayına **normal uzay** denir.

1.18. Tanım: $(X_s, \mathcal{T}_s)_{s \in S}$ topolojik uzayların bir ailesi ve

$$X = \bigcup_{s \in S} (X_s \times \{s\})$$

olsun. Her $s \in S$ için

$$j_s(y) = (y, s), \quad y \in X_s$$

ile tanımlı $j_s : X_s \rightarrow X$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bütün j_s fonksiyonlarını sürekli kılan en ince topolojiye X üzerindeki **toplam topolojisi** denir. Bu topolojiyi \mathcal{T} ile gösterirsek (X, \mathcal{T}) uzayına **toplam uzayı** denir. (X, \mathcal{T}) toplam uzayını kısaca $\sum_{s \in S} X_s$ veya $\bigoplus_{s \in S} X_s$ ile göstereceğiz.

(*) Her $s \in S$ için j_s fonksiyonu birebirdir:

$y, y' \in X_s$ olmak üzere $j_s(y) = j_s(y') \implies (y, s) = (y', s) \implies y = y'$ bulunur.

(*) Her $s \in S$ için $j_s : X_s \rightarrow X$ dönüşümleri hem açık hem de kapalıdır:

Bunu göstermek için $k \in S$ olmak üzere, X_k uzayının bir M_k açık (kapalı) altkümelerini gözönüne alalım. $j_k[M_k]$ kümesi açık(kapalı)dır. Çünkü

$$j_s^{-1}[j_k[M_k]] = \begin{cases} M_k & s = k \\ \emptyset & s \neq k \end{cases}$$

dır.

(*) Şimdi toplam topolojisinin nasıl olabileceğini düşünelim.

Toplam topolojisi her $s \in S$ için $j_s : (X_s, \mathcal{T}_s) \rightarrow X$ fonksiyonlarını sürekli kılan en ince topoloji olacağına göre, $\mathcal{T} = \{G \subseteq X : G \cap X_s = j_s^{-1}(G) \in \mathcal{T}_s, s \in S\}$ elde edilir.

1.19. Yardımcı Teorem: X bir topolojik uzay ve $\{X_s\}_{s \in S}$, X uzayının ikişer ayrık açık altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ ise,

$$X = \bigoplus_{s \in S} X_s$$

dir.

Kanıt: Kanıt için söz konusu kümelerin topolojilerinin eşit olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$G \subseteq X$ açık olsun. Her $s \in S$ için $G \cap X_s$ kümesi altuzay topolojisine göre X_s 'de açıktır. Dolayısıyla $G, \bigoplus_{s \in S} X_s$ uzayında açıktır.

Tersine $G \subseteq \bigoplus_{s \in S} X_s$ açık olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $G \cap X_s$ kümesi, X_s uzayında açık olduğundan

$$G = \bigcup_{s \in S} (G \cap X_s)$$

kümesi de X uzayında açıktır.

1.20. Teorem: $\bigoplus_{s \in S} X_s$ metriklenebilirdir ancak ve ancak her $s \in S$ için X_s metriklenebilirdir.

Kanıt:(\implies): $\bigoplus_{s \in S} X_s$ metriklenebilir olsun. Bir metriklenebilir uzayın her alt-uzayı da metriklenebilir olduğundan her $s \in S$ için X_s metriklenebilirdir.

(\impliedby): Bir (X, d) metrik uzayında, d metriğine denk olan 1 ile sınırlı bir d_1 metriğinin olduğunu biliyoruz. Buradan her $s \in S$ için X_s üzerindeki topolojinin 1 ile sınırlı d_s metriği tarafından üretildiğini varsayabiliriz. Böylece $s \in S$ ve $x, y \in X_s$ için $d_s(x, y) \leq 1$ dir. Şimdi

$$d(x, y) = \begin{cases} d_s(x, y) & x, y \in X_s \\ 1 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile tanımlı $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu görelim:

(M1) ve (M2) koşullarının sağlandığı açıktır. (M3) koşulunun sağlandığını görelim: $x, y, z \in X$ olsun. $x, z \in X_s$ olmak üzere

$$d_s(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

eşitsizliğini gözönüne alalım. Eğer $y \in X_s$ ise, $d_s(x, z) \leq d_s(x, y) + d_s(y, z)$ dir. $y \notin X_s$ ise, $d_s(x, z) \leq 2$ olduğundan her iki durumda da (M3) koşulu sağlanır.

Şimdi $s_1 \neq s_2$ için $x \in X_{s_1}$ ve $z \in X_{s_2}$ ise $d(x, z) = 1$ dir. $y \in X_{s_1}$ ise $1 \leq d_s(x, y) + 1$ ve $y \in X_{s_2}$ ise $1 \leq 1 + d_s(y, z)$ olup her iki durumda da (M3) koşulu sağlanır. Böylece d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Her $s \in S$ için X_s kümesinin, d ile üretilen topoloji ile X uzayında açık olduğu kolayca görülebilir. Her $s \in S$ için $d_s(x, y) \leq d(x, y)$ ve $d_{X_s} = d_s$ oluşu X_s uzayının kendi topolojisini üretir. Böylece Yardımcı Teorem 1.19 dan $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ dir. Buradan d metriği, X üzerindeki $\{X_s\}_{s \in S}$ topolojik uzaylarının toplam topolojisini üretir.

X_1, X_2, \dots metriklenebilir uzayların bir dizisi ve $i = 1, 2, \dots$ için d_i, X_i üzerindeki, 1 ile sınırlı metrik olsun.

Şimdi $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesini ve $x = \{x_i\}, y = \{y_i\} \in X$ noktalarını ele alalım.

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)$$

ile tanımlı d fonksiyonu, (M1)-M(3) koşullarını sağlar. Biz d metriği ile üretilen X uzayının topolojisinin, $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ kartezyen çarpımının Tychonoff topolojisi ile uyduğuna aşağıdaki teoremden göreceğiz:

1.21. Teorem: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ metriklenebilir uzayların ailesi ve X_i uzayının üzerinde 1 ile sınırlı d_i metriği olsun. Bu durumda $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ kümesi üzerinde d metriği ile üretilen topoloji; $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ uzaylarının kartezyen çarpımının üzerindeki topoloji ile uyur.

Kanıt: $x = \{x_i\}, y = \{y_i\}$ için $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2^i}$ iken $d_i(x_i, y_i) < \epsilon$ dir. Ayrıca her $i \in \mathbb{N}$ için $\rho_i : (X, d) \rightarrow (X_i, d_i)$ örten, izdüşüm fonksiyonları süreklidir:

Buradan d 'nin ürettiği topoloji, X üzerindeki Tychonoff topolojisinden daha incedir. Çünkü Tychonoff topolojisi ρ_i dönüşümlerini sürekli yapan en kaba topolojidir.

Şimdi d ile üretilen topolojiye göre açık olan her $U \subset X$ 'in kartezyen çarpım topolojisine göre de açık olduğunu göstermek kanıt için yeterli olacaktır.

$x = \{x_i\} \in U$ olsun. U açık olduğundan $B(x, r) \subset U$ olacak şekilde bir $r > 0$ vardır. Biz

$$x \in \bigcap_{i=1}^k d_i^{-1}(U_i) \subset B(x, r) \subset U$$

olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı ve $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $U_i \subset X_i$ açıkları bulmaya çalışalım. Şimdi

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$$

olacak şekilde bir k seçelim ve $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için

$$U_i = B(x_i, \frac{r}{2}) = \{z \in X_i : d_i(x_i, z) < \frac{r}{2}\}$$

olarak alalım. Ayrıca

$$y = \{y_i\} \in \bigcap_{i=1}^k d_i^{-1}(U_i)$$

olsun. Her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $y \in d_i^{-1}(U_i)$ olup $d_i(y) \in U_i$ dir. Böylece $y_i \in U_i$ olup $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $d_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2}$ dir. Şimdi

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

olarak yazılabileceğinden $d(x, y) < r$ olup $y \in B(x, r)$ bulunur. Yani

$$\bigcap_{i=1}^k d_i^{-1}(U_i) \subset B(x, r) \subset U$$

olduğundan kanıt tamamlanır.

1.22. Tanım: X bir topolojik uzay, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ kümesine f fonksiyonunun **desteği** denir ve $dest(f)$ ile gösterilir.

1.23. Tanım: X bir topolojik uzay ve $f_s : X \rightarrow I$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $\sum_{s \in S} f_s(x) = 1$ ise $\{f_s\}_{s \in S}$ ailesine X uzayı üzerinde **birimin ayrışımı** denir.

2. METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ I

2.1. Tanım: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{R} = \{R_i \mid i \in I\}$, X 'in altkümelerinin bir ailesi olsun.

- (i) Her $x \in X$ için $|\{i \in I \mid U \cap R_i \neq \emptyset\}| < \aleph_0$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa, \mathcal{R} ailesine **yerel sonlu** denir.
- (ii) X 'in her x noktasının, $|\{i \in I \mid U \cap R_i \neq \emptyset\}| < 2$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, \mathcal{R} ailesine **ayrık aile** denir.
- (iii) \mathcal{R} ailesi, sayılabilir tane yerel sonlu ailenin birleşimi şeklinde yazılabiliyor ise \mathcal{R} ailesine **σ -yerel sonlu** denir.
- (iv) \mathcal{R} ailesi, sayılabilir tane ayrık ailenin birleşimi şeklinde yazılabiliyor ise \mathcal{R} ailesine **σ -ayrık** denir.

2.2. Tanım: X bir küme ve $\{A_s\}_{s \in S}$, X 'in altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{s \in S : x \in A_s\}$ kümesi sonlu (sayılabilir) ise $\{A_s\}_{s \in S}$ ailesine **noktasal sonlu (noktasal sayılabilir)** denir.

2.3. Tanım: X bir topolojik uzay, $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ ve $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ aileleri X uzayının farklı iki örtüsü olsun. Eğer her $t \in T$ için $B_t \subset A_s$ olacak şekilde bir $s \in S$ mevcut ise, \mathcal{B} ailesine, \mathcal{A} ailesinin **incesidir** denir.

2.4. Teorem: (STONE Teoremi) Metriklenebilir bir uzayın, her açık örtüsünün, hem yerel sonlu hem de σ -ayrık olan bir açık incesi vardır.

Kanıt: X bir metriklenebilir uzay, $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü olsun. X üzerindeki metriği p ile gösterelim. S kümesi üzerinde bir " $<$ " iyi-sıralama bağıntısı gözönüne alalım. Şimdi aşağıdaki koşulları sağlayan $c \in X$ noktaları üzerinden

$$V_{s,i} = \bigcup B(c, \frac{1}{2^i})$$

olmak üzere tümevarımla, X uzayının altkümelerinin bir $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}$ ailesini tanımlayalım:

$$(1) s = \min\{s : c \in U_s\}.$$

Bu şekilde bir $s \in S$ seçebiliriz. Çünkü $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi X 'in bir örtüsü olduğuna göre c noktasını içeren U_s 'ler vardır. Böylece $\emptyset \neq \{s : c \in U_s\} \subseteq S$ dir. S kümesi iyi sıralı olduğundan $\{s : c \in U_s\}$ kümesinin en küçük elemanı vardır.

$$(2) j < i \text{ ve } t \in S \text{ olmak üzere } c \notin V_{t,j} \text{ dir.}$$

$$(3) B(c, \frac{3}{2^i}) \subset U_s \text{ dir.}$$

Böyle tanımlanan $V_{s,i}$ kümeleri açıktırlar ve (3) koşulundan $V_{s,i} \subset U_s$ dir. $x \in X$ olsun. $x \in U_s$ olmak üzere $s \in S$ en küçük elemanını alalım. $B(x, \frac{3}{2^i}) \subset U_s$ olacak şekilde bir i doğal sayısı seçelim. $j < i$ ve $t \in S$ için ya $x \in V_{t,j}$ ya da $x \in V_{s,i}$ olduğu açıktır. Buradan $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin bir açık incisi olur. Çünkü her $i \in I$ için $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s \in S} \subset U_s$ dir. Şimdi her $i \in \mathbb{N}$ için

(4) $x_1 \in V_{s_1,i}$, $x_2 \in V_{s_2,i}$ ve $s_1 \neq s_2 \implies p(x_1, x_2) > \frac{1}{2^i}$ olduğunu göstereceğiz. Böylece her $\frac{1}{2^{i+1}}$ yuvarı \mathcal{V}_i nin en çok bir elemanı ile kesişeceğinden \mathcal{V}_i ailesinin ayrık olduğu gösterilmiş olacaktır.

Şimdi $s_1 < s_2$ olduğunu varsayalım. $V_{s_1,i}$ ve $V_{s_2,i}$ tanımından $k = 1, 2$ için $x_k \in B(c_k, \frac{1}{2^i}) \subset V_{s_k,i}$ olacak şekilde (1) ve (3) özelliklerini sağlayan c_1, c_2 noktaları vardır. (3) özelliğinden $B(c_1, \frac{3}{2^i}) \subset U_{s_1}$ ve (1) özelliğinden $c_2 \notin U_{s_1}$ dir. Çünkü $c_2 \in U_{s_1}$ olsaydı, s_2 minimum olurdu. Oysa ki, $s_1 < s_2$ dir. Böylece $c_2 \notin U_{s_1}$ olduğundan $c_2 \notin B(c_1, \frac{3}{2^i}) \subset U_{s_1}$ dir. Metrik tanımından $p(c_1, c_2) \geq \frac{3}{2^i}$ dir. Üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$p(c_1, c_2) \leq p(x_1, x_2) + p(c_1, x_1) + p(c_2, x_2)$$

bulunur. Böylece

$$p(x_1, x_2) \geq p(c_1, c_2) - p(c_1, x_1) - p(c_2, x_2) > \frac{1}{2^i}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4) özelliği kanıtlanmış olur.

Şimdi her $t \in S$ ve k, j doğal sayıları için

$$(5) \quad B(x, \frac{1}{2^k}) \subset V_{t,j} \text{ ise, } i \geq j + k \text{ ve } s \in S \text{ için } B(x, \frac{1}{2^{i+k}}) \cap V_{s,i} = \emptyset$$

olduğunu gösterirsek, teoremin kanıtını bitirmiş oluruz. Çünkü \mathcal{V} ailesinin yerel sonlu olmasını istiyoruz. Yani uzayın her noktası için \mathcal{V} ailesinin elemanlarının sonlu tanesi ile kesişen bir komşuluğunu bulmak istiyoruz:

Her $x \in X$ için $V_{t,j}$ kümesi açık olduğundan

$$B(x, \frac{1}{2^k}) \subset V_{t,j}$$

olacak şekilde k, j, t doğal sayıları vardır. Bu durumda ise $B(x, \frac{1}{2^{j+k}})$ yuvarı \mathcal{V} ailesinin en çok $j + k - 1$ tanesi ile kesişir. En azından $V_{t,j}$ ile kesiştiği açıktır. Şimdi (5) özelliğini doğrulayalım:

(2) özelliğinden dolayı $c \in V_{s,i}$ ise, $i \geq j + k$ için $c \notin V_{t,j}$ dir. $B(x, \frac{1}{2^k}) \subset V_{t,j}$ olduğundan $p(x, c) \geq \frac{1}{2^k}$ bulunur. $i \geq j + k \geq k + 1$ olduğundan

$$B(x, \frac{1}{2^{j+k}}) \cap B(c, \frac{1}{2^i}) = \emptyset$$

dir. Şimdi bu eşitliği kanıtlayalım: $i \geq k + 1$ için

$$B(x, \frac{1}{2^{j+k}}) \cap B(c, \frac{1}{2^i}) \neq \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $y \in B(x, \frac{1}{2^{j+k}})$ ve $y \in B(c, \frac{1}{2^i})$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan $p(x, y) \leq \frac{1}{2^{j+k}}$ ve $p(y, c) \leq \frac{1}{2^i}$ olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$p(x, c) \leq p(x, y) + p(y, c) < \frac{1}{2^{j+k}} + \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

bulunur.

Bu sonuç $i \geq k + 1$ için $p(x, c) \geq \frac{1}{2^k}$ gerçeği ile çelişir.

Uyarı: Stone teoreminin ispatından; bir pseudo-metrikle üretilen X topolojik uzayının her açık örtüsü hem yerel sonlu hem de σ -ayrık açık inceye sahiptir.

2.5. Teorem: Her metriklenebilir uzay σ -ayrık bir tabana sahiptir.

Kanıt: (X, p) metriklenebilir uzay olsun. X uzayının $\{B(x, \frac{1}{i})\}_{x \in X}$ açık örtüsünü gözönüne alalım. Bu durumda Stone teoreminden bu örtünün σ -ayrık açık \mathcal{B}_i incesi vardır. Şimdi

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

ailesinin X için bir taban olduğunu gösterelim: $U \subseteq X$ açık ve $x \in U$ olsun. X uzayı metriklenebilir olduğundan $x \in B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Ayrıca her $i \in \mathbb{N}$ için \mathcal{B}_i , X uzayının bir örtüsüdür. Şimdi $\frac{2}{i} < \epsilon$ olacak şekilde bir i doğal sayısı için işlemlerimizi sürdürebiliriz: \mathcal{B}_i örtü olduğundan öyle bir $B \in \mathcal{B}_i$ vardır ki $x \in B$ 'dir. Ayrıca $\mathcal{B}_i \prec \{B(x, \frac{1}{i})\}_{x \in X}$ olduğundan $x \in B \subset B(y, \frac{1}{i})$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Kanıtı bitirmek için $B(y, \frac{1}{i}) \subset B(x, \epsilon)$ olduğunu göstermek yeterlidir: $z \in B(y, \frac{1}{i})$ olsun. Buradan $p(y, z) < \frac{1}{i}$ olur. Aynı zamanda $x \in B$ olduğundan da $p(y, x) < \frac{1}{i}$ dir. Böylece

$$p(z, x) \leq p(z, y) + p(y, x) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i} < \epsilon$$

olup $z \in B(x, \epsilon)$ bulunur. Yani $B(y, \frac{1}{i}) \subset B(x, \epsilon)$ kapsaması gerçekleşir. O halde $x \in B \subset B(x, \epsilon) \subset U$ olup

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

X için bir tabandır.

Şimdi aşağıdaki sonucu kolayca söyleyebiliriz.

2.6. Sonuç: Her metriklenebilir uzay, σ -yerel sonlu tabana sahiptir.

Kanıt: Stone teoreminden bir metriklenebilir uzayın her açık örtüsünün hem yerel sonlu hem de σ -ayrık açık incesi olduğunu biliyoruz. Buna dayanarak; p , X üzerinde bir metrik ve B_i , X uzayının $\frac{1}{i}$ yarıçaplı açık yuvarlarından oluşan açık örtüsünün yerel sonlu incesi olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

X için bir tabandır ve σ -yerel sonludur.

2.7. Yardımcı Teorem: X bir T_1 uzayı olsun. Her kapalı $F \subset X$, her açık $W \subset X$ ve her $i \in \mathbb{N}$ sayısı için $\overline{W}_i \subset W$ ve $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ olacak şekilde X 'in açık kümelerinin bir W_1, W_2, W_3, \dots dizisi varsa, X uzayı normaldir.

Kanıt: A ve B , X 'in ayrık kapalı altkümeleri olsun. $F = A$ ve $W = X \setminus B$ diyelim.

$$i = 1, 2, 3, \dots \text{ için } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \text{ ve } B \cap \overline{W}_i = \emptyset \quad (*)$$

olacak şekilde X 'in açık kümelerinin bir W_1, W_2, W_3, \dots dizisini oluşturalım. $F = B$ ve $W = X \setminus A$ olsun.

$$i = 1, 2, 3, \dots \text{ için } B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \text{ ve } A \cap \overline{V}_i = \emptyset \quad (**)$$

olacak şekilde X 'in açık kümelerinin bir V_1, V_2, V_3, \dots dizisini oluşturalım. $G_i = W_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{V}_j$ ve $H_i = V_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{W}_j$ kümeleri açıktır.

$$(*) \text{ ve } (**) \text{ dan } A \subset U = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \text{ ve } B \subset V = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$$

$$A \subset U = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W_i \setminus \bigcup_{j \leq i} \overline{V}_j) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W_i \cap (\bigcap_{j \leq i} \overline{V}_j^t))$$

bulunur. Yani

$$A \subset (\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} (\bigcap_{j \leq i} \overline{V}_j^t))$$

olup, $U \cap V = \emptyset$ olduğundan X uzayı normaldir.

2.8. Yardımcı Teorem: X bir T_1 uzayı olsun. X uzayının regüler olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ ve x 'in her V komşuluğuna karşılık

$$x \in U \subset \overline{U} \subset V$$

olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğunun mevcut olmasıdır.

2.9. Teorem : Her 2. sayılabilir regüler uzay normaldir.

Kanıt: Her X regüler uzayı bir sayılabilir \mathcal{B} tabanıyla bir önceki Yardımcı Teoremden verilen şartı sağlar. Çünkü, her $x \in F$ için $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset W$ olacak şekilde bir $U_x \in \mathcal{B}$ vardır. Tüm U_x ailesi sayılabilir ve $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$ dir. Böylece X uzayı normaldir.

2.10. Teorem : Her yerel sonlu $\{A_s\}_{s \in S}$ ailesi için

$$\bigcup_{s \in S} \overline{A_s} = \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$$

dir.

Kanıt: Her $s \in S$ için $\overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ olduğundan

$$\bigcup_{s \in S} \overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$$

dir. Tersine $x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ olsun. $\{A_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu olduğundan x 'in öyle bir komşuluğu vardır ki, $\{A_s\}_{s \in S}$ ailesinin yalnızca sonlu tane elemanı ile kesişir. Yani, bu komşuluğa U dersek,

$$|S_0| = |\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$$

olur. Böylece $x \notin \overline{\bigcup_{s \in S \setminus S_0} A_s}$ dir.

$$x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s \in S_0} A_s \cup \bigcup_{s \in S \setminus S_0} A_s}$$

olduğundan

$$x \in \overline{\bigcup_{s \in S_0} A_s} = \bigcup_{s \in S_0} \overline{A_s} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}$$

elde edilir. O halde $\bigcup_{s \in S} \overline{A_s} = \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ dir.

2.11. Tanım : X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

(i) A kümesi X uzayındaki açık kümelerin sayılabilir kesişimi şeklinde yazılabiliyorsa, A kümesine bir G_δ küme denir.

(ii) A kümesi X uzayındaki kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, A kümesine bir F_σ küme denir.

2.12. Sonuç : X topolojik uzayı normal ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin bir açık F_σ küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = f^{-1}((0, 1])$ olacak biçimde bir $f : X \rightarrow I$ sürekli fonksiyonunun var olmasıdır.

2.13. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. X normal bir uzay ve X 'in her kapalı altkümresi bir G_δ küme ise X uzayına **kusursuz normal uzay** adı verilir.

Her normal X uzayının kusursuz normal olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının her açık altkümresinin bir F_σ küme olmasıdır.

2.14. Yardımcı Teorem: σ -yerel sonlu tabana sahip her regüler uzay kusursuz normaldir.

Kusursuz normal uzaylar aynı zamanda normal olduğundan; σ -yerel sonlu tabana sahip her regüler uzayın normal olduğunu söyleyebiliriz.

Kanıt: X bir regüler uzay, $i = 1, 2, 3, \dots$ için B_i ailesi yerel sonlu olmak üzere, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, X uzayının bir tabanı olsun. Bu uzayın her açık kümesinin bir F_σ küme olduğunu yani; kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabileceğini göstermeliyiz. $W \subset X$ açık olsun. X uzayı regüler olduğundan her $x \in W$ için

$$x \in U(x) \subset \overline{U(x)} \subset W$$

olacak şekilde bir $i(x) \in \mathbb{N}$ ve $U(x) \in B_{i(x)}$ açığı vardır. Şimdi

$$W_i = \bigcup \{U(x) : i(x) = i\}$$

olsun. Böylece $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ olacak şekilde X 'in W_1, W_2, W_3, \dots açık altkümelerinin bir dizisini elde etmiş oluruz. Her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\overline{W_i} \subset W$ dir. Çünkü

$$\overline{W_i} = \overline{\bigcup_{i(x)=i} U(x)} = \bigcup_{i(x)=i} \overline{U(x)} \subset W$$

dir. Böylece Yardımcı Teorem 2.7 den X uzayı normaldir. O halde $W = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{W_i}$ olup X kusursuz normaldir.

Şimdi iyi bilinen bir teoremi ifade edelim.

2.15. Teorem: X bir topolojik uzay ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer $\{f_i\}$ fonksiyon dizisi bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, f fonksiyonu da süreklidir.

2.16. Yardımcı Teorem: X , bir T_0 uzayı ve $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesi, X uzayı üzerinde 1 ile sınırlı pseudo-metriklerin sayılabilir bir ailesi aşağıdaki iki özelliği sağlasın:

- (i) $i = 1, 2, 3, \dots$ için $d_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyondur.
- (ii) Her $x \in X$ ve $\emptyset \neq A \subset X$ kapalı kümesi için $x \notin A$ ise

$$d_i(x, A) = \inf \{d_i(x, a) : a \in A\} > 0$$

olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır.

Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x, y)$$

fonksiyonu X üzerinde bir metriktir ve X uzayı metriklenebilirdir.

Kanıt: Önce d fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu görelim. Her $i \in \mathbb{N}$ için d_i pseudo-metrik olduğundan $x \in X$ olmak üzere $d(x, x) = 0$ dır. (M2), (M3) koşullarının sağlandığı açıktır. Biz şimdi $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olmak üzere $d(x, y) > 0$ olduğunu gösterelim:

X, T_0 uzayı olduğundan ya $x \notin \overline{\{y\}}$ ya da $y \notin \overline{\{x\}}$ dir. Böylece (ii) özelliğinden $d(x, y) > 0$ dır. Böyle tanımlanan d fonksiyonu, X üzerinde metriktir. $A \subset X$ olmak üzere $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$ olduğunu biliyoruz. O halde X uzayının metriklenebilmesi için

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi $x \notin \overline{A}$ ise, $d(x, A) > 0$ olduğunu gösterelim. (ii) den $d_i(x, \overline{A}) = r > 0$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $d(x, A) \geq d(x, \overline{A}) \geq r/2^i > 0$ olur.

Tersine (i) şikkından her $i \in \mathbb{N}$ için d_i fonksiyonları süreklidir ve Weier-Strass M-Testinden

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x, y)$$

serisi düzgün yakınsak olduğundan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da süreklidir. Şimdi $f(x) = d(x, A)$ ile tanımlı $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. f fonksiyonu süreklidir. Böylece $x \in \overline{A}$ ise $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \{0\}$ olup $d(x, A) = 0$ bulunur. O halde X uzayı metriklenebilirdir. Şimdi de Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremini kanıtlarken kullanacağımız bir teoremi verelim:

2.17. Teorem: X bir topolojik uzay ve $f_s : X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ ailesi, destekleri X uzayının yerel sonlu altkümeler ailesini oluşturan sürekli fonksiyonlardan oluşsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{s \in S} f_s(x)$$

ile tanımlı fonksiyon süreklidir.

Kanıt: $U_s = \{x \in X : f_s(x) \neq 0\}$ olmak üzere $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu olsun. Bu durumda her $x \in X$ ve $s_i \in S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ için $U_x \cap U_{s_i} \neq \emptyset$ olacak

şekilde x noktasını içeren bir U_x açık kümesi vardır. $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu olduğundan aynı zamanda noktasal sonludur. Buradan $x \in X$ olmak üzere x noktasını içeren sonlu tane U_s kümesi vardır. O halde $f(x) = \sum_{s \in S} f_s(x)$ olmak üzere $f_s : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu iyi tanımlı ve her $s \in S$ için f_s fonksiyonu sürekli olduğundan f fonksiyonu U_x kümesi üzerinde süreklidir. Ayrıca her $x \in X$ için bir böyle bir U_x açık kümesi bulabildiğimiz için $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ dir. O halde her $x \in X$ için $f|_{U_x}$ kısıtlanmış fonksiyonu sürekli ve $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ olduğundan $f_s : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

Şimdi **NAGATA-SMIRNOV** Metriklenebilme Teoremini ifade ederek ispatlayalım.

2.18. Teorem: Bir X topolojik uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul X uzayının regüler olması ve bir σ -yerel sonlu tabana sahip olmasıdır.

Kanıt:(\implies): Her metriklenebilir uzayın σ -yerel sonlu tabana sahip olduğunu daha önce göstermiştik.

Şimdi her metrik uzayın regüler olduğunu gösterelim. Metrik uzayların tek nokta kümelerinin kapalı olması nedeniyle T_1 uzayları olduklarını biliyoruz.

Biz daha genel olarak metrik uzayların normal olduğunu gösterelim:

$F, K \subseteq X$ ayrık kapalı kümeler olsun. Açık küme tanımından $x \in F$ ve $y \in K$ için $B(x, \epsilon_x) \cap K = \emptyset$ ve $B(y, \epsilon_y) \cap F = \emptyset$ olacak biçimde $\epsilon_x, \epsilon_y > 0$ vardır. Şimdi

$$G = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{\epsilon_x}{2}) \quad \text{ve} \quad H = \bigcup_{y \in K} B(y, \frac{\epsilon_y}{2})$$

açık kümelerini gözönüne alalım. $F \subset G, K \subset H$ dir. Şimdi $G \cap H = \emptyset$ olduğunu gösterelim:

Tersine $z \in G$ ve $z \in H$ olacak şekilde bir $z \in X$ olduğunu varsayalım. O halde bir $x \in F$ ve bir $y \in K$ için $z \in B(x, \frac{\epsilon_x}{2}) \cap B(y, \frac{\epsilon_y}{2})$ dir. Böylece $d(x, z) < \frac{\epsilon_x}{2}$ ve $d(y, z) < \frac{\epsilon_y}{2}$ olup

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\epsilon_y}{2}$$

bulunur. Şimdi ya $\epsilon_x \leq \epsilon_y$ ya da $\epsilon_y \leq \epsilon_x$ dir. $\epsilon_x \leq \epsilon_y$ olması durumunda $x \in B(y, \epsilon_y)$ olur. Ancak bu sonuç F, K kümesinin ayrık olması ile çelişir.

O halde $G \cap H = \emptyset$ olup (X, d) uzayı normaldir.

(\impliedby): $B_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$ bir yerel sonlu aile olmak üzere, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, σ -yerel sonlu tabanına sahip X regüler uzayını gözönüne alalım. σ -yerel sonlu tabana sahip her regüler uzayın kusursuz normal olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her açık küme F_σ kümedir. Şimdi daha önce gördüğümüz Sonuç 2.12 den; her $i \in \mathbb{N}$ ve en az bir

$s \in S_i$ için $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$ olacak şekilde sürekli bir $f_s : X \rightarrow I$ fonksiyonu vardır. Şimdi

$$W_s = (U_s \times X) \cup (X \times U_s)$$

kümesini gözönüne alalım. Buna göre $\{W_s\}_{s \in S_i}$ ailesi $X \times X$ 'de yerel sonludur: $(x, y) \in X \times X$ olsun. x 'in bir G komşuluğunu ve y 'nin de bir H komşuluğunu alalım. Bu durumda $G \times H$ kümesi $X \times X$ uzayında (x, y) noktasının bir komşuluğu olur. Şimdi $W_s \cap [G \times H] \neq \emptyset$ hangi durumda gerçekleşir; bunu inceleyelim:

$[(U_s \times X) \cup (X \times U_s)] \cap [G \times H] \neq \emptyset$ olması için $(U_s \times X) \cap [G \times H] \neq \emptyset$ veya $(X \times U_s) \cap [G \times H] \neq \emptyset$ olmalı ve böylece $U_s \cap G \neq \emptyset$ veya $U_s \cap H \neq \emptyset$ olmalıdır.

$B_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $U_s \cap G \neq \emptyset$ ve $U_s \cap H \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $s \in S_i$ 'ler sonlu tane olmak zorundadır. Böylece $W_s \cap [G \times H] \neq \emptyset$ olan $s \in S_i$ 'ler sonlu tanedir. Buna göre $\{W_s\}_{s \in S_i}$ ailesi $X \times X$ 'de yerel sonludur.

$(x, y) \notin W_s$ ise $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ dir:

$(x, y) \notin W_s$ ise $(x, y) \notin (U_s \times X)$ ve $(x, y) \notin (X \times U_s)$ dir. Böylece $x \notin U_s$ ve $y \notin U_s$ dir. O halde $f_s(x) = 0$ ve $f_s(y) = 0$ olup $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ olur.

Şimdi $(x, y) \in X \times X$ olmak üzere

$$g_i(x, y) = \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y)|$$

ile tanımlı $g_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu şekilde tanımlanan fonksiyon süreklidir. Bunun için her $(x, y) \in X \times X$ için $g_i|_U$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde (x, y) 'nin bir U komşuluğunu bulmak yeterli olacaktır. $\{W_s\}_{s \in S_i}$ ailesi yerel sonlu olduğundan (x, y) noktasının bu ailenin sonlu tane elemanı ile kesişen $N_x \times N_y$ gibi bir komşuluğu vardır ve buna bağlı olarak W_s 'nin tanımından sonlu tane f_s fonksiyonu vardır. Şimdi $g_i : N_x \times N_y \rightarrow \mathbb{R}$ kısıtlanmış fonksiyonunu düşünelim. Sonlu tane $s \in S_i$ için $|f_s(x) - f_s(y)| \neq 0$ olup; $(x, y) \notin W_s$ (yani sonsuz tane W_s)'ler için $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ olduğundan bu kısıtlanmış fonksiyon süreklidir. O halde Teorem 2.17 den $(x, y) \in X \times X$ için

$$g_i(x, y) = \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y)|$$

ile tanımlı $g_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.

$i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$d_i(x, y) = \min(1, g_i(x, y))$$

X üzerinde 1 ile sınırlı bir pseudo-metrik tanımlar. (M1') ve (M2) koşulu açıkça sağlanır. Şimdi (M3) koşulunun sağlandığını göstereyim. $x, z \in X$ olmak üzere

$$g_i(x, z) = \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(z)| = \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y) + f_s(y) - f_s(z)|$$

$$\begin{aligned}
g_i(x, z) &\leq \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y)| + |f_s(y) - f_s(z)| \\
&= \sum_{s \in S_i} |f_s(x) - f_s(y)| + \sum_{s \in S_i} |f_s(y) - f_s(z)|
\end{aligned}$$

olup böylece $g_i(x, z) \leq g_i(x, y) + g_i(y, z)$ elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}
d_i(x, y) &= \min(1, g_i(x, y)) \\
&\leq \min\{1, g_i(x, z) + g_i(z, y)\} \\
&\leq \min\{1, g_i(x, z)\} + \min\{1, g_i(z, y)\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$d_i(x, y) \leq d_i(x, z) + d_i(z, y)$$

bulunur. O halde $d_i(x, y) = \min(1, g_i(x, y))$ 1 ile sınırlı pseudo-metriktir. $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi Yardımcı Teorem 2.16 daki (i) ve (ii) özelliklerini sağlar ve süreklidir. (i) özelliğinin sağlandığı açıktır. Şimdi biz (ii) özelliğinin sağlandığını görelim:

$x \in X$, $\emptyset \neq A \subset X$ kapalı olmak üzere $x \notin A$ olsun. Böylece $x \in X \setminus A$ olup $X \setminus A$ kümesi açıktır. B taban olduğundan $x \in U \subset X \setminus A$ olacak şekilde bir $U \in B$ vardır. $A \subset X \setminus U$ dir. Böylece bir i ve buna karşılık gelen bir $s \in S_i$ için $U = U_s \in B_i$ dir. Şimdi $f_s(x) > 0$ ve $f_s(A) = \{0\}$ olduğundan $U_s = U = f_s^{-1}((0, 1])$ dir. O halde $A \subset (f_s^{-1}((0, 1]))^c$ olup $A \subset f_s^{-1}(0)$ olduğundan $f_s(A) \subset \{0\}$ elde edilir. Bu ise $f_s(A) = \{0\}$ demektir. Böylece

$$\inf\{d_i(x, a) : a \in A\} \geq f_s(x) > 0$$

olup $a \in A$ olduğundan $f_s(a) = 0$ dır. O halde $g_i(x, a) = \sum_{s \in S_i} |f_s(x)|$ halini alır. Bu ise

$$\inf\{\min\{1, \sum_{s \in S_i} |f_s(x)|\} : a \in A\} \geq f_s(x) > 0$$

olduğundan, Yardımcı Teorem 2.16 dan dolayı X uzayının metriklenebilmesi demektir.

2.19. Teorem: (Bing Metriklenebilme Teoremi) Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın regüler olması ve σ -ayrık tabana sahip olmasıdır.

Kanıt: Kanıtı Teorem 2.5 ve Teorem 2.18 den açıktır.

2.20. Tanım: X ile Y topolojik uzaylar, $A \subseteq Y$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f = i_A \circ g$ olacak şekilde bir $g : X \rightarrow A$ homeomorfizmi varsa, f dönüşümüne bir **homeomorfik gömme** denir.

2.21. Tanım: m bir sonsuz kardinal sayı, S kardinali m olan bir küme ve her $s \in S$ için $I_s = I \times \{s\}$ olsun. $\bigcup_{s \in S} I_s$ kümesi üzerinde bir E bağıntısı şöyle tanımlansın:

$$x = 0 = y \text{ veya } (x = y \text{ ve } s_1 = s_2) \text{ ise, } (x, s_1)E(y, s_2)$$

Bu şekilde tanımlanan E bir denklik bağıntısıdır. $x, y \in I$ olmak üzere,

$$d([(x, s_1)], [(y, s_2)]) = \begin{cases} |x - y| & s_1 = s_2 \\ x + y & s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $d: [I_s] \times [I_s] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, E 'nin denklik sınıflarının kümesi üzerinde bir metrik tanımlar. $([I_s] \times [I_s], d)$ uzayını $J(m)$ ile göstereceğiz. m kardinal sayısı için bu metrik uzay S kümesinin seçimine bağlı olmak zorunda değildir.

Her $s \in S$ için $j_s(x) = [(x, s)]$ ile tanımlı $j_s: I \rightarrow J(m)$ fonksiyonu bir homeomorfik gömmedir. Ayrıca $J(m)$ metriklenebilirdir. r rasyonel sayı olmak üzere $[(r, s)]$ biçimindeki noktaları kapsayan bütün rasyonel yarıçaplı yuvarlarının ailesi, $J(m)$ için bir tabandır. Böylece $w(J(m)) \leq m$ olur. $[(1, s)]$ biçimindeki tüm noktalarından oluşan $J(m)$ 'in altuzayı, kardinali m olan ayrık uzaydır. Bu nedenle $w(J(m)) = m$ dir.

2.22. Tanım: Bir X uzayı bir P topolojik özelliğine sahip ve P özelliğine sahip her uzay X 'de gömülü ise, bu durumda X uzayına bu P topolojik özelliğine sahip tüm uzaylar için **evrenseldir** denir.

2.23. Tanım: X bir topolojik uzay, $\{Y_s\}_{s \in S}$ topolojik uzayların bir ailesi ve $f_s: X \rightarrow Y_s$ olmak üzere, $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ sürekli fonksiyonların ailesini gözönüne alalım. Eğer, her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $f_s(x) \neq f_s(y)$ olacak şekilde bir $s \in S$ varsa \mathcal{F} ailesi **noktaları ayırır** denir.

Eğer her kapalı $F \subset X$ ve $x \notin F$ için $f_s(x) \notin \overline{f_s(F)}$ olacak şekilde bir $f_s \in \mathcal{F}$ varsa \mathcal{F} ailesi **noktaları ve kapalı kümeleri ayırır** denir.

2.24. Tanım: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}, X \text{ uzayı için bir taban}\}$$

nicel sayısına (X, \mathcal{T}) topolojik uzayının **ağırlığı** denir ve bu sayı $w((X, \mathcal{T}))$ ile gösterilir.

2.25. Teorem: X bir topolojik uzay olsun. Eğer $w(X) \leq m$ ise, X 'in açık altkümelerinin her $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi için

$$|S_0| \leq m \text{ ve } \bigcup_{s \in S_0} U_s = \bigcup_{s \in S} U_s$$

olacak şekilde bir $S_0 \subset S$ kümesi vardır.

Kanıt: $|\mathcal{B}| \leq m$ olacak şekilde X 'in bir \mathcal{B} tabanı verilsin.

$$\mathcal{B}_0 = \{U \in \mathcal{B} : U \subset U_s, s \in S\}$$

kümesini oluşturalım ve her $U \in \mathcal{B}_0$ için $U \subset U_{s(U)}$ olacak şekilde bir $s(U) \in S$ seçelim. Şimdi $s : \mathcal{B}_0 \rightarrow S$ içine fonksiyonu iyi tanımlıdır. Teoremin kanıtı için $S_0 = s(\mathcal{B}_0) \subset S$ olduğunu göstereceğiz.

$|S_0| = |s(\mathcal{B}_0)| \leq |\mathcal{B}| \leq m$ olduğu açıktır. Şimdi $x \in \bigcup_{s \in S} U_s$ alalım. O halde bir $s \in S$ için $x \in U_s$ dir ve $x \in U \subset U_s$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{B}$ vardır. $U \in \mathcal{B}_0$ ve $s(U) \in S_0$ olduğu açıktır. $U \subset U_{s(U)}$ olduğundan

$$x \in U \subset U_{s(U)} \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s$$

dir. Böylece $\bigcup_{s \in S} U_s \subset \bigcup_{s \in S_0} U_s$ elde edilir. Diğer yönü ise açıktır.

2.26. Teorem: X bir topolojik uzay olmak üzere $w(X) \leq m$ ise X 'in her \mathcal{B} tabanı için $|\mathcal{B}_0| \leq m$ ve $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ olacak şekilde X 'in bir \mathcal{B}_0 tabanı vardır.

Kanıt: $m \geq \aleph_0$ olduğunu kabul edelim ve $|T| \leq m$ olmak üzere $\mathcal{B}_1 = \{W_t\}_{t \in T}$ ailesi X için bir taban olsun. $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ taban ve her $t \in T$ için

$$S(t) = \{s \in S : U_s \subset W_t\}$$

ile tanımlı olsun. \mathcal{B} , X için bir taban olduğundan $\bigcup_{s \in S(t)} U_s = W_t$ dir ve Teorem 2.25 den $|S_0(t)| \leq m$ olacak şekilde $S_0(t) \subset S(t)$ kümesi vardır ve

$$W_t = \bigcup_{s \in S(t)} U_s = \bigcup_{s \in S_0(t)} U_s \cdots (*)$$

dir. $\mathcal{B}_0 = \{U_s\}_{s \in S_0(t), t \in T}$ olsun. $|T| \leq m$, $|S_0(t)| \leq m$ ve $m^2 = m$ olduğundan $|\mathcal{B}_0| \leq m$ dir. Şimdi \mathcal{B}_0 'ın X için bir taban olduğunu göstereceğiz:

Keyfi bir $x \in X$ noktası ve onun bir V komşuluğu verilsin. \mathcal{B}_1 taban olduğundan $x \in W_t \subset V$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. (*) eşitliğinden $x \in U_s \subset W_t \subset V$ olacak şekilde bir $s \in S_0(t)$ vardır. Böylece $U_s \in \mathcal{B}_0$ olduğundan \mathcal{B}_0 , X için bir tabandır.

Şimdi de $w(X) = m < \infty$ olmak üzere \mathcal{B} , X uzayı için herhangi bir taban ve $\mathcal{B}_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ ailesi de X uzayı için sonlu bir taban olsun.

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$$

olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $B_1 \notin \mathcal{B}$ olacak şekilde bir $B_1 \in \mathcal{B}_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\mathcal{B}_1^* = \{B_2, B_3, \dots, B_m\}$$

ailesi X uzayı için bir taban olamaz. Çünkü \mathcal{B}_1 en küçük taban olduğundan, B_1 açığı bu ailedeki kümelerin birleşimi olarak yazılamaz. O halde \mathcal{B}_1^* bir taban olmadığından bir G açık kümesi vardır ki,

$$G \neq \bigcup \{B_k \in \mathcal{B}_1 : k \neq 1\}$$

dir.

$$G = \bigcup \{B_i \in \mathcal{B}_1 : i = 1, 2, \dots, m\}$$

olarak yazılabildiğinden, $B_1 \subseteq G$ dir. Şimdi $x \in B_1$ olsun. Bu durumda B_1 açık ve \mathcal{B}_1 bir taban olduğundan $x \in B_x \subset B_1$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathcal{B}_1$ vardır. Yine B_1 açık ve \mathcal{B} taban olduğundan bir k doğal sayısı için $k_x \neq 1$ olmak üzere $x \in B_{k_x} \subseteq B_1$ olacak şekilde bir $B_{k_x} \in \mathcal{B}$ vardır. O halde $k_x \neq 1$ olmak üzere

$$B_1 = \bigcup_{x \in B_1} B_{k_x}$$

dir. Buradan $x \notin G \setminus B_1$ olup $x \in B_{k_x} \subseteq B_1 \subseteq G$ bulunur. O halde $k_x \neq 1$ olmak üzere $G = \bigcup_{x \in G} B_{k_x}$ olur ki, bu \mathcal{B}_1^* ailesinin taban olmaması ile çelişir.

Böylece $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ ve \mathcal{B}_1 ailesi X uzayı için bir tabandır.

2.27. Tanım: X bir topolojik uzay, $\{A_s\}_{s \in S}$, X 'in bir örtüsü ve $f_s : A_s \rightarrow Y$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun.

(i) Her $s_1, s_2 \in S$ için

$$f_{s_1}|_{A_{s_1} \cap A_{s_2}} = f_{s_2}|_{A_{s_1} \cap A_{s_2}}$$

koşulunu sağlayan f_s dönüşümüne **uyumlu dönüşüm** denir.

(ii) $x \in A_s$ için $f(x) = f_s(x)$ biçiminde tanımlı $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna $\{f_s\}_{s \in S}$ ailesinin **kombinasyonu** denir ve $\nabla_{s \in S} f_s = f$ ile gösterilir.

2.28. Sonuç: \mathcal{F} yerel sonlu bir aile ve $F = \bigcup \mathcal{F}$ olsun. \mathcal{F} 'nin her elemanı kapalı ise F kapalıdır. \mathcal{F} 'nin her elemanı kapalı ve açık ise F kapalı ve açıktır.

2.29. Yardımcı Teorem: X, Y topolojik uzaylar olmak üzere, $\{U_s\}_{s \in S}$, X 'in açık örtüsü ve $f_s : U_s \rightarrow Y$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ uyumlu fonksiyonların ailesi ise, bu durumda

$$f = \nabla_{s \in S} f_s : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu **sürekli**dir.

Kanıt: $U \subset Y$ açık olsun.

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{s \in S} f_s^{-1}(U)$$

dir. $f_s^{-1}(U)$, U_s 'de açık olup X 'de de açıktır. O halde f fonksiyonu süreklidir.

2.30. Sonuç: $\{F_s\}_{s \in S}$, X uzayının bir yerel sonlu kapalı örtüsü ve $f_s : F_s \rightarrow Y$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ uyumlu fonksiyonların ailesi olsun. Bu durumda

$$f = \nabla_{s \in S} f_s : X \rightarrow Y$$

fonksiyonu süreklidir.

Kanıt: $F \subset Y$ kapalı olsun. $f^{-1}(F) = \bigcup_{s \in S} f_s^{-1}(F)$ dir. F_s kapalı ve $f_s^{-1}(F)$, F_s 'de kapalı olduğundan X 'de de kapalıdır. Aynı zamanda $\{f_s^{-1}(F)\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonludur:

Her $s \in S$ için $f_s^{-1}(F) \subset F_s$ ve $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu olduğundan açıktır. O halde Sonuç 2.28 den $f^{-1}(F)$, X 'de kapalı olup, f fonksiyonu süreklidir.

2.31. Tanım: X bir topolojik uzay, $\{Y_s\}_{s \in S}$ topolojik uzayların bir ailesi ve $f_s : X \rightarrow Y_s$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun. $x \in X$ için $\{f_s(x)\} \in \prod_{s \in S} Y_s$ olan $f : X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$ dönüşümüne $\{f_s\}_{s \in S}$ ailesinin **köşegeni** denir ve $\Delta_{s \in S} f_s$ ile gösterilir.

2.32. Yardımcı Teorem: Eğer $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü birebir ve $\{f\}$ ailesi noktaları ve kapalı kümeleri ayırıyorsa, f bir homeomorfik gömmedir.

Kanıt: f fonksiyonunun homeomorfik gömme olması için bir homeomorfizma ile bir gömme dönüşümünün bileşkesi olmalıdır. Her $x \in X$ için $f'(x) = f(x)$ ile tanımlı $f' : X \rightarrow f(X)$ fonksiyonunun bir homeomorfizma ve her $y \in f(X)$ için $i(y) = y$ ile tanımlı $i : f(X) \rightarrow Y$ fonksiyonunun gömme fonksiyonu olduğunu gösterelim:

f' fonksiyonu, f fonksiyonuna bağlı olarak sürekli, birebir ve örtendir. f' fonksiyonunun tersinin sürekliliğine denk olarak kapalı fonksiyon olduğunu görelim:

$F \subset X$ kapalı olsun.

$$f'(F) = f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}$$

eşitliğinin olduğunu görürsek $f'(F)$, $f(X)$ altuzayında kapalı olup f'^{-1} sürekli olacaktır. O halde $f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}$ olduğunu görelim: $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$ ise $x \notin F$ dir. $\{f\}$ noktaları ve kapalı kümeleri ayırdığından $f(x) \notin \overline{f(F)}$ dir. Böylece $f(x) \notin f(X) \cap \overline{f(F)}$ bulunur. O halde $y \in f(X) \cap \overline{f(F)}$ ise $y \in f(F)$ bulunur. O halde f' fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

Şimdi de her $x \in f(X)$ için $i(x) = x$ ile tanımlı $i : f(X) \rightarrow Y$ fonksiyonunun gömme fonksiyonu olduğundan $f = i \circ f'$ olduğunu göstermek; f 'in bir homeomorfik gömme olduğunu görmemiz yetecektir. $x \in X$ için

$$f(x) = i(f(x)) = i(f'(x)) = (i \circ f')(x)$$

olup kanıt tamamlanır.

2.33. Teorem: (Köşegen Teorem) $f_s : X \rightarrow Y_s$ olmak üzere $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ sürekli fonksiyonların ailesi noktaları ayırıyor ise bu durumda

$$f = \Delta_{s \in S} f_s : X \rightarrow \prod_{s \in S} Y_s$$

birebir bir dönüşümdür. $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s \in S}$ ailesi noktaları ve kapalı kümeleri ayırıyor ise f bir homeomorfik gömmedir. Eğer f_s bir homeomorfik gömme olacak şekilde bir $s \in S$ varsa f yine bir homeomorfik gömmedir.

Kanıt: \mathcal{F} ailesi noktaları ayırıyor ise $x, y \in X$ olmak üzere $x \neq y$ için $f_s(x) \neq f_s(y)$ olacak şekilde bir $f_s \in \mathcal{F}$ vardır. O halde $f(x) \neq f(y)$ dir ve böylece f fonksiyonu birebirdir.

Eğer \mathcal{F} ailesi noktaları ve kapalı kümeleri ayırıyor ise bu durumda $\{f\}$ ailesi de noktaları ve kapalı kümeleri ayırır: $x \in X$ ve $F \subset X$ kapalı olsun. $x \notin F$ ise $f_s(x) \notin \overline{f(F)}$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Böylece $f(x) \notin \overline{f(F)}$ dir. Buradan $\{f\}$ ailesi de noktaları ve kapalı kümeleri ayırır. O halde Yardımcı Teorem 2.32 den f fonksiyonu bir homeomorfik gömmedir.

2.34. Teorem: $[J(m)]^{\aleph_0}$ kartezyen çarpımı, ağırlığı $m \geq \aleph_0$ olan tüm metriklenebilir uzaylar için evrenseldir.

Kanıt: P özelliği olarak, ağırlığı m olan metriklenebilir uzay olma özelliğini alalım. $[J(m)]^{\aleph_0}$, ağırlığı m olan metriklenebilir bir uzaydır. X ağırlığı m olan metriklenebilir bir uzay olsun. X uzayı metriklenebilir olduğundan, $B_i = \{U_s\}_{s \in S_i}$, X 'in altkümelerinin ayrık ailesi olmak üzere $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ σ -ayrık tabanı vardır. Biz Teorem 2.26 dan $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ kümesinin m kardinaline sahip olduğunu varsayabiliriz. Genelliği bozmaksızın, bu S kümesini $J(m)$ in tanımında kullanılan S kümesi olarak alalım.

Her $i \in \mathbb{N}$ ve bir $s \in S_i$ için Sonuç 2.12 den dolayı $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$ olacak şekilde $f_s : X \rightarrow I$ sürekli fonksiyonu vardır. Buradan $\{\overline{U_s}\}_{s \in S_i}$ ailesi ayrık ailedir. Çünkü B_i ayrık ailedir.

Ayrıca $\{\overline{U_s}\}_{s \in S_i}$ ailesi X uzayının, yerel sonlu, kapalı bir örtüsüdür: $\{U_s\}_{s \in S_i}$ ailesi ayrık aile olduğundan $\{\overline{U_s}\}_{s \in S_i}$ ailesi de yerel sonludur ve $\overline{U_s} = f_s^{-1}((0, 1])$

dir. Ayrıca f_s altındaki görüntüsü 0 olan elemanlar U_s kümesinde değildir, ama $\overline{U_s}$ kümesindedir. O halde $\{\overline{U_s}\}_{s \in S_i}$ ailesi X uzayının bir örtüsüdür.

$j_s : I \rightarrow J(m)$ sürekli fonksiyonları aracılığı ile bir $s_0 \in S$ sabiti için,

$$f_i(x) = \begin{cases} j_s(f_s(x)) & x \in \overline{U_s} \\ j_{s_0}(0) & x \in X \setminus \bigcup_{s \in S_i} U_s \end{cases}$$

ile tanımlı $f_i : X \rightarrow J(m)$ sürekli fonksiyonunu düşünelim.

$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi noktaları ve kapalı kümeleri ayırır: $x \in X$ ve $x \notin F \subset X$ kapalı olsun. F kapalı olduğundan $X \setminus F$ açıktır ve $x \in X \setminus F$ dir. $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{U_s\}_{s \in S_i}$ X için bir taban olduğundan

$$X \setminus F = \bigcup_{s \in S_i, i \in \mathbb{N}} U_s$$

dir. Böylece $x \in \overline{X \setminus F} = \overline{\bigcup_{s \in S_i, i \in \mathbb{N}} U_s} = \bigcup_{s \in S_i, i \in \mathbb{N}} \overline{U_s}$ bulunur. O halde $x \in \overline{U_s}$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ve bu i 'ye karşılık bir $s \in S_i$ vardır. Bu $s \in S_i$ için $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$ olacak şekilde $f_s : X \rightarrow I$ sürekli fonksiyonu vardır. $x \in \overline{U_s}$ olduğundan $f_i(x) = j_s(f_s(x))$ dir ve süreklidir. Çünkü j_s ve f_s fonksiyonları süreklidir. Şimdi $\overline{f_i(F)} = \overline{j_s(f_s(F))}$ ve j_s kapalı olduğundan $\overline{j_s(f_s(F))} \subset j_s(\overline{f_s(F)})$ dir. Şimdi $f_i(x) \in \overline{j_s(f_s(F))}$ olduğunu varsayalım. $x \notin F$ idi. $x \in U_{s_0}$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ve $s_0 \in S_i$ vardır. Böylece $f_{s_0}(x) \in (0, 1]$ dir. Her $y \in F$ için $f_{s_0}(y) = \{0\}$ olduğundan $\overline{f_{s_0}(F)} = \{0\}$ olup $f_i(x) = j_{s_0}(f_{s_0}(x)) \in j_{s_0}(0)$ bulunur. O halde $x \in X \setminus \bigcup_{s \in S_i} U_s$ dir. Bu ise $x \in \bigcup_{s \in S_i} U_s$ oluşu ile çelişir. Demek ki $f_i(x) \notin \overline{f_i(F)}$ olup $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi noktaları ve kapalı kümeleri ayırır. Böylece Köşegen Teoreminden, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesinin diagonalı olan $f : X \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} J(m)$ fonksiyonu homeomorfik gömmedir.

2.35. Yardımcı Teorem: X bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının her açık örtüsü, yerel sonlu kapalı inceye sahip ise, bu durumda X uzayının her açık örtüsü, bir yerel sonlu açık inceye sahiptir.

Kanıt: \mathcal{U} , X uzayının bir açık örtüsü ve $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$, \mathcal{U} örtüsünün yerel sonlu bir incisi olsun. Her $x \in X$ için x noktasının \mathcal{A} ailesinden sadece sonlu tane eleman kesen bir V_x komşuluğunu seçelim. \mathcal{A} ailesi yerel sonlu olduğu için böyle bir komşuluk vardır. Şimdi $\{V_x\}_{x \in X}$ şeklinde oluşturduğumuz aile X uzayının açık bir örtüsüdür. \mathcal{F} , $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsünün yerel sonlu kapalı bir incisi olsun. Her $s \in S$ için

$$W_s = X \setminus \bigcup \{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$$

kümesini tanımlayalım. Her $s \in S$ için W_s kümesi açıktır ve $A_s \subset W_s$ dir:

\mathcal{F} ailesi yerel sonlu olduğu için W_s kümesi açıktır. Şimdi $A_s \subset W_s$ olduğunu görelim: Bunun için $x \in A_s$ ve $x \notin W_s$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasının olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in \bigcup\{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$ demektir. Yani, $F \cap A_s = \emptyset$ olacak şekildeki bir $F \in \mathcal{F}$ için $x \in F$ dir. Oysa bu $x \in A_s$ oluşu ile çelişir. O halde $A_s \subset W_s$ bulunur.

Ayrıca her $s \in S$ için

(*) $\dots W_s \cap F \neq \emptyset$ ancak ve ancak $A_s \cap F \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir $F \in \mathcal{F}$ vardır: Bunu görmek için $W_s \cap F \neq \emptyset$ olsun. O halde $F \not\subseteq X \setminus W_s$, yani $F \not\subseteq \bigcup\{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$ bulunur. Bu ise $A_s \cap F \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{F}$ kümesinin varlığı demektir. Şimdi de her $s \in S$ için $A_s \subset U(s)$ olacak şekilde bir $U(s) \in \mathcal{U}$ seçelim ($\mathcal{A} \prec \mathcal{U}$ olduğundan bu kümeyi seçme hakkımız vardır) ve

$$V_s = W_s \cap U(s)$$

kümesini gözönüne alalım. $\{V_s\}_{s \in S}$ ailesi \mathcal{U} 'nun bir açık incesidir. Çünkü her $s \in S$ için $V_s = W_s \cap U(s) \subset U(s)$ dir. Şimdi her $F \in \mathcal{F}$ için $|\{s : F \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$ olduğunu gösterelim: Her $s \in S$ için $F \cap A_s = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A_s \subset X \setminus F$ dir. \mathcal{F} ailesi $\{V_x\}_{x \in X}$ açık örtüsünün yerel sonlu kapalı incesi olduğundan her $F \in \mathcal{F}$ için $F \subset V_x$ olacak şekilde bir $V_x \in \{V_x\}_{x \in X}$ vardır. O halde $(V_x)^t \subset X \setminus F$ dir. Şimdi ya $A_s \subset (V_x)^t \subset X \setminus F$ dir ya da $(V_x)^t \subset A_s \subset X \setminus F$ dir.

$A_s \subset (V_x)^t \subset X \setminus F$ olsun. Ancak bu durum $|\{s : V_x \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$ oluşu ile çelişir. Diğer durum için de aynı çelişki vardır. O halde her $F \in \mathcal{F}$ için $|\{s : F \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$ dir.

$\{V_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonludur: $|\{s : F \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$ idi. Bu durumda $|\{s : F \cap W_s \neq \emptyset\}| < \infty$ dur. \mathcal{F} ailesi örtü olduğundan her $x \in X$ için x noktasının

$$U_x \subseteq F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_n$$

olacak şekilde bir U_x komşuluğu vardır. Her bir F sonlu tane W_s ile kesiştiğinden $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_n$ de sonlu tane W_s ile kesişir. Böylece her $x \in X$ için U_x de sonlu tane W_s ile kesişir. O halde $U_x \cap W_s \cap U(s) \neq \emptyset$ olan sonlu tane $s \in S$ vardır. Yani

$$|\{s : U_x \cap W_s \cap U(s) \neq \emptyset\}| < \infty$$

dur. Böylece $\{V_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonludur.

2.36. Tanım: X bir küme ve $<$, X üzerinde bir bağıntı olsun. $<$ bağıntısı, her $x, y, z \in X$ için

(L01) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$

(L02) $x < y$ ise $y \not< x$

(L03) $x \neq y$ ise $x < y$ veya $y < x$

koşullarını sağlıyorsa $<$ bağıntısına X 'de **doğrusal sıralıdır** denir. Bu bağıntı ile X 'e **doğrusal sıralı küme** denir.

2.37. Tanım: X bir küme ve \leq , X üzerinde bir bağıntı olsun. \leq bağıntısı, her $x, y, z \in X$ için,

(OR1) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

(OR2) $x \leq x$

(OR3) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$

koşullarını sağlıyorsa \leq bağıntısına X 'de **sıradır** denir. Bu bağıntı ile X 'e **sıralı küme** denir.

Her doğrusal sıralı küme bir sıralı kümedir. Her küme ailesi \subset bağıntısı ile sıralıdır.

2.38. Tanım: $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer X Hausdorff bir uzay, f kapalı bir dönüşüm ve tüm $f^{-1}(y)$ kümeleri X de kompakt ise, f 'e **kusursuz dönüşüm** denir.

Tanımdan, Hausdorff bir X uzayı üzerinde tanımlı $f : X \rightarrow Y$ birebir fonksiyonunun kusursuz olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun kapalı olmasıdır. (Yani f bir homeomorfik gömme ve $f(X) \subset Y$ bir kapalı kümedir.)

Özel olarak $i_M : M \rightarrow X$ gömme dönüşümü kusursuzdur ancak ve ancak M kapalıdır ve Hausdorff uzaydır.

Her yerel sonlu örtünün aynı zamanda noktasal sonlu olduğu açıktır.

2.39. Teorem: X normal bir uzay ve $\{U_s\}_{s \in S}$, X uzayının noktasal sonlu açık örtüsü olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $\overline{V_s} \subset U_s$ olacak şekilde X 'in $\{V_s\}_{s \in S}$ açık örtüsü vardır.

Kanıt: X uzayı üzerindeki topolojiyi \mathcal{T} ile gösterelim ve

$$\mathcal{G} = \{G \mid G : S \rightarrow \mathcal{T} \text{ bir fonksiyon}\}$$

ailesini gözönüne alalım. \mathcal{G} ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın:

$$(1) G(s) = U_s \text{ veya } \overline{G(s)} \subset U_s$$

$$(2) \bigcup_{s \in S} G(s) = X$$

Şimdi \mathcal{G} ailesi üzerine şöyle bir sıralama koyalım: Her $s \in S$ için $G_1(s) \neq U_s$ iken $G_1(s) = G_2(s)$ ise $G_1 \leq G_2$ dir. \mathcal{G} ailesinin bir doğrusal sıralı altailesi \mathcal{G}_0 ve her $s \in S$ için

$$G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} G(s)$$

ile tanımlı olsun. Şimdi bir $s \in S$ alalım. Her $G \in \mathcal{G}_0$ için $G(s) = U_s$ ise $G_0(s) = U_s$ olup, $G_0(s)$ açıktır. Eğer en az bir $G^* \in \mathcal{G}_0$ için $G^*(s) \neq U_s$ ise (yani $\overline{G^*(s)} \subset U_s$ ise); bu durumda $G_0(s) = G^*(s)$ olacaktır. Çünkü $\overline{G'(s)} \subset U_s$ ve $\overline{G^*(s)} \subset U_s$ olacak şekilde $G'(s) \neq G^*(s)$ olduğunu düşünelim. \mathcal{G}_0 ailesi doğrusal sıralı olduğundan ya $G' \leq G^*$ ya da $G^* \leq G'$ olmalıdır. Bu durum ise $G'(s) \neq G^*(s)$ oluşu ile çelişir. Çünkü $G'(s) \neq U_s$ ve $G^*(s) \neq U_s$ dir. O halde $G_0(s)$ yine açıktır. O halde (1) ve (2) koşulunun sağlandığını görelim:

Her $G \in \mathcal{G}_0$ için $G(s) = U_s$ ise $G_0(s) = U_s$ dir. Eğer en az bir $G \in \mathcal{G}_0$ için $\overline{G(s)} \subset U_s$ ise $G_0(s) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_0} G(s)$ olduğundan $\overline{G_0(s)} \subset U_s$ olup (1) koşulu sağlanır.

$x \in X$ olsun. $\{U_s\}_{s \in S}$ noktasal sonlu olduğundan, her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $x \in U_{s_i}$ olacak şekilde $S_0 = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k\} \subset S$ sonlu kümesi vardır. $s \in S \setminus S_0$ için $x \notin U_s$ dir. Bazı $s_i \in S_0$ için $G_0(s_i) = U_{s_i}$ ise $x \in G_0(s_i) \subset \bigcup_{s \in S} G_0(s)$ olur. Şimdi $G_0(s_i) \neq U_{s_i}$ olsun. Yani her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ve bir $G_i \in \mathcal{G}_0$ için $G_i(s_i) \neq U_{s_i}$ olsun. \mathcal{G}_0 ailesi doğrusal sıralı olduğundan $j \leq k$ olacak şekilde bir j vardır ki $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $G_i \leq G_j$ dir. Çünkü $\{G_1, G_2, G_3, \dots, G_k\}$ sonlu ve \mathcal{G}_0 doğrusal sıralı olduğundan bir en büyük $G_j (j \leq k)$ vardır. $G_i(s_i) \neq U_{s_i}$ ve $G_i \leq G_j$ olduğundan $G_i(s_i) = G_j(s_i)$ dir. Bu G_j 'ye (2) koşulunu uygularsak $x \in G_j(s_{i_0}) = G_0(s_{i_0})$ olacak şekilde bir $i_0 \leq k$ vardır. Böylece $x \in \bigcup_{s \in S} G_0(s)$ bulunur. Böylece (2) koşulu sağlandı.

Buradan kolayca görülebilir ki, her $G \in \mathcal{G}_0$ için $G \leq G_0$ dir. Çünkü $G(s) \neq U_s$ iken $G(s) = G_0(s)$ olduğu için $G \leq G_0$ dir. (Arakesiti oluşturan $G(s)$ 'lerden en fazla bir tanesi U_s 'den farklı olabilir.) Bu durumda ise Kuratowski-Zorn Lemmadan dolayı \mathcal{G} ailesinde bir G maksimal elemanı vardır. Kanıtı tamamlamak için her $s \in S$ için $\overline{G(s)} \subset U_s$ olduğunu göstermeliyiz. Çünkü aslında $\overline{G_0(s)} \subset U_s$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\overline{G(s)} \not\subset U_s$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{G(s_0)} \cap (X \setminus U_{s_0}) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $s_0 \in S$ vardır. Şimdi

$$A = X \setminus \bigcup \{G(s) : s \in S \setminus \{s_0\}\}$$

olarak tanımlı A kümesi kapalı ve $A \subset G(s_0)$ dir. X normal uzay olduğundan $A \subset U \subset \overline{U} \subset G(s_0)$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. (1) den $G(s_0) = U(s_0)$ dir ve

$$G'(s) = \begin{cases} U & s = s_0 \\ G(s) & s \neq s_0 \end{cases}$$

tanımı $G \leq G'$ ve $G \neq G'$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlar. Şimdi $G' \in \mathcal{G}$ olduğunu görelim.: $s \neq s_0$ için $G'(s) = G(s) = U(s)$ dir. $s = s_0$ için $\overline{G'(s_0)} = \overline{U} \subset G(s_0) = U_{s_0}$ olup (1) özelliği gerçekleşir. $x \in X$ olsun. $x \in U$ olacak şekilde bir $U \in \{U_s\}$ vardır. Bu durumda $x \in G'(s)$ ya da $G \in \mathcal{G}$ olduğundan G' 'ye (2)'yi uygularsak $x \in G(s)$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. $G' \in \mathcal{G}$ iken $G \leq G'$ ve $G \neq G'$ oluşu; G' 'nin maksimal oluşu ile çelişir. O halde her $s \in S$ için $\overline{G(s)} \subset U_s$ bulunur.

2.40. Teorem: $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu kapalıdır(açıktır) ancak ve ancak her $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B)$ 'yi kapsayan her açık(kapalı) $A \subset X$ için $f^{-1}(C) \subset A$ olacak şekilde B 'yi kapsayan bir $C \subset Y$ açık(kapalı) kümesi vardır.

Kanıt: $f : X \rightarrow Y$ sürekli, kapalı bir fonksiyon olsun. $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset A$ olacak şekilde $A \subset X$ açık kümesini alalım. $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ olarak seçelim. Bu durumda $C \subset Y$ açıktır ve $B \subseteq C$ dir: $B \not\subseteq C$ oluşunu varsayalım. Öyleyse $y \notin C$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. $y \in f(X \setminus A)$ dir. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in (X \setminus A)$ vardır. $x \notin A$ olduğundan $x \notin f^{-1}(B)$ olup $y \notin B$ bulunur. Oysa bu $y \in B$ olması ile çelişir. O halde $B \subset C$ dir ve

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus A)) \subset X \setminus (X \setminus A) = A$$

olup $f^{-1}(C) \subset A$ bulunur.

Şimdi de kanıtın diğer yönüne bakalım: $F \subset X$ kapalı olsun. $A = X \setminus F$ açıktır. $B = Y \setminus f(F)$ olarak seçelim. Bu durumda

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus f(F)) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subset (X \setminus F) = A$$

dir. Varsayımdan $f^{-1}(C) \subset A$ olacak şekilde $Y \setminus f(F)$ 'yi kapsayan $C \subset Y$ açık kümesi vardır. O halde $f^{-1}(C) \cap F = \emptyset$ olup $C \cap f(F) = \emptyset$ dir. Yani $C \subset Y \setminus f(F)$ olup $f(F) = Y \setminus C$ bulunur. Böylece $f(F)$ kapalı bulunduğundan f fonksiyonu kapalıdır.

Şimdi 2.40 Teoremin doğal bir sonucu olan aşağıdaki teoreme geçelim.

2.41. Teorem: $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f kapalıdır ancak ve ancak her $y \in Y$ ve $f^{-1}(y)$ 'yi kapsayan her $U \subset X$ açığı için $f^{-1}(V) \subset U$ olacak şekilde y 'nin bir V komşuluğu vardır.

Kanıt: f kapalı olsun. Bir önceki teoremden dolayı bu yönü açıktır. C kümesini açık olduğu için y 'nin komşuluğu olarak alabiliriz. Kanıtın diğer yönüne bakalım: $B \subset Y$ ve $f^{-1}(B) \subset A$ olacak şekilde bir $A \subset X$ açık kümesi verilsin. Bu durumda her $y \in B$ için $f^{-1}(V_y) \subset A$ olacak şekilde y 'nin bir V_y komşuluğu vardır. Şimdi

$C = \bigcup_{y \in B} V_y$ şeklinde tanımlı C kümesini gözönüne alalım. C kümesi açıktır ve $B \subset C$ olup $f^{-1}(C) \subset A$ dır: Bunu görmek için $x \in f^{-1}(C) = f^{-1}(\bigcup_{y \in B} V_y)$ alalım. Buradan $f(x) \in \bigcup_{y \in B} V_y$ dir. Bu durumda $f(x) \in V_y$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. Bu $y \in B$ için $x \in f^{-1}(V_y)$ dir. Her $y \in B$ için $f^{-1}(V_y) \subset A$ olduğundan $x \in A$ bulunur. Böylece bir önceki teoremden f fonksiyonu kapalıdır.

2.42. Yardımcı Teorem: $f : X \rightarrow Y$ kusursuz dönüşüm olsun. X uzayının altkümelerinden oluşan her yerel sonlu \mathcal{A} ailesi için

$$\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

ailesi de Y 'de yerel sonludur.

Kanıt: Her $y \in Y$ için $x \in f^{-1}(y)$ ise \mathcal{A} ailesi yerel sonlu olduğundan \mathcal{A} ailesinin sonlu tane elemanı ile kesişen x 'in bir V_x komşuluğu vardır. Bu durumda $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V_x$ dir ve $f^{-1}(y)$ kompakt olduğundan

$$f^{-1}(y) \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup V_{x_3} \cup \dots \cup V_{x_n} = U_y$$

dir. Bu $U_y \subset X$ açığı \mathcal{A} 'nın sonlu tane elemanı ile kesişir. f fonksiyonu kapalı olduğundan ve Teorem 2.41 den $f^{-1}(V_y) \subset U_y$ olacak şekilde y 'nin bir V_y komşuluğu vardır. Şimdi

$$|\{f(A) : f(A) \cap f(U_y) \neq \emptyset\}| < \infty$$

dir ve

$$|\{f(A) : f(A) \cap V_y \neq \emptyset\}| < \infty$$

bulunur. Böylece $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ailesi Y uzayında yerel sonludur.

2.43. Yardımcı Teorem: X metriklenebilir bir uzay olsun. $f : X \rightarrow Y$ kusursuz dönüşümü örten ise Y uzayının her açık örtüsü, açık yerel sonlu inceye sahiptir.

Kanıt: X metriklenebilir bir uzay, $f : X \rightarrow Y$ kusursuz dönüşümü örten ve \mathcal{V} , Y 'nin bir açık örtüsü olsun. Stone Teoreminden dolayı $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$, X uzayının yerel sonlu $\{U_s\}_{s \in S}$ açık incesine sahip açık örtüsüdür. Teorem 2.39 dan, her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olacak şekilde X uzayının bir $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s \in S}$ kapalı örtüsü vardır. Bu durumda \mathcal{F} yerel sonlu olur. Yardımcı Teorem 2.42 den $\{f(F_s)\}_{s \in S}$ ailesi Y 'nin \mathcal{V} örtüsünün bir yerel sonlu incesidir. f kapalı olduğundan $\{f(F_s)\}_{s \in S}$ kapalıdır. Yardımcı Teorem 2.35 den Y uzayının \mathcal{V} açık örtüsü bir $\{f(F_s)\}_{s \in S}$ yerel sonlu kapalı inceye sahip olduğundan, bir yerel sonlu açık inceye de sahiptir.

2.44. Sonuç: Bir kompakt küme üzerinde tanımlı sürekli, reel değerli her fonksiyon sınırlıdır.

Kanıt: $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, X kompakt ve $A \subset X$ olsun. $f(X) \subset \mathbb{R}$ kompakt ve \mathbb{R} uzayı T_2 olduğundan $f(X)$ kapalıdır. Böylece $f(X)$ sınırlıdır. O halde $\sup f(X) = c$ ve $\inf\{f(X)\} = d$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{R}$ vardır. $f(X)$ kapalı olduğundan $c, d \in f(X)$ dir.

2.45. Sonuç: (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ kompakt ve $A \subset U$ olmak üzere U açık olsun. Bu durumda $B(A, r) \subset U$ olacak şekilde $r > 0$ vardır.

Kanıt: $f(x) = d(x, X \setminus U)$ olmak üzere $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun A kümesi üzerinde pozitif değerli olduğunu göstereyim:

Her $x \in A$ için $f(x) > 0$ olduğunu göstereceğiz. $x \in A$ ise $x \notin X \setminus U$ dir. d , X üzerinde bir metrik olduğundan $d(x, X \setminus U) > 0$ dir. Böylece $f(x) > 0$ dir. A kompakt kümesi üzerinde tanımlı sürekli ve reel değerli f fonksiyonu sınırlıdır ve sınırını elde edebiliriz. O halde her $x \in A$ için $r \leq f(x)$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır.

Şimdi $B(A, r) = \bigcup_{y \in A} B(y, r) \subset U$ olduğunu göstereyim: $z \in B(A, r)$ ve $z \notin U$ olsun. O halde $z \in B(y, r)$ olacak şekilde bir $y \in A$ vardır. $z \notin U$ olduğundan $z \in X \setminus U$ dir.

$$f(y) = d(y, X \setminus U) = \inf\{d(y, u) : u \in X \setminus U\}$$

olduğundan $f(y) \leq d(y, z)$ dir. $y \in A$ olduğundan $r \leq f(y)$ idi. O halde $r \leq f(y) \leq d(y, z)$ bulunurki; bu $d(y, z) < r$ olması ile çelişir. Böylece $B(A, r) \subset U$ bulunur.

2.46. Tanım: \mathcal{M} sürekli, örten fonksiyonların ailesi ve \mathcal{P} topolojik uzayların bir özelliği olsun. \mathcal{P} özelliği, \mathcal{M} sınıfındaki fonksiyonlar altında korunuyorsa, \mathcal{P} 'ye \mathcal{M} sınıfının değişmezidir ya da \mathcal{M} 'nin fonksiyonları altında korunur denir.

2.47. Teorem: T_1, T_4 , kusursuz normal uzaylar kapalı dönüşümler altında korunurlar(değişmezdirler).

Kanıt: T_1 uzayında tek nokta kümeleri kapalıdır. Dolayısıyla kapalı dönüşüm altında Y uzayında da bütün tek nokta kümeleri kapalı olacaktır ki bu da Y 'nin T_1 olması demektir. $f : X \rightarrow Y$ kapalı bir dönüşüm ve X normal(T_4) uzay olsun. f kapalı olduğundan Y de T_1 dir. $U \cup V = Y$ olacak şekilde $U, V \subset Y$ açıklarını alalım. $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ kümeleri X 'de açıktır ve X 'i örterler. X normal uzay olduğundan $A_0 \subset f^{-1}(U)$, $B_0 \subset f^{-1}(V)$ ve $A_0 \cup B_0 = X$ olacak şekilde

$A_0, B_0 \subset X$ kapalı kümeleri vardır. $A = f(A_0)$ ve $B = f(B_0)$ kümeleri Y 'de kapalıdır. Böylece $A \subset f(f^{-1}(U)) = U$, $B \subset f(f^{-1}(V)) = U$ ve $A \cup B = f(X)$ olduğundan Y 'de normaldir.

$f : X \rightarrow Y$ kapalı dönüşüm, X kusursuz normal uzay olsun. Bu durumda $F_i \subset X$ kapalı olmak üzere her $U \subset Y$ açığı için $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ dir.

$$U = f(f^{-1}(U)) = f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(F_i)$$

olup Y uzayı kusursuz normaldir.

2.48. Teorem: *Metriklenebilirlik kusursuz dönüşümler altında korunur.*

Kanıt: $f : X \rightarrow Y$ kusursuz dönüşümü örten ve X metriklenebilir uzay olsun. X üzerinde bir d metriği verilsin ve her $i = 1, 2, 3, \dots$, her $y \in Y$ için $U_i(y) = B(f^{-1}(y), \frac{1}{i})$, $W_i(y) = Y \setminus f(X \setminus U_i(y))$ ve $V_i(y) = f^{-1}(W_i(y)) \subset U_i(y)$ açık kümelerini oluşturalım. $U_i(y)$ 'nin tanımından

$$j \geq i \text{ için } U_j(y) \subset U_i(y) \quad (1)$$

dir. $W_i = \{W_i(y)\}_{y \in Y}$ ailesi Y 'nin açık örtüsüdür: Bunu görmek için, $a \in Y$ ve $a \notin \bigcup_{y \in Y} W_i(y)$ olduğunu düşünelim. Bu durumda her $y \in Y$ için $a \in f(X \setminus U_i(y))$ dir. O halde $f(x) = a$ olacak şekilde bir $x \in (X \setminus U_i(y))$ vardır. $x \notin U_i(y)$ iken $f(x) = a$ dir. Her $y \in Y$ için $d(x, f^{-1}(y)) > \frac{1}{i}$ dir. Her $y \in Y$ için $d(f^{-1}(a), f^{-1}(y)) > \frac{1}{i}$ dir. Bu durumda ise $a = y$ olduğunda $d(f^{-1}(a), f^{-1}(y)) > \frac{1}{i}$ oluşu d 'nin metrik oluşu ile çelişir. O halde $W_i = \{W_i(y)\}_{y \in Y}$ ailesi Y 'nin açık örtüsüdür.

$$\text{Her } y \in Y \text{ için } \{W_i(y)\}_{i=1}^{\infty} \text{ ailesi } y \text{ noktasının bir tabanıdır.} \quad (2)$$

Gerçekten V , y 'nin bir komşuluğu olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$ dir. Sonuç 2.45 den $U_i(y) \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir i vardır. f kusursuz olduğundan $f^{-1}(y)$ kompakt; $f^{-1}(V)$, $f^{-1}(y)$ 'yi kapsayan bir açık ve X metriklenebilir olduğundan $X \setminus f^{-1}(V) \subset X \setminus U_i(y)$ olup, $f(X \setminus f^{-1}(V)) \subset f(X \setminus U_i(y))$ dir. Böylece $Y \setminus f(X \setminus U_i(y)) \subset Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(V)) = V$ bulunur. Böylece

$$Y \setminus f(X \setminus U_i(y)) = W_i(y) \subset V$$

bulduğundan $\{W_i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi y noktasının bir tabanıdır. Şimdi her $W_i(y)$ için

$$\bigcup \{W_j(z) : y \in W_j(z)\} \subset W_i(y) \text{ olacak şekilde bir } j \in J \text{ vardır.} \quad (3)$$

Sonuç 2.45 den ve (1) den $j \geq 2i$ iken $U_j(y) \subset V_{2i}(y)$ olacak şekilde j vardır. $y \in W_j(z)$ olacak şekilde $z \in Y$ noktasının düşünelim.

$$f^{-1}(y) \subset V_j(z) \subset U_j(z)$$

dir. Çünkü $y \in W_j(z) = Y \setminus (f(X \setminus U_j(z)))$ olup, $f^{-1}(y) \in f^{-1}(W_j(z)) = V_j(z) \subset U_j(z)$ dir. Böylece $d(x, x') < \frac{1}{j}$ olacak şekilde $x \in f^{-1}(z)$ ve $x' \in f^{-1}(y)$ vardır. Buradan $U_j(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$ ve $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y)$ dir. Çünkü x noktasıyla birlikte en son küme $f^{-1}(f(x))$ fiberini kapsar. $U_j(y) \cap f^{-1}(z) \neq \emptyset$ dir. Çünkü $U_j(y) \cap f^{-1}(z) = \emptyset$ olsa $f^{-1}(z) \subset X \setminus U_j(y)$ olur. $x \in f^{-1}(z)$ için $d(x, f^{-1}(y)) < \frac{1}{j}$ olup $x \in U_j(y)$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Şimdi $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y)$ olduğunu gösterelim: $x \in f^{-1}(z)$ olsun. Bu durumda $d(x, f^{-1}(y)) < \frac{1}{j}$ olur. Bu ise $x \in U_j(y)$ demektir. $U_j(y) \subset V_{2i}(y)$ olduğundan $x \in V_{2i}(y)$ bulunur ki, böylece $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y)$ dir.

$t \in W_j(z)$ alalım. $f^{-1}(t) \subset U_j(z)$ olduğundan, her $x \in f^{-1}(t)$ için $p(x, x') < \frac{1}{j} < \frac{1}{2i}$ olacak şekilde $x' \in f^{-1}(z)$ vardır. Yukarıdan $f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y) \subset U_{2i}(y)$ dir. Buradan $d(x', x'') < \frac{1}{2i}$ olacak şekilde bir $x'' \in f^{-1}(y)$ vardır. Böylece

$$d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') < \frac{1}{i}$$

bulunur. Şimdi $f^{-1}(t) \subset U_i(y)$ olduğunu görelim: $x \in f^{-1}(t)$ için $d(x, x'') < \frac{1}{i}$ olup $x'' \in f^{-1}(y)$ olduğundan $x \in U_i(y)$ bulunur. Böylece $f^{-1}(t) \subset U_i(y)$ dir. Buradan $X \setminus U_i(y) \subset X \setminus f^{-1}(t)$ olup $f(X \setminus U_i(y)) \subset f(X \setminus f^{-1}(t))$ bulunur. $Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(t)) \subset Y \setminus f(X \setminus U_i(y))$ dir. $t \in Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(t)) \subset W_i(y)$ olup $t \in W_i(y)$ bulunur. Böylece (3) ispatlanır. Yardımcı Teorem 2.43 den; Y 'nin W_i açık örtüsünün yerel sonlu bir açık incesi vardır. Bu açık inceye \mathcal{B}_i dersek (2) ve (3) den

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$$

Y için bir tabandır: U açık ve $y \in U$ olsun. $\{W_i(y)\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi y noktasında komşuluk tabanı olduğundan $W_i(y) \subseteq U$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. (3) özelliğinden bir j için $\bigcup\{W_j(z) : y \in W_j(z)\} \subset W_i(y)$ dir. Her $i \in \mathbb{N}$ için W_i 'nin incesi olan \mathcal{B}_i aynı zamanda bir örtüdür. Böylece \mathcal{B}_j 'de bir örtü olduğundan $y \in B \in \mathcal{B}_j$ olacak şekilde bir B vardır. $\mathcal{B}_j \prec \mathcal{W}_j$ olduğundan $y \in B \subseteq W_j(z)$ olacak şekilde $W_j(z) \in \mathcal{W}_i$ vardır. Böylece $y \in W_j(z) \subset W_i(y)$ olup $y \in W_i(y)$ dir. O halde $y \in B \subset W_i(y) \subset U$ olup $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ bir tabandır. Her \mathcal{B}_i yerel sonlu olduğundan \mathcal{B} ailesi, σ -yerel sonlu bir tabandır. X uzayı normal ve f kusursuz dönüşüm olduğundan Y uzayı da normaldir. Böylece Nagata-Smirnov Teoreminden Y uzayı regüler ve σ -yerel sonlu olduğundan metriklenebilirdir.

2.49. Tanım: X bir küme ve $\{\mathcal{F}\} = \{F_s\}_{s \in S}$, X 'in altkümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ve her $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_k\} \subset S$ sonlu kümesi için

$$F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap F_{s_3} \cap \dots \cap F_{s_k} \neq \emptyset$$

ise, \mathcal{F} ailesi **sonlu arakesit özelliğine sahiptir** denir.

2.50. Teorem: X Hausdorff uzayının kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in sonlu arakesit özelliğine sahip, kapalı kümelerinin her ailesi boştan farklı arakesite sahip olmasıdır.

Kanıt: (\implies): X Hausdorff uzayı kompakt ve X 'in sonlu arakesit özelliğine sahip, kapalı kümelerinin ailesi $\{F_s\}_{s \in S}$ olsun.

$$\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. $U_s = X \setminus F_s$ olarak düşünülürse

$$\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s \in S} F_s = X$$

dir. $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi X 'in bir açık örtüsüdür. X uzayı kompakt olduğundan $X = \bigcup_{i=1}^k U_{s_i}$ olacak şekilde $\{U_{s_1}, U_{s_2}, U_{s_3}, \dots, U_{s_k}\}$ altörtüsü vardır. Buradan

$$X = \bigcup_{i=1}^k U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^k X \setminus F_{s_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^k F_{s_i}$$

olduğundan $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} = \emptyset$ olmalıdır. Oysa bu \mathcal{F} ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir. O halde $\bigcap_{s \in S} F_s \neq \emptyset$ olmalıdır.

(\impliedby): X uzayı kompakt olmasın. Bu durumda X uzayının sonlu arakesit özelliğine sahip, kapalı kümelerinin bir ailesinin boş arakesite sahip olduğunu göstermeliyiz.

X uzayı kompakt olmadığı için $X \neq \bigcup_{i=1}^k A_i$ olacak şekilde bir $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ açık örtüsü vardır. Her $i \in I$ için $F_i = X \setminus A_i$ olsun. O halde $\{F_i : i \in I\}$ ailesi X uzayının kapalı kümelerinden oluşur.

$$\bigcap_{i=1}^k F_i = \bigcap_{i=1}^k X \setminus A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i \neq \emptyset$$

olduğu için $\{F_i : i \in I\}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir. O halde

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$$

elde edilir.

2.51. Teorem: X uzayı Hausdorff olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- (i) X uzayı sayılabilir kompaktır.
- (ii) X uzayının sonlu arakesit özelliğine sahip kapalı kümelerinin sayılabilir her ailesi boş olmayan arakesite sahiptir.
- (iii) X uzayının boş olmayan kapalı kümelerinin her azalan $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ dizisi için $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ dir.

Kanıt:(i) \implies (ii): X uzayı sayılabilir kompakt olsun. Fakat X uzayının, sonlu arakesit özelliğine sahip, kapalı kümelerinin sayılabilir bir ailesinin arakesiti boş olsun. Yani her $i = 1, 2, \dots$ için $F_i \subset X$ kapalı ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ olsun. $\forall i$ için $G_i = X \setminus F_i$ olarak alalım. Bu durumda G_i bir açık kümedir ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} X \setminus F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ ailesi X uzayının sayılabilir bir açık örtüsüdür.

X sayılabilir kompakt olduğundan bu açık örtünün sonlu bir altörtüsü vardır. Yani

$$X = \bigcup_{k=1}^n X \setminus F_{i_k} = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$$

dir. Her iki tarafın tümleyenini alırsak

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} = \bigcap_{k=1}^n F_{i_k}$$

olur ki bu, F_i ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip oluşu ile çelişir.

(ii) \implies (iii): Bu durum açıktır.

(iii) \implies (i): X uzayının sayılabilir kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X uzayının öyle bir sayılabilir açık örtüsü vardır ki bunun hiçbir sonlu altörtüsü X uzayını örtmez. $G_i \neq \emptyset$ olmak üzere

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots$$

olsun. $F_1 = X \setminus G_1$, $F_2 = X \setminus G_1 \cup G_2$, \dots , $F_n = X \setminus G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ olarak alalım. Bu durumda $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ kapalı kümelerin azalan dizisini elde etmiş oluruz. (iii) koşulundan $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ dır.

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq X$$

ve böylece $\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i) \neq X$ olur ki, bu durum, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olması ile çelişir. O halde X sayılabilir kompaktır.

2.52. Tanım: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay, $x \in X$ olsun.

$$\chi(x, (X, \mathcal{T})) = \min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x), x \text{ noktasında bir taban}\}$$

nicel sayısına x noktasının **karakteri** denir ve $\chi(x, (X, \mathcal{T}))$ ile gösterilir.

(X, \mathcal{T}) topolojik uzayının karakteri, tüm $\chi(x, (X, \mathcal{T}))$ sayılarının supremumu olarak tanımlanır ve $\chi(X, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

2.53. Tanım: (X, \mathcal{T}) bir regüler topolojik uzayı olsun. Eğer X uzayının her açık örtüsünün sayılabilir bir altörtüsü varsa, X uzayına **Lindelöf uzay** denir.

2.54. Teorem: X Hausdorff olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) X sayılabilir kompaktır.
- (ii) X uzayının boş olmayan altkümelerinin her yerel sonlu ailesi sonludur.
- (iii) X uzayının tek nokta kümelerinin her yerel sonlu ailesi sonludur.
- (iv) X uzayının her sonsuz altkümeleri bir yığılma noktasına sahiptir.
- (v) X uzayının sayılabilir sonsuz her altkümelerinin bir yığılma noktası vardır.

Kanıt: (i) \implies (ii): X uzayının boş olmayan altkümelerinden oluşan, yerel sonlu $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesinin olduğunu varsayalım.

Şimdi herbir $i \in \mathbb{N}$ için $F_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} \overline{A_j}$ kümelerini gözönüne alalım. Her $i \in \mathbb{N}$ için F_i kümesi kapalıdır ve $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesi azalan bir dizi oluşturur. Bu durumda $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ dir. O halde $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan her i için $x \in F_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} \overline{A_j}$ dir. Bir $j \geq i$ için $x \in \overline{A_j}$ dir. Buradan x noktasının her U komşuluğu için $U \cap A_j \neq \emptyset$ dir. Bu ise $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesinin yerel sonlu oluşu ile gelişir.

Şimdi de $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ olsa bu durum, X uzayının sayılabilir kompakt olması ile gelişir. Böylece bu koşulları sağlayan bir $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi yoktur.

O halde X uzayının boş olmayan altkümelerinin her yerel sonlu ailesi sonludur.

(ii) \implies (iii): Bu durum açıktır.

(iii) \implies (vi): $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$ altkümeleri bir yığılma noktasına sahip olmasın. Genel durumu bozmayacağından $j \neq k$ için $x_j \neq x_k$ kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için $S_i = \{x_k : k \geq i\}$ kümelerini gözönüne alalım. Şimdi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \emptyset$$

olduğunu gösterelim. Tersine $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $x \in \overline{S}_i$ dir ve böylece $i \in \mathbb{N}$ ve x noktasının her U komşuluğu için $U \cap S_i \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $x_k \in U$ olacak şekilde bir $k \geq i$ vardır. Buradan x , A kümesinin yığılma noktası demektir. Bu bir çelişki olduğundan, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i = \emptyset$ dir. Bu durumda $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{S}_i$ olduğundan $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $S'_i = \{\{x_k\} : k \geq i\}$ olarak tanımlanan S'_i ailesi yerel sonludur. Bu ailenin yerel sonlu oluşu ise varsayımımızla çelişir. O halde X uzayının her sonsuz altkümesi yığılma noktasına sahiptir.

(iv) \implies (v): Bu durum açıktır.

(v) \implies (i): X uzayının sayılabilir kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda X uzayının boş olmayan $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ kapalı kümelerinin azalan bir dizisi vardır ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ dur. $i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in F_i$ olmak üzere $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kümesi sonsuzdur. Çünkü bu küme sonlu olsaydı, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ olması gerekirdi.

Şimdi $A^d = \emptyset$ olduğunu gösterelim: Her $x \in X$ için $x \notin F_i$ olacak biçimde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$U = (X \setminus F_i) \setminus [\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\} \setminus \{x\}]$$

olarak tanımlanan U kümesi, x noktasını içerdiğinden ve açık olduğundan x noktasının bir komşuluğudur. Şimdi de $U \cap A \subset \{x\}$ olduğunu görelim: $y \in U \cap A$ olsun. Buradan $y \in U$ ve $y \in A$ dir. $y \in U$ ise, $y \notin F_i$ ve $y \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ veya $y \notin F_i$ ve $y \in \{x\}$ dir. Aynı zamanda $y \in A$ olduğu için $y = x$ bulunur. Böylece $A^d = \emptyset$ elde edilir. Bu durum ise, (v) ile çelişir. O halde X uzayı sayılabilir kompakttır.

Şimdi çok iyi bilinen bir teoremi ifade edelim.

2.55. Teorem: *Metriklenebilir her uzay için aşağıdakiler denktir:*

- (i) X uzayı kompakttır.
- (ii) X uzayı sayılabilir kompakttır.
- (iii) X uzayı dizisel kompakttır.

Şimdi ünlü Hanai-Morita-Stone Teoreminin ispatında kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

2.56. Yardımcı Teorem: (Vainstein Yardımcı Teoremi) X uzayı metriklenebilir olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ örten, kapalı dönüşüm ise, her $y \in Y$ için $\chi(y, Y) \leq \aleph_0$ olmak üzere $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi kompakttır.

Kanıt: $|A| = \aleph_0$ olmak üzere $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset F = \partial(f^{-1}(y))$ ve $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ ailesi $y \in Y$ noktasının bir tabanı olsun. X uzayı üzerinde d metriği olsun. Her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $d(x_i, x_i') < \frac{1}{i}$ olacak şekilde $x_i' \in f^{-1}(V_i) \setminus f^{-1}(y)$ noktası seçelim. Böyle bir nokta seçebiliriz. Çünkü $x_i \in F \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_i)$ kapsamamasını sağlayan $\{y\}$ ve $f^{-1}(y)$ kümeleri f dönüşümü kapalı olduğundan kapalıdır. Buradan $B(x_i, \frac{1}{i}) \cap f^{-1}(V_i)$ kümesi x_i noktasının bir komşuluğudur. Şimdi $x_i \in F \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_i)$ kapsamamasını görelim: $A \subset F$ olduğundan $x_i \in F$ ve $f^{-1}(y)$ kümesi kapalı olduğundan $F \subset f^{-1}(y)$ dir. Böylece $x_i \in F \subset f^{-1}(y)$ dir. Şimdi $x \in f^{-1}(y)$ olsun. $f(x) = y$ olup $f(x) \in V_i$ dir. $x \in f^{-1}(V_i)$ olduğundan $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_i)$ bulunur. Şimdi de $B\{x_1', x_2', x_3', \dots\}$ olmak üzere

$$y \in \overline{f(B)} \setminus f(B)$$

olduğunu görelim: $y \notin \overline{f(B)} \setminus f(B)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $y \notin \overline{f(B)}$ veya $y \in f(B)$ dir. $y \notin \overline{f(B)}$ ise $V_i \cap f(B) = \emptyset$ olacak şekilde bir V_i kümesi vardır. $f^{-1}(V_i \cap f(B)) = \emptyset$ dir. Buradan $f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(f(B)) = \emptyset$ olup $f^{-1}(V_i) \cap (B) = \emptyset$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Şimdi de $y \in f(B)$ olsun. Bu durumda $f(x_i') = y$ olacak biçimde bir $x_i' \in B$ noktası vardır. Buradan $x_i' \in f^{-1}(y)$ bulunur ki bu da bir çelişkidir. O halde $y \in \overline{f(B)} \setminus f(B)$ kapsamaması doğrudur. f kapalı dönüşüm olduğundan $B \neq \overline{B}$ ve $B^d \neq \emptyset$ dir. $i = 1, 2, 3, \dots$ için $d(x_i, x_i') < \frac{1}{i}$ olduğundan $A^d = B^d \neq \emptyset$ dir: $x \in B^d$ ise $x \in \overline{B} \setminus \{x\}$ dir. Bu durumda ise her $\epsilon > 0$ için $B(x, \epsilon) \cap B \setminus \{x\} \neq \emptyset$ dir. O halde $d(x, z) < \epsilon$ ve $z \in B \setminus \{x\}$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $z \neq x$ ve öyle bir $i' \in \mathbb{N}$ için $z = x_{i'}$ olduğundan $d(x, x_{i'}) < \epsilon$ ve $\frac{1}{i'} < \epsilon$ için $d(x, x_{i'}) < \frac{1}{i'}$ olduğundan $x \in A$ dir. Öyle bir i için $x = x_i \in A$ bulunduğundan $x_i = x \in A^d$ elde edilir. O halde

$$\emptyset \neq B^d \subseteq A^d$$

dir. Diğer yönü de benzer şekilde görülebilir. Buradan F' 'nin her sayılabilir sonsuz altkümesi bir yığılma noktasına sahiptir. Bu durumda Teorem 2.54 den (zaten X metriklenebilir uzay olduğundan T_2 dir) F' sayılabilir kompaktır. Metriklenebilir uzaylarda sayılabilir kompaktlık ile kompaktlık denk olduğundan F kompaktır.

2.57. Teorem: (Hanai-Morita-Stone Teoremi) X metriklenebilir bir uzay olsun. Her $f : X \rightarrow Y$ kapalı ve örten fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

- (1) Y uzayı metriklenebilirdir.
- (2) Y uzayı birinci sayılabiliridir.
- (3) Her $y \in Y$ için $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi kompaktır.

Kanıt:

(1) \Rightarrow (2) Açıktır.

(2) \Rightarrow (3) Bu durumda Vainstein Yardımcı Teoreminden dolayı her $y \in Y$ için $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi kompakttır.

(3) \Rightarrow (1) Her $y \in Y$ için $A(y) \subseteq X$ olmak üzere

$$A(y) = \begin{cases} \partial(f^{-1}(y)), & \partial(f^{-1}(y)) \neq \emptyset \\ A(y) \subseteq f^{-1}(y) \text{ ve } |A(y)| = 1, & \partial(f^{-1}(y)) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $A(y)$ kümelerini gözönüne alalım. Şimdi $A = \bigcup_{y \in Y} A(y)$ kümesi X uzayında kapalıdır. Çünkü $X \setminus A$ kümesi $(f^{-1}(y))^\circ$ kümesinden en fazla bir tek nokta atılarak elde edilen kümelerin birleşimi şeklindedir: $x \notin A$ ise $x \notin A(y)$ dir. $y = f(x)$ ise $x \in f^{-1}(y)$ dir. Şimdi iki durum söz konusudur:

(i) $\partial(f^{-1}(y)) \neq \emptyset$ ise, $x \notin \partial(f^{-1}(y))$ dir. $x \in (f^{-1}(y))^\circ$ olur.

(ii) $\partial(f^{-1}(y)) = \emptyset$ ise, $x \in (f^{-1}(y))^\circ = f^{-1}(y)$ dir. Çünkü $f^{-1}(y)$ kümesi hem açık hem de kapalıdır. $A(y) = \{z\}$ ve $x \in f^{-1}(y) \setminus \{z\}$ olsun. $\partial(f^{-1}(y)) = \emptyset$ olduğu durumda $A(y) \subseteq f^{-1}(y)$ ve $|A(y)| = 1$ idi. Bu durumda $x \notin A(y)$ olduğundan eğer $A(y) = \{z\}$ ise $x \neq z$ dir. Şimdi $X \setminus A = \bigcup_{y \in Y} (f^{-1}(y))^\circ$ veya $X \setminus A = \bigcup_{y \in Y} (f^{-1}(y))^\circ \setminus \{x, y\}$ olup $X \setminus A$ kümesi açık bulunur. Böylece A kümesi kapalıdır. O halde $f|_A : A \rightarrow Y$ kısıtlama fonksiyonu kapalı ve örtendir. Her $y \in Y$ için $A(y)$ kümesinin tanımından $f|_A$ fonksiyonunun örten olduğu açıktır. Buradan her $y \in Y$ için

$$(f|_A)^{-1}(y) = \begin{cases} \partial(f^{-1}(y)) \\ \text{tek noktalı kümeler} \end{cases}$$

dir. $y \in Y$ olsun. $(f|_A)^{-1}(y) \subseteq \bigcup_{y \in Y} A(y) = A$ dır.

$$(f|_A)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap A = f^{-1}(y) \cap \bigcup_{y \in Y} A(y) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \cap A(y)$$

dir. Eğer $\partial(f^{-1}(y)) \neq \emptyset$ ise $(f|_A)^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \cap \partial(f^{-1}(y)) = \partial(f^{-1}(y))$ bulunur. Eğer $\partial(f^{-1}(y)) = \emptyset$ ise $(f|_A)^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \cap A(y) = A(y)$ dir. Böylece $f|_A$ fonksiyonunun fiberleri kompakttır. Çünkü $\partial(f^{-1}(y))$ varsayımdan kompakt ve tek noktalı kümeler de kapalıdır. O halde $f|_A$ fonksiyonu kapalı ve sürekli, X uzayı Hausdorff, fiberler kompakt olduğundan $f|_A$ fonksiyonu kusursuzdur. Metriklenebilirlik kusursuz dönüşümler altında korunduğundan Y uzayı da metriklenebilirdir.

Daha önce metriklenebilirliğin kusursuz dönüşümler altında korunduğunu göstermiştik. Şimdi dönüşümün özelliğini zayıflatalım.

2.58. Teorem: *Metriklenebilirlik hem kapalı hem de açık olan dönüşümler altında korunur.*

Kanıt: X metriklenabilir bir uzay, $f : X \rightarrow Y$ kapalı, açık, sürekli ve örten olsun. X uzayı metriklenabilir bir uzay olduğundan birinci sayılabilirdir. Yani her $x \in X$ için $\chi(x, X) \leq \aleph_0$ dir. f fonksiyonu örten ve açık olduğundan $\chi(Y) \leq \chi(X)$ olup Y uzayının her noktasının karakteri sayılabilirdir. Bu durumda Vainstein Yardımcı Teoreminin koşulları sağlandığından $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi kompakttır. Son olarak Hanai-Morita-Stone Teoreminden her $y \in Y$ için $\partial(f^{-1}(y))$ kümesi kompakt olduğundan Y uzayı da metriklenebilirdir.

2.59. Teorem: $f : X \rightarrow Y$ sürekli, açık dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\chi(f(x), Y) \leq \chi(x, X)$ dir. Eğer $f(X) = Y$ ise $w(Y) \leq w(X)$ ve $\chi(Y) \leq \chi(X)$ dir.

Kanıt: f dönüşümü x noktasının her tabanını $f(x)$ noktasının bir tabanına; X uzayının her tabanını $f(X)$ uzayının bir tabanına dönüştürür: $x \in X$ ve $\mathcal{B}(x)$, x noktasının bir tabanı olsun. Bu durumda $f(\mathcal{B}(x))$, $f(x)$ noktasının bir tabanıdır: $U \subset Y$ açık ve $f(x) \in U$ olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi açıktır ve $x \in f^{-1}(U)$ dir. $\mathcal{B}(x)$, x noktasının bir tabanı olduğundan $x \in B \subseteq f^{-1}(U)$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}(x)$ vardır. Buradan görüntü alırsak $f(x) \in f(B) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U$ bulunur.

Ayrıca $x \in X$ olmak üzere

$$|\mathcal{B}(x)| = \chi(x, X) \geq |f(\mathcal{B}(x))| \geq \chi(f(x), Y)$$

dir.

2.60. Yardımcı Teorem: X bir Hausdorff uzay, $\{A_i\}_{i=1}^k$ ailesi X uzayının sonlu bir örtüsü, $f_i : A_i \rightarrow Y$ olmak üzere $\{f_i\}_{i=1}^k$ uyumlu fonksiyonların ailesi ve $f = f_1 \nabla f_2 \nabla \cdots \nabla f_k$ kombinasyonu sürekli olsun. Eğer tüm f_i fonksiyonları kusursuz ise, ise f kombinasyonu da kusursuzdur.

Kanıt: Her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $f_i : A_i \rightarrow Y$ kusursuz dönüşüm olsun. Her $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için f_i dönüşümü kusursuz ve dolayısıyla kapalı olduğundan bunların kombinasyonu olan f dönüşümü de kapalıdır.

Şimdi de her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesinin X uzayında kompakt olduğunu görelim: $y \in Y$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için

$$f^{-1}(y) = \bigcup (f_i)^{-1}(y)$$

olup, $(f_i)^{-1}(y)$, A_i kümesinde ve dolayısıyla X uzayında kompakttır. Kompakt kümelerin sonlu sayıda birleşimleri yine kompakt olduğundan $f^{-1}(y)$ kümesi X uzayında kompakt bulunur. O halde $f = \nabla_{i=1}^k f_i : X \rightarrow Y$ dönüşümü kusursuzdur.

2.61. Teorem: X Hausdorff bir uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ birebir dönüşümünün kusursuz olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonun kapalı olmasıdır.

Kanıt: Bu yönü açıktır. Diğer yönü için f fonksiyonu birebir ve kapalı, X uzayı Hausdorff olsun. Bu durumda her $y \in Y$ için $f^{-1}(y) = \{x\}$ olup X uzayında kompaktır. Böylece fiberler de kompakt olduğundan f fonksiyonu kusursuzdur. Şimdi bir $i_M : M \rightarrow X$ gömme dönüşümünün kapalı(açık) olması için gerekli ve yeterli koşulun M kümesinin kapalı(açık) olması gerektiğini hatırlatarak aşağıdaki teoreme geçelim.

2.62. Teorem: $i_M : M \rightarrow X$ gömme dönüşümünün kusursuz olması için gerekli ve yeterli koşul M kümesinin Hausdorff ve kapalı olmasıdır.

Kanıt: $i_M : M \rightarrow X$ dönüşümü kusursuz olsun. Kusursuz dönüşüm tanımından M kümesi T_2 dir. i_M dönüşümü kapalı olduğundan M kümesi kapalıdır.

Tersine M kümesi Hausdorff ve kapalı olsun. M kümesi kapalı olduğu için i_M kapalıdır.

2.63. Tanım: Bir P topolojik özelliğine sahip uzayların her bir $\{X_s\}_{s \in S}$ ailesi ($|s| < m, |s| < \aleph_0$) için $\bigoplus_{s \in S} X_s$ kümesi P özelliğine sahip ise, bu P özelliğine **toplamsal (m-toplamsal, sonlu toplamsal)** denir.

2.64. Yardımcı Teorem: Bir X topolojik uzayı, X 'in bir $\{A_s\}_{s \in S}$ örtüsü ve $f_s : A_s \rightarrow Y$ olmak üzere $\{f_s\}_{s \in S}$ uyumlu dönüşümlerin bir ailesi verilsin. Bu durumda f_s fonksiyonlarının kombinasyonu

$$f = \nabla_{s \in S} f_s : X \rightarrow Y$$

süreklidir. Eğer her $s \in S$ için f_s fonksiyonu açık(kapalı ve $\{f_s(A_s)\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu) ise, f kombinasyonu açıktır(kapalıdır).

Kanıt: Her $s \in S$ için f_s fonksiyonu açık ve $A \subseteq X$ kümesi açık olarak verilsin.

$$f(A) = f\left(A \cap \bigcup_{s \in S} A_s\right) = \bigcup_{s \in S} f_s(A \cap A_s)$$

dir. Buradan her $s \in S$ için $A \cap A_s$ kümesi A_s altuzayında açık ve f_s açık dönüşüm olduğundan $f_s(A \cap A_s)$ kümesi açıktır. $\bigcup_{s \in S} f_s(A \cap A_s)$ kümesi açık olduğu için f fonksiyonu da açıktır.

Şimdi de $U \subseteq Y$ açık olsun. $f^{-1}(U) = \bigcup_{s \in S} f_s^{-1}(U)$ dir. f_s fonksiyonları sürekli olduğundan $f_s^{-1}(U)$ kümesi açık ve böylece $f^{-1}(U)$ açıktır. O halde f fonksiyonu süreklidir.

2.65. Teorem: X bir topolojik uzay, P kusursuz dönüşümler altında korunan bir (sonlu) toplamsal topolojik özellik olsun. Her $s \in S$ için X_s , Hausdorff ve P özelliğine sahip bir kapalı altuzay olmak üzere, $\{X_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonlu olsun. Eğer X uzayı $\{X_s\}_{s \in S}$ ailesinin birleşimi olarak yazılabiliyor ise, X uzayı da P özelliğine sahiptir.

Kanıt:

$$\nabla_{s \in S} i_{X_s} : \bigoplus_{s \in S} X_s \rightarrow X$$

dönüşümü kusursuzdur. P topolojik özelliği toplamsal olduğundan; P özelliğine sahip uzayların her bir $\{X_s\}_{s \in S}$ ailesi için $\bigoplus_{s \in S} X_s$, P özelliğine sahiptir. P kusursuz dönüşümler altında korunduğundan X uzayı da P özelliğine sahiptir.

2.66. Teorem: X uzayı, metriklenebilir altuzaylardan oluşan yerel sonlu, kapalı bir örtüye sahip ise, metriklenebilirdir.

Kanıt: $\{F_i\}_{i \in I}$ ailesi yerel sonlu, kapalı, her $i \in I$ için F_i metriklenebilir ve $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i \in I} F_i$ metriklenebilirdir. Metriklenebilirlik kusursuz dönüşümler altında korunur ve üstelik toplamsal topolojik özelliktir. Şimdi bir önceki teoremden her $i \in I$ için F_i metriklenebilir, Hausdorff ve kapalı olup, X uzayı yerel sonlu $\{F_i\}_{i \in I}$ ailesinin birleşimi olarak yazılabildiğinden X uzayı da metriklenebilirdir.

3. METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ II

3.1. Tanım: Bir Hausdorff topolojik uzayın her açık örtüsünün bir yerel sonlu açık incesi varsa, bu topolojik uzaya **parakompakt uzay** denir.

3.2. Tanım: X topolojik uzayı T_1 olsun. X 'in kapalı kümelerinin her ayrık $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi için $F_s \subset V_s$ olacak şekilde X 'in açık kümelerinin bir ayrık $\{V_s\}_{s \in S}$ ailesi varsa, X uzayına **collectionwise-normal** uzay denir

Her collectionwise-normal uzayın normal olduğunu hemen söyleyebiliriz. $F, K \subset X$ ayrık, kapalı kümeler olsun. Bu durumda $(X \setminus F) \cup (X \setminus K) = X$ dir. O halde bir $x \in X$ için $x \in X \setminus F$ ya da $x \in X \setminus K$ olur. Eğer $x \in X \setminus F$ ise $X \setminus F$ kümesi açık olduğundan x noktasının bir komşuluğu olur. Bu komşuluk yalnızca K kümesi ile kesiştiğinden $\{F, K\}$ ailesi ayrıktır. $x \in X \setminus K$ iken yine benzer bir durum vardır. Şimdi X uzayı collectionwise-normal olduğundan $F \subset U$ ve $K \subset V$ olacak şekilde $\{U, V\}$ ayrık ailesi vardır. O halde $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanır.

$x \in U \cap V$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasının olduğunu varsayalım. Bu durumda $U \cap V$ kümesi açık olduğu için x noktasının bir komşuluğudur. Bu komşuluk hem U hem de V kümesi ile kesiştiğinden bu durum $\{U, V\}$ ailesinin ayrık oluşu ile çelişir. O halde $U \cap V = \emptyset$ olduğundan X uzayı normaldir.

3.3. Tanım: Bir X Hausdorff uzayının her açık örtüsünün noktasal sonlu açık incesi varsa bu uzaya **zayıf parakompakt** denir.

Her parakompakt uzayın zayıf parakompakt olduğu açıktır. Çünkü her yerel sonlu aile noktasal sonludur.

3.4. Tanım: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ ailesi, X uzayının örtüsü olsun. $M \subset X$ olmak üzere

$$St(M, \mathcal{A}) = \bigcup \{A_s : M \cap A_s \neq \emptyset\}$$

ile tanımlı $St(M, \mathcal{A})$ kümesine M kümesinin **yıldızı** denir. Tek elemanlı $\{x\}$ kümesinin yıldızı $St(x, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

3.5. Tanım: X bir topolojik uzay ve $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bu uzayın açık örtülerinin bir dizisi olsun. Eğer her $x \in X$ ve x noktasının her U komşuluğu için

$$St(x, W_i) \subset U$$

olacak şekilde bir i doğal sayısı varsa, bu diziye X uzayı için bir **açılım** denir.

3.6. Teorem: $\{A_s\}_{s \in S}$ bir yerel sonlu (ayrık) aile ise, bu durumda $\{\overline{A_s}\}_{s \in S}$ ailesi de yerel sonludur (ayrıktır).

3.7. Yardımcı Teorem: Bir X regüler uzayının her açık örtüsü bir yerel sonlu inceye sahipse, X uzayının her $\{U_s\}_{s \in S}$ açık örtüsü ve her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olacak şekilde bir kapalı yerel sonlu $\{F_s\}_{s \in S}$ örtüsü vardır.

Kanıt: X uzayının bir \mathcal{W} açık örtüsünü alalım. X uzayı regüler olduğundan $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ ailesi, $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin bir incesidir.

\mathcal{W} örtüsünün bir yerel sonlu $\{A_t\}_{t \in T}$ incesi verilsin ve her $t \in T$ için $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$ olacak şekilde bir $s(t) \in S$ seçelim. Şimdi

$$F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$$

olsun. Böylece Teorem 2.10 ve 3.6 dan $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi X uzayının kapalı yerel sonlu bir örtüsüdür. F_s kümesinin tanımından her $s \in S$ için F_s kapalıdır.

Şimdi $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesinin yerel sonlu olduğunu gösterelim: $x \in X$ olmak üzere $\{\overline{A_t}\}_{t \in T}$ ailesi yerel sonlu olduğundan

$$|\{t : U_x \cap \overline{A_t} \neq \emptyset\}| < \infty$$

olacak şekilde bir U_x komşuluğu vardır. $\{t : U_x \cap \overline{A_t} \neq \emptyset\} = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ olsun. $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesinin yerel sonlu olmadığını varsayalım. Bu durumda $|\{F_s : U_x \cap F_s \neq \emptyset\}| = \infty$ dur. Böylece $U_x \cap F_s \neq \emptyset$ olacak şekilde $s(t_i) = s$ vardır. Yani $s(t_i) = s$ için $\bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t} \cap U_x \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $s(t) = s$ olan öyle bir $t \in T$ vardır ki $\overline{A_t} \cap U_x \neq \emptyset$ dir. $s = s(t_i)$ olduğunda $t = t_i$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. Bu şekilde sonlu tane t olduğu için sonlu tane s vardır. Yani $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi yerel sonludur.

Şimdi her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olduğunu gösterelim: $x \in F_s$ olsun. Bu durumda $x \in \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$ dir. Öyle bir t için $s(t) = s$ ve $x \in \overline{A_t}$ dir. Her $t \in T$ için $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$ olacak şekilde bir $s(t) \in S$ vardır. Böylece $x \in U_{s(t)=s}$ bulunur.

3.8. Yardımcı Teorem: Bir topolojik uzayın her açık σ -yerel sonlu \mathcal{V} örtüsü, bir yerel sonlu inceye sahiptir.

Kanıt: X bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{V}_i = \{V_s\}_{s \in S_i}$ açık kümelerin yerel sonlu bir ailesi, $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ ve $i \neq j$ için $S_i \cap S_j = \emptyset$ olsun. Her $s_0 \in S_i$ için

$$A_{s_0} = V_{s_0} \setminus \bigcup_{k < i} \bigcup_{s \in S_k} V_s$$

olarak alalım. Şimdi $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ ailesinin X uzayını örttüğünü ve \mathcal{V} 'nin incesi olduğunu gösterelim:

$x \in X$ olsun. \mathcal{V} örtü olduğundan $x \in V_{i_0}$ olacak şekilde bir i_0 vardır ve i_0 sayısına karşılık gelen $s \in S_{i_0}$ için $x \in V_s$ 'dir.

$$A_s = V_s \setminus \bigcup_{k < i_0} \bigcup_{s \in S_k} V_s$$

ile tanımlandığından ve $i \neq j$ için $S_i \cap S_j = \emptyset$ olduğundan $x \in A_s$ dir. Böylece \mathcal{A} ailesi X uzayını örter.

Ayrıca her $s \in S$ için $A_s \subset V_s$ olduğundan $\mathcal{A} \prec \mathcal{V}$ dir.

Şimdi \mathcal{A} ailesinin yerel sonlu olduğunu gösterelim:

$x \in X$ olsun. Biz $x \in \bigcup_{s \in S_k} V_s$ olacak şekildeki en küçük k doğal sayısını düşünelim ve $x \in V_{s_0}$ olacak şekilde $s_0 \in S_k$ alalım. Böylece V_{s_0} , x noktasının bir komşuluğudur ve bu komşuluk $s \in \bigcup_{j > k} S_j$ için tüm A_s kümelerinden ayrıktır:

$$A_s = V_s \setminus \bigcup_{k < i} \bigcup_{s \in S_k} V_s$$

kümesi $i \neq k$ için $S_i \cap S_k = \emptyset$ olduğundan $s \neq s_0$ dir. Şimdi bir $s \in \bigcup_{i > k} S_i$ için $V_{s_0} \cap A_s \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $a \in V_{s_0}$ ve $a \in A_s$ olacak şekilde bir $a \in X$ vardır. O halde $a \in V_s$ ve $a \notin \bigcup_{t < i} \bigcup_{s \in S_t} V_s$ dir. O zaman $t < i$ ve $s \in S_t$ için $a \notin V_s$ dir. Ancak bu sonuç $a \in V_{s_0}$ gerçeği ile çelişir. Çünkü $k = t$ olduğundan $s_0 \in S_k = S_t$ için $a \in V_{s_0}$ olur.

\mathcal{V}_i ailesi yerel sonlu olduğundan her $i \leq k$ için \mathcal{V}_i ailesinin sonlu tane elemanı ile kesişen x noktasının bir U_i komşuluğu vardır. Buradan x noktasının $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_k \cap V_{s_0}$ komşuluğu \mathcal{A} 'nın sonlu tane elemanı ile kesişir:

Her $i \leq k$ için U_i ve V_{s_0} , x noktasının bir komşuluğu olduğundan $U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_k \cap V_{s_0}$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. $i \leq k$ için $|\{s \in S_i : U_i \cap V_s \neq \emptyset\}| < \infty$ dur. $s \in S_i$ için $A_s \subset V_s$ olduğundan $i \leq k$ için $|\{s \in S_i : U_i \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$ olur. Buradan

$$|\{s \in S_i : [U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \dots \cap U_k \cap V_{s_0}] \cap A_s \neq \emptyset\}| < \infty$$

bulunur. Böylece \mathcal{A} ailesi yerel sonludur.

3.9. Teorem: Her regüler X uzayı için aşağıdakiler denktir:

- (i) X uzayı parakompakttır.
- (ii) X uzayının her açık örtüsü, açık σ -yerel sonlu inceye sahiptir.

(iii) X uzayının her açık örtüsü, bir yerel sonlu inceye sahiptir.

(iv) X uzayının her açık örtüsü, bir kapalı yerel sonlu inceye sahiptir.

Kanıt: (i) \implies (ii) X uzayının bir \mathcal{V} açık örtüsünü alalım. X uzayı parakompakt olduğundan yerel sonlu bir açık $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ incesi vardır. Bu ince aynı zamanda σ -yerel sonludur.

(ii) \implies (iii) X uzayının her açık örtüsü, açık σ -yerel sonlu inceye sahip olsun. Bu durumda bu açık σ -yerel sonlu ince de X uzayının açık örtüsü olduğundan Yardımcı Teorem 3.8 den bu örtünün bir yerel sonlu incesi vardır.

(iii) \implies (iv) X uzayının her açık örtüsü, bir yerel sonlu inceye sahip olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.7 den X uzayının her açık örtüsünün bir kapalı yerel sonlu incesi vardır.

(vi) \implies (i) X uzayının her açık örtüsü, bir kapalı yerel sonlu inceye sahip olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.35 den X uzayı parakompakttır.

3.10. Teorem: Bir X, T_1 uzayının collectionwise-normal olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının kapalı altkümelerinin her ayrık $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi ve her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ ve $s \neq s'$ olmak üzere, X uzayının açık altkümelerinden oluşan ve $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin mevcut olmasıdır.

Kanıt: (\implies): Collectionwise-normal uzay tanımından açıktır.

(\impliedby): Ayrık kapalı kümeleri ayıran ayrık açık kümeler bulunduğundan X uzayı normaldir. Böylece X uzayının kapalı kümelerinin bir ayrık $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi ve ikişer ayrık açık kümelerin $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi için

$$A = \bigcup_{s \in S} F_s \text{ ve } B = X \setminus \bigcup_{s \in S} U_s$$

olarak tanımlı kümeler kapalıdır. Çünkü $\{F_s\}_{s \in S}$ ayrık ailesi yerel sonludur. Böylece

$$\overline{A} = \overline{\bigcup_{s \in S} F_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{F_s} = \bigcup_{s \in S} F_s = A$$

olup A kümesi kapalıdır. Hipotezden $A \subset U$ ve $B \subset V$ olacak şekilde U, V ayrık açık kümeleri vardır.

Şimdi $V_s = U_s \cap U$ olmak üzere $\{V_s\}_{s \in S}$ ailesinin ayrık olduğunu gösterelim.

$A \subset U$ olduğundan $U_s \cap A \subset U_s \cap U = V_s$ dir. $x \in X$ olsun. Bu durumda ya $x \in V$ ya da $x \notin V$ dir. Eğer $x \notin V$ ise $x \notin B$ dir. O halde $x \in U_{s_0}$ olacak biçimde bir $s_0 \in S$ vardır. U_{s_0} kümesi açık olup x noktasının bir komşuluğudur. Böylece $U_{s_0} \cap U = V_{s_0} \in \{V_s\}_{s \in S}$ olup $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesi ikişer ayrık olduğundan U_{s_0} yalnızca V_{s_0} kesişir.

$x \in V$ olsun. $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi ayrık olduğundan $|\{s : N \cap F_s \neq \emptyset\}| \leq 1$ olacak şekilde bir N komşuluğu vardır. $x \in N \cap V$ olup $N \cap V$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. Ayrıca $V \cap U = \emptyset$ olduğundan $N \cap V \cap U = \emptyset$ dir. $V_s = U_s \cap U$ olup $N \cap V \cap V_s = \emptyset$ elde edildiğinden $\{V_s\}_{s \in S}$ ailesi ayrıktır. Bu durumda X uzayı collectionwise-normaldir.

Şimdi açılıma sahip collection-wise normal uzayların metriklenebilmesini inceleyelim.

3.11. Teorem: (Bing Metriklenebilme Kriteri) Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın collectionwise-normal olması ve bir açılıma sahip olmasıdır.

Kanıt:(\implies): X metriklenebilir bir uzay ve d , X üzerinde bir metrik olsun. X uzayının kapalı altkümelerinin her ayrık $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi için,

$$U_s = \{x \in X : d(x, F_s) < d(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'})\}$$

olmak üzere $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin Teorem 3.10 daki koşulları sağladığını görelim:

Her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olduğunu gösterelim. $x \in F_s$ olsun. $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi ayrık olduğundan, x noktasının bu $s \in S$ için en fazla F_s ile kesişecek şekilde bir komşuluğu vardır. Yani $s \neq s'$ için $B(x, \epsilon) \cap F_{s'} = \emptyset$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Dolayısıyla bu ϵ uzaklığı $d(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}) = 0$ oluşunu engeller. Zaten F_s kümesi kapalı ve $x \in F_s$ olduğundan $d(x, F_s) = 0$ dir. Böylece $d(x, F_s) < d(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'})$ olup $x \in U_s$ bulunur.

Şimdi $s \neq s'$ için $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ olduğunu gösterelim: $x \in U_s$ ise

$$d(x, F_s) < d(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'})$$

olup bir sayı kendisinden küçük olamayacağı için $x \notin U_{s'}$ dir.

Şimdi her $s \in S$ için U_s kümesinin açık olduğunu gösterelim:

$U_s = \{x \in X : d(x, F_s) < d(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'})\}$ olmak üzere bir noktanın bir kümeye olan uzaklığı sürekli bir fonksiyon tanımlayacağından

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = p(x, F_s) \quad \text{ve} \quad g : X \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = p(x, \bigcup_{s' \neq s} F_{s'})$$

olarak tanımlı f, g fonksiyonları süreklidir. Böylece $g - f$ fonksiyonu süreklidir. $U_s = \{x \in X : (g - f)(x) > 0\}$ olup $U_s = (g - f)^{-1}(0, \infty)$ dir. $(0, \infty)$ açık ve $(g - f)^{-1}$ sürekli olduğundan U_s açıktır. Böylece X uzayı collectionwise-normaldir.

Şimdi de $\mathcal{W}_i = \{B(x, \frac{1}{i})\}_{x \in X}$ olmak üzere $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ dizisinin X uzayı için bir açılım olduğunu gösterelim. Her i için \mathcal{W}_i ailesi, X uzayının bir açık örtüsüdür.

$x \in X$ ve $U \subset X$, x noktasının bir komşuluğu olsun. Bu durumda $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Eğer $\frac{1}{i} < \frac{\epsilon}{2}$ alırsak $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olur:

$z \in St(x, \mathcal{W}_i)$ olsun. Bu durumda öyle bir $W \in \mathcal{W}_i$ vardır ki, $x \in W$ ve $z \in W$ dir. $W = B(y, \frac{1}{i})$ olmak üzere

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i} < \epsilon$$

olup $z \in B(x, \epsilon) \subset U$ bulunur. Böylece $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olup $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ dizisi X uzayı için bir açılımdır.

(\Leftarrow): $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ açılımına sahip, bir collectionwise-normal X uzayını alalım. Başlangıç için X uzayının her $\{U_s\}_{s \in S}$ açık örtüsünün bir σ -yerel sonlu açık inceye sahip olduğunu göstereceğiz. S kümesi üzerinde bir iyi sıralı $<$ bağıntısı verilsin ve

$$F_{s,i} = X \setminus [St(X \setminus U_s, \mathcal{W}_i) \cup \bigcup_{s' < s} U_{s'}] \subset U$$

olarak tanımlansın. $s \in S$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $St(X \setminus U_s, \mathcal{W}_i)$ ve $\bigcup_{s' < s} U_{s'}$ kümeleri açık olduğundan $F_{s,i}$ kümesi kapalıdır.

Şimdi $F_{s,i}$ kümelerinin X uzayının bir örtüsü olduğunu gösterelim: Gerçekten herhangi bir $x \in X$ için $x \in U_{s(x)}$ olacak şekilde S kümesinin bir en küçük $s(x)$ elemanı (S kümesi iyi sıralı olduğundan vardır) ve $St(x, \mathcal{W}_{i(x)}) \subset U_{s(x)}$ olacak şekilde bir $i(x)$ doğal sayısı (açılıma sahip olduğundan) vardır.

Böylece $x \in F_{s(x), i(x)}$ dir: Biz $x \notin F_{s(x), i(x)}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$x \in St(X \setminus U_{s(x)}, \mathcal{W}_{i(x)}) \cup \bigcup_{s' < s(x)} U_{s'}$$

olur. Oysa ki $St(x, \mathcal{W}_{i(x)}) \subset U_{s(x)}$ olduğundan $x \notin St(X \setminus U_{s(x)}, \mathcal{W}_{i(x)})$ dir ve $s(x)$ en küçük olduğundan $x \notin \bigcup_{s' < s(x)} U_{s'}$ olarak bulunur. O halde $x \in F_{s(x), i(x)}$ dir.

Sabit bir i doğal sayısı için $U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i)$ kümesi x noktasının bir komşuluğu olup $\mathcal{F}_i = \{F_{s,i}\}_{s \in S}$ ailesinin yalnızca bir elemanı ile kesişir. Çünkü $x \in U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i)$ olup bu küme açıktır. Ayrıca

$$F_{s(x), i} = X \setminus [St(X \setminus U_{s(x)}, \mathcal{W}_i) \cup \bigcup_{s' < s(x)} U_{s'}]$$

olup $U_{s(x)} \cap \bigcup_{s' < s(x)} U_{s'} = \emptyset$ ve $U_{s(x)} \cap St(X \setminus U_{s(x)}, \mathcal{W}_i) = \emptyset$ olduğundan (ayrıca $U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i) \subset U_{s(x)}$ idi) $[U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i)] \cap F_{s(x), i} \neq \emptyset$ dir.

Şimdi $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\{\mathcal{F}_i\}$ ailesinin herhangi bir $F_{s,i}$ kümesi ile kesişmediklerini gösterelim: S kümesi tam sıralı olduğundan ya $s(x) < s$ ya da $s < s(x)$ dir. $s(x) < s$ olsun. $U_{s(x)} \subset \bigcup_{s' < s} U_{s'}$ olduğundan $[U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i)] \cap F_{s,i} = \emptyset$ dir. Şimdi de $s < s(x)$ olsun. Bu durumda $x \notin U_s$ dir. $x \in X \setminus U_s$ olup $St(x, \mathcal{W}_i) \subset St(X \setminus U_s, \mathcal{W}_i)$ olduğundan $[U_{s(x)} \cap St(x, \mathcal{W}_i)] \cap F_{s,i} = \emptyset$ olur. Böylece bu küme yalnızca $F_{s(x),i}$ ile kesişir. Bu sonuç da $\mathcal{F}_i = \{F_{s,i}\}_{s \in S}$ ailesinin ayrık olması demektir.

X uzayı collectionwise-normal ve dolayısıyla normal olduğundan $s \in S$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $F_{s,i} \subset U_{s,i} \subset U_s$ olacak şekilde $U_{s,i}$ açık kümeleri vardır ve her i doğal sayısı için $\{U_{s,i}\}_{s \in S}$ ailesi ayrıktır. Buradan $\{U_{s,i}\}_{i=1}^{\infty}, \{U_s\}_{s \in S}$ ailesinin σ -yerel sonlu açık incesidir. Böylece uzayın her açık örtüsünün bir σ -yerel sonlu açık incesi vardır.

Şimdi $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\mathcal{B}_i, \mathcal{W}_i$ açık örtüsünün bir σ -yerel sonlu açık incesi olsun. $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ ailesi X uzayı için σ -yerel sonlu bir tabandır: $x \in U$ ve $U \subset X$ kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. $x \in B_i \in \mathcal{B}_i$ olmak üzere $\mathcal{B}_i \prec \mathcal{W}_i$ olduğundan $x \in B_i \subseteq W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}_i$ vardır. Böylece $x \in B_i \subseteq W \subset St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olup $B \in \bigcup \mathcal{B}_i$ olduğundan \mathcal{B} ailesi X uzayı için bir tabandır.

Böylece X uzayı regüler ve σ -yerel sonlu tabana sahip olduğundan Nagata-Smirnov Teoreminden metriklenebilir.

3.12. Tanım: X bir topolojik uzay ve $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ bu uzayın açık örtülerinin bir dizisi olsun. Her $x \in X$ ve x noktasının her U komşuluğu için $St(V, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde x noktasının bir V komşuluğu ve i doğal sayısı varsa bu diziyeye X uzayı için bir **kuvvetli açılım** denir.

Tanımlardan kuvvetli açılıma sahip bir uzayın bir açılıma sahip olacağı açıktır.

3.13. Teorem: (Moore Metriklenebilme Teoremi) Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın T_0 olması ve bir kuvvetli açılıma sahip olmasıdır.

Kanıt:(\implies): X uzayı üzerindeki $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ eşitliğini sağlayan d metriği için $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{W}_i = \{B(x, \frac{1}{i})\}_{x \in X}$ olarak tanımlı $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ dizisinin X uzayı için bir kuvvetli açılım olduğunu gösterelim:

Öncelikle tüm \mathcal{W}_i örtüleri açıktır. $x \in X$ ve $U \subset X$ kümesi, x noktasının bir komşuluğu olsun. Bu durumda X uzayı metriklenebilir olduğundan $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Şimdi $V = B(x, \frac{\epsilon}{2})$ olarak alırsak V kümesi x noktasının bir komşuluğudur. Böylece $\frac{1}{i} < \frac{\epsilon}{4}$ olacak şekilde seçilen bir i doğal

sayısı için $St(V, \mathcal{W}_i) \subset U$ sağlanır. O halde bu i doğal sayısı için $B(y, \frac{1}{i}) \in \mathcal{W}_i$ ve $B(y, \frac{1}{i}) \cap V \neq \emptyset$ ise $B(y, \frac{1}{i}) \subset U$ olduğunu göstermek yetecektir. Çünkü \mathcal{W}_i 'nin V kümesi ile kesişen her elemanı U 'nun altında kalmalı ki $St(V, \mathcal{W}_i) \subset U$ olsun.

Şimdi $B(y, \frac{1}{i}) \subset U$ olduğunu gösterelim: $z \in B(y, \frac{1}{i})$ olsun. Buradan $d(z, y) < \frac{1}{i}$ dir. Böylece $B(y, \frac{1}{i}) \cap V \neq \emptyset$ ise $w \in B(y, \frac{1}{i})$ ve $w \in V$ olacak şekilde bir $w \in X$ vardır.

$$d(z, x) < d(z, y) + d(y, w) + d(w, x) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olup $z \in B(x, \epsilon) \subset U$ olduğundan $z \in U$ elde edilir. Böylece $St(V, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir V komşuluğu ve bir i doğal sayısı bulduğumuz için $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ dizisi X uzayı için bir kuvvetli açılımdır.

X metriklenebilir bir uzay olduğundan T_0 dir.

(\Leftarrow): X bir T_0 uzay ve $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ kuvvetli açılımına sahip olsun. X uzayının collectionwise-normal olduğunu gösterirsek, Bing Metriklenebilir Kriteğine göre X uzayı metriklenebilir olacaktır.

Başlangıç için X uzayının T_1 olduğunu gösterelim:

$x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. X uzayı T_0 olduğundan $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır. Ayrıca X uzayı bir kuvvetli açılıma sahip olduğundan $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır.

Şimdi $y \in W$ olan bir $W \in \mathcal{W}_i$ kümesi verilsin. Bu durumda $x \notin W$ olduğundan X uzayı T_1 dir.

Şimdi X uzayının collectionwise-normal olduğunu göstermek için; X uzayının kapalı altkümelerinin her ayrık $\{F_s\}_{s \in S}$ ailesi ve her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ ve $s \neq s'$ için $U \cap U_{s'} = \emptyset$ olacak şekilde açık kümelerden oluşan $\{U_s\}_{s \in S}$ ailesini oluşturacağız.

Her $s \in S$ ve her $x \in F_s$ için $X \setminus \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. X uzayı bir kuvvetli açılıma sahip olduğundan

$$St(V_x, \mathcal{W}_{i(x)}) \subset X \setminus \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}$$

olacak şekilde bir V_x komşuluğu ve bir $i(x)$ doğal sayısı vardır. Bu durumda $St(V_x, \mathcal{W}_{i(x)}) \cap [\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}] = \emptyset$ dir. Şimdi $V_x \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, \mathcal{W}_{i(x)}) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $a \in V_x$ ve $a \in \bigcup \{W \in \mathcal{W}_{i(x)} : W \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} \neq \emptyset\}$ olacak şekilde bir $a \in X$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $a \in V_x$ ise $a \in X \setminus \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}$ olup her $s' \neq s$ için $a \notin F_{s'}$ dir. Eğer $a \in \bigcup \{W \in \mathcal{W}_{i(x)} : W \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} \neq \emptyset\}$ ise $W \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} \neq \emptyset$ ve $a \in W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}_{i(x)}$ vardır. Bu $W \in \mathcal{W}_{i(x)}$ için $a \in W$ olduğundan $W \cap V_x \neq \emptyset$ dir. Bu ise yıldız tanımından

$W \subset St(V_x, W_{i(x)})$ olur. Böylece

$$St(V_x, W_{i(x)}) \subset X \setminus \bigcup_{s' \neq s} F_{s'}$$

elde edilir ki bu sonuç $W \cap \bigcup_{s' \neq s} F_{s'} \neq \emptyset$ olması ile çelişir. O halde

$$V_x \cap St\left(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_{i(x)}\right) = \emptyset \dots \dots (*)$$

dir.

Şimdi de $s \in S$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$W_{s,i} = \bigcup \{V_x : x \in F_s, i(x) = i\}$$

olarak alalım. (*) eşitliğinden $W_{s,i} \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_i) = \emptyset$ olur. Bunu göstermek için $x \in F_s$ ve $i(x) = i$ olan bir $V_x \subset W_{s,i}$ için $V_x \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_i) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Ancak her $x \in F_s$ 'ye karşılık gelen V_x kümesi için $V_x \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_i) \neq \emptyset$ olması bir çelişki yaratır.

Böylece $St(F_s, W_i) \cap \bigcup_{s' \neq s} W_{s',i} = \emptyset$ olur. Bunu göstermek için bir $s' \neq s$ için $W_{s',i} \cap St(F_s, W_i) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in F_{s'}$ ve $i(x) = i$ olmak üzere bir $V_x \subset W_{s',i}$ için $V_x \cap St(F_s, W_i) \neq \emptyset$ dir. Buradan $W_{s',i} \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_i) \neq \emptyset$ elde edilir. Bu durum $W_{s,i} \cap St(\bigcup_{s' \neq s} F_{s'}, W_i) = \emptyset$ oluşu ile çelişir. Buradan $St(F_s, W_i) \cap \bigcup_{s' \neq s} W_{s',i} = \emptyset$ bulunur. Şimdi $s \in S$ ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',i}} = \emptyset \dots (**)$$

olduğunu gösterelim:

$F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',i}} \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $St(F_s, W_i)$ kümesi açık olup $F_s \subset St(F_s, W_i)$ dir. Ancak $St(F_s, W_i) \cap \bigcup_{s' \neq s} W_{s',i} = \emptyset$ dir. Yani F_s kümesini içeren ve $\bigcup_{s' \neq s} W_{s',i}$ kümesi ile arakesiti boş olan bir açık küme bulduk. O halde $F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',i}} = \emptyset$ dir.

Her $s \in S$ için $G_{s,i} = W_{s,i} \setminus \overline{\bigcup_{j \leq i} \bigcup_{s' \neq s} W_{s',j}}$ olmak üzere

$$U_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{s,i}$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan U_s kümeleri açıktır. Çünkü $\overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',j}}$ kapalı bir küme ve $j \leq i$ üzerinden sonlu birleşim alındığı için $\bigcup_{j \leq i} \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',j}}$ kümesi de kapalıdır. Böylece $W_{s,i}$ kümesi açık olduğundan $G_{s,i}$ kümesi de açık bir kümedir.

O halde $U_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{s,i}$ olarak tanımlı olduğundan her $s \in S$ için U_s kümesi açıktır.

(**) eşitliğinden $F_s \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{s,i}$ kapsamı vardır.

Şimdi her $s \in S$ için $F_s \subset U_s$ olduğunu gösterelim: $x \in F_s$ olsun. $F_s \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_{s,i}$ olduğundan bir i doğal sayısı için $x \in W_{s,i}$ dir. $F_s \cap \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',i}} = \emptyset$ olduğundan $j \leq i$ için $x \notin \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',j}}$ dir. Böylece $x \in G_{s,i}$ olup $x \in U_s$ bulunur.

Şimdi de $s \neq s'$ ve $i, j = 1, 2, 3, \dots$ için $G_{s,i} \cap G_{s',j} = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Bunu görmek için $j \leq i$ olmak üzere $a \in G_{s,i}$ ve $a \in G_{s',j}$ olacak şekilde bir $a \in X$ alalım. Şimdi $a \in G_{s,i}$ ise $a \in W_{s,i}$ ve $j \leq i$ için $a \notin \overline{\bigcup_{s' \neq s} W_{s',j}}$ dir. $a \in G_{s',j}$ ise $a \in W_{s',j}$ ve $t \leq j$ için $a \notin \overline{\bigcup_{s'' \neq s'} W_{s'',t}}$ dir. $a \notin W_{s',j}$ ve $G_{s',j} \subset W_{s',j}$ olduğundan $a \notin G_{s',j}$ bulunur ki, bu bir çelişkidir. O halde $G_{s,i} \cap G_{s',j} = \emptyset$ dir.

Böylece $s \neq s'$ için $U_s \cap U_{s'} = \emptyset$ elde edilir ve X uzayı collectionwise-normal olup metriklenebilirdir.

3.14. Tanım: X bir topolojik uzay ve \mathcal{B} , X uzayının bir tabanı olsun. Her $x \in X$ ve x noktasının her U komşuluğu için

$$\{B \in \mathcal{B} : x \in B, B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

kümesi sonlu ise \mathcal{B} tabanına **noktasal regüler** denir.

3.15. Tanım: X bir topolojik uzay ve \mathcal{B} , X uzayının bir tabanı olsun. Her $x \in X$, x noktasının her U komşuluğu için

$$\{B \in \mathcal{B} : B \cap V \neq \emptyset, B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

kümesi sonlu olacak şekilde x noktasının en az bir $V \subseteq U$ komşuluğu varsa, \mathcal{B} tabanına **regüler** denir.

Tanımlardan her regüler tabanın noktasal regüler olduğu açıktır.

3.16. Tanım: \mathcal{A} kümelerin bir ailesi ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$(\forall A' \in \mathcal{A}) (A \subset A' \implies A = A')$$

ise, A kümesine \mathcal{A} ailesinin **maksimal elemanı** denir. \mathcal{A} ailesinin tüm maksimal elemanlarından oluşan aileyi \mathcal{A}^m ile göstereceğiz.

Ayrıca $I(X) = \{\{x\} : x \in X, \{x\} \text{ açık küme}\}$ olarak tanımlansın.

3.17. Yardımcı Teorem: Bir X topolojik uzayı için \mathcal{B} noktasal regüler (regüler) taban ise, $\mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}$ ailesi X uzayının noktasal sonlu (yerel sonlu) bir örtüsüdür.

Kanıt: Önce $\bigcup \mathcal{B}^m = X$ olduğunu göstereceğiz: $x \in X$ olsun. Bu durumda $x \in U_0$ olacak şekilde bir $U_0 \in \mathcal{B}$ vardır. Her $M \in \mathcal{B}^m$ için $x \notin M$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, 3, \dots$ için $U_i \in \mathcal{B}$ ve $U_i \not\subset U_{i+1}$ olmak üzere $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ dizisini oluşturabiliriz. Yani \mathcal{B} ailesinin x noktasını içeren ve $X \setminus U$ ile kesişen elemanlarının bir $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisini oluşturabiliriz. (Burada her i doğal sayısı için $U_i \notin \mathcal{B}^m$ dir. Çünkü U_i maksimal eleman değildir.) Ancak bu durum \mathcal{B} 'nin noktasal regüler oluşu ile çelişir. Çünkü x noktasının öyle bir komşuluğunu bulduk ki; \mathcal{B} 'nin x noktasını içeren ve $X \setminus U$ kümesi ile kesişen elemanlarının kümesi sonsuzdur. Böylece en az bir $M \in \mathcal{B}^m$ için $x \in M$ olup $x \in \bigcup \mathcal{B}^m$ dir.

Şimdi \mathcal{B}^m 'nin noktasal sonlu (yerel sonlu) olduğunu göstereceğiz: $x \in X$ ve $x \in U \in \mathcal{B}^m$ olsun. \mathcal{B} 'nin hem $X \setminus U$ hem de $\{x\}$ ile (ve x noktasının bir V komşuluğu ile) kesişen elemanlarının kümesi sonludur. Buradan x noktasını içeren (V kümesi ile kesişen) her $U' \in \mathcal{B}^m \setminus \{U\}$ kümesi $X \setminus U$ ile kesişir. Çünkü $U' \cap (X \setminus U) = \emptyset$ olsa $U' \subset U$ olur. Bu ise $U' \in \mathcal{B}^m \setminus \{U\}$ oluşu ile çelişir.

Böylece \mathcal{B}^m 'nin x noktasını içeren (V kümesi ile kesişen) sonlu tane elemanı vardır: Çünkü \mathcal{B}^m 'nin x noktasını içeren elemanları dolayısıyla $X \setminus U$ ile kesişir. Böylece \mathcal{B} , noktasal regüler olduğundan x noktasını içeren elemanları sonlu tanedir.

Son olarak \mathcal{B}^m 'nin yerel sonlu olduğunu görelim: $V \cap U' \neq \emptyset$ olan her $U' \in \mathcal{B}^m \setminus \{U\}$ için $U' \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ idi. Böylece \mathcal{B} regüler olduğundan x noktasının V komşuluğu \mathcal{B}^m 'nin sonlu tane elemanı ile kesişir.

3.18. Tanım: X bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ ise x noktasına A kümesinin bir **yiğılma noktası** denir. A kümesinin yiğılma noktaları kümesini A^d ile gösterelim. $A \setminus A^d$ kümesinin elemanlarına A kümesinin **izole noktaları** denir.

Tanımdan bir $x \in X$ noktasının izole nokta olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x\}$ kümesinin açık olmasıdır.

3.19. Yardımcı Teorem: X topolojik uzayı T_1 ve \mathcal{B} bu uzayın bir tabanı olsun. Bu durumda her noktasal-sonlu $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ örtüsü için

$$\mathcal{B}'' = (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}') \cup I(X)$$

ailesi X uzayı için bir tabandır. Ayrıca \mathcal{B} noktasal regüler (regüler) ise \mathcal{B}'' noktasal regüler (regüler) dir.

Kanıt: $x \in X$ ve $U \subset X$ kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. x bir izole nokta ise $\{x\} \in I(X)$ ve $x \in \{x\} \subset U$ dir. Eğer x bir izole nokta değilse bir $y \neq x$ noktası için $y \in \bigcap \{W \in \mathcal{B}' : x \in W\}$ ve $V \subset U \setminus \{y\}$ koşulunu sağlayan x noktasının bir $V \in \mathcal{B}$ komşuluğu için $V \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ dir: x bir izole nokta

olmadığı için $x \in \overline{X \setminus \{x}}$ dir. Bu durumda x noktasının her U komşuluğu için $U \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$ dir. \mathcal{B}' noktasal sonlu olduğu için $\{W \in \mathcal{B}' : x \in W\}$ ailesi sonludur. Böylece $\bigcap \{W \in \mathcal{B}' : x \in W\}$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. $x \in \overline{X \setminus \{x}}$ olduğundan $[\bigcap \{W \in \mathcal{B}' : x \in W\}] \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$ dir. Böylece gerçekten x noktasından farklı bir y noktası için $y \in \bigcap \{W \in \mathcal{B}' : x \in W\}$ dir.

X uzayı T_1 olduğundan $\{y\}$ kümesi kapalıdır. Böylece $U \setminus \{y\}$ kümesi x noktasının bir komşuluğudur. \mathcal{B} taban olduğundan $x \in V \subset U \setminus \{y\}$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $y \notin V$ olduğundan $V \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ bulunur. O halde $\mathcal{B}'' = (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}') \cup I(X)$ bir tabandır.

Şimdi de \mathcal{B}'' ailesinin noktasal regüler olduğunu gösterelim: $x \in X$ ve U kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. \mathcal{B}'' ailesinin x noktasını içeren ve $X \setminus U$ ile kesişen elemanları, yalnızca $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ kümesine aittir. Çünkü $B'' \in I(X)$ için $B'' = \{x\}$ olup $\{x\} \cap (X \setminus U) = \emptyset$ olacaktır. $B'' \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ ise $B'' \in \mathcal{B}$ olup, \mathcal{B} zaten noktasal regüler olduğundan x noktasını içeren ve $X \setminus U$ ile kesişen sonlu tane B'' olacaktır. Böylece \mathcal{B}'' noktasal regülerdir.

Şimdi de \mathcal{B}' 'nin regüler olduğu durumda \mathcal{B}'' tabanının regüler olduğunu görelim: $x \in X$ ve $U \subset X$ kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. $V \subset U$ koşulunu sağlayan x noktasının her V komşuluğu için

$$|\{B'' \in \mathcal{B}'' : B'' \cap V \neq \emptyset, B'' \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}| = \infty$$

olsun. Oysa bu durum \mathcal{B} ailesinin regüler oluşu ile çelişir. Bu koşulu sağlayan $B'' \in \mathcal{B}''$ kümelerinin ailesi \mathcal{B}' 'nin bir alttailesidir.

3.20. Yardımcı Teorem: X topolojik uzayı T_1 olsun. \mathcal{B} , X uzayının noktasal regüler (regüler) tabanı olmak üzere

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^m \text{ ve } i = 2, 3, 4, \dots \text{ için } \mathcal{B}_i = [(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{B}_j) \cup I(X)]^m$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ dir ve $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots$ dizisi X uzayının noktasal sonlu (yerel sonlu) açık örtülerinin bir dizisidir.

Kanıt: \mathcal{B} noktasal regüler (regüler) olduğundan $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^m$ Yardımcı Teorem 3.17 den X uzayının noktasal sonlu (yerel sonlu) bir açık örtüsüdür.

Tanımlardan $\mathcal{B}_2 = [(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1) \cup I(X)]^m$ olup, \mathcal{B}_1 noktasal sonlu bir örtü ve \mathcal{B} noktasal regüler (regüler) olduğundan Yardımcı Teorem 3.19 dan den $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1) \cup I(X)$ kümesi de noktasal regüler (regüler) dir. Öyleyse Yardımcı Teorem 3.17 den \mathcal{B}_2 , X uzayının noktasal sonlu (yerel sonlu) bir açık örtüsüdür.

$\mathcal{B}_3 = [(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cup I(X)]^m$ olup, \mathcal{B}_1 ve \mathcal{B}_2 noktasal sonlu bir örtü olduğundan $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de noktasal sonlu ve \mathcal{B} noktasal regüler (regüler) olduğundan Yardımcı Teorem 3.19 dan $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cup I(X)$ noktasal regüler (regüler) olup Yardımcı Teorem 3.17 den \mathcal{B}_3 , X uzayının noktasal sonlu (yerel sonlu) açık bir örtüsüdür.

Şimdi de $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ olduğunu gösterelim: Her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ dir. \mathcal{B} noktasal regüler bir taban olduğundan her $U \in \mathcal{B}$ için $U \subset U'$ olacak şekilde $U' \in \mathcal{B}$ kümelerinin sonlu tane olacağını gösterelim. Bunun için $U \in \mathcal{B}$ ve $x \in U$ alalım.

$$x \in U \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

olacak şekilde sonsuz tane $U_i \in \mathcal{B}$ olsaydı,

$$|\{U_i \in \mathcal{B} : x \in U_i, U_i \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}| = \infty$$

olurdu ki, bu \mathcal{B} tabanının noktasal regüler oluşu ile çelişir. Böylece her $U \in \mathcal{B}$ için U kümesini kapsayan \mathcal{B} 'nin elemanları sonlu tanedir.

Şimdi her $U \in \mathcal{B}$ için $U \in \mathcal{B}_i$ olacak şekilde bir i doğal sayısı bulalım: Bunun için bir $U \in \mathcal{B}$ alalım. U kümesi \mathcal{B} 'de maksimal eleman ise $U \in \mathcal{B}_1$ olup işimiz biter. U kümesi \mathcal{B} 'de maksimal eleman değilse $U \neq U'$ ve $U \subset U'$ olacak şekilde bir $U' \in \mathcal{B}$ vardır. Üstelik

$$|\{U' \in \mathcal{B} : U \subseteq U', U \neq U'\}| < \infty$$

dir. O halde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $U \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n-1} \subset U_n$ olacak şekilde $U \subset U_i \in \mathcal{B}$ alabiliriz. Bu durumda U_n , \mathcal{B} 'de maksimal eleman olup $U_n \in \mathcal{B}_1$ dir. Öyleyse $U_{n-1} \notin \mathcal{B}_1$ dir. Yani $U_{n-1} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ dir.

$$\mathcal{B}_2 = [(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1) \cup I(X)]^m$$

idi. O halde $U_{n-1} \in \mathcal{B}_2$ dir. Bu şekilde

$$\mathcal{B}_3 = [(\mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)) \cup I(X)]^m$$

olduğu için $U_{n-2} \in \mathcal{B}_3$ olacaktır. Aynı şekilde devam edersek $U \in \mathcal{B}_{n+1}$ olur. Böylece her $U \in \mathcal{B}$ için $U \in \mathcal{B}_i$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. Yani $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ olup $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$ elde edilir.

Şimdi bir uzayın metriklenebilmesini regüler tabanlarla ilişkilendirelim.

3.21. Teorem: (Arhangel'skiü Metriklenebilme Teoremi) Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul uzayın T_1 olması ve bir regüler tabana sahip olmasıdır.

Kanıt: (\implies): Önce metriklenebilir bir X uzayının regüler bir tabana sahip olduğunu gösterelim. d , X uzayı üzerinde bir metrik olsun. Böylece $\{B(x, \frac{1}{4i})\}_{x \in X}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. Stone Teoreminden bu açık örtünün yerel sonlu \mathcal{B}_i açık incesi vardır. Şimdi $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ ailesinin X uzayı için bir taban olduğunu gösterelim. $x \in U$ ve $U \subset X$ açık olsun. X uzayı metriklenebilir olduğundan $x \in B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{B}_i \prec \{B(x, \frac{1}{4i})\}_{x \in X}$ olduğundan \mathcal{B}_i , X uzayını bir örtüsüdür. Böylece $\frac{1}{2i} < \epsilon$ olacak şekilde bir i doğal sayısı seçersek, bu i 'ye karşılık gelen \mathcal{B}_i için; göstermemiz gereken $x \in B \subset B(x, \epsilon) \subset U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}_i$ 'nin varlığıdır. $\mathcal{B}_i \prec \{B(x, \frac{1}{4i})\}_{x \in X}$ olduğundan $x \in B \subseteq B(y, \frac{1}{4i})$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. Şimdi $B(y, \frac{1}{4i}) \subset B(x, \epsilon)$ olduğunu gösterelim: $z \in B(y, \frac{1}{4i})$ olsun. Bu durumda $d(y, z) < \frac{1}{4i}$ ve $x \in B$ olduğundan $d(y, x) < \frac{1}{4i}$ dir. Ayrıca

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{4i} + \frac{1}{4i} = \frac{1}{2i} < \epsilon$$

olduğundan $z \in B(x, \epsilon)$ olur. Böylece $B(y, \frac{1}{4i}) \subset B(x, \epsilon)$ olup $x \in B \subset B(x, \epsilon) \subset U$ bulunur ki bu da $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ ailesinin X uzayı için bir taban olması demektir.

Şimdi $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ 'nin tabanının regüler olduğunu gösterelim: $x \in X$ ve $x \in U$ kümesi açık olsun. Bu durumda $B(x, \frac{1}{i}) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısının var olduğunu gösterelim.

Her $i \in \mathbb{N}$ için $B(x, \frac{1}{i}) \not\subset U$ olduğunu varsayalım $x \in U$, U açık ve \mathcal{B} taban olduğundan $x \in B \subset U$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ için $B \in \mathcal{B}_i$ vardır. Ayrıca $\mathcal{B}_i \prec \{B(x, \frac{1}{4i})\}_{x \in X}$ olduğundan $B \subset B(y, \frac{1}{4i})$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. Şimdi $B(y, \frac{1}{4i}) \subset B(x, \frac{1}{i})$ olduğunu gösterelim:

$z \in B(y, \frac{1}{4i})$ olmak üzere

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{4i} + \frac{1}{4i} = \frac{1}{2i}$$

dir. Ayrıca $z \in B(x, \frac{1}{2i}) \subset B(x, \frac{1}{i})$ olduğundan $z \in B(x, \frac{1}{i})$ bulunur. Böylece $x \in B \subset B(y, \frac{1}{4i}) \subset B(x, \frac{1}{i})$ olur. Ancak bu $x \in B \subset U$ oluşu ile çelişir. O halde $B(x, \frac{1}{i}) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. $V_0 = B(x, \frac{1}{2i})$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, i$ için

$$|\{B \in \mathcal{B}_j : B \cap V_j \neq \emptyset\}| < \infty$$

olmak üzere V_j kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. \mathcal{B}_j yerel sonlu olduğundan V_j komşuluklarını tanımlamaya hakkımız vardır. Şimdi

$$V = \bigcap_{j=0}^i V_j$$

kümesini gözönüne alalım. Buradan

$$V \subseteq V_0 = B(x, \frac{1}{2i}) \subset B(x, \frac{1}{i}) \subset U$$

olup $V \subset U$ bulunur.

$j > i$ için $B \in \mathcal{B}_j$ olmak üzere $B \cap V = \emptyset$ dir: $j > i$ için $x \in B \in \mathcal{B}_j$ olsun. $\mathcal{B}_j \prec \{B(x, \frac{1}{4j})\}_{x \in X}$ olduğundan $x \in B \subset B(z, \frac{1}{4j})$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Şimdi $B(z, \frac{1}{4j}) \cap V_0 = \emptyset$ olduğunu gösterelim: $m \in B(z, \frac{1}{4j}) \cap V_0$ olacak şekilde bir $m \in X$ olduğunu düşünelim. $V_0 = B(x, \frac{1}{2i})$ olarak alabiliriz.

$$d(x, z) \leq d(x, m) + d(m, z) < \frac{1}{2i} + \frac{1}{4j} < \frac{1}{2i} + \frac{1}{4i} = \frac{3}{4i}$$

Ancak $d(x, z) < \frac{1}{4j}$ idi. O halde $\frac{3}{4i} \leq \frac{1}{4j}$ olmalıdır. Yani $3j \leq i$ olmalıdır. Oysa bu $j > i$ olması ile çelişir. O halde $j > i$ ve her $B \in \mathcal{B}_j$ için $B \cap V = \emptyset$ dir. Buradan $j \leq i$ ve her $B \in \mathcal{B}_j$ için B kümesi sonlu tane V kümesi ile kesişecektir. (\Leftarrow): X T_1 uzayı \mathcal{B} regüler tabanına sahip olsun. $x \in X$ ve U kümesi x noktasının bir komşuluğu olsun. \mathcal{B} regüler olduğundan $V \subset U$ ve

$$|\{B \in \mathcal{B} : B \cap V \neq \emptyset, B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}| < \infty$$

olacak şekilde x noktasının bir V komşuluğu vardır. Şimdi $\bar{V} \subset U$ olduğunu gösterelim: $y \in \bar{V}$ ve $y \notin U$ olsun. Şimdi $\{B \in \mathcal{B} : y \in B\}$ kümesini düşünelim. $y \in B$ olmak üzere $y \in \bar{V}$ olduğundan $B \cap V \neq \emptyset$ ve $y \notin U$ olduğundan $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ dir. \mathcal{B} regüler olduğundan $|\{B \in \mathcal{B} : y \in B\}| < \infty$ dir. Bu küme $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n$ olsun. Bu durumda $y \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ dir. Ayrıca $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}$ dir.

$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{B}_i = C$ dersek $y \in C$ olmak üzere C kümesi en az iki elemanlıdır. Çünkü $C = \{y\}$ olsaydı, C kümesi açık ve y noktasını içerdiğinden $C \cap V = \emptyset$ olurdu ki, bu $y \in \bar{V}$ olması ile çelişir. O halde $y \neq z$ olmak üzere bir $z \in C$ noktası vardır. $\{z\}$ kümesi kapalı ve $C \setminus \{z\}$ açık olup $y \in C \setminus \{z\} \subseteq C$ olur. \mathcal{B} taban olduğundan $y \in \mathcal{B}^* \subseteq C \setminus \{z\} \subseteq C$ olacak şekilde bir $\mathcal{B}^* \in \mathcal{B}$ vardır. Böylece $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_i$ ve $y \in \mathcal{B}^* \subseteq C$ bulunur ki bu y noktasını içeren en küçük açık kümenin C kümesi olması ile çelişir. O halde $\bar{V} \subset U$ elde edilir.

Böylece T_1, X uzayı regülerdir. Bu uzay σ -yerel sonlu bir tabana sahiptir. Çünkü \mathcal{B} regülerdir ve böylece $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^m$ ve $i = 2, 3, \dots$ için $\mathcal{B}_i = [(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{B}_j) \cup I(X)]^m$ olmak üzere $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots$ dizisinin X uzayının yerel sonlu açık örtüsü olduğunu ve $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ olduğunu daha önce göstermiştik. O halde X uzayı regüler ve σ -yerel sonlu tabana sahip olduğundan Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoreminden metriklenebilirdir.

3.22. Yardımcı Teorem: Bir Hausdorff X uzayı için aşağıdakiler denktir.

- (1) X uzayı noktasal regüler tabana sahiptir.
- (2) X uzayı zayıf parakompakttır ve bir açılıma sahiptir.
- (3) X uzayı noktasal sonlu örtülerden oluşan açılıma sahiptir.

Kanıt: (1) \implies (2) \mathcal{B} , Hausdorff X uzayının noktasal regüler tabanı olmak üzere \mathcal{U} , X uzayının bir açık örtüsü olsun. Şimdi

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} : (\exists U \in \mathcal{U})(B \subseteq U)\}$$

olarak tanımlansın. \mathcal{B}_0 kümesi boştan farklıdır. Çünkü $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ olduğu için $U \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. U kümesi açık olduğundan $x \in U$ için $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece $B \subseteq U$ olup $B \in \mathcal{B}_0$ dir.

\mathcal{B}_0 , X uzayı için noktasal regüler bir tabandır. Gerçekten, $G \subseteq X$ açık ve $x \in G$ olsun. \mathcal{B} taban olduğundan $x \in B \subseteq G$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır. $x \in X$ ve \mathcal{U} ailesi X uzayının bir örtüsü olduğundan $x \in U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. $x \in U \cap B$ olup, $U \cap B$ kümesi açıktır. $x \in B^* \subseteq U \cap B \subset U$ olacak şekilde bir $B^* \in \mathcal{B}$ olduğundan $x \in B^* \subset G$ olacak şekilde bir $B^* \in \mathcal{B}_0$ bulunur. Böylece \mathcal{B}_0 bir tabandır. G kümesi x noktasının bir komşuluğu olmak üzere

$$|\{B \in \mathcal{B}_0 : x \in B, B \cap (X \setminus G) \neq \emptyset\}| = \infty$$

olduğunu varsayalım. Ancak $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ ve \mathcal{B} noktasal regüler olduğundan bu olanaksızdır. Böylece \mathcal{B}_0 noktasal regüler bir tabandır.

Yardımcı Teorem 3.17 den \mathcal{B}_0^m , X uzayının noktasal sonlu bir örtüsüdür. Şimdi $\mathcal{B}_0^m \prec \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz. \mathcal{B}_0 ailesinin tanımından ve $\mathcal{B}_0^m \subset \mathcal{B}_0$ olduğundan her $B \in \mathcal{B}_0^m$ için $B \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece $\mathcal{B}_0^m \prec \mathcal{U}$ bulunur. Buradan X uzayı zayıf parakompakttır.

Şimdi X uzayının bir açılıma sahip olduğunu gösterelim: $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^m$ ve $i = 2, 3, \dots$ için $\mathcal{B}_i = [(\mathcal{B} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{B}_j) \cup I(X)]^m$ olmak üzere X uzayının açık örtüleri

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \dots$ dizisini gözönüne alalım. Yardımcı Teorem 3.20 den $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ olduğunu biliyoruz. \mathcal{B} noktasal regüler olduğundan, bir $x \in X$ noktası ve x noktasının her U komşuluğu için x 'i içeren ve $X \setminus U$ ile kesişen, \mathcal{B} 'nin $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k$ gibi sonlu tane elemanı vardır. Buradan $i \neq j$ için $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \subset I(X)$ dir:

$i > j$ için $B \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j$ olsun. $B \in \mathcal{B}_i$ ve $B \in \mathcal{B}_j$ dir. Bu durumda $B, I(X)$ 'de maksimal olmak zorundadır. Ancak $B \in [I(X)]^m$ olması $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \subset I(X)$ olması demektir.

Bir noktadan fazla nokta içeren $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k$ kümeleri ve $j = 1, 2, 3, \dots, k$ için $U_j \notin \mathcal{B}_i$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır:

Her $i \in \mathbb{N}$ için $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k \in \mathcal{B}_i$ olduğunu varsayalım. Ancak $i \neq j$ için $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \subset I(X)$ olduğunu göstermiştik. Yani U_1, U_2, \dots, U_k tek noktalı kümeler olmadıkları için $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \subset I(X)$ oluşu ile çelişkiye düşeriz. O halde $j = 1, 2, \dots, k$ için $U_j \notin \mathcal{B}_i$ dir.

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ için $St(x, \mathcal{B}_i) \subset U$ olur. Yani bu dizi X için bir açılımdır. Yani $X \setminus U$ ile kesişen U_j ler \mathcal{B}_i nin elemanı olmadığı için \mathcal{B}_i nin x i içeren bütün elemanları U kümesinin altında kalır. Böylece

$$St(x, \mathcal{B}_i) = \cup\{B \in \mathcal{B}_i | x \in B\} \subset U$$

olur.

(2) \implies (3) : X uzayı zayıf parakompakt ve $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ açık örtülerin dizisi X uzayı için bir açılım olsun. Bu durumda her $x \in X$ ve x noktasının her U komşuluğu için $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. X uzayı zayıf parakompakt olduğundan her \mathcal{W}_i için $\mathcal{U}_i \prec \mathcal{W}_i$ olacak şekilde \mathcal{U}_i noktasal sonlu açık incesi vardır.

Şimdi $St(x, \mathcal{U}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısının varlığını gösterelim: Bunun için tersini varsayalım. Yani her $i \in \mathbb{N}$ için

$$St(x, \mathcal{U}_i) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$$

olsun. Bu durumda $y \in St(x, \mathcal{U}_i)$ ve $y \in (X \setminus U)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $y \in St(x, \mathcal{U}_i)$ ise $x \in U_i$ ve $y \in U_i$ olacak şekilde bir $U_i \in \mathcal{U}_i$ vardır. $\mathcal{U}_i \prec \mathcal{W}_i$ olduğundan her $U_i \in \mathcal{U}_i$ için $x \in U_i \subset W \subset U$ olacak biçimde bir $W \in \mathcal{W}_i$ olması $y \notin U$ olması ile çelişir. Böylece $St(x, \mathcal{U}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır.

(3) \implies (1) : $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots, X$ uzayı için noktasal sonlu örtülerden oluşan bir açılım olsun. $j \geq i$ için $\mathcal{W}_j \prec \mathcal{W}_i$ olduğunu varsaymak genel durumu bozmaz.

$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{W}_i$ ailesinin X uzayı için bir taban olduğunu gösterelim.

U açık ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. Bu i doğal sayısı için \mathcal{W}_i örtü olduğundan $x \in W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}_i$ vardır. $x \in W \subset St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olup $W \in \mathcal{B}$ olduğundan tabandır.

Şimdi de \mathcal{B} 'nin noktasal regüler olduğunu gösterelim: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots, X$ uzayı için açılım olduğundan $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. Ayrıca $j \geq i$ için $\mathcal{W}_j \prec \mathcal{W}_i$ idi. $y \in St(x, \mathcal{W}_j)$ ise $x \in W$ ve $y \in W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}_j$ vardır. $\mathcal{W}_j \prec \mathcal{W}_i$ olduğundan $W \subset \mathcal{W}_i$ olacak şekilde bir $W_i \in \mathcal{W}_i$ vardır. $y \in W_i$ ve \mathcal{W}_i 'nin x noktasını içeren bütün elemanlarının birleşimi U 'nun

altında kaldığından \mathcal{W}_j 'nin de x noktasını içeren bütün elemanlarının birleşimi U 'nun altında kalır.

$\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots, \mathcal{W}_{i-1}$ örtülerinin her biri noktasal sonlu olduğundan bu örtülerin her birinde x noktasını içeren sonlu tane eleman vardır. Böylece \mathcal{B} 'nin x noktasını içeren ve $X \setminus U$ kümesi ile kesişen sonlu tane elemanı olduğundan \mathcal{B} noktasal regülerdir.

3.23. Teorem: (Alexandroff Metriklenebilme Kriteri:) *Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın collection-wise normal olması ve bir noktasal regüler tabana sahip olmasıdır.*

Kanıt:(\implies): Daha önce her metriklenebilir uzayın collection-wise normal olduğunu göstermiştik. Arhangel'skii Metriklenebilme Kriterinden de metriklenebilir uzayın regüler tabana sahip olduğunu biliyoruz. Böylece kanıtın bu yönü açıktır.

(\impliedby): Noktasal regüler taban sahip uzayların bir açılıma sahip olduğunu biliyoruz. Bing Metriklenebilme Kriterinden bu uzay metriklenebilirdir.

3.24. Teorem: (Alexandroff-Urysohn Metriklenebilme Teoremi:) *Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın T_0 olması ve aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ açılımına sahip olmasıdır.*

$i \in \mathbb{N}$ ve $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ olmak üzere $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_{i+1}$ için $W_1 \cup W_2 \subset W$ koşulunu sağlayan bir $W \in \mathcal{W}_i$ vardır.

Kanıt: X uzayı d metriği ile metriklenebilir olsun. Uzay açık olarak T_0 dır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_i = \{B(x, \frac{1}{2^i})\}_{x \in X}$ olmak üzere $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ dizisinin X uzayı için bir açılım olduğunu gösterelim:

$x \in X$ ve U , x noktasının bir komşuluğu olsun. $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Şimdi $\frac{2}{2^i} < \epsilon$ olacak şekilde bir i doğal sayısı seçelim ve

$$St(x, \mathcal{W}_i) \subset B(x, \epsilon) \subset U$$

olduğunu gösterelim: $y \in St(x, \mathcal{W}_i)$ olsun. O halde $x \in W$ ve $y \in W$ olacak şekilde bir $W \in \mathcal{W}_i$ vardır. $x \in W = B(z, \frac{1}{2^i})$ olarak alalım. Bu durumda

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^i} < \epsilon$$

olduğundan $y \in B(x, \epsilon)$ olur. Böylece $St(x, \mathcal{W}_i) \subset B(x, \epsilon) \subset U$ bulunur. Bu $\{\mathcal{W}_i\}$ açılımının teoremde verilen koşulu sağladığı kolayca görülebilir.

Kanıtın diğer yönü için, teoremdeki koşulları sağlayan $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$, açılıma sahip bir T_0 , X uzayını düşünelim. Şimdi biz bu koşulları sağlayan $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$, açılımının X uzayı için kuvvetli açılım olduğunu göstereceğiz:

$x \in X$ ve U , x noktasının bir komşuluğu olsun. Bu durumda $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. $x \in V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{W}_{i+1}$ verilsin. Kabulümüzden, V kümesi ile kesişen her $W \in \mathcal{W}_{i+1}$ için $V \cup W \subset W'$ olacak şekilde $W' \in \mathcal{W}_i$ vardır. $St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$ ve $x \in W'$ olduğundan $W' \subset U$ dur. Böylece $V \cup W \subset W'$ olup $V \subset U$ bulunur. Buradan $x \in V$,

$$V \cup W \subset W' \subset St(x, \mathcal{W}_i) \subset U$$

olur. Yani $St(V, \mathcal{W}_{i+1}) \subset U$ bulunmuş olur.

Böylece $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$, dizisi X uzayı için kuvvetli açıktır. O halde Moore Metriklenebilme Teoreminden X uzayı metriklenebilirdir.

3.25. Tanım: $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in T}$ ve $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$, X uzayının farklı örtüleri olsunlar. Her $t \in T$ için

$$St(B_t, \mathcal{B}) \subset A_s$$

olacak şekilde bir $s \in S$ varsa \mathcal{B} örtüsüne \mathcal{A} örtüsünün yıldız incesidir denir ve $\mathcal{B} \prec (*)\mathcal{A}$ ile gösterilir.

Şimdi aşağıdaki sonucu kolayca söyleyebiliriz.

3.26. Sonuç: Bir topolojik uzayın metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu uzayın T_0 olması ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $\mathcal{W}_{i+1}, \mathcal{W}_i$ 'nin yıldız incesi olacak şekilde bir $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$, açılımına sahip olmasıdır.

4. METRİKLENEBİLİRLİK İÇİN KRİTERLER

4.1. Tanım: X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $\{W(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu diziye x noktasında **sayılabilir, azalan, yerel komşuluklar tabanı** denir.

- (1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $W(n+1, x) \subseteq W(n, x)$ dir.
- (2) x noktasının her U komşuluğu için $W(n, x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Burada $W(n, x)$ açık komşuluk olmak zorunda değildir.

4.2. Teorem: X uzayı T_1 olsun. X uzayı metriklenebilirdir ancak ve ancak her $x \in X$ noktasının aşağıdaki (A) koşulunu sağlayan bir $\{W(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ sayılabilir, azalan, yerel komşuluklar tabanı vardır.

(A) $U \subset X$ açık ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $y \in V$ için $x \in W(s, y) \subseteq U$ olacak şekilde bir $s = s(x, U)$ pozitif tamsayısı ve $x \in V = V(x, U)$ açık kümesi vardır.

Bundan sonra özel olarak bahsedilmedikçe bütün uzaylar T_1 alınacaktır.

Şimdi bu teoremin kanıtında kullanacağımız bir yardımcı teoremi kanıtlayalım.

4.3. Yardımcı Teorem: X bir topolojik uzay ve $\{W(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ dizisi x noktasında bir azalan, yerel komşuluklar tabanı olsun.

Aşağıdaki (B) ve (C) özelliklerinden her biri, Teorem 4.2 nin (A) koşuluna denktir.

- (B) Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $y \in W(r, x)$ ise, $x \in W(s, y) \subseteq W(n, x)$ ve $r > s > n$ olacak şekilde $r = r(n, x)$ ve $s = s(n, x)$ sayıları vardır.
- (C) Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $y \in W(r, x)$ ise, $x \in W(n, y)$ ve $W(r, y) \subseteq W(n, x)$ ve $r \geq n$ olacak şekilde bir $r = r(n, x)$ sayısı vardır.

Kanıt: (A) \Rightarrow (B) : $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $x \in W(n, x)$ dir. $x \in U \subseteq W(n, x)$ olacak şekilde bir U açık kümesi seçelim. (A) varsayımından her $y \in V$ için $x \in W(s, y) \subseteq U$ olacak şekilde bir $s = s(x, U) \in \mathbb{N}$ ve bir $V = V(x, U)$ açık kümesi vardır.

Şimdi iki durum söz konusudur: İlk olarak $W(n, x)$, x noktasının en küçük komşuluğu olmasın. Yukarıdaki kapsamadan $x \in V$ için $x = y$ alınırsa $s > n$ olur. V , x noktasını kapsayan açık küme olduğundan

$$W(r, x) \subseteq V$$

olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ vardır. Burada r sayısını istediğimiz kadar büyük seçebiliriz. Böylece $U \subseteq W(n, x)$ kapsamından her $y \in W(r, x)$ için $x \in W(s, y) \subseteq W(n, x)$ elde edilir. $r > s > n$ olduğu açıktır.

Şimdi de $W(n, x)$, x noktasının en küçük komşuluğu olsun. Bu durumda $V = W(n, x)$ olur. X uzayı T_1 olduğundan $y \in V$ için $x = y$ dir. O halde $r > s > n$ için $y \in W(r, x)$ ise, $x \in W(s, y) \subseteq W(n, x)$ elde edilir.

(B) \implies (C) : $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. (B) varsayımından $r > s > n$ ve $y \in W(r, x)$ ise $x \in W(s, y) \subseteq W(n, x)$ olacak şekilde $r = r(n, x)$ ve $s = s(n, x)$ sayıları vardır. $s > n$ olduğundan $W(s, y) \subseteq W(n, y)$ ve böylece $x \in W(n, y)$ dir. Ayrıca $r > s$ den $W(r, y) \subseteq W(s, y)$, yani $W(r, y) \subseteq W(n, x)$ elde edilir.

(C) \implies (A) : $x \in U$ ve U açık olsun.

$$x \in W(n, x) \subseteq U$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. (C) varsayımından, $y \in W(r, x)$ ise $x \in W(n, y)$ ve $W(r, y) \subseteq W(n, x)$ olacak şekilde bir $r \geq n$ doğal sayısı bulabiliriz. $W(r, x)$, x noktasının bir komşuluğu olduğundan $x \in V \subseteq W(r, x)$ olacak şekilde bir V açık kümesi vardır. Böylece $y \in W(r, x)$ ise $x \in W(n, y)$ ve $W(r, y) \subseteq W(n, x)$ ifadesi $y \in V$ için de geçerli olur.

Şimdi Teorem 4.2 nin kanıtı için, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ olmak üzere $r = r(n, x)$ ve $s = s(n, x)$ sayıları (B) koşulunu sağlayan sayılar olsun. Genel durumu bozmayaacağından $r(n, x) \leq r(n+1, x)$ alabiliriz. Şimdi $r_1(n, x) = n$ olsun. Bu durumda tümevarımla

$$r_{i+1}(n, x) = r(r_i(n, x), x), x$$

dizisini göz önüne alalım.

Şimdi Teorem 4.2 nin kanıtında kullanacağımız bir yardımcı teorem daha yazıp, kanıtlayalım.

4.4. Yardımcı Teorem :

- (i) $x \in W(r(r(n, x), y), y)$ ise $W(r(r(n, x), y), y) \subseteq W(n, x)$ dir.
- (ii) Eğer $W(r_2(n, x), x) \cap W(r_2(m, y), y) \neq \emptyset$ ise $W(r_2(n, x), x) \subseteq W(m, y)$ veya $W(r_2(m, y), y) \subseteq W(n, x)$ dir.

Kanıt: (i) $x \in W(r(r(n, x), y), y)$ olsun. Şimdi $n' = r(n, x)$, $r' = r(r(n, x), y)$ ve $s' = s(r(n, x), y)$ dersek $r' > s' > n' = r > s > n$ dir. (B) koşulundan $x \in W(r', y)$ ise $y \in W(s', x) \subseteq W(n', y)$ dir. Buradan $y \in W(n', x) = W(r(n, x), x)$ dir. $y \in W(r, x)$ ve $W(r(n, x), x) \subseteq W(s, y) \subseteq W(n, x)$ olduğundan $W(r', y) \subseteq W(n, x)$ bulunur. Böylece

$$W(r(r(n, x), y), y) \subseteq W(n, x)$$

elde edilir.

(ii) y ve m için $r = r(m, y)$, $s = s(m, y)$ ve $r(m, y) > s(m, y) > m$ olmak üzere,

$$x \in W(r(m, y), y) \Rightarrow y \in W(s(m, y), x) \subseteq W(m, y)$$

dir. Ayrıca x ve $r(n, x)$ için $r_2(n, x) > s'(n, x) > r(n, x)$ ve

$$z \in W(r_2(n, x), x) \Rightarrow x \in W(s'(n, x), z) \subseteq W(r(n, x), x)$$

ve y ile $r(m, y)$ için $r_2(m, y) > s'(m, y) > r(m, y)$ ve

$$z \in W(r_2(m, y), y) \Rightarrow y \in W(s'(m, y), z) \subseteq W(r(m, y), y)$$

dir. Şimdi $z \in W(r_2(n, x), x) \cap W(r_2(m, y), y)$ olsun. $s'(n, x) > s'(m, y)$ varsayalım. Bu durumda $x \in W(s'(n, x), z) \subseteq W(s'(m, y), z) \subseteq W(r(m, y), y)$ olur. Böylece $y \in W(s(m, y), x) \subseteq W(m, y)$ bulunur. Diğer yandan $r_2(n, x) > s'(n, x) > s'(m, y) > r(m, y)$ olduğundan $W(r_2(n, x), x) \subseteq W(m, y)$ elde edilir. Eğer $s'(n, x) < s'(m, y)$ varsayılırsa, benzer şekilde $W(r_2(m, y), y) \subseteq W(n, x)$ olduğu kolayca görülebilir.

Artık Teorem 4.2 nin kanıtına geçebiliriz.

Kanıt:(\implies): T_1 , X uzayı metriklenebilir olsun. Bu durumda X uzayı aynı zamanda birinci sayılabilir olduğundan, her $x \in X$ için bir sayılabilir azalan $\{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluklar tabanı vardır.

Şimdi (A) özelliğine denk olan (C) özelliğinin gerçekleştiğini görelim: Bir x noktasının $\mathcal{U}_{(x)}$ komşuluklar ailesi olmak üzere $U \in \mathcal{U}_{(x)}$ ise her $y \in V$ için $U \in \mathcal{U}_{(y)}$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}_{(x)}$ komşuluğunun varlığını biliyoruz.

$x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ alalım. $\{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluklar tabanı olduğundan $x \in W(n, x)$ dir. Şimdi $V = W(r, x)$ olacak şekilde bir r doğal sayısı vardır ki, her $y \in V = W(r, x)$ için $W(n, x) \in \{W(n, y) : n \in \mathbb{N}\}$ dir. Yani $y \in W(r, x)$ ise, $x \in W(n, y)$ olup eğer $r \geq n$ seçersek $W(r, y) \subseteq W(n, x)$ olur. Böylece (C) özelliği, dolayısıyla da (A) özelliği gerçekleştiğinden kanıtın bir yönü tamamlanır.

(\impliedby): Önce her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n = \{W(r(n, x), x)^\circ : x \in X\}$$

kümelerini gözönüne alalım. Bu tanımlamaya göre her $n \in \mathbb{N}$ için G_n ailesinin bir açık örtü olduğu kolayca görülebilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $St(x, G(r(n, x))) \subseteq W(n, x)$ olduğunu görelim:

Tanımlardan $St(x, G(r(n, x))) = \bigcup \{A \in G(r(n, x)) : x \in A\}$ ve $G(r(n, x)) = \{W(r(r(n, x), y), y)^\circ : y \in X\}$ dir. Böylece Yardımcı Teorem 4.4 (ii) ye göre

$x \in W(r(r(n, x), y), y)$ ise, $W(r(r(n, x), y), y) \subseteq W(n, x)$ dir. Her biri $W(n, x)$ tarafından kapsandığı için $St(x, G(r(n, x))) \subseteq W(n, x)$ dir.

Şimdi de $\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X uzayı için bir açılım olduğunu gösterelim: $x \in X$ ve U , x noktasının bir komşuluğu olsun. $x \in W(n, x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n için

$$St(x, G(r(n, x))) \subseteq W(n, x) \subseteq U$$

dir. O halde $\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X uzayı için bir açılımdır.

Şimdi $V(n, x) = W(r_{2n}(1, x), x)^\circ$ olmak üzere

$$c(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{her } z \text{ için } \{x, y\} \not\subseteq V(1, z) \\ 2^{-n} & \text{En az bir } z \text{ için } \{x, y\} \subseteq V(n, z) \\ & \text{ve bu bağıntı için } n \text{ maximal} \end{cases}$$

ile tanımlı reel değerli c fonksiyonunu düşünelim.

$$H(n) = \{V(n, x) : x \in X\}$$

olsun. Şimdi her n doğal sayısı için $H(n) \prec G(n)$ olduğunu gösterelim:

Biz $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $x \in X$ için $V(n, x) \subseteq W(r(n, y), y)^\circ$ olacak şekilde bir $y \in X$ noktasının olduğunu göstermeliyiz. Eğer $y = x$ olarak kabul edip

$$V(n, x) = W(r_{2n}(1, x), x)^\circ \subseteq W(r(n, x), x)^\circ$$

kapsamasını gösterirsek, yine de istenen elde edilir. O halde $n = 1$ için bakalım: $r_2(1, x) = r(r(r_1(1, x), x), x)$ ve $r_1(1, x) = 1$ olduğundan $r_2(1, x) = r(r(1, x), x)$ dir. Eğer $r(r(1, x), x) \geq r(1, x)$ ise açıktır. Diğer durumda her zaman $r(1, x) \geq 1$ olacağından istenen gerçekleşir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $H(n) \prec G(n)$ olarak bulunur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $H(n) \prec G(n)$ ve $\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi X uzayı için bir açılım olduğundan $\{H(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi de X uzayı için bir açılımdır. Buradan c fonksiyonu tüm $X \times X$ üzerinde tanımlıdır. Yardımcı Teorem 4.4. (ii) den, $i = 1, 2$ için $V(n+1, x_i) \cap V(n+1, x_{i+1}) \neq \emptyset$ ise bu durumda $j \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^3 V(n+1, x_i) \subseteq V(n, x_j)$$

olacak şekilde olmak üzere bir j doğal sayısı vardır.

$$d(x, y) = \inf \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = y \right\}$$

fonksiyonu $d(x, y) \geq \frac{c(x, y)}{2}$ olmak üzere X uzayı üzerinde bir metrik tanımlar. Önce bu fonksiyonun bir metrik olduğunu gösterelim:

(M1) $x, y \in X$ olmak üzere $d(x, y) = 0$ olsun. Bu toplam $k \in \mathbb{N}$ sayısına bağlı ve toplamın alt sınırlarının en büyüğü sıfır olduğundan $k = 1$ olmalıdır. Buradan $k = 1$ ise, $c(x_0, x_1) = c(x, y) = 0$ olup $x = y$ bulunur. Şimdi $x = y$ ise, $c(x, y) = 0$ olduğunu gösterelim. Bu durumda yine $k = 1$ olmalıdır. Çünkü eşit iki nokta arasında başka hiçbir nokta bulunamaz. O halde $d(x, y) = \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = y\} = c(x, y) = 0$ bulunur. Ayrıca her $x, y \in X$ için $c(x, y) \geq 0$ olduğu için $d(x, y) \geq 0$ dır.

(M2) $x, y \in X$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = y\} \\ &= \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_{r+1}, x_r) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = y\} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

(M3) $x, y, t \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, t) + d(t, y)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = y\} \\ &\leq \inf\{\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = t\} + \{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = t, x_k = y\}\} \\ &\leq \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = x, x_k = t\} + \inf\{\sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) : k \in \mathbb{N}, x_r \in X, x_0 = t, x_k = y\} \\ &= d(x, t) + d(t, y) \end{aligned}$$

Böylece $d(x, y) \leq d(x, t) + d(t, y)$ bulunur. O halde d fonksiyonu $X \times X$ üzerinde metriktir.

Eğer $\gamma(x, y) = \{n : (\exists z \in X)(\{x, y\} \in V(n, z))\}$ biçiminde tanımlarsak

$$c(x, y) = \begin{cases} 0 & \gamma(x, y) \text{ sonsuz} \\ 1 & \gamma(x, y) = \emptyset \\ 2^{-n} & n = \max \gamma(x, y) \end{cases}$$

olur. Şimdi de $d(x, y) \geq \frac{c(x, y)}{2}$ olduğunu gösterelim: Bunun için; tüm x_0, x_1, \dots, x_k zincirleri için

$$c(x_0, x_k) \leq e = \sum_{r=0}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) \cdots (*)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu yüzden k üzerinden tümevarım uygulayacağız. $k = 1$ için durum açıktır. $k' < k$ olmak üzere $y_0, y_1, \dots, y_{k'}$ zinciri eşitsizliği sağlasın. Eğer x_0, x_1, \dots, x_k zinciri için $e = 0$ elde ediliyorsa $c(x_0, x_k) = 0$ olup (*) elde edilir. Biz bu nedenle $e \neq 0$ kabul edip

$$p = \min\{n : \sum_{r=0}^{n-1} c(x_r, x_{r+1}) > \frac{e}{2}\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece tümevarım hipotezi aracılığıyla

$$c(x_0, x_{p-1}) \leq \sum_{r=0}^{p-2} c(x_r, x_{r+1}) \leq \frac{e}{2}$$

$$c(x_p, x_k) \leq \sum_{r=p}^{k-1} c(x_r, x_{r+1}) \leq \frac{e}{2}$$

ve

$$c(x_0, x_{p-1}) \leq e, c(x_{p-1}, x_p) \leq e, c(x_p, x_k) \leq \frac{e}{2} \dots (**)$$

elde ederiz.

$c(x_0, x_k) \leq 1$ olduğundan eğer $e \geq \frac{1}{2}$ ise (*) açıktır. Öyleyse $e \leq \frac{1}{2}$ olduğunu varsayalım. Eğer n , $2^{-n-1} \leq e$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı ise (**)
eşitsizliği ve c 'nin tanımından, $\gamma(x_0, x_{p-1})$, $\gamma(x_{p-1}, x_p)$ ve $\gamma(x_p, x_k)$ 'nin herbiri $n+1$ dir. Bundan dolayı

$(x_0, x_{p-1}) \in V(n+1, y_1)$, $(x_{p-1}, x_p) \in V(n+1, y_2)$ ve $(x_p, x_k) \in V(n+1, y_3)$ olacak biçimde $y_1, y_2, y_3 \in X$ vardır. Buradan bir $1 \leq j \leq 3$ için $x_0 \in V(n+1, y_1) \subseteq V(n, y)$ ve $x_k \in V(n+1, y_3) \subseteq V(n, y_j)$ olup ve böylece $n \in \gamma(x_0, x_k)$ dir. Buradan $c(x_0, x_k) \leq 2^{-n} \leq \frac{e}{2}$ olur ki böylece tümevarım tamamlanır. O halde her $x, y \in X$ için

$$\frac{c(x, y)}{2} \leq d(x, y) \leq c(x, y)$$

elde edilir.

Şimdi bu d metriğinin X üzerindeki topolojiyi ürettiğini gösterelim.

$U \subset X$ açık ve $x \in U$ olsun. Bu durumda $W(n, x) \subset U$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca

$$V(n, x) = W(r_{2n}(1, x), x)^\circ \subseteq W(r_{2n}(1, x), x) \subseteq W(r(n, x), x)$$

olup $H(n) = \{V(n, x) : x \in X\}$ ailesi X uzayı için bir açılım olduğundan

$$St(H(n), x) \subseteq W(n, x)$$

olur. Şimdi $\epsilon = 2^{-n-1}$ ve $y \in B(x, \epsilon)$ olsun. Böylece $c(x, y) < 2^{-n}$ olur. c fonksiyonunun tanımından $y \in V(n, z) = W(r_{2^n}(1, z), z)^\circ$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $\{x, y\} \in V(n, z)$ olduğundan

$$y \in V(n, z) \subseteq St(H(n), x) \subseteq W(n, x) \subseteq U$$

olduğundan $B(x, 2^{-n-1}) \subseteq U$ elde edilir.

Kapsamanın diğer yönü benzer şekilde elde edilir.



Bu bölümde R. H. Bing'in "bir collectionwise - normal, açılabilir uzayın metriklenebilir" olması sonucu ile Teorem 4.2'yi ilişkilendireceğiz:

$\{A_i : i \in I\}$ kapalı kümelerin ayrık ailesi olsun. Bu durumda her $x \in A_i$ için $j \neq i$ olduğunda $U(x) \cap A_j = \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir açık $U(x)$ komşuluğu vardır. (A) özelliğinden, $y \in V(x)$ ise $x \in W(s(x, U), y) \subseteq U$ olacak şekilde x noktasının bir $V(x)$ açık komşuluğu ve bir $s(x, U)$ tamsayısı vardır. Her noktadaki yerel taban azalan olduğu için,

$$U_i = \bigcup \{V(x) : x \in A_i\}$$

olmak üzere $\{U_i : i \in I\}$ ailesi (pairwise disjoint) ikişer ayrıktır. Bunu görmek için, tersini varsayalım. Yani $i \neq i^*$ için $U_i \cap U_{i^*} \neq \emptyset$ olsun. O halde $y \in U_i$ ve $y \in U_{i^*}$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $y \in U_i$ ise öyle bir $x \in A_i$ için $y \in V(x)$ dir. $y \in U_{i^*}$ ise öyle bir $x' \in A_{i^*}$ için $y \in V(x')$ dir. $x \in A_i$ için $i \neq i^*$ olduğundan $U(x) \cap A_{i^*} = \emptyset$ olacak şekilde x noktasının bir açık $U(x)$ komşuluğu vardır. (A) özelliğinden $y \in V(x)$ olduğunda $x \in W(s(x, U), y) \subseteq U(x)$ olacak şekilde $s = s(x, U)$ tamsayısı vardır. $x' \in A_{i^*}$ için $i \neq i^*$ olduğundan $U(x') \cap A_i = \emptyset$ olacak şekilde x' noktasının bir açık $U(x')$ komşuluğu vardır. (A) özelliğinden $y \in V(x')$ olduğunda $x' \in W(s^*(x', U), y) \subseteq U(x')$ olacak şekilde $s^* = s^*(x', U)$ tamsayısı vardır. Sonuç olarak $x \in W(s, y) \subseteq U(x)$ ve $x' \in W(s^*, y) \subseteq U(x')$ elde edilir. Burada s, s^* iki tamsayı olduğundan ya $s < s^*$ ya da $s^* < s$ dir. Eğer $s < s^*$ ise, $W(s^*, y) \subseteq W(s, y)$ dir ve $x' \in W(s^*, y)$ olduğundan $x' \in W(s, y)$ ve dolayısıyla $x' \in U(x)$ olur. $x' \in U(x)$ ve $x' \in A_{i^*}$ olduğundan $U(x) \cap A_{i^*} = \emptyset$ oluşu ile çelişir. Eğer $s^* < s$ ise $W(s, y) \subseteq W(s^*, y)$ dir. $x \in W(s, y)$ ise $x \in W(s^*, y)$ ve dolayısıyla $x \in U(x')$ olur. Buradan $x \in U(x')$ ve $x \in A_i$ oluşu $U(x') \cap A_i = \emptyset$ olması ile çelişir.

O halde $\{U_i : i \in I\}$ ailesi ikişer ayrıktır.

Şimdi de X uzayının collectionwise-normal olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ için A_i kümesi kapalı ve $\{A_i : i \in I\}$ ailesi ayrık idi. Şimdi $\{U_i : i \in I\}$ ailesinin aradığımız aile olduğunu iddia ediyoruz. Yani her $i \in I$ için $A_i \subseteq U_i$ ve $\{U_i : i \in I\}$ açık kümelerden oluşan ayrık ailedir.

Öncelikle U_i kümesinin tanımından $A_i \subseteq U_i$ olduğu açıktır. Ayrıca her $x \in A_i$ için $V(x)$ kümesi açık ve açık kümelerin herhangi sayıda birleşimi açık olduğundan U_i kümesi de açıktır. $\{U_i : i \in I\}$ ailesinin ikişer ayrık aile olduğunu göstermiştik.

$x \in X$ olsun. $\{A_i : i \in I\}$ ayrık aile olduğundan

$$|\{A_i : U \cap A_i \neq \emptyset, i \in I\}| \leq 1$$

olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu vardır. Eğer tek bir i için $U \cap A_i \neq \emptyset$ ise, $A_i \subseteq U_i$ olduğundan $U \cap U_i \neq \emptyset$ olacaktır. Ayrıca $i \neq j$ iken $U_i \cap U_j = \emptyset$ olduğundan da $i \neq j$ olan her j için $U \cap U_j = \emptyset$ olacaktır.

Eğer her $i \in I$ için $U \cap A_i = \emptyset$ ise $U \cap U_i = \emptyset$ olacağından yine istenen elde edilmiş olacaktır. Yani $\{U_i : i \in I\}$ ailesi açık kümelerin ayrık bir ailesidir. O halde X uzayı collectionwise-normaldir.

TEOREM 4.2 NİN BAZI SONUÇLARI

4.5. Teorem: Bir X uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul her bir $x \in X$ için x noktasında aşağıdaki (D) ve (E) koşullarını sağlayan bir $\{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir, yerel komşuluk tabanının var olmasıdır.

(D) Her x ve n için,

$$y \in V_1 \Rightarrow x \in R(n, y)$$

olacak şekilde x noktasını içeren bir V_1 açığı vardır.

(E) Her bir x ve x noktasını içeren her U açık kümesi için,

$$y \in V_2 \Rightarrow R(r, y) \subseteq U$$

olacak şekilde bir r sayısı ve x noktasını içeren bir V_2 açığı vardır.

Kanıt: (\implies) X uzayı metriklenebilir olsun. Bu durumda Teorem 4.2 den (A) koşulunu sağlayan, her $x \in X$ noktasında $\{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluklar tabanı vardır. (A) koşulu Yardımcı Teorem 4.3 de geçen (C) koşuluna denk olduğundan (C) ise (D) ve (E) olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

x ve n alalım. (C)'den $y \in R(r, x)$ ise $x \in R(n, y)$ olacak şekilde $r \geq n$ vardır. $R(r, x)$ komşuluğu açık olmak zorunda değildir ama kapsadığı bir açık küme mutlaka vardır. Bu açık kümeye V_1 dersek

$$x \in V_1 \subseteq R(r, x)$$

dir. Böylece $y \in V_1$ ise $x \in R(n, y)$ bulunur. O halde (D) koşulu gerçekleşir.

$x \in X$ ve $x \in U$ olmak üzere U açık kümesini alalım. $\{R(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ sayılabilir, azalan, yerel komşuluklar tabanı olduğu için $R(n, x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu x ve n için (C)'den $y \in R(r, x)$ ise $x \in R(n, y)$ ve $R(r, y) \subseteq R(n, x)$ olacak şekilde bir $r \geq n$ sayısı vardır. $R(r, x)$ komşuluğu açık olmak zorunda değildir ama kapsadığı bir açık mutlaka vardır. Bu açık kümeye V_2 dersek

$$x \in V_2 \subseteq R(r, x)$$

dir. Böylece $y \in V_2$ ise $R(r, y) \subseteq R(n, x) \subseteq U$ bulunur. O halde (E) koşulu gerçekleşir.

(\impliedby) X uzayındaki, her bir $x \in X$ noktasında (D) ve (E) koşullarını gerçekleyen bir $\{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir, yerel komşuluk tabanı olsun.

$$W(n, x) = \bigcap \{R(i, x) : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$$

ile tanımlanan $W(n, x)$ ailesini gözönüne alalım. Her n için $W(n, x)$, yine x noktasının bir komşuluğudur. Üstelik tanımdan her n için $W(n+1, x) \subseteq W(n, x)$ dir. x ve x noktasını kapsayan her U açık kümesi için $\{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir, azalan, yerel komşuluk tabanı olduğundan $R(n^*, x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $n^* \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $W(n, x)$ 'in tanımından $n \geq n^*$ olmak üzere

$$W(n, x) \subseteq R(n^*, x) \subseteq U$$

dur. O halde $\{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x noktasında sayılabilir, azalan, yerel komşuluklar tabanıdır.

Şimdi Teorem 4.2 deki (A) koşulunun sağlandığını göstermeliyiz.

$x \in U$ ve U açık bir küme olsun. (E)'den öyle bir r tamsayısı ve x noktasını içeren V_2 açığı vardır ki $y \in V_2$ ise $R(r, y) \subseteq U$ dur. $W(r, y) \subseteq R(r, y)$ olduğundan $y \in V_2$ ise $W(r, y) \subseteq U$ bulunmuş olur. Böylece Teorem 4.2 den X uzayı metriklenebilir.

4.6. Tanım: (X, \mathcal{T}) topolojik uzayı için aşağıdaki özellikleri sağlayan örten bir $g : \mathbb{N} \times X \rightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu varsa (X, \mathcal{T}) topolojik uzayına γ -uzayı denir.

(1) Her $x \in X$ için $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x)$ dir.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ için $y_n \in g(n, p)$ ve $x_n \in g(n, y_n)$ ise p , (x_n) dizisinin bir yığılma noktasıdır.

Ayrıca $g : \mathbb{N} \times X \rightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu X uzayı için bir γ fonksiyonu olarak adlandırılır.

\mathcal{T} , X uzayı üzerinde bir topoloji olmak üzere, R.E.Hodel'in[8] γ -fonksiyonu $g : \mathbb{N} \times X \rightarrow \mathcal{T}$ aşağıdaki koşulları sağlar:

(a) Her $x \in X$ için $\mathcal{B}_x = \{g(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$, x noktasında bir yerel tabandır.

(b) Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $y \in g(m, x)$ ise $g(m, y) \subseteq g(n, x)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ vardır.

4.7. Teorem: X uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul X uzayının aşağıdaki koşulu sağlayan bir g , γ -fonksiyonuna sahip olmasıdır.

Her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $y \in g(m, x)$ ise $x \in g(n, y)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ doğal sayısı vardır.

Kanıt: (\implies): X uzayı metriklenebilir olsun. Metriklenebilir uzayların her noktasında sayılabilir, azalan komşuluklar tabanı olduğunu biliyoruz. Şimdi $g : \mathbb{N} \times X \rightarrow \mathcal{T}_d$, $g(n, x) = B(x, \frac{1}{n})$ olarak tanımlı g dönüşümü X uzayı üzerinde γ -fonksiyonudur. Bunu görmek için iki özelliği doğrulamamız gerekmektedir.

(1) Her $x \in X$ için $g(n, x) = B(x, \frac{1}{n})$ olduğundan $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n, x)$ dir.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ ve $p \in X$ olmak üzere için $y_n \in B(p, \frac{1}{n})$ ve $x_n \in B(y_n, \frac{1}{n})$ ise $p, (x_n)$ dizisinin bir yığılma noktasıdır: Bunu görmek için, $\epsilon > 0$ verilsin.

$$\{B(p, \epsilon) \setminus \{p\}\} \cap \{(x_n)\} = \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $(x_n) \subseteq X \setminus \{B(p, \epsilon) \setminus \{p\}\}$ kapsaması n arttıkça gerçekleşmeyecektir. Çünkü $\{g(n, p) = B(p, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi içiçe geçen açıklardan oluşur.

O halde p noktası (x_n) 'nin bir yığılma noktasıdır. Böylece g fonksiyonu da bir γ -fonksiyonu olduğundan her metriklenebilir uzay γ -uzayıdır.

Şimdi her x ve n için $y \in g(m, x)$ ise $x \in g(n, y)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ doğal sayısı varlığını gösterelim. x ve n alalım. (b)'den $y \in g(m, x)$ ise $g(m, y) \subseteq g(n, x)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ doğal sayısı vardır. $y \in g(m, x)$ olsun. $x \notin g(n, y) = B(y, \frac{1}{n})$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$ dir. $g(m, y) \subseteq g(n, x)$ olduğundan $y \in g(n, x)$ olup $d(x, y) < \frac{1}{n}$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $x \in g(n, y)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ sayısı vardır.

(\impliedby): g fonksiyonu X üzerinde, her x ve n için $y \in g(m, x)$ iken $x \in g(n, y)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ sayısının var olduğu bir γ -fonksiyonu olsun.

Her $x \in X$ için (a)'dan $\{g(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ ailesi x noktasında sayılabilir yerel komşuluk tabanıdır. Şimdi Teorem 4.5 den yararlanıp X uzayının metriklenebilir olduğunu görelim.

x ve n alalım. Bu durumda $y \in g(m, x)$ ise $x \in g(n, y)$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ sayısı vardır. g, γ -fonksiyonu olduğundan $g(m, x)$ kümesi x noktasını içeren bir açıktır. $g(m, x) = V_1$ dersek, bu koşullar altında Teorem 4.5 in (D) koşulu sağlanır.

$x \in U$ ve U kümesi açık olsun. Bu durumda $U = g(n, x)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi (b) koşulundan bu x ve n için, $y \in g(m, x)$ ise $g(m, y) \subseteq g(n, x) = U$ olacak şekilde bir $m = m(n, x)$ vardır. Burada $g(m, x) = V_2$ ve $m = r$ olarak düşünülürse Teorem 4.5 in (E) koşulu gerçekleşir. Böylece X uzayı metriklenebilirdir.

4.8. Tanım: X bir küme ve $X \times X$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan \mathcal{U} süzgeci ile (X, \mathcal{U}) uzayına bir yerel quasi-düzgün uzay denir.

- (a) Her $x \in X$ için $\bigcap \{U(x) : U \in \mathcal{U}\} = \{x\}$
- (b) Her $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ için $(V \circ V)(x) \subseteq U(x)$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ vardır.

Şimdi (X, \mathcal{U}) düzgün uzayı ile üretilen

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X : (\forall x \in A)(\exists U \in \mathcal{U} \ni U(x) \subseteq A)\}$$

ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

- (i) \emptyset ve X kümeleri bu ailenin elemanıdır.
- (ii) $A, B \in \mathcal{T}$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ ise $A \cap B \in \mathcal{T}$ dir. $A \cap B \neq \emptyset$ ise $x \in A$ ve $x \in B$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $A \in \mathcal{T}$ olduğundan $U(x) \subseteq A$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. $B \in \mathcal{T}$ olduğundan $V(x) \subseteq B$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. \mathcal{U} süzgeç olduğundan $U \cap V \in \mathcal{U}$ dir. Şimdi

$$(U \cap V)(x) = U(x) \cap V(x)$$

olduğunu göstermeliyiz. $y \in (U \cap V)(x)$ ise $(x, y) \in U \cap V$ dir. Buradan $(x, y) \in U$ ve $(x, y) \in V$ dir. Yani $y \in U(x)$ ve $y \in V(x)$ dir. O halde $y \in U(x) \cap V(x)$ olur. Böylece $(U \cap V)(x) \subseteq U(x) \cap V(x)$ dir. İspat aynı şekilde geri döneceğinden $(U \cap V)(x) = U(x) \cap V(x)$ bulunur. O halde $(U \cap V)(x) \subseteq A \cap B$ olduğundan $A \cap B \in \mathcal{T}$ dir.

- (iii) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ olsun. $\bigcup_{i \in I} A_i$ kümesinin de \mathcal{T} ailesinin elemanı olduğunu göstermek istiyoruz. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olsun. Bu durumda $x \in A_{i_0}$ olacak biçimde bir $i_0 \in I$ vardır. $A_{i_0} \in \mathcal{T}$ olduğundan $U(x) \subseteq A_{i_0}$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan $U(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ bulunur.

O halde \mathcal{T} ailesi bir topolojidir.

4.9. Teorem: (X, \mathcal{T}) bir topolojik uzay olmak üzere $g : \mathbb{N} \times X \rightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $x \in g(n+1, x) \subset g(n, x)$ koşulunu sağlasın. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$V_n = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times g(n, x)$$

olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in g(n, p)$ ve $x_n \in g(n, y_n)$ iken $(x_n) \rightarrow p$ ise $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi (X, \mathcal{T}) ile uyumlu yerel quasi-düzgünlüğü için bir tabandır.

Kanıt: $p \in X$ olsun. $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin (X, \mathcal{T}) ile uyumlu yerel quasi-düzgünlüğü için taban olmadığını varsayalım. Bu durumda $V_n(p)$ kümeleri X uzayının p noktası için komşuluk tabanı değildir.

Dolayısıyla, $n, m \in \mathbb{N}$ için $V_n(p) \not\subseteq V_m(p) \cap V_n(p)$ dir. O halde öyle bir $x \in X$ için $x \in V_n(p)$ ve $x \notin V_m(p)$ dir. $V_n \subset V_n \circ V_n$ olduğundan $x \in V_n^2(p) \setminus V_m(p)$ dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in V_n^2(p) \setminus V_m(p)$ seçebiliriz. O zaman $x_n \in V_n(y_n) = g(n, y_n)$ olmak üzere $y_n \in V_n(p) = g(n, p)$ vardır. Varsayımımızdan (x_n) dizisi p noktasına yakınsamalıdır. Ancak her n için $x_n \in V_n^2(p) \setminus V_m(p)$ olduğundan (x_n) dizisi p noktasına yakınsayamaz. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi X üzerindeki bir yerel quasi-düzgünlüğü için sayılabilir bir tabandır. Bu ailenin taban olduğu \mathcal{U} düzgünlüğü için $\mathcal{T} = \mathcal{T}_U$ olduğu kolayca görülebilir.

4.10. Teorem: Bir (X, \mathcal{U}) yerel quasi-düzgün uzayı, bir metriklenebilir topolojiye sahip ise, \mathcal{U} bir sayılabilir tabana sahiptir ve verilen $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ için $V(x) \subseteq U^{-1}(x)$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

Kanıt: (X, \mathcal{U}) yerel quasi-düzgün uzayı, bir metriklenebilir topolojiye sahip olsun. Önceki teoremden bu \mathcal{U} düzgünlüğü $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir tabanına sahiptir.

Şimdi $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ olsun. Düzgünlük tanımından $V \circ V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan $(V \circ V)(x) \subseteq U(x)$ elde edilir. Bunu görmek için $y \in (V \circ V)(x)$ alalım. $(x, y) \in (V \circ V)$ dir. $(V \circ V) \subseteq U$ olduğundan $(x, y) \in U$ olup $y \in U(x)$ bulunur. O halde $(V \circ V)(x) \subseteq U(x)$ dir.

Şimdi de $V \subseteq (V \circ V)$ olduğunu görelim: $(x, y) \in V$ ve $(x, y) \notin (V \circ V)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bileşke tanımından her $z \in X$ için $(x, z) \notin V$ veya $(z, y) \notin V$ dir. O halde $z = y$ için $(x, y) \notin V$ veya $(y, y) \notin V$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $V \subseteq (V \circ V)$ dir. Buradan

$$V(x) \subseteq (V \circ V)(x) \subseteq U(x)$$

elde edilir. Şimdi de $V(x) \subseteq U^{-1}(x)$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $y \in V(x)$ ve $y \notin U^{-1}(x)$ olacak biçimde bir $y \in X$ noktasının olduğunu düşünelim. Bu durumda $(x, y) \in V$ ve $(x, y) \notin U^{-1}$ olur. Buradan $(y, x) \notin U$ ve dolayısıyla $y \notin U(x)$ bulunur ki, bu durum $V(x) \subseteq U(x)$ oluşu ile çelişir. O halde $V(x) \subseteq U^{-1}(x)$ dir.

4.11. Tanım: X bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ dir.
- (2) Her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta$ iken $d(y, x) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.
- (3) Her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için $d(x, z) < \delta$ ve $d(z, y) < \delta$ iken $d(x, y) < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna $X \times X$ üzerinde bir **yerel metrik** denir.

Her d yerel metriği X üzerinde bir topoloji üretir. Ayrıca bir d yerel metriğine göre bir U kümesinin açık olması için gerek ve yeter koşul her $x \in U$ için $B(x, \epsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısının var olmasıdır.

4.12. Teorem: Bir X uzayının metriklenmesi için gerekli ve yeterli koşul X uzayının topolojisini üreten X üzerinde bir d yerel metriğinin var olmasıdır.

Kanıt: (\implies): X uzayı metriklenebilir olsun. Bu durumda X üzerinde bir d metriği vardır ki X 'in topolojisini üretir. Açıkça d metriği bir yerel metriktir.

(\impliedby): X uzayı üzerinde, X 'in topolojisini üreten bir d yerel metriği alalım. $x \in X$ için

$$\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi x noktasının sayılabilir yerel komşuluklar tabanıdır. Bunu görmek için $G \subseteq X$ açık ve $x \in G$ alalım. Bu durumda $B(x, \epsilon_x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\epsilon_x > 0$ vardır. $\frac{1}{n} < \epsilon_x$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. O halde

$$B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \epsilon_x) \subseteq G$$

dir. Böylece $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x noktasının sayılabilir yerel komşuluklar tabanıdır.

Şimdi bu tabanın Teorem 4.5 in (D) ve (E) koşullarını sağladığını görelim.

$x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ alalım. $\epsilon < \frac{1}{n}$ olacak şekilde seçilen bir $\epsilon > 0$ sayısı için $V_1 = B(x, \epsilon)$ olarak belirlenirse $y \in V_1$ için $x \in B(y, \frac{1}{n})$ olup (D) koşulu gerçekleşir.

$x \in X$ ve U , x noktasını içeren bir açık küme olsun. $B(x, \epsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. Şimdi $r < \epsilon$ ve $V_2 = B(x, \frac{1}{r})$ olarak seçilirse $y \in V_2$ için $B(y, \frac{1}{r}) \subseteq U$ olup (E) koşulu gerçekleşir. Böylece Teorem 4.5 den X uzayı metriklenebilirdir.

4.13. Teorem: Bir X uzayının metriklenmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{V_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluklar dizisinin var olmasıdır.

(i) $\{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, x noktasının yerel komşuluklar tabanıdır.

(ii) $y \notin U_n(x)$ ise $V_n(y) \cap V_n(x) = \emptyset$ dur.

(iii) $y \in V_n(x)$ ise $V_n(y) \subseteq U_n(x)$ dir.

Kanıt: (\implies): Açıktır.

(\Leftarrow):) X uzayındaki her $x \in X$ için yukarıdaki koşulları sağlayan $\{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{V_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ komşuluklar dizisi olsun. Genelliği bozmaksızın, her $x \in X$ için $V_n(x)$ komşuluklar dizisini n sayısına bağlı olarak azalan alabiliriz.

$x \in U$ ve U kümesi açık olsun. Bu durumda $U_n(x) \subseteq U$ olacak şekilde n doğal sayısı bulabiliriz. Şimdi

$$W(n, x) = \bigcup \{V_n(y) : x \in V_n(y)\}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca $m', U_{m'}(x) \subseteq V_n(x)$ olacak şekildeki pozitif tam sayı olmak üzere $m = \max\{n, m'\}$ olsun. Bu durumda $y \in (V_m(x))^\circ$ ise $x \in W(m, y) \subseteq U_n(x)$ dir. Bunu görmek için $y \in (V_m(x))^\circ$ olacak şekilde bir $y \in X$ alalım. Buradan $y \in V_m(x)$ dir ve

$$W(m, y) = \bigcup \{V_m(x) : y \in V_m(x)\}$$

olup $x \in W(m, y)$ bulunur. Şimdi $W(m, y) \not\subseteq U_n(x)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $z \in W(m, y)$ ve $z \notin U_n(x)$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $z \in W(m, y)$ ise öyle bir $y \in V_m(x)$ için $z \in V_m(x)$ dir. $m = \max\{n, m'\}$ olduğundan $m \geq n$ dir.

$V_n(x)$ komşuluklar dizisi azalan olduğundan $V_m(x) \subseteq V_n(x)$ dir. O halde $z \in V_m(x)$ olduğundan $z \in V_n(x)$ dir. Oysa ki $z \notin U_n(x)$ olduğundan $V_n(z) \cap V_n(x) = \emptyset$ olması $z \in V_n(x)$ olması ile çelişir. (Yani $z \in V_n(z)$ olduğundan $V_n(z) \cap V_n(x) \neq \emptyset$ olur ki bu $z \notin U_n(x)$ oluşu ile çelişir.) O halde $y \in V_m(x)^\circ$ ise $x \in W(m, y) \subseteq U_n(x)$ dir.

Böylece Teorem 4.2 nin koşulları sağlanmıştır. O halde X uzayı metriklenebilirdir. Şimdi daha önce ikinci bölümde yer verdiğimiz NAGATA-SMİRNOV Metriklenebilme Teoremi'nin kanıtını biraz daha kolaylaştırarak yeniden ele alalım:

(NAGATA-SMİRNOV Metriklenebilme Teoremi)

Bir regüler X uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul X uzayının σ -yerel sonlu bir tabana sahip olmasıdır.

Kanıt: (\Rightarrow):) (X, \mathcal{T}) metriklenebilir ve d , X üzerinde $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ koşulunu sağlayan bir metrik olsun. X 'in, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$U_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X \right\}$$

açık örtüsünü gözönüne alalım. (X, \mathcal{T}) parakompakt olduğundan bu örtünün \mathcal{V}_n gibi yerel sonlu bir açık incesi vardır.

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$$

σ -yürel sonlu ailesinin bu uzayın bir tabanı olduğu gösterilebilir. Gerçekten $G \subset X$ açık ve $x \in G$ herhangi bir nokta ise $x \in B(x, \frac{1}{2^n}) \subset G$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. \mathcal{V}_{n+2} de bir örtü olduğundan $x \in V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}_{n+2}$ vardır. V 'nin çapı $\frac{1}{2^{n+1}}$ 'den küçüktür. Bu nedenle her $y \in V$ için

$$d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$$

olduğundan $y \in B(x, \frac{1}{2^n})$ sağlanır. Bu $V \in \mathcal{V}$ için $x \in V \subset G$ sağlanır. Şu halde $\mathcal{V}, (X, \mathcal{T})$ uzayının tabanıdır.

(\Leftarrow): Her $n \in \mathbb{N}$ için $G(n)$ bir yerel sonlu aile olmak üzere $\bigcup\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$, regüler X uzayı üzerindeki topoloji için bir taban olsun.

Genelliği bozmaksızın, her $n \in \mathbb{N}$ için $G(n) \subseteq G(n+1)$ olduğunu varsayabiliriz.

Şimdi

$$W(n, x) = \bigcap\{\bar{G} : x \in G \in G(n)\}$$

ve

$$V(n, x) = \bigcap\{G : x \in G \in G(n)\} \setminus \bigcup\{\bar{G} : G \in G(n), x \notin \bar{G}\}$$

olarak tanımlansın. X regüler ve $G(n)$ yerel sonlu olduğu için $V(n, x)$ kümesi açıktır ve $\{W(n, x) : n = 1, 2, 3, \dots\}$ ailesi x noktasında bir (azalan) yerel komşuluklar tabanıdır. Böylece $y \in V(n, x)$ ise $x \in W(n, y) \subseteq W(n, x)$ dir. Bunu görmek için $y \in V(n, x)$ alalım. Bu durumda $y \in \bigcap\{G : x \in G \in G(n)\}$ ve $y \notin \bigcup\{\bar{G} : G \in G(n), x \notin \bar{G}\}$ demektir.

O halde $W(n, y) = \bigcap\{\bar{G} : y \in G \in G(n)\}$ olduğundan $x \in W(n, y)$ dir. Şimdi de $W(n, y) \subseteq W(n, x)$ olduğunu gösterelim.

$z \in W(n, y)$ olsun. Bu durumda her $G \in G(n)$ için $y \in G$ ise $z \in \bar{G}$ dir. $y \in V(n, x)$ olduğundan her $G \in G(n)$ için $x \in G$ ise $y \in G$ olup $W(n, y) \subseteq W(n, x)$ bulunur.

Böylece Teorem 4.2. den X uzayı metriklenebilirdir.

4.14. Teorem: Bir X uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\{P(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ yerel tabanının var olmasıdır.

$x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise öyle bir $m = m(n, x)$ pozitif tamsayısı vardır ki $P(m, y) \cap P(m, x) \neq \emptyset$ için $P(m, y) \subseteq P(n, x)$ dir.

Bu Teoremin kanıtı Teorem 4.2 den açıktır.

(ARHANGEL'SKII-STONE Metriklenebilme Teoremi)

Bir X uzayının metriklenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtülerinin dizisinin var olmasıdır.

Her $x \in X$ ve x 'in her U komşuluğu için

$$St(V, G(n)) \subseteq U$$

olacak şekilde x 'in bir V komşuluğu ve bir n tamsayısı vardır.

Kanıt: (\implies) X uzayı metriklenebilir olsun. Böylece Teorem 4.2 den her $x \in X$ için (A) koşulunu sağlayan bir $\{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir, azalan yerel komşuluklar tabanı vardır. Genelliği bozmaksızın her n için $W(n, x)$ kümesini açık olarak alabiliriz. Burada $G(n) = \{W(n, x) : x \in X\}$ olarak gözönüne alınırsa $\{G(n) : n \in \mathbb{N}\}$, X 'in açık örtülerinin bir dizisi olup istenen koşulları sağlar:

$x \in X$ ve $x \in U$ olmak üzere $U \subseteq X$ açık olsun. Bu durumda Teorem 4.2 nin (A) koşulundan $y \in V$ ise $x \in W(n, y) \subseteq U$ olacak şekilde bir n tamsayısı ve x noktasını içeren bir V açık kümesi vardır.

$$\{W(n, x) : x \in V\} \subseteq G(n)$$

olup her $x \in V$ için $W(n, x) \subseteq U$ olduğundan $St(V, G(n)) \subseteq U$ bulunur.

(\impliedby) Her $n \in \mathbb{N}$ için $R(n, x) = St(x, G(n))$ olsun. Böylece $\{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x noktasının sayılabilir, yerel komşuluklar tabanıdır. Şimdi Teorem 4.2 nin (D) ve (E) koşullarının sağlandığını görelim.

$x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ alalım. $x \in V \in G(n)$ olacak şekilde bir V açık kümesi seçebiliriz. Çünkü $G(n)$ bir örtüdür. Şimdi $y \in V$ ise $x \in R(n, y) = St(y, G(n))$ olduğu açıktır. Böylece (D) koşulu sağlanır.

$x \in X$ ve $x \in U$ olmak üzere U kümesi açık olsun. Varsayımdan

$$St(V, G(r)) \subseteq U$$

olacak şekilde bir r tamsayısı ve x noktasını içeren bir V komşuluğu vardır. $y \in V$ ise $R(r, y) = St(y, G(r)) \subseteq U$ olduğundan (E) koşulu sağlanır.

Böylece X uzayı metriklenebilirdir.

Şimdiye kadar metriklenebilen bir X uzayı için onun yerel tabanı üzerinde birkaç koşul verdik. Şimdi, temel sonuçlarınıza ışık tutacak, zayıflatılmış koşullarla bağlantısını inceleyeceğiz. Bunun için bir örnek verelim.

Örnek: \mathbb{N} pozitif tamsayıların kümesi ve x, y tamsayı olmayan ayrık iki nokta olmak üzere $X = \mathbb{N} \cup \{x, y\}$ olsun. X üzerindeki

$$\mathcal{T} = \{G : G \subseteq \mathbb{N} \text{ veya } (G \subseteq X)(X \setminus G) \text{ sonlu}\}$$

topolojisini gözönüne alalım. Bu topolojinin yerel tabanı aşağıdaki gibi verilsin:

$$W(n, x) = \{x, n, n+1, n+2, \dots\}$$

$$W(n, y) = \{y, n, n+1, n+2, \dots\}$$

$$W(2n, r) = \{x, 2n, 2n+1, 2n+2, \dots\}, 2n \leq r \text{ ise.}$$

$$W(2n, r) = \{r\}, 2n > r \text{ ise.}$$

$$W(2n-1, r) = \{y, 2n-1, 2n, 2n+1, \dots\}, 2n-1 \leq r \text{ ise.}$$

$$W(2n-1, r) = \{r\}, 2n-1 > r \text{ ise.}$$

Şimdi bu taban, azalanlığı dışında, Teorem 4.2 nin (A) koşulundaki şartları sağlar:

$z \in X$ olmak üzere $z \in U$ ve $U \subseteq X$ açık olsun. Önce $z \in \{x, y\}$ ve $z = x$ alalım. O halde $z \in W(n, z) \subseteq U$ olacak şekilde bir n sayısı vardır. Şimdi $W(n, z) = V$ olarak tanımlarsak her $k \in W(n, z)$ için $W(n, k) \subseteq U$ dur.

Şimdi de $z \in X \setminus \{x, y\} = \mathbb{N}$ ise $z \in W(n, z) \subseteq U$ olacak şekilde bir n sayısı vardır. n çift ve $n \leq z$ ise

$$W(n, z) = \{z, n, n+1, n+2, \dots\}$$

olup durum açıktır. n çift ve $n > z$ ise $W(n, z) = \{z\}$ olur. $V = \{z\}$ seçersek istenen elde edilir. Yani Teorem 4.2 nin (A) koşulu sağlanır.

Şimdi X uzayının T_1 olduğunu gösterelim. $z \in X$ olsun. Eğer $z \in \{x, y\}$ ve $z = x$ ise $X \setminus \{z\} = \mathbb{N} \cup \{y\}$ kümesinin tümleyeni sonlu olduğundan $X \setminus \{z\}$ açık olup $\{z\}$ kümesi kapalıdır. $z = y$ ise aynı durum sözkonusudur. Şimdi $z \in \mathbb{N}$ ise $\{z\}$ kümesi yine kapalıdır. Böylece X uzayı T_1 dir.

Şimdi de X uzayının T_2 olmadığını gösterelim. X uzayının T_2 olduğunu varsayalım. O halde $x, y \in \mathbb{N} \cup \{x, y\}$ olsun. Bu durumda $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $x \in G$ ve $y \in H$ açıkları vardır. $G \cap H = \emptyset$ eşitliğinin her iki yanının tümleyeni alırsak

$$(X \setminus G) \cup (X \setminus H) = X$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $(X \setminus G)$ ve $(X \setminus H)$ kümeleri sonlu, ancak X uzayı sonlu olmadığı için bir çelişki vardır. O halde X uzayı T_2 değildir. Böylece X uzayı metrikenemez.

Şimdi verdiğimiz yardımcı teorem (A) özelliğinin bir genelleştirmesini sağlayan (azalan olması gerekmeyen) yerel komşuluklar tabanına sahip uzayların iki özelliğini vermektedir.

4.15. Yardımcı Teorem: X bir uzay olmak üzere her $x \in X$ için

$$W(x) = \{G \subseteq X : x \in G\}$$

ailesi aşağıdaki koşulları sağlar:

- (F) U açık bir küme olmak üzere $x \in U$ için x noktasını içeren öyle bir V açığı vardır ki, her $y \in V$ için $x \in W \subseteq U$ olacak şekilde $W \in W(y)$ vardır.
- (i) $W(x)$, x noktasının bir zinciri ise X uzayı collectionwise-normaldir.
- (ii) X ayrılabilir ve $W(x)$ sayılabilir tane açık kümeden oluşuyor ise X uzayı ikinci sayılabilirdir.

Kanıt: X bir uzay ve her $x \in X$ için

$$W(x) = \{G \subseteq X : x \in G\}$$

olsun. U açık ve $x \in U$ alalım. Bu durumda $U \in W(x)$ dir. $x \in V \subseteq U$ olacak şekilde $V \in W(x)$ vardır. (Eğer V kümesi açık değilse, $V \subset H \subset U$ olacak şekilde bir H açık kümesi vardır. O zaman x noktasını kapsayan açık küme olarak H kümesinin alırız.)

Şimdi her $y \in V$ için $x \in W \subseteq U$ olacak şekilde bir $W \in W(y)$ olduğunu gösterelim: $y \in V$ olsun. Bu durumda $W = V$ alırsak $x \in W \subseteq U$ olup $W \in W(y)$ dir. Çünkü $y \in W$ ve $W \subset X$ dir. Böylece (F) koşulu sağlanır.

Şimdi de $W(x)$, x noktasının bir zinciri olsun. Bu durumda $W(x)$ ailesini azalan olacak şekilde yeniden sıralayabiliriz. Şimdi Teorem 4.2 nin (A) koşulunun sağlandığını görelim:

$$W(x) = \{W(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$$

olduğu gözönüne alınırsa Teorem 4.2 nin (A) koşulu sağlanır. Böylece X uzayı metriklenebilir. O halde X uzayı collectionwise-normaldir.

X ayrılabilir bir uzay ve $W(x)$ sayılabilir tane açık kümeden oluşsun. Yani $W(x) = \{R(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$ olarak alalım. Şimdi Teorem 4.5 in (D) ve (E) koşullarının sağlandığını görelim:

x ve n alalım. Bu durumda $x \in R(n, x)$ dir ve $R(n, x)$ açıktır. $V_1 = R(n, x)$ olarak düşünürsek $y \in V_1$ için $x \in R(n, y)$ olduğunu göstermeliyiz.

$R(n, y)$ kümesi y noktasını içeren X 'in açık bir altkümesi olduğundan $R(n, y) = R(n, x)$ olarak alabiliriz. O halde (D) koşulu sağlanır.

Şimdi de $x \in X$ ve U , x noktasını kapsayan açık bir küme olsun. O halde $W(x)$ 'in tanımından $U = R(n, x)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. (E) koşulunda sözü geçen, x noktasını kapsayan V_2 açık kümesini $V_2 = U$ olarak seçersek $y \in V_2$ için $R(n, y) \subseteq U$ kapsamasının gerçekleştiğini şöyle görebiliriz:

$R(n, y)$ kümesi y noktasını kapsayan bir açık küme olduğundan $R(n, y) = U$ olarak alırsa (E) koşulu sağlanır. O halde Teorem 4.5 den X uzayı metriklenebilirdir. Bu durumda her ayrılabilir metrik uzay ikinci sayılabilir olduğundan X uzayı ikinci sayılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. Alexandroff, P., 1960, On the Metrization of Topolojik Spaces, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. 8, 135-140
2. Alexandroff, P., Urysohn, P., 1924, Zur Theorie der Topologischen Raume, Math. Ann., 92, 258-266
3. Arhangel'skiĭ, A.V., 1961, New Criteria For the Paracompactness and metrizability of an arbitrary T_1 Space, Soviet Math. Dokl., 2, 1367-1369
4. Bing, R. H., 1951 Metrization of Topolojik Spaces, Canad. J. Math. 3, 175-186
5. Bourbaki, N. , 1966, General Topolgy, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. and Hermann, Paris
6. Collins, P.J., Roscoe, A. W., 1984, Criteria For Metrisabilty, Proc. of the Amer. Math. Society, Vol 90, Num 4, 631-640
7. Engelking, R., 1989, General Topology, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Berlin
8. Hodel, R. E., 1972, Spaces Defined by Sequences of Open covers which Guarantee that certain Sequences have Cluster Points, Duke Math, 481-493
9. Lindren, W. F., Fletcher, P., 1974, Locally Quasi-Uniform Spaces with Countable Bases, Duke Math. J. ,41, 231-240
10. Michael, E., 1959, Tet Another note on Paracompact Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 309-314
11. Nagata, J., 1968, Modern General Topology, Amsterdam
12. Williams, J., 1972, Locally Uniform Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 168, 435-469

İNDEKS

açılım.....	42	noktaları ayırma.....	19
ağırlık.....	19	noktasal regüler taban.....	51
ayrık aile.....	42	noktasal sayılabilir aile.....	9
birimin ayrışımı.....	8	noktasal sonlu aile.....	9
bir fonksiyonun desteği.....	8	normal uzay.....	5
collection-wise normal uzay.....	42	regüler taban.....	51
çap.....	2	regüler uzay.....	5
dizisel kompakt.....	4	sayılabilir kompakt uzay.....	4
doğrusal sıralı küme.....	26	σ -ayrık aile.....	9
evrensel uzay.....	19	σ -yerel sonlu aile.....	9
fonksiyonel kapalı küme.....	3	sonlu arakesit özelliği.....	33
F_σ -küme.....	13	toplam topolojisi.....	5
γ fonksiyonu.....	70	toplam uzayı.....	5
γ uzayı.....	70	toplamsal topolojik özellik.....	40
G_δ -küme.....	13	uyumlu dönüşüm.....	21
homeomorfik gömme.....	18	yerel komşuluklar tabanı.....	61
ince.....	9	yerel metrik.....	74
karakter.....	35	yerel quasi düzgün uzay.....	71
kombinasyon.....	21	yerel sonlu aile.....	9
kompakt uzay.....	4	yıldız.....	42
köşegen teorem.....	23	yıldız ince.....	60
kusursuz dönüşüm.....	26	zayıf parakompakt uzay.....	42
kusursuz normal.....	14		
kuvvetli açılım.....	48		
lindelöf uzay.....	35		
metrik.....	1		
metriklenebilir topolojik uzay.....	2		
maximal eleman.....	51		

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşegül Altay
Doğum Yeri : Uşak
Doğum Yılı : 1975
Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise 1989-1992 Gürçeşme Lisesi

Lisans 1993-1998 H. Ü. Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil: Almanca, İngilizce

İş Tecrübesi :

1998-200- H. Ü. Eğitim Fak. Matematik Eğitimi Araştırma Görevlisi