İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ELASTİK BİR ORTAMDA İKİ BOYUTLU DALGA YAYILIMI

100611

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Araş. Gör. Ceni BABAOĞLU
Enstitü No : F0997Y005

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 Mayıs 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Haziran 1999

100611

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Saadet Erbay**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof. Dr. Erdoğan Şuhubi**
	Prof. Dr. Mehmet Can

HAZİRAN 1999

ÖNSÖZ

Çalışma süresince gösterdiği yakın ilgi ve yardımlarından dolayı hocam Sayın Prof.Dr. Saadet Erbay'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GENELLEŞTİRİLMİŞ ELASTİK BİR ORTAMDA İKİ BOYUTLU DALGA YAYILIMI

ÖZET

Klasik elastisite teorisinde lineer dalgaların dispersif dalgalar olmadığı bilinmektedir. Dispersif dalga karakterini teoriye katmak için son yıllarda yüksek mertebe teori, lokal olmayan teori ve mikromorfik teori gibi çeşitli genelleştirilmiş sürekli ortam teorileri üretilmiştir. Klasik elastisitenin tersine, bu teoriler lineer yaklaşımda dispersif dalga yayılımını kabul ederler. Modellerin dispersif karakteri nonlineerliğin de içerilmesi ile solitonlar ve yalnız dalgalar (solitary waves) gibi düzgün yapıların oluşmasına yol açar. Bu çalışmada sonsuz, homojen, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif elastik bir ortamda dalga yayılımı ele alınmış, dalgaların asimptotik davranışını tanımlamak için değişik nonlineer evolüsyon denklemleri elde edilmiştir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır: Birinci bölüm giriş olup nonlineer sistemler hakkında genel bir bilgi vermektedir. Dalga yayılımı ile ilgili tanım ve terminoloji ikinci bölümde verilmiştir. Üçüncü bölümde yüksek mertebe türevlere sahip genelleştirilmiş elastik bir katının alan denklemleri kısaca özetlenmiştir. Dördüncü bölümde, uzun dalga yaklaşımında iki boyutlu durumdaki indirgeyici pertürbasyon yöntemi verilmiştir. Nonlineer evolüsyon denklemlerini türetirken alan denklemleri ile işlem yapmak yerine Lagrange yoğunluk fonksiyonu ile çalışılmış ve bu fonksiyon küçük bir parametre cinsinden seriye açılmıştır. İki boyutlu durumda, uzun enine dalgaların uzun zaman içindeki davranışlarının asimptotik olarak kuple modifiye Kadomtsev-Petviashvili (CMKP) denklemleri olarak adlandırılabilen iki simetrik kuple nonlineer evolüsyon denklemleri ile tanımlandığı gösterilmiştir. Bazı özel durumlarda bu denklemler, modifiye Kadomtsev-Petviashvili (MKP) denklemi olarak adlandırılabilen tek bir evolüsyon denklemine veya kuple modifiye Korteweg-de Vries (KMKdV) denklemlerine indirgenmektedir. Aynı bölümde nonlineer evolüsyon denklemlerinin gezen dalga çözümleri değiştirilmiş bir Hirota metodu kullanılarak elde edilmiştir. Beşinci bölümde, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif elastik bir ortamda yayılan enine bir dalga için nonlineer dalga modülasyonu problemi ele alınmıştır. Bunun için aynı yöntem yani indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. İki boyutlu durumda enine dalganın genlik modülasyonunun tek bir (2+1) Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. NLS denkleminin bir özel çözümü de yine değiştirilmiş bir Hirota metodu ile verilmiştir. Son olarak da çalışmanın sonucu altıncı bölümde verilmiştir.

TWO DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION IN A GENERALIZED ELASTIC MEDIUM

SUMMARY

It is well known that the linear waves are non dispersive in classical elasticity theory. To incorporate the dispersive wave character into the theory, various generalized continuum theories such as higher order gradient theory, nonlocal theory, micromorphic theory etc., have been proposed in the recent years. Contrary to the classical elasticity, these theories admit dispersive wave propagation in the linear approximation. The dispersive character of the models may give rise to coherent structures such as solitons or solitary waves if nonlinearity is included. The present study considers wave propagation in an infinite, homogeneous, weakly nonlinear and weakly dispersive elastic medium. Various nonlinear evolution equations are obtained for the asimptotic description of the waves.

The outline of the present study is as follows: The first section is the introduction and gives a general information about nonlinear systems. Related terminology and definitions regarding wave propagation are given in Section 2. Then, the governing equations for an elastic solid with higher order gradients are briefly summarized in Section 3. In Section 4, the general procedure of the reductive perturbation method which is used in the long wave approximation for two dimensional case is presented. In deriving the nonlinear evolution equations; the Lagrangian density function, instead of operating on the equations of motion, is expanded in terms of a small parameter. It is shown that the long time behavior of two dimensional long transverse waves is characterized asymptotically by two symmetrical coupled nonlinear evolution equations which may be called the coupled modified Kadomtsev-Petviashvili (CMKP) equations. For some special cases these equations reduce to a single evolution equation which may be called the modified Kadomtsev-Petviashvili (MKP) equation or coupled modified Korteweg-de Vries (CMKdV) equations. In the same section travelling wave solutions of the nonlinear evolution equations are also considered by means of a modified Hirota method. In Section 5, the problem of nonlinear wave modulation of a transverse wave propagating in a weakly nonlinear and a weakly dispersive elastic medium is considered. To this end, the same method, the reductive perturbation method, is used. It is shown that, in two dimensional case, wave modulation of a transverse wave is governed by the single (2+1) Nonlinear Schrödinger (NLS) equation. A special solution of the NLS equation is also given again by the modified Hirota method. Finally, a conclusion of the present study is presented in Section 6.

1. GİRİŞ

Doğal ve fiziksel bilimlerdeki olayların modellenmesinde lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemler uzun süre çok önemli rol oynamışlardır. Lineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lineer olmayan denklemlere göre daha kolay olması lineer modellerin yaygın olarak kullanılmasının önemli nedenlerinden biridir. Bununla birlikte doğada ve fizikte karşılaşılan problemlerin birçoğunu lineer denklemlerle modellemek mümkün olmadığından, olayları gerçeğe daha yakın olarak betimlemek için lineer olmayan denklemlerin de hesaba katılması gereği ortaya çıkmıştır. Özellikle hidrodinamik, plazma ve optik gibi farklı fiziksel alanlarda karşılaşılan lineer olmayan olaylar nonlineer adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yardımı ile modellenmiştir. Çok farklı fiziksel durumlarda ortaya çıkan nonlineer olaylardaki zenginlik ve çeşitlilik uzun zamandan beri araştırıcıların ilgisini çekmiş ve bu konuda yoğun olarak çalışılmalarına neden olmuştur [1-6]. Bu çalışmalar, son yıllarda "Lineer Olmayan Bilim" olarak adlandırılan yeni bir araştırma alanı yaratmıştır. Nonlineer olayların modellenmesi, elde edilen model denklemlerin özelliklerinin incelenmesi, analitik çözümlerin elde edilebilmesi için metot geliştirilmesi v.b. çok farklı alanlarda araştırmaların yapılmasına yol açmıştır.

Katı ve akışkan gibi sürekli ortamlarda dalga yayılımı problemlerinin incelenmesi ondokuzuncu yüzyılın ortalarında başlamış ve günümüzde de önemini yitirmeyen bir araştırma alanı oluşturmuştur. Fiziksel olayların büyük bir kısmının dalga yapısında olması bu konuda yapılan araştırmaların giderek artması sonucunu doğurmuştur. Modellenmek istenen dalga hareketinin genliği sistemdeki karakteristik bir uzunluğa göre küçük ise (örneğin dalganın genliği dalga boyuna göre küçük ise) hareketi yöneten kısmi diferansiyel denklemleri lineerleştirmek mümkün olur. Bu durumda dalga hareketini karakterize eden lineer denklemlerin çözümünü elde etmek göreceli olarak kolay olabilir. Hareketin genliği, karakteristik bir büyüklüğe göre büyük ise dalga hareketini yöneten kısmi diferansiyel denklemleri lineerleştirmek mümkün olmaz. O zaman da dalga hareketi nonlineer kısmi diferansiyel denklemler ile karakterize edilir. Lineer kısmi diferansiyel denlemlerin bile çözümlerini elde etmenin kolay olmadığı hatırlanacak olursa, nonlineer dalga denklemlerinin açık çözümlerinin elde edilmesinin çoğu kez imkansız olduğunu söylemek yanlış olmaz. Nonlineer denklem sistemlerinin açık çözümlerinin elde edilmesinin mümkün olmadığı durumlarda, sistemin sayısal çözümlerinin elde edilmesi akla gelen yollardan biridir [7]. Ancak nonlineer kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri bu çalışmanın kapsamında olmadığından burada göz önüne alınmayacaktır. Diğer bir yaklaşım nonlineer sistemlerin değişik pertürbasyon metotları ile asimptotik olarak incelenmesidir. Bu durumda uzay ve zaman değişkenlerinin belli değer bölgeleri için alan denklemlerinin davranışını karakterize eden evolüsyon denklemleri elde etmek mümkündür. Bu nedenle nonlineer denklemlerin uzak zaman davranışlarını asimptotik olarak karakterize edilmesine olanak veren birçok pertürbasyon tekniği geliştirilmiştir [8-9]. Nonlineer sistemlerin uzak alan davranışını veren asimptotik metotlarla; uzun dalga yaklaşımında sistemin davranışını ve dalgaların kendileri ile nonlineer etkileşmelerini karakterize eden bir veya birden fazla nonlineer evolüsyon denklemleri elde etmek mümkün olmaktadır. Bu çalışmanın amacı genelleştirilmiş nonlineer elastik bir ortamda, uzun dalga yaklaşımında iki boyutlu dalgaların evolüsyonunu ve iki boyutlu harmonik dalgaların modülasyonu problemlerini indirgeyici pertürbasyon yöntemini [10] kullanarak incelemektir.

Nonlineer bir sistemde yayılan dalgalar dikleşmekte ve sonlu bir zaman sonra kırılarak çok değerli olmaktadır. Eğer bu sistem aynı zamanda dispersif ise yani denklemde yüksek mertebe türevler varsa nonlineerliğin etkisi ile dikleşen dalgaların zaman içinde düzgünleştikleri gözlenmiştir. Bu gözlem, nonlineerliğin neden olduğu dikleşme ve dispersiyonun neden olduğu düzgünleşme etkilerinin birbirlerini dengelediği bir asimptotik metot geliştirilmesine neden olmuştur [8-9]. Uzun dalga yaklaşımında yani küçük dalga sayılarının bulunduğu durumda uygun asimptotik yöntem kullanılarak nonlineer dispersif bir sistemin büyük konum ve büyük zaman değişkenleri (uzak alan) için (1+1) boyutlu dalga hareketinin

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde verilen Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ile temsil edildiği bilinmektedir [11]. KdV denklemi (1+1) boyutta akışkan ve katı gibi farklı sürekli ortamlarda yayılan zayıf nonlineer ve zayıf dispersif dalgaların evolüsyonunu karakterize eden bir denklemdir. Bununla birlikte KdV denklemi kesinlikle bir konum boyutuna sahip olup, eğer ortamda iki uzay boyutunda değişimler sözkonusu ise bu değişimleri açıklayan bir denklem olmaktan çıkmaktadır. Uzun dalga yaklaşımında bu durum için iki uzay boyutundaki değişimleri karakterize edebilen yeni bir evolüsyon denklemine gerek vardır. KdV denkleminin iki boyutlu genelleştirilmiş hali olan ve

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \tag{1.2}$$

ile verilen denklem ilk olarak Kadomtsev-Petviashvili tarafından elde edilmiştir [12]. Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi olarak adlandırılan bu denklem zayıf nonlineer, zayıf dispersif ve zayıf iki boyutlu etkilerin aynı mertebede olması durumunda dalgaların evolüsyonunu tanımlar.

Bazı zayıf nonlineer sistemlerde nonlineerliğin etkisi ihmal edilirse, sistem harmonik dalga tipinde çözümleri kabul eder. Zayıf nonlineerliğin etkisi bu sinüsoidal titreşimlerin genliğinde değişimlere neden olur. Diğer bir deyişle nonlineer terimlerden dolayı oluşan yüksek harmonikler orijinal dalga ile etkileşmekte ve dalgaların modülasyonuna neden olmaktadır. Bilindiği gibi zayıf nonlineer ve dispersif sistemlerde (1+1) boyutlu harmonik dalgaların yavaş değişen genliğini yöneten denklem

$$iA_t + A_{xx} + |A|^2 A = 0 \tag{1.3}$$

ile verilen nonlineer Schrödinger (NLS) denklemidir. Burada A sinüsoidal dalganın yavaş değişen kompleks genliğini göstermektedir. Bununla birlikte eğer ortamda iki uzay koordinatı boyunca dalga yayılımı mevcut ise NLS denkleminin bir boyutlu formu dalga modülasyonunu karakterize edemediğinden (2+1) boyutlu yeni bir evolüsyon denklemine ihtiyaç vardır. (2+1) boyutta dalganın nonlineer modülasyonunu tanımlayan evolüsyon denklemi ise

$$iA_t + A_{xx} + A_{xy} + A_{yy} + |A|^2 A = 0 \tag{1.4}$$

ile verilen NLS denkleminin (2+1) boyutlu formudur. Bu denklem sonlu genlikli arayüzey dalgalarında [13], iki boyutlu ağlarda (lattice) [14] ve nonlineer elastik bir zemine oturan ince plakta [15] (2+1) boyutta dalga modülasyonunu tanımlayan denklemler olarak elde edilmiştir.

Klasik elastisite teorisinde lineer yaklaşımda dispersif dalga yayılımının gözlenmediği bilinen bir gerçektir. Öte yandan elastik bir kristalde harmonik dalga yayılımı problemlerinin incelenmesi dispersif dalganın varlığını göstermiştir. Bu nedenle son yıllarda maddenin ayrık yapısını klasik elastisite teorisine katmak için çok değişik teoriler önerilmiştir. Bu teoriler, malzemede göz önüne aldıkları özelliklere bağlı olarak değişik isimler alırlar: Yüksek mertebe gradyan teorileri, yerel olmayan teoriler, çok atomlu yapılar, mikromorfik teoriler v.d. Dalga yayılımı bakımından, klasik elastisitenin tersine bu teoriler lineer yaklaşımda dispersif dalga yayılımını kabul ederler. Modellerin bu dispersif karakteri, nonlineerliğin de hesaba katılması ile yalnız dalgalar (solitary waves) gibi düzgün yapıları çözüm kabul eden KdV, NLS denklemlerinin ve bu denklemlerin genelleştirilmiş formları olan evolüsyon denklemlerinin elde edilmesine yol açar. Bu çalışmada, alan denklemleri yer değiştirmenin yüksek mertebe gradyanlarını içeren genelleştirilmiş elastik bir ortamda farklı ölçeklerde dalga yayılımı problemi incelenecektir.

Çalışmanın ikinci bölümünde dalga teorisinden bilinen bir boyutlu lineer ve nonlineer dalga denklemleri kullanılarak dalga yayılımı ile ilgili tanım ve terminoloji verilmiştir. Üçüncü bölümde, sonsuz, homojen ikinci mertebe nonlineer genelleştirilmiş elastik bir katı için alan denklemleri kısaca verilmiştir. Dördüncü bölümde, uzun dalga yaklaşımında (2+1) boyutlu dalgaların uzak alan davranışı indirgeyici pertürbasyon yöntemi ile incelenmiş ve hareketin kuple modifiye Kadomtsev-Petviashvili (KMKP) denklemleri ile karakterize edildiği bulunmuştur. Ayrıca değiştirilmiş bir Hirota metodu kullanılarak KMKP denklemlerinin bir özel çözümü elde edilmiştir. Beşinci bölümde, bir koordinat ekseni ile belli bir açı yapacak doğrultuda yayılan sinüsoidal dalganın modülasyonunun (2+1) boyutlu nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiş ve değiştirilmiş bir Hirota metodu kullanılarak NLS denkleminin zarf yalnız dalga (envelope solitary wave) şeklindeki çözümü verilmiştir. Son olarak altıncı bölümde ileride bu konuda yapılabilecek araştırmalar kısaca tartışılmıştır.

2. TEMEL DALGA TEORİSİ

Bu bölümde dalga teorisinden bilinen lineer dalga denklemi, lineer dispersif dalga denklemi ve nonlineer dalga denklemlerinin bir boyutlu formları kullanılarak dalga yayılımı ile ilgili gerekli tanımlar ve terminoloji verilecektir.

2.1 Lineer Dalgalar

$u(x,t)$ değişkeni için en basit bir boyutlu lineer dalga denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

olup bu denklemin genel çözümü

$$u(x,t) = f(x - c_0 t) \tag{2.2}$$

ile verilir. Burada c_0 bir sabit, f ise başlangıç ve sınır koşullarından belirlenecek keyfi bir fonksiyondur. (2.2) ile verilen $u(x,t)$ çözümü pozitif (sağ) x doğrultusunda yayılan dalgayı göstermektedir.

(2.1) ile verilen lineer dalga denklemi

$$u(x,t) = A \ \exp[i(kx - \omega t)] \tag{2.3}$$

şeklindeki harmonik dalgayı çözüm olarak kabul eder. Burada k dalga sayısı olup dalga boyuna $\lambda = 2\pi/k$ ilişkisi ile bağlıdır. Ayrıca ω frekansı ve A kompleks genliği gösterir. $u(x,t)$ değişkeni için yazılan lineer dalga denkleminin sıfır olmayan çözümünün olması için reel k ve reel ω arasında

$$D(k,\omega) = \omega - c_0 k = 0 \tag{2.4}$$

ile verilen ve *dispersiyon bağıntısı* olarak adlandırılan ilişkinin sağlanması gereklidir. (2.3) ile verilen harmonik dalganın faz hızı

$$c_p = \frac{\omega}{k} = c_0 \tag{2.5}$$

ile tanımlanır. Genel olarak, faz hızı k dalga sayısına bağlı ise dalga *dispersiftir* denir. Diğer bir deyişle c_p faz hızı her k dalga sayısı için aynı değilse, yani $\omega \neq c_0 k$ (c_0 =sbt) ise, farklı dalga sayılarına karşı gelen modlar farklı hızlarda yayılır ve ortamda yayılan dalgalar dağılır.

Diğer yandan dalganın grup hızı ise

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0 \tag{2.6}$$

ile tanımlanır. Dispersiyonun tanımı, $\omega'(k)$ fonksiyonunun sabit olmaması yani $\omega''(k) \neq 0$ şeklinde ifade edilirse [1], bu ifade (2.6) ile tanımlanan dalga grup hızının sabit olmaması anlamına gelir. Genel olarak dispersiyon sözcüğü, reel bir ω frekansı için farklı dalga sayısına sahip dalgaların farklı faz ve grup hızlarının olduğu ve dalganın farklı bileşenlerinin dalga yayılımı boyunca dağılacağı anlamına gelir. Bu durumda yukarıda verilen tanıma göre lineer dalga denklemi dispersif değildir.

Dispersiyonun etkisinin daha iyi görülebilmesi için (2.1) ile verilen lineer denklemden farklı olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{2.7}$$

lineer denklemi verilsin. (2.7) denklemine

$$u(x,t) = A \ \exp[i(kx - \omega t)]$$

ile verilen harmonik dalga çözümü aranırsa, dispersiyon bağıntısı

$$D(k,\omega) = \omega - c_0 k^3 = 0 \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\omega''(k) \neq 0$ koşulu sağlandığından bu dalga dispersiftir. Diğer yandan frekans ile dalga sayısı arasındaki ilişki $\omega = (c_0 k^2)k$ şeklinde ifade edilirse dalga faz hızının, $c_p = c_0 k^2$, k dalga sayısına bağlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Küçük dalga sayıları için dalga faz hızları küçük olup yavaş hareket eden dalgaların, büyük dalga sayıları için büyük bir faz hızıyla hareket edip dağılacakları açıktır.

2.2 Nonlineer Dalgalar

Bu kısımda nonlineerliğin dalga yayılımına etkisini görmek için

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0(1+u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.9}$$

ile verilen nonlineer dalga denklemi ele alınacaktır. f keyfi bir fonksiyon olmak üzere (2.9) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = f[x - c_0(1+u)t] \tag{2.10}$$

ile verilir. (2.10)'den görüldüğü gibi u, fonksiyonel bir denklem ile ifade edildiğinden yayılım boyunca dalganın şeklini değiştireceği beklenebilir.

Özel olarak $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.11}$$

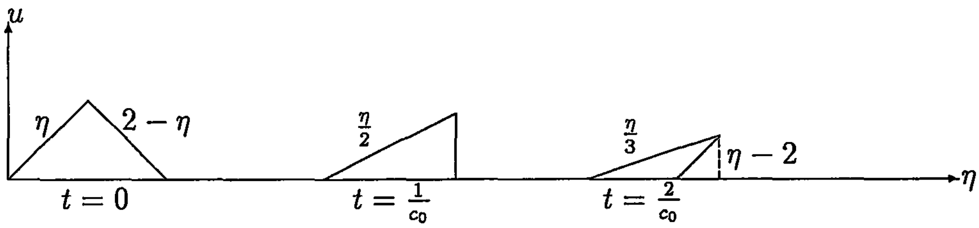
şeklinde seçilirse, dalganın zaman içindeki evolüsyonu incelenerek nonlineerliğin etkisi görülebilir. $u = f[x - c_0(1+u)t]$ fonksiyonel denklemi $\eta = x - c_0 t$ tanımı ile

$$u(\eta,t) = \begin{cases} \eta - c_0 u t & , \quad 0 \leq \eta + c_0 t \leq 1 \\ 2 - \eta + c_0 u t & , \quad 1 < \eta + c_0 t \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

veya

$$u = \begin{cases} \frac{\eta}{1+c_0 t} & , \quad 0 \leq \eta + c_0 t \leq 1 \\ \frac{2-\eta}{1-c_0 t} & , \quad 1 < \eta + c_0 t \leq 2 \end{cases} \tag{2.12}$$

şeklini alır. $t = 0$, $t = 1/c_0$ ve $t = 2/c_0$ zamanlarında çözüm şematik olarak Şekil 1. 'de gösterilmiştir.



Şekil 1.

$u = f[x - c_0(1+u)t]$ çözümünden de gözlendiği gibi faz hızı $c_0(1+u)$ olup; dalga, büyük u değerleri için daha hızlı yayılır. Böylece üçgenin tepe noktasındaki parçacıklar daha hızlı hareket ettiklerinden dolayı, bu noktalar aşağıdaki yavaş hareket eden parçacıkları yakalar ve dalga $t = 1/c_0$ anından sonra çok değerli hale gelerek kırılır.

Görüldüğü gibi model denklemin nonlineer olması sonlu bir zaman sonra dalganın çok değerli olup kırılmasına neden olmaktadır. Dispersif etkilerin yani yüksek mertebe türevlerin sisteme dahil edilmesi ile dalga kırılmasının oluşması engellenebilir.

2.3 Nonlineer Dispersif Dalgalar

Önceki alt bölümlerde gözlendiği gibi dispersiyon, dalgaların farklı dalga sayıları için farklı hızda yayılmalarına neden olmakta ve büyük dalga sayıları için dalgaların sürekli ortamda hızlı yayılarak dağılmasına yol açmaktadır. Nonlineerlik ise sonlu zaman sonra dalgaların dikleşmesine ve daha sonra da kırılmasına neden olmaktadır. Burada doğal olarak nonlineerlik ve dispersif etkilerin birbirlerini dengelediği durumda ne olacağı sorusu akla gelmektedir. Dispersiyonun neden olduğu dalgadaki dağılma ile zayıf nonlineerliğin neden olduğu kırılmanın birbirini dengelediği durumlarda; nonlineer sistemlerde düzgün, yapılarını koruyan, birbirleri ile nonlineer etkileşimlerden değişmeden çıkan soliton çözümlerinin var olduğu gözlenmektedir.

Gerçekten de, bu gözlemden hareketle problemin yapısına uygun bir pertürbasyon parametresi kullanıp, uygun koordinat dönüşümleri yapan ve bağımlı değişkenlerin bu pertürbasyon parametresinin asimptotik serisine açılabileceğini varsayan değişik asimptotik pertürbasyon yöntemleri [8,9] ile nonlineerlik ve dispersiyonun birbirlerini dengelediği evolüsyon denklemleri elde etmek mümkündür. Bu evolüsyon denklemleri uzun dalga yaklaşımı için (1+1) boyutlu durumda KdV denklemi ve (2+1) boyutlu durumda KP denklemi olarak ortaya çıkar [4]. Dalga modülasyonu problemi için ise bu denklemler NLS dekleminin (1+1) ve (2+1) boyutlu durumları halindedir [4].

Bu çalışmanın amacı, dispersif ve nonlineer genelleştirilmiş bir elastik ortamda pertürbasyon parametresinin farklı ölçeklerine karşı gelen durumlarda iki boyutta dalga yayılımı problemlerini incelemektir. Uzun dalga yaklaşımı ve dalga modülasyonu problemleri için gereken alan denklemleri Bölüm 3 'te verilecektir.

3. TEMEL DENKLEMLER

Bilindiği gibi klasik sürekli ortamlar mekaniğindeki esas problem verilen bir anda cismin maddesel noktasının $x_k, (k = 1,2,3)$ uzaysal koordinatlarının belirlenmesidir. Diğer yandan maddesel noktalarının davranışı yerel şekil değiştirmelerden etkilenen mikromorfik malzemelerde ise yukarıdaki x_k vektörüne ilaveten, parçacıkların mikro hareketini karakterize eden χ_{kl} fonksiyonlarının da belirlenmesi gerekir. Alan denklemleri ve bünye teorisi [16,17] numaralı çalışmalarda verilen mikromorfik elastik ortamda klasik ve mikro şekil değiştirme tansörleri

$$\begin{aligned} C_{KL}(X_N,t) &= x_{k,K}x_{k,L} \\ \Psi_{KL}(X_N,t) &= x_{k,K}\chi_{kL} \\ \Gamma_{KLM}(X_N,t) &= x_{k,K}\chi_{kL,M} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ile tanımlanır. (3.1)'de K indisi konum değişkeni X_K'ya göre kısmi türevi gösterir. Burada C_{KL} klasik Green deformasyon tansörü, Ψ_{KL} ve Γ_{KLM} ise mikromorfik teorinin öngördüğü mikro deformasyon tansörleri, $x_{k,K}$ klasik deformasyon gradyanı, χ_{kl} ise mikro parçacıkların hareketini karakterize eden büyüklüktür. Klasik deformasyon gradyanı

$$x_{k,K} = (\delta_{LK} + U_{L,K})\delta_{kL}$$

ve Φ_{LK} yeni tanımlanan mikro şekil değiştirme tansörü olmak üzere

$$\chi_{kK} = (\delta_{LK} + \Phi_{LK})\delta_{kL},$$

(3.1) ile verilen ifadelerde kullanılırsa mikromorfik elastisite teorisinin şekil değiştirme tansörleri

$$2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}$$

$$\varepsilon_{KL} = \Psi_{KL} - \delta_{KL} = \Phi_{KL} + U_{L,K} + U_{M,K}\Phi_{ML}$$
$$\Gamma_{KLM} = \Phi_{KL,M} + U_{N,K}\Phi_{NL,M} \tag{3.2}$$

formuna indirgenir.

Bu çalışmada genelleştirilmiş sonsuz elastik bir ortamda dalga yayılımı problemi inceleneceğinden ilgilenilen problemlerde sınır koşulları olmayacaktır. Dolayısı ile uzaysal ve maddesel koordinatlar arasında herhangi bir fark olmayacağından, notasyonda kolaylık sağlamak amacıyla çalışmanın bundan sonraki kısımlarında uzaysal koordinatlar kullanılacaktır. Bu kabul ile makro ve mikro şekil değiştirme tansörleri

$$\begin{aligned} 2e_{kl} &= u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}\, u_{m,l} \\ \varepsilon_{kl} &= \Phi_{kl} + u_{l,k} + u_{m,k}\, \Phi_{ml} \\ \Gamma_{klm} &= \Phi_{kl,m} + u_{n,k}\, \Phi_{nl,m} \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklini alır. Burada $u_{k,l}$ yer değiştirme gradyanı, e_{kl} makro hacim elemanının makro şekil değiştirmesini karakterize eden şekil değiştirme tansörü, ε_{kl} ve Γ_{klm} ise mikro şekil değiştirme ile ilgili tansörlerdir [16,17].

Son zamanlardaki bir çalışmada Erofeyev ve Potapov [18,19], mikromorfik elastisite teorisinde alan denklemlerinin formunda basitleştirmeler yapmışlar ve yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını alan denklemlerine dahil etmişlerdir. Buna göre mikro şekil değiştirme etkilerinin zayıf olduğu kabul edilerek şekil değiştirme tansörü ε_{kl} sıfır olarak alınmıştır. Ayrıca, Φ_{kl} ve $\Phi_{kl,m}$ tansörlerinin küçük olduğu varsayılıp (3.3) denklemlerinde ikinci mertebe terimler ihmal edilerek, Φ_{kl} tansörünün yaklaşık ifadesi

$$\Phi_{kl} \simeq -u_{l,k}$$

olarak elde edilmiştir. Bu durumda makro deformasyon tansörü

$$2e_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l} \tag{3.4}$$

ve mikro şekil değiştirme ile ilgili Γ_{klm} tansörü

$$\Gamma_{klm} = -u_{l,km} \tag{3.5}$$

olarak bulunmuştur [18]. Ayrıca kinetik enerjinin klasik elastisite teorisinde olduğu gibi alınabileceği varsayılır:

$$T = \frac{1}{2}\rho_0[(u_{1,t})^2 + (u_{2,t})^2 + (u_{3,t})^2]. \tag{3.6}$$

(3.6)'de t indisi zaman değişkeni t'ye göre kısmi türevi gösterir.

Bu çalışmada genelleştirilmiş elastik bir ortamda zayıf nonlineer dalga yayılımı ile ilgilenileceğinden, $\Sigma(\mathbf{e},\mathbf{\Gamma})$ iç enerji yoğunluğu fonksiyonunu argümanlarının bir kuvvet serisi şeklinde ifade etmek uygundur [19]:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\lambda}{2}e_{kk}e_{ll} + \mu e_{kl}e_{kl} + \frac{A}{3}e_{kl}e_{ml}e_{km} + Be_{kl}e_{lk}e_{mm} \\ &\quad + \frac{C}{3}e_{kk}e_{ll}e_{mm} + 2\mu m^2(\Gamma_{klm}\Gamma_{klm} + \nu\Gamma_{klm}\Gamma_{lkm}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada λ, μ (Láme sabitleri) lineer elastik sabitler; A, B ve C ikinci mertebe elastik sabitler olup, ν ve m mikro yapıyı karakterize eden yeni sabitler olarak verilmiştir. Mikro şekil değiştirme etkilerinin zayıf olduğu düşünülerek; ortamdaki fiziksel nonlineerliği karakterize eden ve (3.7) ile verilen Σ açılımının $\mathbf{e}$'ye göre üçüncü mertebe terimleri, $\mathbf{\Gamma}$'ya göre ise ikinci mertebe terimleri içerdiği varsayılmıştır.

(3.4) ile verilen şekil değiştirme tansörünün ifadesi (3.7) ile verilen Σ açılımında yazılırsa; yer değiştirme gradyanı $u_{k,l}$'ye üçüncü mertebeden, yer değiştirmenin ikinci gradyanı $u_{k,lm}$'ye ise ikinci mertebeden bağlı Σ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\lambda}{2}\,(u_{k,k}u_{m,m} + u_{k,m}u_{m,n}u_{m,n}) + 2\mu\; m^2\;(u_{n,km}u_{n,km} + \nu\; u_{n,km}u_{k,nm}) \\ &\quad + \frac{\mu}{2}(u_{m,n}u_{m,n} + u_{m,n}u_{n,m} + u_{k,m}u_{n,m}u_{m,k} + u_{n,k}u_{m,k}u_{n,m}) \\ &\quad + \frac{A}{12}\,u_{k,n}(u_{m,n}u_{k,m} + u_{n,m}u_{k,m} + u_{m,n}u_{m,k} + u_{n,m}u_{m,k}) \\ &\quad + \frac{B}{4}\,u_{m,m}u_{n,k}(u_{n,k} + u_{k,n}) + \frac{C}{3}\,u_{k,k}u_{m,m}u_{n,n} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. (3.8) ifadesindeki $u_{k,l}$ yer değiştirme gradyanının ve $u_{k,lm}$ yer değiştirme ikinci gradyanının genel olarak x, y ve z koordinatlarına bağlı olduğu kabul edilir ve tekrarlanan indisler üzerinde toplama uylaşımı olduğu da hesaba katılırsa, Σ şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunun açık formu

$$
\begin{aligned}
\Sigma \;=\; & \frac{\lambda}{2}\,[(u_{1,x}+u_{2,y}+u_{3,z})^2+(u_{1,x}+u_{2,y}+u_{3,z})(u_{1,x}^2+u_{1,y}^2+u_{1,z}^2 \\
& \quad +u_{2,x}^2+u_{2,y}^2+u_{2,z}^2+u_{3,x}^2+u_{3,y}^2+u_{3,z}^2)] \\
& +\frac{\mu}{2}\,[(2u_{1,x}^2+2u_{2,y}^2+2u_{3,z}^2+u_{1,y}^2+u_{2,x}^2+u_{3,x}^2+u_{3,y}^2+u_{1,z}^2+u_{2,z}^2 \\
& \quad +2u_{3,x}u_{1,z}+2u_{2,z}u_{3,y}+2u_{2,x}u_{1,y}) \\
& \quad +2u_{1,x}(u_{1,x}^2+u_{2,x}^2+u_{3,x}^2+u_{1,y}^2+u_{1,z}^2) \\
& \quad +2u_{2,y}(u_{2,y}^2+u_{2,x}^2+u_{3,y}^2+u_{2,z}^2+u_{1,y}^2) \\
& \quad +2u_{3,z}(u_{3,z}^2+u_{3,x}^2+u_{3,y}^2+u_{2,z}^2+u_{1,z}^2) \\
& \quad +2u_{1,y}(u_{2,z}u_{1,z}+u_{3,x}u_{3,y}+u_{2,x}u_{1,x}+u_{2,x}u_{2,y}) \\
& \quad +2u_{1,z}(u_{3,x}u_{1,x}+u_{3,x}u_{3,z}+u_{2,x}u_{2,z}+u_{3,y}u_{1,y}) \\
& \quad +2u_{2,x}u_{3,x}(u_{3,y}+u_{2,z})+2u_{3,y}u_{2,z}(u_{3,z}+u_{2,y})] \\
& +2\mu\; m^2\;[u_{1,xx}^2+u_{2,xx}^2+u_{3,xx}^2+u_{1,yy}^2+u_{2,yy}^2+u_{3,yy}^2 \\
& \quad +u_{1,zz}^2+u_{2,zz}^2+u_{3,zz}^2+2u_{1,xy}^2+2u_{2,xy}^2+2u_{3,xy}^2 \\
& \quad +2u_{1,xz}^2+2u_{1,yz}^2+2u_{2,xz}^2+2u_{2,yz}^2+2u_{3,xz}^2+2u_{3,yz}^2 \\
& +\nu(u_{1,xx}^2+u_{1,xy}^2+2u_{1,xy}u_{2,xx}+2u_{1,yy}u_{2,xy}+u_{2,xy}^2+u_{2,yz}^2+u_{1,xz}^2 \\
& \quad +u_{2,yy}^2+u_{3,zz}^2+2u_{3,xx}u_{1,xz}+u_{3,xz}^2+2u_{3,xz}u_{1,zz}+2u_{3,yy}u_{2,yz} \\
& \quad +2u_{2,zz}u_{3,yz}+u_{3,yz}^2+2u_{3,xy}u_{2,xz}+2u_{3,xy}u_{1,yz}+2u_{1,yz}u_{2,xz})] \\
& +\frac{A}{12}\,(4u_{1,x}^3+6u_{1,x}u_{2,x}u_{1,y}+3u_{1,y}^2u_{1,x}+3u_{1,y}^2u_{2,y}+3u_{2,x}^2u_{1,x} \\
& \quad +3u_{2,x}^2u_{2,y}+6u_{2,y}u_{1,y}u_{2,x}+4u_{2,y}^3+3u_{3,x}^2u_{1,x}+3u_{3,x}u_{2,x}u_{3,y} \\
& \quad +3u_{3,y}u_{1,y}u_{3,x}+3u_{3,y}^2u_{2,y}+4u_{3,z}^3+6u_{1,x}u_{3,x}u_{1,z}+3u_{1,z}^2u_{1,x} \\
& \quad +6u_{3,z}u_{1,z}u_{3,x}+3u_{3,x}^2u_{3,z}+3u_{1,z}^2u_{3,z}+3u_{2,z}^2u_{2,y}+6u_{2,y}u_{3,y}u_{2,z} \\
& \quad +3u_{2,z}^2u_{3,z}+3u_{3,y}^2u_{3,z}+6u_{3,z}u_{2,z}u_{3,y}+3u_{1,y}u_{3,y}u_{1,z}+3u_{1,z}u_{2,z}u_{1,y} \\
& \quad +3u_{2,x}u_{3,x}u_{2,z}+3u_{2,z}u_{1,z}u_{2,x}+3u_{1,y}u_{2,z}u_{3,x}+3u_{1,z}u_{3,y}u_{2,x}) \\
& +\frac{B}{2}\,(2u_{1,x}^3+2u_{1,x}^2u_{2,y}+u_{1,y}^2u_{1,x}+u_{1,y}^2u_{2,y}+u_{2,x}^2u_{1,x}+u_{2,x}^2u_{2,y} \\
& \quad +2u_{2,y}^2u_{1,x}+2u_{2,y}^3+u_{3,x}^2u_{1,x}+u_{3,x}^2u_{2,y}+u_{3,y}^2u_{1,x}+u_{3,y}^2u_{2,y} \\
& \quad +2u_{1,y}u_{2,x}u_{1,x}+2u_{1,y}u_{2,x}u_{2,y}+2u_{3,z}^3+2u_{1,x}^2u_{3,z}+u_{1,z}^2u_{1,x} \\
& \quad +2u_{3,z}^2u_{1,x}+u_{3,x}^2u_{3,z}+u_{1,z}^2u_{3,z}+u_{2,z}^2u_{2,y}+2u_{2,y}^2u_{3,z}+u_{2,z}^2u_{3,z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+u_{3,y}^2 u_{3,z} + 2u_{3,z}^2 u_{2,y} + u_{1,y}^2 u_{3,z} + u_{1,z}^2 u_{2,y} + u_{2,x}^2 u_{3,z} + u_{2,z}^2 u_{1,x} \\
&+2u_{3,x} u_{1,z} u_{1,x} + 2u_{3,x} u_{1,z} u_{3,z} + 2u_{3,y} u_{2,z} u_{2,y} + 2u_{2,z} u_{3,y} u_{3,z} \\
&+2u_{1,y} u_{2,x} u_{3,z} + 2u_{3,y} u_{2,z} u_{1,x} + 2u_{1,z} u_{3,x} u_{2,y}) \\
&+\frac{C}{3}\,(u_{1,x} + u_{2,y} + u_{3,z})^3 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

şeklinde verilebilir.

Bu durumda hareketi yöneten denklemler

$$
\delta \int L dt = \delta \iiiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0 \qquad (3.10)
$$

ile verilen Hamilton prensibinden elde edilir. (3.10) ifadesindeki $\mathcal{L}$ Lagrange yoğunluk fonksiyonu

$$
\mathcal{L} = T - \Sigma = \mathcal{L}(u_{k,t}, u_{k,l}, u_{k,lm})
$$

olup, karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri

$$
\frac{\partial}{\partial t}\,(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,t}}) + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,l}}) - \sum_{m\geq l}^{3} \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,lm}}) = 0, \qquad (k = 1, 2, 3) \qquad (3.11)
$$

hareketi yöneten denklemleri verir. Bu çalışmada, alan denklemleri (3.11) ile verilen dalgaların uzak alan davranışlarını asimptotik olarak karakterize eden nonlineer evolüsyon denklemleri elde edilecektir. İncelenilen problemin yapısına bağlı olarak (3.11) denklemlerinin açık formları ilgili bölümlerde verilecektir.

4. UZUN DALGA YAKLAŞIMI

4.1 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

Gerçek fiziksel sistemlerin alan denklemleri çoğu kez yüksek mertebe uzaysal türevler içerir. Bu sistemlerde nonlineerlikten dolayı dikleşen dalgalar, dispersiyonun etkisi ile düzgün bir hale gelir. Bu gözlem, nonlineerliğin neden olduğu dikleşme ve dispersiyonun neden olduğu dağılmanın uygun bir asimptotik metot kullanılarak dengelenebileceği fikrini akla getirir. Nonlineerlik ve dispersiyonun birbirleri ile dengelendiği sistemlerde yalnız dalga (solitary waves) olarak adlandırılan düzgün yapıların ortaya çıktığı öteden beri bilinmektedir. Bu düzgün yapıları çözüm kabul eden evolüsyon denklemlerini bulabilmek için bu çalışmada seçilen asimptotik metot *indirgeyici pertürbasyon yöntemi*'dir [8,9]. Bu metoda göre uzay ve zaman değişkenlerini yeniden ölçeklemek ve bağımlı değişkenlerin de uygun seçilmiş bir pertürbasyon parametresine göre seri açılımlarını kullanmak gerekir. Böylece pertürbasyon parametresi zayıf nonlineerliğin ve zayıf dispersiyonun bir ölçüsü olarak probleme dahil edilir. Bu iki etkinin birbirlerini dengelemesi sonucunda nonlineer denklem sisteminin hareketini asimptotik olarak tanımlayan nonlineer evolüsyon denklem veya denklemlerini elde etmek mümkün olur. Orijinal sistemden daha basit olan evolüsyon denklemlerini çözmek çoğu kez mümkündür. Bu alt bölümde önce (1+1), daha sonra (2+1) boyutlu dalgaların uzun dalga yaklaşımında evolüsyonunu veren indirgeyici pertürbasyon yöntemi kısaca tanıtılacaktır.

(1+1) boyutta uzun dalga yaklaşımında dalga sayısı k; $\epsilon > 0$ küçük bir parametre, p sonradan belirlenecek pozitif reel bir sayı ve $\bar{k} = \mathcal{O}(1)$ dalga sayısı olmak üzere $k = \epsilon^p \bar{k}$ yazılabilir. Dispersif sistemlerde $\omega(k)$'nın Taylor açılımı k'ya göre tek terimleri içerdiğinden, $k \to 0$ için $\omega(k)$

$$\omega(k) = ak + bk^3 + \mathcal{O}(k^5) \tag{4.1}$$

formundadır. Burada a ve b sabitlerdir. Uzun dalgalar harmonik dalgalar olmamalarına rağmen, uzun dalga limitinde dispersiyon ilişkisinin limit formu kullanılabileceğinden, $k \to 0$ için θ faz fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\theta &= kx - \omega(k)t \\
&= \bar{k}\epsilon^p x - [a\bar{k}\epsilon^p + b\bar{k}^3\epsilon^{3p} + \mathcal{O}(k^5)]t \\
&= \bar{k}\epsilon^p(x - at) - b\bar{k}^3\epsilon^{3p}t + \mathcal{O}(k^5)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklini alır. Faz fonksiyonunun bu formu x ve t koordinatları için doğal bir ölçekleme sağladığından yeni ξ ve τ değişkenleri

$$\xi = \epsilon^p(x - at), \qquad \tau = \epsilon^{3p}t \tag{4.3}$$

olarak seçilebilir. Görüldüğü gibi, uzay değişkeni ölçeklendikten sonra zaman değişkeninin nasıl ölçekleneceği lineer dispersiyon bağıntısından bellidir. (4.3) ile verilen koordinat uzatması, x ve t değişkenlerindeki büyük değişikliklerin ξ ve τ değişkenlerinde görece olarak daha küçük değişikliklere neden olduğunu verir. Bu nedenle ξ ve τ yavaş değişkenler olarak da adlandırılır. Artık yeni koordinatlar yardımı ile alan denklemlerinin uzak alan davranışını karakterize etmek mümkün olur. Bağımlı değişkenler de ϵ'nun kuvvetlerine göre seriye açılıp yeni koordinatlara taşınmış alan denklemlerinde yazıldığında p'nin değeri uygun bir şekilde belirlenir. (1+1) boyutta uzun dalga yaklaşımında dalgaların uzak alan davranışını belirleyen model denklemler çoğu kez KdV denklemi ve onun genelleştirilmiş formlarıdır.

Bazı durumlarda ikinci uzay boyutundaki değişimler dalga yayılımını bir boyuta bağlı olmaktan çıkarır. Bu durumda dalga hareketini karakterize etmek için ikinci uzay boyutunun da hesaba katılması gerekir. Nonlineer denklemlerin uzak alan davranışını elde etmek için kullanılan indirgeyici pertürbasyon metodunun (2+1) boyutlu hal için aldığı form ise aşağıda verileceği gibi (1+1) boyutlu halin bir genelleştirilmesinden ibarettir. Bir boyutlu duruma benzer şekilde (2+1) boyutta uzun dalga yaklaşımında k dalga sayısı $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ şeklinde olup; k_x dalga yayılımı doğrultusundaki dalga sayısı, k_y ise yayılıma dik doğrultudaki dalga sayısıdır. Dalga yayılımı yönündeki dalga sayısı k_x'in, enine doğrultudaki dalga sayısı k_y'den büyük olduğu kabul edilirse, yani $k_x >> k_y$ ise ϵ dispersiyonun zayıflık derecesini ölçen bir parametre, p ve q sonradan belirlenecek pozitif sabitler, $\bar{k}_x = \mathcal{O}(1)$ ve $\bar{k}_y = \mathcal{O}(1)$ olmak üzere $k_x = \epsilon^p \bar{k}_x$ ve $k_y = \epsilon^q \bar{k}_y$ olarak seçilebilir. Uzun dalga yaklaşımında ($k << 1$), $k_x >> k_y$ kabulü hatırlanacak olursa $p < q$ olduğuna dikkat edilmelidir. Uzun dalga yaklaşımında $k_x >> k_y$ için $\omega(k)$

$$
\begin{aligned}
\omega(k) &= a(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} + b(k_x^2 + k_y^2)^{\frac{3}{2}} + \cdots \\
&= ak_x(1 + \frac{k_y^2}{k_x^2})^{\frac{1}{2}} + bk_x^3(1 + \frac{k_y^2}{k_x^2})^{\frac{3}{2}} + \cdots \\
&= ak_x(1 + \frac{k_y^2}{2k_x^2} + \cdots) + bk_x^3(1 + \frac{3k_y^2}{2k_x^2} + \cdots)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

olup, θ faz fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\theta &= k_x x + k_y y - \omega(k)t \\
&= \bar{k}_x \epsilon^p x + \bar{k}_y \epsilon^q y - a\bar{k}_x \epsilon^p t - \frac{a}{2}\frac{\bar{k}_y^2}{\bar{k}_x}\epsilon^{2q-p}\, t - b\bar{k}_x^3 \epsilon^{3p}\, t + \cdots \\
&= \bar{k}_x \epsilon^p (x - at) + \bar{k}_y \epsilon^q y - (\frac{a}{2}\frac{\bar{k}_y^2}{\bar{k}_x}\epsilon^{2q-4p} + b\bar{k}_x^3)\epsilon^{3p}\, t + \cdots
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

şeklini alır. Her üç koordinatın aynı mertebede olmasını sağlamak için faz fonksiyonunun formu incelenirse $q = 2p$ olmak üzere x, y ve t koordinatlarının uzatılmış formları

$$
\xi = \epsilon^p (x - at), \quad \eta = \epsilon^{2p} y, \quad \tau = \epsilon^{3p} t \tag{4.6}
$$

olarak seçilebilir. Bağımsız değişkenlerin ϵ parametresinin asimptotik serisi şeklindeki formlarının yeni koordinatlara taşınmış alan denklemlerinde yazılması ile p parametresinin uygun değeri ortaya çıkar. (2+1) boyutta dispersif ortamlarda zayıf nonlineer dalgalar ilk olarak Kadomtsev ve Petviashvili tarafından incelenmiş; uzun dalgaların asimptotik evolüsyonunun, KdV denkleminin iki boyuta genelleştirilmiş formu olan bir denklemle karakterize edilebildiği gösterilmiştir [12]. Bu denklem daha sonra değişik ortamlarda (2+1) boyutlu uzun dalgaların evolüsyonunu karakterize eden denklem olarak elde edilmiş ve Kadomtsev ve Petviashvili (KP) denklemi olarak adlandırılmıştır.

4.2 İki Boyutlu Ortamda Uzun Dalga Yaklaşımı

Bilindiği gibi küçük genlikli zayıf dispersif dalgaların evolüsyonu bir boyutlu durumda KdV, iki boyutlu durumda ise KP denklemleri ile verilmektedir. Bu denklemler akışkan, plazma ve katı gibi çok değişik ortamlarda elde edilmiştir. [20]'de indirgeyici pertürbasyon metodu kullanılarak, nonlineer mikropolar elastik bir ortamda yayılan bir boyutlu uzun enine dalgaların asimptotik olarak kuple modifiye Korteweg-de Vries (KMKdV) denklemleri ile karakterize edilebileceği bulunmuştur. Adı geçen çalışmada pertürbasyon yöntemi alan denklemlerine doğrudan uygulanmıştır. Daha sonra [21]'de uzun dalga yaklaşımında bir boyutlu enine dalgaların etkileşimini veren KMKdV denklemleri yeniden türetilmiştir. Burada kullanılan metot [3]'te verilmiştir. Bu metoda göre, alan denklemlerinin seriye açılması yerine, Lagrange yoğunluk fonksiyonu bir pertürbasyon parametresinin serisine açılmıştır. Evolüsyon denklemlerini elde etmek için böyle bir varyasyonel yöntem gerekli olmasa da, Lagrange yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi nonlineer evolüsyon denkleminin elde edilmesini kolaylaştırmıştır. Yukarıdaki çalışmalar mikropolar elastik ortamda *bir boyutlu* dalga yayılımını tanımlamaktadır. Eğer ortamda iki uzay boyutunda değişimler söz konusu ise, KMKdV denklemleri (2+1) boyutlu hareketi tanımlayamadığından yeni evolüsyon denklemlerine gerek duyulur.

Yakın zamanlarda yapılan bir çalışmada mikropolar elastik bir ortamda iki boyutlu dalga yayılımı, Lagrange yoğunluk fonksiyonunu esas alan bir asimptotik yöntem kullanılarak incelenmiştir [22]. İki boyutlu uzun dalga yaklaşımında enine dalgalar asimptotik olarak iki tane kuple nonlineer evolüsyon denklemleri ile karakterize edilmiştir:

$$\begin{aligned} &\phi_{xt} + \Lambda\ [\phi_x(\phi_x^2+\psi_x^2)]_x + \Gamma\ \phi_{xxxx} + \nu\ \phi_{yy} + \frac{\nu}{4}\ [(\psi_x\psi_y)_x - (\psi_x^2)_y] = 0 \\ &\psi_{xt} + \Lambda\ [\psi_x(\phi_x^2+\psi_x^2)]_x + \Gamma\ \psi_{xxxx} + \nu\ \psi_{yy} + \frac{\nu}{4}\ [(\psi_y\phi_x - 2\psi_x\phi_y)_x + (\phi_x\psi_x)_y] = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7) denklemlerinde ϕ ve ψ yer değiştirme vektörünün birinci mertebe enine bileşenleri, Λ, Γ ve ν ise sabitlerdir. Bu evolüsyon denklemleri kuple modifiye Kadomtsev-Petviashvili (KMKP) denklemleri olarak adlandırılabilir. KMKP denklemleri ile tanımlanan evolüsyon; zayıf nonlineer, zayıf dispersif ve zayıf iki boyutlu olup üç etki de aynı mertebedendir. (4.7) KMKP denklemleri bir boyutlu durumda elde edilen KMKdV denklemlerinin iki boyutlu genelleştirilmiş halidir. Gerçekten y koordinatına bağlılık ihmal edilirse KMKP denklemleri [20]'de verilen KMKdV denklemlerine indirgenir.

Çalışmanın bu bölümünde, alan denklemleri yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren genelleştirilmiş sonsuz elastik bir ortamda, küçük ve sonlu genlikli dalgaların yayılımı ele alınmaktadır. Problemi matematiksel olarak modelleyen denklem sisteminin asimptotik davranışı indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenecektir. Burada kullanılan yöntem esas olarak [3]'te verilmiştir. Bu yaklaşıma göre, Lagrange yoğunluk fonksiyonu nonlineerlik ve dispersiyonun ölçüsü olan ϵ parametresinin bir asimptotik serisi şeklinde ifade edilecektir. ϵ'un her mertebesi için elde edilen Lagrange yoğunluk fonksiyonlarına karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri, orijinal denklem sisteminin uzak alan davranışını karakterize eden evolüsyon denklemlerini verir. Böyle bir yaklaşımın tercih edilmesinin nedeni, yukarıda da belirtildiği gibi Lagrange yoğunluk fonksiyonu ile işlem yapmanın alan denklemleri ile işlem yapmaya oranla daha kolay olmasındandır [3].

(4.7) denklemlerinin elde edildiği [22] numaralı çalışmada taşıyıcı dalga x ekseni boyunca yayılmakta olup, ikinci uzay boyutundaki değişimlerin y koordinatı ile ölçüldüğü kabul edilmiştir. Dolayısı ile bu problemde y koordinatının varlığı, (4.7) denklemlerinden de görüldüğü gibi kuplaj terimlerinde simetrik olmayan bir yapı oluşturmuştur. Şimdiki çalışmada, [22]'de elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak, (4.7) denklemlerinin kuplaj terimlerinde beliren simetrik olmayan yapının yok edilmesi için ikinci uzay boyutundaki değişimlerin, y koordinatı yerine yz düzleminde y ekseni ile belli bir açı yapan eğik bir koordinatta (oblique coordinate) olduğu varsayılmıştır. Böylece problemin çözümü ile elde edilecek evolüsyon denklemlerinde r eğik koordinatının y, z veya yz düzlemindeki herhangi bir doğrultudaki koordinat olarak seçilmesi ile evolüsyon denklemlerindeki kuplaj terimlerin alacağı formu elde etmek mümkün olacaktır.

İki boyutlu dalgalar için u_k yer değiştirme vektörü

$$u_k = u_k(x, r, t), \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

olarak kabul edilir. Burada x dalga yayılımı doğrultusu, r ise yz düzleminde y ekseni ile θ_0 açısı yapan

$$r = \cos\theta_0\ y + \sin\theta_0\ z \tag{4.9}$$

şeklindeki eğik koordinattır. r eğik koordinatının kullanımı ile, θ_0 açısının farklı değerleri için yz düzlemindeki herhangi bir doğrultudaki değişimlerin probleme ithal edilmesi mümkündür. $\alpha = \cos\theta_0$ ve $\beta = \sin\theta_0$ tanımları ile (4.9) eğik koordinatı

$$r = \alpha y + \beta z \tag{4.10}$$

şeklini alır. Böylece (2+1) boyutta yani bağımlı değişkenlerin x, r ve t bağımsız değişkenlerine bağlı olması durumunda (3.9) ile verilen Σ iç enerji fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\Sigma = & \frac{\lambda}{2}\ [(u_{1,x} + \alpha u_{2,r} + \beta u_{3,r})^2 + (u_{1,x} + \alpha u_{2,r} + \beta u_{3,r})(u_{1,x}^2 + u_{1,r}^2 \\
& + u_{2,x}^2 + u_{2,r}^2 + u_{3,x}^2 + u_{3,r}^2)] \\
& + \frac{\mu}{2}\ \{[2u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2 + u_{3,x}^2 + u_{1,r}^2 + (1+\alpha^2)u_{2,r}^2 + (1+\beta^2)u_{3,r}^2 \\
& + 2\beta u_{1,r}u_{3,x} + 2\alpha\beta u_{2,r}u_{3,r} + 2\alpha u_{1,r}u_{2,x}] \\
& + 2u_{1,x}(u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2 + u_{3,x}^2 + u_{1,r}^2) \\
& + 2\alpha u_{2,r}(u_{2,r}^2 + u_{2,x}^2 + \alpha^2 u_{1,r}^2 + \alpha^2 u_{3,r}^2)
\end{aligned}$$

$$+2\beta u_{3,r}(u_{3,r}^2 + u_{3,x}^2 + \beta^2 u_{1,r}^2 + \beta^2 u_{2,r}^2)$$
$$+2\alpha u_{1,r}(\beta^2 u_{1,r}u_{2,r} + \alpha u_{2,x}u_{2,r} + \alpha u_{3,x}u_{3,r} + u_{2,x}u_{1,x})$$
$$+2\beta u_{1,r}(u_{3,x}u_{1,x} + \beta u_{2,x}u_{2,r} + \beta u_{3,x}u_{3,r} + \alpha^2 u_{3,r}u_{1,r})$$
$$+2u_{2,x}u_{3,x}(\alpha u_{3,r} + \beta u_{2,r}) + 2\alpha\beta u_{2,r}u_{3,r}(\beta u_{3,r} + \alpha u_{2,r})\}$$
$$+2\mu\ m^2\ [(u_{1,xx}^2 + u_{2,xx}^2 + u_{3,xx}^2 + u_{1,rr}^2 + u_{2,rr}^2 + u_{3,rr}^2 + 2u_{1,xr}^2 + 2u_{2,xr}^2 + 2u_{3,xr}^2)$$
$$+\nu(u_{1,xx}^2 + u_{1,xr}^2 + 2\alpha u_{1,xr}u_{2,xx} + 2\alpha u_{1,rr}u_{2,xr} + \alpha^2 u_{2,xr}^2 + \alpha^2 u_{2,rr}^2 + \beta^2 u_{3,rr}^2$$
$$+2\beta u_{1,xr}u_{3,xx} + \beta^2 u_{3,xr}^2 + 2\beta u_{3,xr}u_{1,rr} + 2\alpha\beta u_{3,rr}u_{2,rr} + 2\alpha\beta u_{3,xr}u_{2,xr})]$$
$$+\frac{A}{12}\ [4u_{1,x}^3 + 6\alpha u_{1,x}u_{2,x}u_{1,r} + 3u_{1,r}^2 u_{1,x} + 3\alpha u_{1,r}^2 u_{2,r} + 3u_{2,x}^2 u_{1,x} + 3\alpha u_{2,x}^2 u_{2,r}$$
$$+(3+3\alpha^2)u_{2,r}u_{1,r}u_{2,x} + (\alpha^3 + 3\alpha)u_{2,r}^3 + 3u_{3,x}^2 u_{1,x} + 3\alpha u_{3,x}u_{2,x}u_{3,r}$$
$$+(3+3\beta^2)u_{3,r}u_{1,r}u_{3,x} + (3\alpha + 3\beta^2\alpha)u_{3,r}^2 u_{2,r} + (\beta^3 + 3\beta)u_{3,r}^3$$
$$+6\beta u_{1,x}u_{3,x}u_{1,r} + 3\beta u_{3,x}^2 u_{3,r} + 3\beta u_{1,r}^2 u_{3,r} + (3\beta + 3\alpha^2\beta)u_{2,r}^2 u_{3,r}$$
$$+3\beta u_{2,x}u_{3,x}u_{2,r} + 3\alpha\beta u_{1,r}u_{2,r}u_{3,x} + 3\alpha\beta u_{1,r}u_{3,r}u_{2,x}]$$
$$+\frac{B}{2}\ [2u_{1,x}^3 + 2\alpha u_{1,x}^2 u_{2,r} + u_{1,r}^2 u_{1,x} + \alpha u_{1,r}^2 u_{2,r} + u_{2,x}^2 u_{1,x} + \alpha u_{2,x}^2 u_{2,r}$$
$$+(1+\alpha^2)u_{2,r}^2 u_{1,x} + (\alpha + \alpha^3)u_{2,r}^3 + u_{3,x}^2 u_{1,x} + \alpha u_{3,x}^2 u_{2,r} + (1+\beta^2)u_{3,r}^2 u_{1,x}$$
$$+(\alpha + 3\alpha\beta^2)u_{3,r}^2 u_{2,r} + 2\alpha u_{1,r}u_{1,x}u_{2,x} + 2\alpha^2 u_{1,r}u_{2,x}u_{2,r} + 2\beta^2 u_{1,r}u_{3,r}u_{3,x}$$
$$+2\beta u_{1,x}^2 u_{3,r} + \beta u_{3,x}^2 u_{3,r} + \beta u_{1,r}^2 u_{3,r} + \beta u_{2,x}^2 u_{3,r} + 2\beta u_{1,x}u_{3,x}u_{1,r} + (\beta + \beta^3)u_{3,r}^3$$
$$+(\beta + 3\beta\alpha^2)u_{2,r}^2 u_{3,r} + 2\alpha\beta u_{2,x}u_{1,r}u_{3,r} + 2\alpha\beta u_{1,x}u_{2,r}u_{3,r} + 2\alpha\beta u_{1,r}u_{2,r}]u_{3,x}$$
$$+\frac{C}{3}\ (u_{1,x} + \alpha u_{2,r} + \beta u_{3,r})^3. \qquad (4.11)$$

olarak elde edilir.

İki boyutlu hale karşı gelen varyasyonel problem

$$\delta \int L dt = \delta \iiint \mathcal{L} dx dr dt = 0$$

olarak tanımlanır. Burada Lagrange yoğunluk fonksiyonu, $\mathcal{L} = T - \Sigma$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\frac{\partial u_k}{\partial x}, \frac{\partial u_k}{\partial r}, \frac{\partial u_k}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial r}) \qquad (4.12)$$

formundadır. Bu varyasyonel problemin Euler-Lagrange denklemleri ise

$$\delta u_k: \quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,x}}) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,r}}) + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,t}})$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x \partial r}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,xr}}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,xx}}) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k,rr}}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.13}$$

sistemin alan denklemlerini verir.

Bu aşamada sistemin dispersif karakterini görmek için (4.13) alan denklemlerinin lineer hali incelenecektir. Buna göre (4.11) ile verilen denklemde üçüncü mertebe terimler ihmal edilirse Σ ifadesi

$$\begin{aligned}
\Sigma = &\frac{\lambda}{2}\ (u_{1,x} + \alpha u_{2,r} + \beta u_{3,r})^2 + \frac{\mu}{2}\ [2u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2 + u_{3,x}^2 + u_{1,r}^2 + (1+\alpha^2)u_{2,r}^2 \\
&+(1+\beta^2)u_{3,r}^2 + 2\beta u_{1,r}u_{3,x} + 2\alpha\beta u_{2,r}u_{3,r} + 2\alpha u_{1,r}u_{2,x}] \\
&+2\mu\ m^2\ [(u_{1,xx}^2 + u_{2,xx}^2 + u_{3,xx}^2 + u_{1,rr}^2 + u_{2,rr}^2 + u_{3,rr}^2 + 2u_{1,xr}^2 + 2u_{2,xr}^2 + 2u_{3,xr}^2) \\
&\quad +\nu(u_{1,xx}^2 + u_{1,xr}^2 + 2\alpha u_{1,xr}u_{2,xx} + 2\alpha u_{1,rr}u_{2,xr} + \alpha^2 u_{2,xr}^2 + \alpha^2 u_{2,rr}^2 + \beta^2 u_{3,rr}^2 \\
&\quad +2\beta u_{1,xr}u_{3,xx} + \beta^2 u_{3,xr}^2 + 2\beta u_{3,xr}u_{1,rr} + 2\alpha\beta u_{3,rr}u_{2,rr} + 2\alpha\beta u_{3,xr}u_{2,xr})]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olup, (4.13) denklemlerinden lineer alan denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\rho_0 u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,xx} - \mu u_{1,rr} - (\lambda+\mu)(\alpha u_{2,xr} + \beta u_{3,xr}) \\
&\qquad + 4\mu m^2[(1+\nu)u_{1,xxxx} + (2+\nu)u_{1,xxrr} + u_{1,rrrr} \\
&\qquad + \alpha\nu(u_{2,xxxr} + u_{2,xrrr}) + \beta\nu(u_{3,xxxr} + u_{3,xrrr})] = 0, \\
&\rho_0 u_{2,tt} - \mu u_{2,xx} - [\lambda\alpha^2 + \mu(1+\alpha^2)]u_{2,rr} - \alpha(\lambda+\mu)u_{1,xr} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u_{3,rr} \\
&\qquad + 4\mu m^2[u_{2,xxxx} + (2+\nu\alpha^2)u_{2,xxrr} + (1+\nu\alpha^2)u_{2,rrrr} \\
&\qquad + \alpha\nu(u_{1,xxxr} + u_{1,xrrr}) + \alpha\beta\nu(u_{3,xxrr} + u_{3,rrrr})] = 0, \\
&\rho_0 u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} - [\lambda\beta^2 + \mu(1+\beta^2)]u_{3,rr} - \beta(\lambda+\mu)u_{1,xr} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u_{2,rr} \\
&\qquad + 4\mu m^2[u_{2,xxxx} + (2+\nu\beta^2)u_{3,xxrr} + (1+\nu\beta^2)u_{3,rrrr} \\
&\qquad + \beta\nu(u_{1,xxxr} + u_{1,xrrr}) + \alpha\beta\nu(u_{2,xxrr} + u_{2,rrrr})] = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

(4.15) lineer denklemlerine A_k kompleks genlik, k_x ve k_r sırası ile x ve r doğrultularındaki dalga sayısı ve ω frekans olmak üzere

$$u_k = A_k \exp[i(xk_x + rk_r - \omega t)] \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.16}$$

şeklinde harmonik dalga çözümleri aranırsa $A_k (k = 1, 2, 3)$ bilinmeyenleri için

$$
\begin{aligned}
&[-\rho_0\omega^2 + (\lambda+\mu){k_x}^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2(k^4 + \nu k^2 {k_x}^2)]A_1 \\
&\qquad + k_x k_r[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2](\alpha A_2 + \beta A_3) = 0 \\
&[-\rho_0\omega^2 + (\lambda+\mu)\alpha^2 {k_r}^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2(k^4 + \nu\alpha^2 k^2 {k_r}^2)]A_2 \\
&\qquad + \alpha k_x k_r[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2]A_1 + \alpha\beta {k_r}^2[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2]A_3 = 0 \\
&[-\rho_0\omega^2 + (\lambda+\mu)\beta^2 {k_r}^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2(k^4 + \nu\beta^2 k^2 {k_r}^2)]A_3 \\
&\qquad + \beta k_x k_r[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2]A_1 + \alpha\beta {k_r}^2[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2]A_2 = 0
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

şeklindeki lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Burada $k = ({k_x}^2 + {k_r}^2)^{1/2}$ olarak alınmıştır. (4.17) ifadesindeki birinci denklem A_1 ve $(\alpha A_2 + \beta A_3)$ büyüklüklerine bağlıdır. Eğer $(4.17)_2$ denklemi α, $(4.17)_3$ denklemi ise β ile çarpılıp birbirleri ile toplanırsa, (4.17) denklemleri

$$
\begin{aligned}
&[-\rho_0\omega^2 + (\lambda+\mu){k_x}^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2(k^4 + \nu k^2 {k_x}^2)]A_1 \\
&\qquad + k_x k_r[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2](\alpha A_2 + \beta A_3) = 0 \\
&[-\rho_0\omega^2 + (\lambda+\mu){k_r}^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2(k^4 + \nu k^2 {k_r}^2)](\alpha A_2 + \beta A_3) \\
&\qquad + k_x k_r[(\lambda+\mu) + 4\mu m^2 \nu k^2]A_1 = 0
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

formuna indirgenir. Triviyal olmayan A_1 ve $(\alpha A_2 + \beta A_3)$ çözümlerinin bulunabilmesi için (4.18) denklem sisteminin katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bu determinantın açılımından basit fakat uzun işlemler sonucunda frekans ω ve dalga sayısı k'nın sağladığı

$$
\begin{aligned}
&{\rho_0}^2\omega^4 - \rho_0\omega^2[\mu k^2 + 4\mu m^2 k^4 + (\lambda+2\mu)k^2 + 4\mu m^2(1+\nu)k^4] \\
&\qquad + \mu(\lambda+2\mu)k^4 + 16\mu^2 m^4(1+\nu)k^8 + 4\mu m^2 k^6[(\lambda+2\mu) + \mu(1+\nu)] = 0
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

denklemi elde edilir. (4.19) denklemi (4.15) sisteminin lineer *dispersiyon bağıntısı* olup

$$
D_1(k,\omega)D_\gamma(k,\omega) = 0 \quad (\gamma = 2,3) \tag{4.20}
$$

şeklindeki iki çarpan gibi yazılabilir. Burada D_1 ve D_γ

$$
\begin{aligned}
D_1(k,\omega) &= \omega^2 - {c_L}^2k^2 - 4{c_T}^2m^2(1+\nu)k^4 \\
D_\gamma(k,\omega) &= \omega^2 - {c_T}^2k^2 - 4{c_T}^2m^2k^4 \quad (\gamma = 2,3)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

olup

$$
{c_L}^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0, \quad {c_T}^2 = \mu/\rho_0
$$

tanımları kullanılmıştır. (4.21) denklemlerindeki D_1 ifadesi boyuna yer değiştirme modu u_1 ile ilgili ve D_2 ve D_3 ifadeleri sırası ile enine yer değiştirme modları u_2 ve u_3 ile ilgili dispersiyon bağıntılarıdır.

(4.21) ifadelerinden görüldüğü gibi hem enine hem de boyuna dalgalar dispersiftir. (4.21)'de mikro yapı ile ilgili sabitlerden $m = 0$ alınırsa, hem boyuna hem de enine dalgaların dispersif olma özelliklerini kaybettiklerine dikkat edilmelidir. Öyleyse bünye denklemlerine ikinci yer değiştirme gradyanlarının dahil edilmesi elastik ortamın dispersif özellikler göstermesine neden olmuştur. Bu durumda sisteme nonlineerliğin de katılması ile, nonlineerlik ve dispersiyonun birbirini dengelediği durumlarda orijinal sistemin uzak alan davranışını belirleyen evolüsyon denklemleri elde etmek mümkün olur. Gerçekten alan denklemleri [19] ile verilen çalışmada, zayıf nonlineer genelleştirilmiş elastik bir ortamda *boyuna* dalgaların yayılımı incelenmiş ve boyuna dalgaların asimptotik davranışının tek bir KP denklemi ile verilebileceği gösterilmiştir. Bu çalışmada ise enine dalgaların uzun dalga yaklaşımın asimptotik davranışı incelenecektir.

Uzun dalga yayılımında, küçük dalga sayıları için enine dalgalara ait dispersiyon bağıntısı

$$
\omega = c_Tk(1 + 4m^2k^2)^{1/2} = ak + bk^3 + \cdots \tag{4.22}
$$

şeklindedir. Burada a ve b sabitleri

$$
a = c_T, \qquad b = 2c_Tm^2 \tag{4.23}
$$

olarak verilir. Dispersiyon bağıntısının bu formu, dalgaların zayıf dispersif olduğunu gösterir.

(2+1) boyutlu enine dalgaların uzun dalga yaklaşımında incelenmesi için ayrıntılı hali (4.5) ile verilen

$$x' = \epsilon(x - at), \quad r' = \epsilon^2 r, \quad t' = \epsilon^3 t \tag{4.24}$$

koordinatlar seçilebilir. Burada $p = 1$ olarak seçilmiştir. (4.24) ile verilen $x' = \epsilon(x - at)$ dönüşümü ile koordinat takımı, a sabit hızıyla giden bir gezen dalga üzerine taşınmış olur. Çalışmanın bundan sonraki kısmında yazım kolaylığı sağlaması bakımından (4.24) ifadesindeki üsler ihmal edilmiştir.

Bu aşamada $u_k(x, r, t)$ yer değiştirme vektörünün

$$u_k = u_k^{(1)} + \epsilon u_k^{(2)} + \epsilon^2 u_k^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{4.25}$$

şeklinde bir asimptotik seriye açılabileceği varsayılacaktır. Böylece (4.24) ile zayıf dispersiyonu gösteren ϵ parametresi (4.25) ifadesi ile zayıf nonlineerliğin de ölçüsü olarak probleme dahil edilmiştir.

Eğer (4.24)'teki koordinat uzatmaları ve (4.25)'deki seri açılımları Lagrange yoğunluk fonksiyonunda kullanılırsa $\mathcal{L}$ fonksiyonu,

$$\mathcal{L} = \epsilon^2(\mathcal{L}_1 + \epsilon\mathcal{L}_2 + \epsilon^2\mathcal{L}_3 + \cdots \ ) \tag{4.26}$$

şeklini alır.

(4.26) ifadesindeki $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{L}_3$ fonksiyonlarının açık formları

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\rho_0 a^2 - \lambda - 2\mu)(u_{1,x}^{(1)})^2 + \frac{1}{2}(\rho_0 a^2 - \mu)[(u_{2,x}^{(1)})^2 + (u_{3,x}^{(1)})^2], \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 \;=\; & -\frac{1}{2}\rho_0(2a^2 u_{1,x}^{(1)} u_{1,x}^{(2)} + 2a^2 u_{2,x}^{(1)} u_{2,x}^{(2)} + 2a^2 u_{3,x}^{(1)} u_{3,x}^{(2)}) \\
& -\frac{\lambda}{2}[2u_{1,x}^{(1)} u_{1,x}^{(2)} + 2\alpha u_{1,x}^{(1)} u_{2,r}^{(1)} + 2\beta u_{1,x}^{(1)} u_{3,r}^{(1)} + (u_{1,x}^{(1)})^3] \\
& -\frac{\mu}{2}[4u_{1,x}^{(1)} u_{1,x}^{(2)} + 2u_{2,x}^{(1)} u_{2,x}^{(2)} + 2u_{3,x}^{(1)} u_{3,x}^{(2)} + 2\alpha u_{1,r}^{(1)} u_{2,x}^{(1)} + 2\beta u_{1,r}^{(1)} u_{3,x}^{(1)} \\
& \quad +2(u_{1,x}^{(1)})^3 + 2u_{1,x}^{(1)}(u_{2,x}^{(1)})^2 + 2u_{1,x}^{(1)}(u_{3,x}^{(1)})^2] \\
& -\frac{A}{12}[4(u_{1,x}^{(1)})^3 + 3(u_{2,x}^{(1)})^2 u_{1,x}^{(1)} + 3(u_{3,x}^{(1)})^2 u_{1,x}^{(1)}] \\
& -\frac{B}{2}[2(u_{1,x}^{(1)})^3 + (u_{2,x}^{(1)})^2 u_{1,x}^{(1)} + (u_{3,x}^{(1)})^2 u_{1,x}^{(1)}] \\
& -\frac{C}{3}(u_{1,x}^{(1)})^3,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 \;=\;& \frac{1}{2}\rho_0[-2au^{(1)}_{2,x}u^{(1)}_{2,t} - 2au^{(1)}_{3,x}u^{(1)}_{3,t} + a^2(u^{(2)}_{1,x})^2 + a^2(u^{(2)}_{2,x})^2 + a^2(u^{(2)}_{3,x})^2 \\
& +2a^2u^{(3)}_{2,x}u^{(1)}_{2,x} + 2a^2u^{(3)}_{3,x}u^{(1)}_{3,x}] \\
& -\frac{\lambda}{2}[(u^{(2)}_{1,x})^2 + \alpha^2(u^{(1)}_{2,r})^2 + \beta^2(u^{(1)}_{3,r})^2 + 2\alpha u^{(2)}_{1,x}u^{(1)}_{2,r} + 2\beta u^{(2)}_{1,x}u^{(1)}_{3,r} \\
& +2\alpha\beta u^{(1)}_{2,r}u^{(1)}_{3,r} + u^{(2)}_{1,x}(u^{(1)}_{2,x})^2 + u^{(2)}_{1,x}(u^{(1)}_{3,x})^2 + \alpha u^{(1)}_{2,r}(u^{(1)}_{2,x})^2 \\
& +\alpha u^{(1)}_{2,r}(u^{(1)}_{3,x})^2 + \beta u^{(1)}_{3,r}(u^{(1)}_{2,x})^2 + \beta u^{(1)}_{3,r}(u^{(1)}_{3,x})^2] \\
& -\frac{\mu}{2}[2(u^{(2)}_{1,x})^2 + (u^{(2)}_{2,x})^2 + 2u^{(1)}_{2,x}u^{(3)}_{2,x} + (u^{(2)}_{3,x})^2 + 2u^{(1)}_{3,x}u^{(3)}_{3,x} \\
& +(1+\alpha^2)(u^{(1)}_{2,r})^2 + (1+\beta^2)(u^{(1)}_{3,r})^2 + 2\beta u^{(2)}_{1,r}u^{(1)}_{3,x} \\
& +2\alpha\beta u^{(1)}_{2,r}u^{(1)}_{3,r} + 2\alpha u^{(2)}_{1,r}u^{(1)}_{2,x} + 2u^{(2)}_{1,x}(u^{(1)}_{2,x})^2 + 2u^{(2)}_{1,x}(u^{(1)}_{3,x})^2 \\
& +2\alpha u^{(1)}_{2,r}(u^{(1)}_{2,x})^2 + 2\beta u^{(1)}_{3,r}(u^{(1)}_{3,x})^2 + 2\alpha u^{(1)}_{2,x}u^{(1)}_{3,x}u^{(1)}_{3,r} + 2\beta u^{(1)}_{2,x}u^{(1)}_{3,x}u^{(1)}_{2,r}] \\
& -2\mu m^2[(u^{(1)}_{2,xx})^2 + (u^{(1)}_{3,xx})^2] \\
& -\frac{A}{12}[3(u^{(1)}_{2,x})^2u^{(2)}_{1,x} + 3\alpha(u^{(1)}_{2,x})^2u^{(1)}_{2,r} + 3(u^{(1)}_{3,x})^2u^{(2)}_{1,x} \\
& +3\alpha u^{(1)}_{3,x}u^{(1)}_{2,x}u^{(1)}_{3,r} + 3\beta(u^{(1)}_{3,x})^2u^{(1)}_{3,r} + 3\beta u^{(1)}_{2,x}u^{(1)}_{3,x}u^{(1)}_{2,r}] \\
& -\frac{B}{2}[(u^{(1)}_{2,x})^2u^{(2)}_{1,x} + \alpha(u^{(1)}_{2,x})^2u^{(1)}_{2,r} + (u^{(1)}_{3,x})^2u^{(2)}_{1,x} \\
& +\alpha(u^{(1)}_{3,x})^2u^{(1)}_{2,r} + \beta(u^{(1)}_{3,x})^2u^{(1)}_{3,r} + \beta(u^{(1)}_{2,x})^2u^{(1)}_{3,r}] \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

olarak verilir. Şimdi asimptotik açılımın ilk üç mertebesine ait denklemler ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ için, birinci mertebe Lagrange fonksiyonu olan $\mathcal{L}_1$'e karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri

$$
\begin{aligned}
\delta u^{(1)}_1 &: \quad (\rho_0 a^2 - \lambda - 2\mu)u^{(1)}_{1,x} = 0 \\
\delta u^{(1)}_2 &: \quad (\rho_0 a^2 - \mu)u^{(1)}_{2,x} = 0 \\
\delta u^{(1)}_3 &: \quad (\rho_0 a^2 - \mu)u^{(1)}_{3,x} = 0 \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Bu çalışmada enine dalgaların yayılımı ile ilgilenildiğinden (4.23)'ten görüldüğü gibi $a^2 = \mu/\rho_0$ olup $(4.30)_2$ ve $(4.30)_3$ denklemleri özdeş olarak sağlanır. Bu sonuç birinci mertebe enine yer değiştirme bileşenlerinin, $u^{(1)}_2$ ve $u^{(1)}_3$, keyfi fonksiyonlar olarak alınabileceğini verir. Diğer yandan $(\lambda+\mu)\neq 0$ olduğundan $(4.30)_1$ denkleminin sağlanması için $u_1^{(1)}=0$ olacağı açıktır. Elde edilen bu sonuçlar (4.28) numaralı denklemde kullanılırsa $\mathcal{L}_2\equiv 0$ özdeşliği elde edilir.

ϵ^4 mertebesinde, (4.30)'da elde edilen sonuçlar $\mathcal{L}_3$ ifadesinde yazılırsa

$$\mathcal{L}_3=\mathcal{L}_3(u_2^{(1)},u_2^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(2)},u_3^{(2)}) \tag{4.31}$$

şeklini alır. $\mathcal{L}_3$ Lagrange yoğunluğu fonksiyonuna karşı gelen Euler-Lagrange denklemleri

$$\delta u_1^{(2)}:\quad u_{1,x}^{(2)}=-(\alpha u_{2,r}^{(1)}+\beta u_{3,r}^{(1)})-\frac{(\lambda+2\mu+A/2+B)}{2(\lambda+\mu)}[(u_{2,x}^{(1)})^2+(u_{3,x}^{(1)})^2],$$

$$\begin{aligned}\delta u_2^{(1)}:\quad & 2\rho_0 a u_{2,xt}^{(1)}+\alpha(\mu+\lambda)u_{1,xr}^{(2)}+[(\lambda\alpha^2+\mu(1+\alpha^2)]u_{2,rr}^{(1)}+\alpha\beta(\lambda+\mu)u_{3,rr}^{(1)}\\
&-4\mu m^2 u_{2,xxxx}^{(1)}+(\lambda+2\mu+A/2+B)(u_{2,x}^{(1)}u_{1,xx}^{(2)}+u_{2,xx}^{(1)}u_{1,x}^{(2)})\\
&+\alpha(\lambda+2\mu+A/2+B)(2u_{2,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)}+u_{2,r}^{(1)}u_{2,xx}^{(1)})\\
&+(\lambda+\mu+A/4+B)(\alpha u_{2,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)}+\beta u_{2,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)})\\
&+2\beta(\mu+A/4)(u_{3,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)})+\beta(\lambda+B)u_{2,xx}^{(1)}u_{3,r}^{(1)}\\
&+(\mu+A/4)(\alpha u_{3,xx}^{(1)}u_{3,r}^{(1)}+\beta u_{3,xx}^{(1)}u_{2,r}^{(1)})=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta u_3^{(1)}:\quad & 2\rho_0 a u_{3,xt}^{(1)}+\beta(\mu+\lambda)u_{1,xr}^{(2)}+[(\lambda\beta^2+\mu(1+\beta^2)]u_{3,rr}^{(1)}+\alpha\beta(\lambda+\mu)u_{2,rr}^{(1)}\\
&-4\mu m^2 u_{3,xxxx}^{(1)}+(\lambda+2\mu+A/2+B)(u_{3,x}^{(1)}u_{1,xx}^{(2)}+u_{3,xx}^{(1)}u_{1,x}^{(2)})\\
&+\beta(\lambda+2\mu+A/2+B)(2u_{3,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)}+u_{3,r}^{(1)}u_{3,xx}^{(1)})\\
&+(\lambda+\mu+A/4+B)(\beta u_{2,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)}+\alpha u_{3,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)})\\
&+2\alpha(\mu+A/4)(u_{2,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)})+\alpha(\lambda+B)u_{3,xx}^{(1)}u_{2,r}^{(1)}\\
&+(\mu+A/4)(\beta u_{2,xx}^{(1)}u_{2,r}^{(1)}+\alpha u_{2,xx}^{(1)}u_{3,r}^{(1)})=0\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir. Diğer Euler-Lagrange denklemleri yüksek mertebe terimler için bağıntılar ürettiğinden, burada açık formları verilmemiştir. $(4.32)_1$ denklemi, ikinci mertebe boyuna yer değiştirme gradyanının birinci mertebe enine yer değiştirme gradyanlarına bağlı olduğunu göstermektedir. (4.32)'nin son iki denkleminde $(4.32)_1$'deki sonuçlar kullanılarak ikinci mertebe, $u_1^{(2)}$ terimi yokedilirse, keyfi $u_2^{(1)}$ ve $u_3^{(1)}$ fonksiyonlarının sağladığı

$$\begin{aligned}
\delta u_2^{(1)}: \quad & -2\rho_0 a u_{2,xt}^{(1)} - \mu u_{2,rr}^{(1)} + \frac{(\lambda+2\mu+A/2+B)^2}{2(\lambda+\mu)}\{u_{2,x}^{(1)}[(u_{2,x}^{(1)})^2+(u_{3,x}^{(1)})^2]\}_x \\
& + 4\mu m^2 u_{2,xxxx}^{(1)} + (\mu+\frac{A}{4})[\alpha(u_{3,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)} - u_{3,xx}^{(1)}u_{3,r}^{(1)}) \\
& + \beta(u_{2,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)} - u_{2,r}^{(1)}u_{3,xx}^{(1)}) + 2\beta(u_{2,xx}^{(1)}u_{3,r}^{(1)} - u_{3,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)})] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta u_3^{(1)}: \quad & -2\rho_0 a u_{3,xt}^{(1)} - \mu u_{3,rr}^{(1)} + \frac{(\lambda+2\mu+A/2+B)^2}{2(\lambda+\mu)}\{u_{3,x}^{(1)}[(u_{3,x}^{(1)})^2+(u_{2,x}^{(1)})^2]\}_x \\
& + 4\mu m^2 u_{3,xxxx}^{(1)} + (\mu+\frac{A}{4})[\beta(u_{2,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)} - u_{2,xx}^{(1)}u_{2,r}^{(1)}) \\
& + \alpha(u_{3,x}^{(1)}u_{2,xr}^{(1)} - u_{3,r}^{(1)}u_{2,xx}^{(1)})2\alpha(u_{3,xx}^{(1)}u_{2,r}^{(1)} - u_{2,x}^{(1)}u_{3,xr}^{(1)})] = 0. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

kuple nonlineer evolüsyon denklemleri elde edilir. Eğer $u_2^{(1)} \equiv \phi$ ve $u_3^{(1)} \equiv \psi$

tanımları kullanılırsa (4.33) denklemi

$$\begin{aligned}
& \phi_{xt} + \nu[\phi_x({\phi_x}^2+{\psi_x}^2)]_x + \Gamma\phi_{xxxx} + \Lambda\phi_{rr} + \kappa[\psi_{xr}(\alpha\psi_x+\beta\phi_x) \\
& \quad -\psi_{xx}(\alpha\psi_r+\beta\phi_r) + 2\beta(\psi_r\phi_{xx} - \psi_x\phi_{xr})] = 0 \\
& \psi_{xt} + \nu[\psi_x({\psi_x}^2+{\phi_x}^2)]_x + \Gamma\psi_{xxxx} + \Lambda\psi_{rr} + \kappa[\phi_{xr}(\beta\phi_x+\alpha\psi_x) \\
& \quad -\phi_{xx}(\beta\phi_r+\alpha\psi_r) + 2\alpha(\phi_r\psi_{xx} - \phi_x\psi_{xr})] = 0 \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

formuna indirgenir. Burada Λ, ν, Γ ve κ sabitleri

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{-(\lambda+2\mu+A/2+B)^2}{4\rho_0 a(\lambda+\mu)}, \quad \Gamma = \frac{-2\mu m^2}{\rho_0 a}, \\
\Lambda &= \frac{\mu}{2\rho_0 a}, \qquad \kappa = \frac{-(\mu+A/4)}{2\rho_0 a}. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Kuple modifiye Kadomtsev-Petviashvili (KMKP) denklemleri olarak adlandırılabilen bu denklemler, zayıf dispersiyon, zayıf nonlineerlik ve zayıf iki boyut etkilerinin hepsinin aynı mertebeden olduğu evolüsyonu tanımlar. Bu problemde x ekseni taşıyıcı dalganın yayılma doğrultusu olup, ikinci boyuttaki değişimlerin yz düzlemindeki r eğik koordinatı boyunca olduğu varsayılmıştır.

KMKP denklemlerinin bazı özel durumları aşağıda verilmiştir. Örneğin (4.34)'de r değişkeni düşürüldüğünde, KMKP denklemleri KMKdV denklemlerine indirgenerek

$$\begin{aligned}
&\Phi_t + \nu[\Phi(\Phi^2 + \Psi^2)]_x + \Gamma\Phi_{xxx} = 0 \\
&\Psi_t + \nu[\Psi(\Phi^2 + \Psi^2)]_x + \Gamma\Psi_{xxx} = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklini alır. Burada $\Phi \equiv \phi_x$ ve $\Psi \equiv \psi_x$ alınmıştır. Böylece KMKP denklemlerinin KMKdV denklemlerini iki boyutlu duruma genelleştirdiği söylenebilir.

KMKP denklemleri birçok özel halde daha önceden bilinen denklemlere indirgenir. Eğer (4.34)'deki KMKP denklemlerinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ seçilirse; denklemlerin formu, $r \equiv y$ olmak üzere, katsayı farkı ile daha önce [22]'de elde edilen ve kuplaj terimleri simetrik olmayan KMKP denklemlerine indirgenir:

$$\begin{aligned}
&\phi_{xt} + \nu\ [\phi_x({\phi_x}^2 + {\psi_x}^2)]_x + \Gamma\ \phi_{xxxx} + \Lambda\ \phi_{yy} \\
&\quad + \kappa\ (\psi_{xy}\psi_x - \psi_{xx}\psi_y) = 0 \\
&\psi_{xt} + \nu\ [\psi_x({\psi_x}^2 + {\phi_x}^2)]_x + \Gamma\ \psi_{xxxx} + \Lambda\ \psi_{yy} \\
&\quad + \kappa\ [\phi_{xy}\psi_x - \phi_{xx}\psi_y + 2(\phi_y\psi_{xx} - \phi_x\psi_{xy})] = 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

(4.37) denklemleri, sistemde y koordinatı boyunca zayıf değişimler olması durumunda x ekseni boyunca yayılan dalganın evolüsyonunu karakterize eder. Benzer olarak $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alındığında (4.34)'teki denklemler, $r \equiv z$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\phi_{xt} + \nu\ [\phi_x({\phi_x}^2 + {\psi_x}^2)]_x + \Gamma\ \phi_{xxxx} + \Lambda\ \phi_{zz} \\
&\quad + \kappa\ [\psi_{xz}\phi_x - \psi_{xx}\phi_z + 2(\psi_z\phi_{xx} - \psi_x\phi_{xz})] = 0 \\
&\psi_{xt} + \nu\ [\psi_x({\psi_x}^2 + {\phi_x}^2)]_x + \Gamma\ \psi_{xxxx} + \Lambda\ \psi_{zz} \\
&\quad + \kappa\ (\phi_{xz}\phi_x - \phi_{xx}\phi_z) = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklinde elde edilir. (4.38) denklemi ise, sistemde z koordinatı boyunca zayıf değişimler olması durumunda x ekseni boyunca yayılan dalganın evolüsyonunu karakterize eder.

Son olarak $\alpha = 1/\sqrt{2}$ ve $\beta = 1/\sqrt{2}$ alındığında (4.34)'daki KMKP denklemleri, iki boyutlu durumdaki uzun dalgalar için

$$\begin{aligned}
&\phi_{xt} + \nu\ [\phi_x({\phi_x}^2 + {\psi_x}^2)]_x + \Gamma\ \phi_{xxxx} + \Lambda\ \phi_{rr} \\
&+\kappa\ [\psi_{xr}(\psi_x + \phi_x)/\sqrt{2} - \psi_{xx}(\psi_r + \phi_r)/\sqrt{2} + \sqrt{2}(\psi_r\phi_{xx} - \psi_x\phi_{xr})] = 0 \\
&\psi_{xt} + \nu\ [\psi_x({\psi_x}^2 + {\phi_x}^2)]_x + \Gamma\ \psi_{xxxx} + \Lambda\ \psi_{rr} \\
&+\kappa\ [\phi_{xr}(\phi_x + \psi_x)/\sqrt{2} - \phi_{xx}(\phi_r + \psi_r)/\sqrt{2} + \sqrt{2}(\phi_r\psi_{xx} - \phi_x\psi_{xr})] = 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklindeki simetrik KMKP denklemlerini oluştururlar. Burada elde edilen evolüsyon denklemleri ise, sistemde yz düzleminde y ekseni ile 45° derece açı yapan r doğrultusunda küçük değişimler olması durumunda x ekseni boyunca yayılan dalgaların hareketini tanımlar. Görüldüğü gibi (4.39) denklemlerinde ϕ ve ψ fonksiyonlarının yerleri değiştirildiğinde denklemlerin formunun değişmediği diğer bir deyişle denklemlerin ϕ ve ψ'ye göre simetrik olduğu görülür. Diğer yandan bu çalışmadaki genelleştirilmiş elastik ortam izotrop olduğundan (4.37) ile verilen kuplaj terimleri simetrik olmayan denklemlere $a^2 + b^2 = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi &= a\Phi + b\Psi \\
\psi &= -b\Phi + a\Psi
\end{aligned} \tag{4.40}$$

dönüşümleri yapılırsa denklemlerin özellikleri değişmez. Bu dönüşümler sonucunda yeni Φ ve Ψ fonksiyonları için elde edilen denklemler a ve b katsayılarını içerir. Bu denklemlerde $a = b = 1/\sqrt{2}$ alındığında Φ ve Ψ fonksiyonları için (4.39)'daki kuplaj terimleri simetrik olan KMKP denklemleri elde edilir. Son olarak eğer $\phi \equiv \psi$ alınırsa yani birinci mertebe enine büyüklüklerin birbirlerine eşit olduğu kabul edilirse, (4.39) denklemleri ϕ (veya ψ) fonksiyonu için

$$\phi_{xt} + 6\nu\ \phi_x^2\phi_{xx} + \Gamma\ \phi_{xxxx} + \Lambda\ \phi_{rr} = 0 \tag{4.41}$$

ile verilen nonlineer evolüsyon denklemine indirgenir. Burada $\Phi = \phi_x$ tanımı kullanılırsa (4.41) denklemi

$$(\Phi_t + 6\nu\ \Phi^2\Phi_x + \Gamma\ \Phi_{xxx})_x + \Lambda\ \Phi_{rr} = 0 \tag{4.42}$$

tek modifiye Kadomtsev-Petviashvili (MKP) denklemine indirgenir. (4.42) ile verilen MKP denklemi Konopelchenko ve Dubrovsky [23] tarafından önerilen ve ters saçılma tekniği ile çözülebilen

$$(u_t + \frac{3}{2}\alpha^2 u^2 u_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} + 3\alpha(u_x \int u_y dx)_x = 0 \qquad (4.43)$$

MKP denkleminden form olarak farklıdır ve (4.42) MKP denkleminin integre edilebilir olup olmadığı açık bir sorudur.

4.3 KMKP Denklemlerinin Özel Çözümleri

Çalışmanın bu kısmında (4.39) ile verilen KMKP denklemlerinin özel çözümleri değiştirilmiş Hirota Metodu ile elde edilecektir [24,25]. Değiştirilmiş Hirota metodunun klasik metotdan farkı, orijinal kısmi diferansiyel denklemlerin bir gezen dalga (travelling wave) dönüşümü ile adi diferansiyel denklemlere indirgenmesidir. Daha sonra bağımlı değişkenler için önerilen bir seri açılımı, elde edilen adi diferansiyel denklemlerde yazılarak her mertebede bilinmeyen fonksiyonlar için denklem hiyerarşileri elde edilir. Elde edilen denklem hiyerarşilerinin iteratif olarak çözülmesinden elde edilen seri çözümü sonlu bir adımda kesilir ve denklemin bir özel çözümü elde edilir.

İlk olarak (4.34) ile verilen KMKP denklemlerini adi differansiyel denklem sistemine dönüştürebilmek için

$$\phi = \phi(\zeta), \quad \psi = \psi(\zeta) \qquad (4.44)$$

gezen dalga dönüşümleri ele alınacaktır. Burada $\zeta = xk_x + rk_r - \omega t$ faz fonksiyonu olup k_x ve k_r sırasıyla x ve r doğrultularındaki dalga sayılarını, ω ise frekansı göstermektedir. (4.44) ile önerilen ifade (4.34) denklemlerine yerleştirilip bir kez integre edilirse

$$\begin{aligned}
(\Lambda k_r^2 - \omega k_x)\,\phi' + \Gamma k_x^4\,\phi''' + \nu k_x^4\,\phi'(\phi'^2 + \psi'^2) &= C \\
(\Lambda k_r^2 - \omega k_x)\,\psi' + \Gamma k_x^4\,\psi''' + \nu k_x^4\,\psi'(\phi'^2 + \psi'^2) &= D \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.45) denklemlerinden görüldüğü gibi KMKP denklemlerine gezen dalga şeklinde çözüm arandığında, (4.34) denklemlerindeki kuadratik kuplaj terimlerinden bir katkı gelmez. $\zeta \to \infty$ için ϕ ve ψ fonksiyonlarının türevlerinin sıfır olduğu kabul edilirse C ve D integrasyon sabitlerinin sıfır alınabileceği açıktır.

$\phi' = u$ ve $\psi' = v$ tanımları ile denklem sistemi

$$u'' + Ku + Lu(u^2 + v^2) = 0$$
$$v'' + Kv + Lv(u^2 + v^2) = 0 \tag{4.46}$$

şeklini alır. Burada K ve L katsayıları

$$K = \frac{-\omega k_x + \Lambda k_r^2}{\Gamma k_x^4}, \quad L = \frac{\nu}{\Gamma}$$

ile tanımlanmıştır. K ve L katsayılarının işaretlerine bağlı olarak adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleri incelenmelidir.

Özel olarak $K = -\alpha^2 < 0$ ve $L = \beta^2 > 0$ parametre değerleri için (4.46) denklem sistemi

$$u'' - \alpha^2 u + \beta^2 u(u^2 + v^2) = 0$$
$$v'' - \alpha^2 v + \beta^2 v(u^2 + v^2) = 0 \tag{4.47}$$

şeklini alır. (4.47) sistemini değiştirilmiş Hirota metodunu kullanarak çözmek için u ve v çözüm fonksiyonlarının, g, h ve f reel fonksiyonlar olmak üzere

$$u(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{f(\zeta)}, \quad v(\zeta) = \frac{h(\zeta)}{f(\zeta)} \tag{4.48}$$

şeklinde yazılabileceği varsayılacaktır. (4.48) ile önerilen çözümler (4.47) sisteminde yazılırsa

$$fg'' + gf'' - 2f'g' - \alpha^2 gf + \frac{g}{f}[-2ff'' + 2f'^2 + \beta^2(g^2 + h^2)] = 0$$
$$fh'' + hf'' - 2f'h' - \alpha^2 hf + \frac{h}{f}[-2ff'' + 2f'^2 + \beta^2(g^2 + h^2)] = 0 \tag{4.49}$$

denklemleri elde edilir. (4.49) sisteminin sağlanması için g, h ve f fonksiyonları için

$$
\begin{aligned}
fg'' + gf'' - 2f'g' &= \alpha^2 fg \\
fh'' + hf'' - 2f'h' &= \alpha^2 fh \\
\beta^2(g^2+h^2) = 2ff'' - 2f'^2 &= 2f^2(\ln f)''
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

ile verilen üç denklemin sağlanması gerekir. (4.50) denklem sistemine

$$
g = \sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)}(\zeta)\varepsilon^n, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h^{(n)}(\zeta)\varepsilon^n, \quad f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\zeta)\varepsilon^n \tag{4.51}
$$

ile verilen kuvvet serileri şeklinde çözüm aranabileceğini varsayalım. Burada ε, açılımdaki terimleri izleyebilmek için tanımlanmış bir parametredir. g, h ve f fonksiyonları için (4.51) ile önerilen seri açılımları (4.50) denklem sisteminde yazılırsa, ε açılım parametresinin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(g^{(1)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, g^{(1)}) + \varepsilon^2(g^{(2)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, g^{(2)}) + \varepsilon^3[g^{(3)}_{\zeta\zeta} + f^{(2)}g^{(1)}_{\zeta\zeta} \\
&\quad + g^{(1)}f^{(2)}_{\zeta\zeta} - 2f^{(2)}_{\zeta}g^{(1)}_{\zeta} - \alpha^2\,(g^{(3)} + f^{(2)}g^{(1)})] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 0 \\
&\varepsilon(h^{(1)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, h^{(1)}) + \varepsilon^2(h^{(2)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, h^{(1)}) + \varepsilon^3[h^{(3)}_{\zeta\zeta} + f^{(2)}h^{(1)}_{\zeta\zeta} \\
&\quad + h^{(1)}f^{(2)}_{\zeta\zeta} - 2f^{(2)}_{\zeta}h^{(1)}_{\zeta} - \alpha^2\,(h^{(3)} + f^{(2)}h^{(1)})] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 0 \\
&\varepsilon f^{(1)}_{\zeta\zeta} + \varepsilon^2[\beta^2\,(g^{(1)2} + h^{(1)2}) - 2f^{(2)}_{\zeta\zeta}] + \varepsilon^3 f^{(3)}_{\zeta\zeta} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) = 0.
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

Bu denklemlerin her mertebe için çözülmesiyle elde edilecek çözüm fonksiyonlarında sonlu sayıda terimden sonra açılımın terimleri sıfır olursa istenen tam çözüm elde edilmiş olacaktır.

Birinci mertebe problemden, yani $\mathcal{O}(\varepsilon)$ için

$$
g^{(1)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2 g^{(1)} = 0, \quad h^{(1)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2 h^{(1)} = 0, \quad f^{(1)}_{\zeta\zeta} = 0 \tag{4.53}
$$

denklemleri elde edilir. Buradan $g^{(1)}$, $h^{(1)}$ ve $f^{(1)}$ fonksiyonları için bir çözüm

$$
g^{(1)} = 2\alpha A \exp(\alpha\zeta), \quad h^{(1)} = 2\alpha B \exp(\alpha\zeta), \quad f^{(1)} = 0 \tag{4.54}
$$

şeklinde seçilebilir. Burada $A = \exp(-\alpha\zeta_1)$ ve $B = \exp(-\alpha\zeta_2)$ olup ζ_1 ve ζ_2 ise sabitlerdir.

İkinci mertebe denklemler

$$g^{(2)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, g^{(2)} = 0, \quad h^{(2)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, h^{(2)} = 0, \quad f^{(2)}_{\zeta\zeta} = 2\beta^2({g^{(1)}}^2 + {h^{(1)}}^2) \tag{4.55}$$

formundadır. Burada $g^{(2)}$ ve $h^{(2)}$ denklemlerinin bir çözümü sıfır olarak seçilirse ve (4.54) sonuçları (4.55) denklemlerinde kullanılırsa, ikinci mertebedeki çözüm fonksiyonları

$$g^{(2)} = 0, \quad h^{(2)} = 0, \quad f^{(2)} = \frac{\beta^2}{2}(A^2 + B^2)\ \exp(2\alpha\zeta) \tag{4.56}$$

olarak elde edilir. Burada $g^{(2)}$ ve $h^{(2)}$ ikinci mertebe çözümleri için (4.54)'de verilen forma benzer çözümlerin bulunabileceğini, ancak $g^{(1)}$ ve $h^{(1)}$ çözümlerinin sırasıyla $g^{(2)}$ ve $h^{(2)}$ çözümleri ile bir sabit farkıyla aynı terimde toplanabileceğinden $g^{(2)}$ ve $h^{(2)}$ çözümlerinin katsayısının sıfır seçildiğine dikkat edilmelidir.

Üçüncü mertebedeki denklemler

$$\begin{aligned}
&g^{(3)}_{\zeta\zeta} + f^{(2)}g^{(1)}_{\zeta\zeta} + g^{(1)}f^{(2)}_{\zeta\zeta} - 2g^{(1)}_{\zeta}f^{(2)}_{\zeta} - \alpha^2\ (g^{(3)} + f^{(2)}g^{(1)}) = 0,\\
&h^{(3)}_{\zeta\zeta} + f^{(2)}h^{(1)}_{\zeta\zeta} + h^{(1)}f^{(2)}_{\zeta\zeta} - 2h^{(1)}_{\zeta}f^{(2)}_{\zeta} - \alpha^2\ (h^{(3)} + f^{(2)}h^{(1)}) = 0,\\
&f^{(3)}_{\zeta\zeta} = 0
\end{aligned} \tag{4.57}$$

şeklindedir. (4.55) ve (4.56) denklemlerinden elde edilen sonuçlar (4.57) denklem sisteminde kullanılırsa, sistemin

$$g^{(3)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, g^{(3)} = 0, \quad h^{(3)}_{\zeta\zeta} - \alpha^2\, h^{(3)} = 0, \quad f^{(3)}_{\zeta\zeta} = 0 \tag{4.58}$$

formuna indirgendiği gözlenir. (4.58) sisteminin bir çözümü ise

$$g^{(3)} = 0, \quad h^{(3)} = 0, \quad f^{(3)} = 0 \tag{4.59}$$

olarak elde edilir. Burada diğer bütün $g^{(n)}$, $h^{(n)}$ ve $f^{(n)}$ $(n \geq 3)$ çözümlerinin sıfır olduğu kolaylıkla görülür. Tam çözümün elde edilmesinin esası serilerin sonlu bir adımda kesilmeleridir.

Bu noktada seri açılımlarının kesilebileceğini ve bütün yukarı mertebe terimlerinin sıfır olacağını kabul edersek g, h ve f çözüm fonksiyonları

$$g(\zeta) = 2\alpha A \exp(\alpha\zeta), \quad h(\zeta) = 2\alpha B \exp(\alpha\zeta),$$
$$f(\zeta) = 1 + \frac{\beta^2}{2}\alpha^2\,(A^2 + B^2)\exp(2\alpha\zeta) \tag{4.60}$$

şeklini alır. Elde edilen bu sonuçlar (4.48) ile verilen ifadelerde yazılırsa $u(\zeta)$ ve $v(\zeta)$ çözüm fonksiyonlarının formu

$$u(\zeta) = \frac{4\alpha A\ \exp(\alpha\zeta)}{2 + \beta^2(A^2 + B^2)\ \exp(2\alpha\zeta)}$$
$$v(\zeta) = \frac{4\alpha B\ \exp(\alpha\zeta)}{2 + \beta^2(A^2 + B^2)\ \exp(2\alpha\zeta)} \tag{4.61}$$

olarak elde edilir. $\phi' = u$ ve $\psi' = v$ olduğu hatırlanacak olursa (4.61) denklemleri ζ'ya göre integre edilirerek ϕ ve ψ fonksiyonları için

$$\phi(\zeta) = \frac{4A}{\beta^2(A^2 + B^2)} \int \frac{\alpha\ \exp(\alpha\zeta)d\zeta}{\gamma^2 + \exp(2\alpha\zeta)}$$
$$\psi(\zeta) = \frac{4B}{\beta^2(A^2 + B^2)} \int \frac{\alpha\ \exp(\alpha\zeta)d\zeta}{\gamma^2 + \exp(2\alpha\zeta)} \tag{4.62}$$

denklemleri elde edilir. Burada $\gamma^2 = 2/[\beta^2(A^2 + B^2)]$ dir. (4.62) ile verilen integrallerde $w = \exp(\alpha\zeta)$, $dw = \alpha\exp(\alpha\zeta)d\zeta$ değişken dönüşümü yapılırsa, (4.62)'dan $\phi(\zeta)$ ve $\psi(\zeta)$ fonksiyonları için faz sıçramaları (phase jump) şeklindeki kesin çözümler

$$\phi(\zeta) = \frac{2\sqrt{2}A}{\beta\sqrt{A^2 + B^2}}\mathrm{Arctan}[\frac{\beta\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{2}}\exp(\alpha\zeta)]$$
$$\psi(\zeta) = \frac{2\sqrt{2}B}{\beta\sqrt{A^2 + B^2}}\mathrm{Arctan}[\frac{\beta\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{2}}\exp(\alpha\zeta)] \tag{4.63}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\zeta = xk_x + rk_r - \omega t$ ile tanımlanmştır.

(4.61) denklemlerinde u ile v arasında $u = \frac{A}{B}v$ şeklindeki bir bağıntının gerçeklendiği görülmektedir. Böyle bir bağıntının yardımı ile (4.46) denklem sisteminin özel çözümlerini Jacobi eliptik fonksiyonları yardımı ile de bulmak mümkündür. Bu amaçla c herhangi bir sabit olmak üzere eğer $u = cv$ eşitliği kabul edilirse, (4.46) denklem sistemi

$$u'' - \alpha^2 u + \gamma^2 u^3 = 0 \tag{4.64}$$

şeklini alır. Burada $\gamma^2 = \beta^2(1 + A^2)$ dir. Bu denklem u' ile çarpılıp tekrar integre edilirse,

$$u'^2 - \alpha^2 u^2 + \frac{\gamma^2}{2} u^4 = 0 \tag{4.65}$$

denklemi elde edilir. Buradaki integrasyon sabiti $r \to \infty$ ve $x \to \infty$ için u ve türevlerinin sıfır olması koşulundan sıfır olarak alınmıştır. (4.65) denklemi u ile çarpılıp, $u^2 = z$ (z reel) tanımı yapılırsa,

$$uu'' = \frac{z''}{2} - u'^2 \tag{4.66}$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. (4.66) ifadesinde u'^2 yerine (4.65) denkleminden eşiti yazılır ve $u^2 = z$ tanımı hatırlanırsa

$$uu'' + \gamma^2 u^4 - \alpha^2 u^2 = 0 \tag{4.67}$$

denklemi, z fonksiyonu cinsinden

$$z'' - 4\alpha^2 z + 3\gamma^2 u^2 = 0 \tag{4.68}$$

şeklinde yazılabilir. (4.68) diferansiyel denklemi z' ile çarpılıp integre edilirse,

$$\frac{1}{2\gamma^2}(\frac{dz}{d\zeta})^2 = -z^3 + 2\frac{\alpha^2}{\gamma^2} z^2 + C = f(z) \tag{4.69}$$

elde edilir. Bu nonlineer adi diferansiyel denkleminin reel çözümleri $f(z) \geq 0$ koşulu altında mümkündür. $c_1 < c_2 < c_3$ olmak üzere $f(z) = (z - c_1)(z - c_2)(c_3 - z)$ olsun. Bu kabullerden sonra diferansiyel denklem

$$\frac{dz}{[(z - c_1)(z - c_2)(c_3 - z)]^{1/2}} = (2\gamma^2)^{1/2} d\zeta \tag{4.70}$$

şeklini alır. $z = t^2 + c_1$ dönüşümü ile (4.70) ifadesi

$$\frac{2dt}{[(t^2 + c_1 - c_2)(c_3 - c_1 - t^2)]^{1/2}} = (2\gamma^2)^{1/2} d\zeta \tag{4.71}$$

formuna girer. $a^2 = c_3 - c_1, b^2 = c_2 - c_1$ tanımları yapılırsa ($a > b$) için (4.71) denkleminin açık çözümü Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden bulunabilir [26]. $f(z)$ fonksiyonunun pozitif değerleri için (4.69) denkleminin çözümü olabileceğinden (4.71)'in sol tarafındaki integralin sınırları c_2 ve c_3 kökleri arasında olmalıdır. $z = t^2 + c_1$ dönüşümü de dikkate alınarak integrasyon sınırları $a > y \geq b$ olarak bulunur:

$$\int_y^a \frac{dt}{[(t^2-b^2)(a^2-t^2)]^{1/2}} = (\frac{\gamma^2}{2})^{1/2} \int_0^\zeta d\eta. \tag{4.72}$$

Ters Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden bu integralin değeri

$$\frac{1}{a}\mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi, k) = (\frac{\gamma^2}{2})^{1/2}\zeta \tag{4.73}$$

olarak bulunur. Burada $a = (c_3 - c_1)^{1/2}$, $\sin\phi = (\frac{a^2-y^2}{a^2-b^2})^{1/2}$, $\zeta = xk_x + rk_r - \omega t$ ve $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{c_3-c_2}{c_3-c_1}$ dir. (4.73) ifadesinin tersi alınırsa,

$$\sin\phi = \mathrm{sn}\{[\frac{\gamma^2}{2}(c_3 - c_1)]^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ ); k\} \tag{4.74}$$

bulunur. $\mathrm{sn}^2(y,k) + \mathrm{cn}^2(y,k) = 1$ bağıntısı kullanılırsa (4.74) eşitliği

$$\cos^2\phi = \mathrm{cn}^2\{[\frac{\gamma^2}{2}(c_3 - c_1)]^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ ); k\} \tag{4.75}$$

formunu alır. Burada $\cos^2\phi = \frac{z-c_2}{c_3-c_2}$ dir. (4.75) sonucundan, (4.69) denkleminin çözümü Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden

$$z = c_2 + (c_3 - c_2)\mathrm{cn}^2\{[\frac{\gamma^2}{2}(c_3 - c_1)]^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ ); k\} \tag{4.76}$$

elde edilmiş olur. (4.69) denklemindeki C integrasyon sabitinin sıfır olduğu varsayılırsa $f(z)$ fonksiyonunun kökleri için $c_2 \to c_1$ ve $c_1 = 0$ bilgilerinin geçerli olduğu görülür. Bu durumda $k = 1$ 'dir. $k = 1$ için $\mathrm{cn}(y,1) = \mathrm{sech}y$ olduğundan (4.69) denkleminin çözümü elemanter fonksiyonlar cinsinden yazılabilir:

$$z = c_3\mathrm{sech}^2[(\frac{\gamma^2}{2}c_3)^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ )]. \tag{4.77}$$

$u^2 = z$ tanımı hatırlanarak u çözüm fonksiyonu

$$u = \sqrt{c_3}\mathrm{sech}[(\frac{\gamma^2}{2}c_3)^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ )] \tag{4.78}$$

şeklinde elde edilir.

5. NONLİNEER DALGA MODÜLASYONU

5.1 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

Bilindiği gibi birçok lineer sistem zamanla genliklerin sabit kaldığı harmonik dalga trenlerini çözüm olarak kabul eder. Bununla birlikte incelenen sistem zayıf nonlineer bir sistem ise harmonik dalga çözümlerinin genlikleri zamanla sabit kalmaz ve nonlineerlik genliğin zaman ve konumda değişmesine diğer bir deyişle dalga genliğinin modüle olmasına neden olur. Eğer genlik, bir titreşim periyodu boyunca yavaş değişiyorsa, uygun bir koordinat dönüşümü sistemi titreşimle hızlı değişen ve genlikle yavaş değişen kısımlara ayırır. Bağımlı değişkenler için asimptotik açılım şeklinde önerilen bir çözüm ile birinci mertebe genliğin modülasyonunu belirleyen evolüsyon denklemini türetmek mümkün olur. Bu konudaki araştırmalar özellikle bir boyutlu fiziksel modellere ve deneylere dayanmakta olup, ikinci bir uzay boyutundaki değişimlerin sinüsoidal dalgaların modülasyonunu nasıl etkileyeceği ilgi çeken bir soru olarak ortaya çıkmaktadır. Bir boyutlu durumda genliğin modülasyonunu tanımlayan denklem bir boyutlu nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi olurken iki boyutlu durumda genliğin modülasyonunu (2+1) boyutlu NLS denklemi tanımlar.

Bu bölümde zayıf nonlineer bir sistemde harmonik bir dalganın uzay ve zamanda yavaş değişen genliğinin nonlineerliğin etkisi ile nasıl değiştiği *indirgeyici pertürbasyon yöntemi* kullanılarak bulunmuştur [8,9]. İlk olarak bir boyutlu durumda dalga modülasyonu problemlerine uygun olan koordinat uzatmaları yapılacaktır.

Bir boyutta lineer bir ortamda yayılan ve genlikleri aynı olan iki sinüsoidal dalga verilsin:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= A\exp[i(k_1x-\omega_1t)] \\ u_2(x,t) &= A\exp[i(k_2x-\omega_2t)]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(5.1)'deki harmonik dalgaların k_1 ve k_2 dalga sayıları birbine çok yakın ise bu dalgaların süperpozisyonu sonucunda ortaya çıkan dalganın ilginç özellikleri vardır. Gerçekten bir k dalga sayısı civarında lokalize olmuş $k_1 = k + \Delta k$ ve $k_2 = k - \Delta k$ dalga sayılarına sahip dalgaların süperpozisyonu

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\exp[i(k+\Delta k)x-(\omega+\Delta\omega)t)] + A\exp[i(k-\Delta k)x-(\omega-\Delta\omega)t)] \\ &= 2A\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)\ \exp[i(kx-\omega t)] \end{aligned} \tag{5.2}$$

sonucunu verir. Lineer ortamlarda yarı monokromatik (hemen hemen tek dalga sayılı) iki dalganın süperpozisyonu harmonik dalgaları, $\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ ile yavaş değişen bir genlik ve $\exp[i(kx - \omega t)]$ ile hızlı değişen bir fazdan oluşan iki kısma ayırmakta, diğer bir deyişle genliğin modüle olmasına neden olmaktadır. $\Delta k/k << 1$ ve $\Delta\omega/\omega << 1$ olduğundan ω frekansındaki $\Delta\omega$ değişimi

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega(k+\Delta k)-\omega(k) \\ &= \frac{d\omega}{dk}\Delta k + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}(\Delta k)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{5.3}$$

ile verilir. Bu durumda genliğin faz fonksiyonu

$$\Delta kx - \Delta\omega t = \Delta k(x - \frac{d\omega}{dk})t - \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}(\Delta k)^2 t + \cdots \tag{5.4}$$

şeklini alır. p sonradan belirlenecek bir pozitif sayı ve ϵ küçük bir parametre olmak üzere $\Delta k = \epsilon^p$ olduğu kabul edilirse, genlik modülasyonunu incelemek için yavaş değişkenler ξ ve τ

$$\xi = \epsilon^p(x - c_g t), \quad \tau = \epsilon^{2p}t \tag{5.5}$$

olarak seçilebilir. Burada $c_g = d\omega/dk$ olup x ekseni doğrultusunda yayılan dalganın grup hızını göstermektedir. Lineer dispersif sistemlerde dispersiyonun bir ölçüsü olarak ortaya çıkan ϵ parametresi zayıf nonlineer sistemlerde nonlineerliğin bir ölçüsü olarak hesaba katılırsa, yani bağımlı değişkenlerin de ϵ'nun bir asimptotik serisi şeklinde yazılabileceği gözönüne alınırsa nonlineerliğin dispersiyonla dengelendiği orijinal sistemin uzak alan davranışını karakterize eden yeni evolüsyon denklemlerini elde etmek mümkün olabilir. Nonlineer dalga modülasyonunun incelenmesinde kullanılan değişik asimptotik yöntemler [8,9] numaralı çalışmalarda geniş ve ayrıntılı olarak verilmiştir.

5.2 Nonlineer Dalga Modülasyonu

Bilindiği gibi zayıf nonlineer bir ortamda sinüsoidal dalgaların genlik modülasyonunu yöneten denklemler bir boyutlu durumda (1+1) NLS, iki boyutlu durumda ise (2+1) NLS denklemi ile verilir. Çalışmanın bu bölümünde alan denklemleri (3.11) ile verilen genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılan enine harmonik bir dalganın genliğinin nasıl modüle olduğu incelenecektir. Modüle olmuş dalganın genliğini yöneten denklemi bulmak için kullanılacak metot uzun dalga yaklaşımında olduğu gibi *indirgeyici pertürbasyon yöntemi*'dir [8,9]. Bu problemde uzun dalga yaklaşımından farklı olarak hem yavaş hem de hızlı değişkenler olduğundan, indirgeyici pertürbasyon yönteminin doğrudan Lagrange yoğunluk fonksiyonuna uygulanması mümkün değildir. Gerçekten yavaş ve hızlı değişkenlerin ölçekleri farklı olduğundan her mertebede elde edilebilecek Lagrange yoğunluk fonksiyonu hiyerarşilerine karşı gelen Euler-Lagrange denklemlerinde mertebe kayması olur ve doğru sonuç elde edilemez. Bunu önlemek için yöntem ya alan denklemlerine doğrudan uygulanır veya Lagrange yoğunluk fonksiyonuna karşı gelen Euler-Lagrange denklemi elde edilir. Euler-Lagrange denkleminin ϵ parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenmesi ile ortaya çıkan denklemlerin çözümünden birinci mertebe genliği yöneten evolüsyon denklemi bulunur. Bu çalışmada birinci yaklaşım tercih edilecek ve pertürbasyon metodu doğrudan alan denklemlerine uygulanacaktır.

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda ikinci mertebe nonlineer mikropolar elastik bir ortamda yayılan bir boyutlu harmonik dalgaların modülasyonu incelenmiş ve boyuna dalganın genlik modülasyonunun bir boyutlu bir NLS [27] ve enine dalgaların genlik modülasyonunun ise bir boyutlu kuple iki NLS denklemleri [28] ile verildiği gösterilmiştir.

Çalışmanın bu bölümünde, alan denklemleri yüksek mertebe yer değiştirme gradyanlarını içeren genelleştirilmiş sonsuz elastik bir ortamda yayılan harmonik dalgaların genliklerinin zayıf nonlineerlik ile nasıl değiştiği incelenecektir. Elastisite teorisinin veya onun genelleştirilmiş formlarından birinin alan denklemleri diğer sürekli ortamlarda hareketi tanımlayan denklemlere göre daha karmaşıktır. Bu nedenle genelleştirilmiş elastik bir ortamda asimptotik bile olsa dalga yayılımı problemlerinin büyük zorluklar gösterdiği bilinen bir gerçektir. Alan denklemleri (3.11) ile verilen genelleştirilmiş elastik bir ortamda iki boyutta harmonik dalgaların modülasyonunu incelemek için xy düzleminde x ekseni ile θ_0 açısı yapan ve

$$r = \cos\theta_0\ x + \sin\theta_0\ y \tag{5.6}$$

olarak tanımlanan eğik bir koordinat boyunca dalgaların yayıldığı varsayılacaktır. Bu kabul, dalgaların esas olarak bir boyutlu olması sonucunu vermesine rağmen, genliği yöneten ve r bağımsız değişkenine bağlı evolüsyon denklemi xy kartezyen koordinatlarında yazıldığında NLS denkleminin iki boyutlu halini elde etmek mümkün olacaktır. $\cos\theta_0 = \alpha$ ve $\sin\theta_0 = \beta$ tanımları ile xy düzlemindeki eğik koordinat

$$r = \alpha x + \beta y \tag{5.7}$$

şeklini alır. Bu problemde yer değiştirme vektörü u_k

$$u_k = u_k(r,t), \quad (k = 1,2,3) \tag{5.8}$$

olup, Bölüm 3'te (3.8) ifadesi ile verilen Σ iç enerji fonksiyonu

$$\begin{aligned}\Sigma \ = \ & \frac{\lambda}{2}\,[(\alpha u_{1,r} + \beta u_{2,r})^2 + (\alpha u_{1,r} + \beta u_{2,r})(u_{1,r}^2 + u_{2,r}^2 + u_{3,r}^2)] \\ & + \frac{\mu}{2}\,[(1+\alpha^2)u_{1,r}^2 + (1+\beta^2)u_{2,r}^2 + u_{3,r}^2 + 2\alpha\beta u_{2,r}u_{1,r}) \\ & \quad + 2\alpha u_{1,r}(u_{1,r}^2 + \alpha^2 u_{2,r}^2 + \alpha^2 u_{3,r}^2) + 2\beta u_{2,r}(u_{2,r}^2 + \beta^2 u_{3,r}^2 + \beta^2 u_{1,r}^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +2\beta u_{1,r}(\alpha\beta u_{2,r}^2+\alpha\beta u_{3,r}^2+\alpha^2 u_{2,r}u_{1,r})+2\alpha^2\beta u_{2,r}u_{3,r}^2]\\
&+2\mu\ m^2\ [(u_{1,rr}^2+u_{2,rr}^2+u_{3,rr}^2)+\nu(\alpha^2 u_{1,rr}^2+2\alpha\beta u_{1,rr}u_{2,rr}+\beta^2 u_{2,rr}^2)]\\
&+\frac{A}{12}\ [\alpha(\alpha^2+3)u_{1,r}^3+3\beta(\alpha^2+1)u_{1,r}^2u_{2,r}+3\alpha(1+\beta^2)u_{2,r}^2u_{1,r}\\
&\quad +\beta(3+\beta^2)u_{2,r}^3+3\beta u_{3,r}^2u_{1,r}+3\alpha u_{3,r}^2u_{2,r}]\\
&+\frac{B}{2}\ [\alpha(1+\alpha^2)u_{1,r}^3+\beta(1+3\alpha^2)u_{1,r}^2u_{2,r}+\alpha(1+3\beta^2)u_{2,r}^2u_{1,r}\\
&\quad +\beta(1+\beta^2)u_{2,r}^3+\beta u_{3,r}^2u_{2,r}+\alpha u_{3,r}^2u_{1,r}]\\
&+\frac{C}{3}\ (\alpha u_{1,r}+\beta u_{2,r})^3 \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

olarak verilir.

Bu hale karşı gelen varyasyonel problem

$$\delta\int L dt=\delta\iint \mathcal{L} dr dt=0$$

olarak tanımlanır. Burada Lagrange yoğunluk fonksiyonu, $\mathcal{L}=T-\Sigma$,

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(u_{k,t},u_{k,r},u_{k,rr}) \qquad (5.10)$$

olup, varyasyonel problemin Euler-Lagrange denklemleri ise

$$\delta u_k:\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{k,t}})+\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{k,r}})-\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{k,rr}})=0 \quad (k=1,2,3) \qquad (5.11)$$

şeklindedir. İndirgeyici pertürbasyon metodu doğrudan alan denklemlerine uygulanacağından, alan denklemlerinin açık formu burada verilecektir. (5.9)ile verilen Σ iç enerji fonksiyonu ve (3.6) ile verilen T kinetik enerji fonksiyonu kullanılarak, (5.11) denklemlerinin açık formu

$$
\begin{aligned}
&\rho_0 u_{1,tt}-[\lambda\alpha^2+\mu(1+\alpha^2)]u_{1,rr}-(\lambda+\mu)\alpha\beta u_{2,rr}\\
&-[3\lambda\alpha+6\mu\alpha+\frac{A}{2}\alpha(\alpha^2+3)+3B\alpha(1+\alpha^2)+2C\alpha^3]u_{1,r}u_{1,rr}\\
&-[\lambda\alpha+2\mu\alpha+\frac{A}{2}\alpha(\beta^2+1)+B\alpha(1+3\beta^2)+2C\alpha\beta^2]u_{2,r}u_{2,rr}\\
&-[\lambda\alpha+2\mu\alpha+\frac{A}{2}\alpha+B\alpha]u_{3,r}u_{3,rr}\\
&-[\lambda\beta+2\mu\beta+\frac{A}{2}\beta(\alpha^2+1)+B\beta(1+3\alpha^2)+2C\alpha^2\beta](u_{1,rr}u_{2,r}+u_{1,r}u_{2,rr})\\
&+4\mu m^2[(1+\nu\alpha^2)u_{1,rrrr}+\nu\alpha\beta u_{2,rrrr}]=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_0 u_{2,tt} - (\lambda+\mu)\alpha\beta u_{1,rr} - [\lambda\beta^2 + \mu(1+\beta^2)]u_{2,rr} \\
&-[3\lambda\beta + 6\mu\beta + \frac{A}{2}\beta(\beta^2+3) + 3B\beta(1+\beta^2) + 2C\beta^3]u_{2,r}u_{2,rr} \\
&-[\lambda\beta + 2\mu\beta + \frac{A}{2}\beta(\alpha^2+1) + B\beta(1+3\alpha^2) + 2C\alpha^2\beta]u_{1,r}u_{1,rr} \\
&-[\lambda\beta + 2\mu\beta + \frac{A}{2}\beta + B\beta]u_{3,r}u_{3,rr} \\
&-[\lambda\alpha + 2\mu\alpha + \frac{A}{2}\alpha(\beta^2+1) + B\alpha(1+3\beta^2) + 2C\beta^2\alpha](u_{2,rr}u_{1,r} + u_{1,rr}u_{2,r}) \\
&+4\mu m^2[(1+\nu\beta^2)u_{2,rrrr} + \nu\alpha\beta u_{1,rrrr}] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho_0 u_{3,tt} - \mu u_{3,rr} - \alpha(\lambda + 4\mu + \frac{A}{2} + B)(u_{3,rr}u_{1,r} + u_{1,rr}u_{3,r}) \\
&-\beta(\lambda + 4\mu + \frac{A}{2} + B)(u_{3,rr}u_{2,r} + u_{2,rr}u_{3,r}) + 4\mu m^2 u_{3,rrrr} = 0 \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

(5.12) denklemlerinin dispersif karakterini görmek için alan denklemleri lineerleştirilirse, lineerleştirilmiş denklemler

$$
\begin{aligned}
\rho_0 u_{1,tt} - [\lambda\alpha^2 + \mu(1+\alpha^2)]u_{1,rr} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u_{2,rr}& \\
+4\mu m^2[(1+\nu\alpha^2)u_{1,rrrr} + \alpha\beta\nu u_{2,rrrr}] &= 0, \\
\rho_0 u_{2,tt} - [\lambda\beta^2 + \mu(1+\beta^2)]u_{2,rr} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u_{1,rr}& \\
+4\mu m^2[(1+\nu\beta^2)u_{2,rrrr} + \nu\alpha\beta u_{1,rrrr}] &= 0, \\
\rho_0 u_{3,tt} - \mu u_{3,rr} + 4\mu m^2 u_{3,rrrr} &= 0 \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

formunu alır. Bu denklemlere A_k kompleks genlik, k ise r doğrultusundaki dalga sayısı olmak üzere

$$
u_k = A_k \exp[i(rk - \omega t)]
$$

şeklindeki harmonik dalga çözümleri aranırsa

$$
\begin{aligned}
\{-\rho_0\omega^2 + [\lambda\alpha^2 + \mu(1+\alpha^2)]k^2 + 4\mu m^2(1+\nu\alpha^2)k^4\}A_1& \\
+[\alpha\beta(\lambda+\mu)k^2 + 4\mu m^2\nu\alpha\beta k^4]A_2 &= 0, \\
\{-\rho_0\omega^2 + [\lambda\beta^2 + \mu(1+\beta^2)]k^2 + 4\mu m^2(1+\nu\beta^2)k^4\}A_2& \\
+[\alpha\beta(\lambda+\mu)k^2 + 4\mu m^2\nu\alpha\beta k^4]A_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

$$(-\rho_0\omega^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2 k^4)A_3 \ = \ 0 \qquad (5.14)$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir. (5.14)'teki ilk iki denklem A_1 ve A_2 büyüklükleri cinsinden homojen lineer bir denklem sistemidir. Sıfırdan farklı A_1 ve A_2 çözümlerinin olması için karşı gelen homojen denklem sisteminin katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bu determinantın sonucu basit fakat uzun işlemler sonucunda iki çarpan şeklinde yazılabilir:

$$[-\rho_0\omega^2 + (\lambda + 2\mu)k^2 + 4(1+\nu)\mu m^2 k^4](-\rho_0\omega^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2 k^4) = 0. \qquad (5.15)$$

(5.15) denkleminde ilk çarpan boyuna u_1 modu ile ilgili dispersiyon bağıntısı, ikinci çarpan ise enine u_2 modu ile ilgili dispersiyon bağıntısıdır. $(5.14)_3$ denklemi ise enine u_3 yer değiştirme bileşenine karşı gelen dispersiyon bağıntısını gösterir:

$$D_3(k,\omega) = -\rho_0\omega^2 + \mu k^2 + 4\mu m^2 k^4 = 0. \qquad (5.16)$$

(5.12) alan denklemlerinden, (5.15) ve (5.16) dispersiyon bağıntılarından görüldüğü gibi r doğrultusunda dalga yayılımı söz konusu ise, sırasıyla boyuna ve enine (u_1, u_2) bileşenlerinin veya yalnız enine u_3 bileşeninin yayılım problemini incelemek mümkündür. Bu çalışmada kolaylık sağlaması bakımından yalnız u_3 enine bileşeninin zayıf nonlineer ortamda yayılımı göz önüne alınacaktır. Bu ise u_3 modu ile ilgili dispersiyon bağıntısının $D_3(k,\omega) = 0$ olduğu anlamına gelir.

Bu aşamada genlik modülasyonu problemini incelemek için, ayrıntıları (5.5) ile verilen koordinat uzatması

$$\zeta = \epsilon(r - \Lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 t \qquad (5.17)$$

şeklinde seçilmiştir. Burada Λ sonradan belirlenecek reel bir büyüklük, ζ ve τ yavaş değişkenler olmak üzere ζ ile, koordinat takımı Λ sabit hızıyla hareket eden bir gezen dalga üzerine taşınmış olur.

Çalışmanın bu bölümünde bütün alan değişkenleri, u_k $(k = 1, 2, 3)$, için

$$\begin{aligned} u_1 &= \epsilon u_1^{(0)}(\zeta,\tau) + \epsilon^2[u_1^{(2)}(\zeta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.] + \cdots \\ u_2 &= \epsilon u_2^{(0)}(\zeta,\tau) + \epsilon^2[u_2^{(2)}(\zeta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.] + \cdots \\ u_3 &= \epsilon[u_3^{(1)}(\zeta,\tau)e^{i\theta} + c.c.] + \epsilon^2[u_3^{(2)}(\zeta,\tau)e^{2i\theta} + c.c.] + \cdots \qquad (5.18) \end{aligned}$$

şeklindeki asimptotik açılımların yapılabileceği varsayılacaktır. Burada $\theta = kr - \omega t$ olup *c.c.* kendinden önce gelen terimin kompleks eşleniğini gösterir. (5.18) açılımlarından görüldüğü gibi (5.17) koordinat dönüşümü, çözümü titreşimlerle hızlı değişen kısım ve yavaş değişen zarf olmak üzere iki kısma ayırır. Bu çalışmada ortamda yayılan düzlem dalganın, $u_3^{(1)}$, kendi kendisi ile nonlineer etkileşmesi problemi ele alınacağından $D_3(k,\omega) = 0$ iken $n \geq 2$ için $D_3(nk, n\omega) \neq 0$ olduğu kabul edilecek ve zayıf nonlineerliğin dalganın genliğini nasıl modüle ettiği incelenecektir.

(5.17) yavaş değişkenleri ve (5.18) çözüm fonksiyonları (5.12) alan denklemlerinde yerleştirilirse, ϵ parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenmiş denklem hiyerarşileri elde edilir. Her mertebe için elde edilmiş denklemlerin çözümünden $u_3^{(1)}$ genliğinin sağladığı uygunluk koşulunu bulmak mümkün olur. İlk olarak $\mathcal{O}(\epsilon)$ için elde edilen tek denklem

$$\mathrm{e}^{i\theta}: \quad (\rho_0\omega^2 - \mu k^2 + 4\mu m^2 k^4) u_3^{(1)} = 0 \tag{5.19}$$

şeklindedir. $u_3^{(1)}$'in katsayısı $D_3(k,\omega) = 0$ olduğundan (5.19) denkleminden $u_3^{(1)}$'in keyfi bir fonksiyon olduğu sonucu çıkar.

ϵ^2 mertebesinde sırası ile birinci ve ikinci modlar için

$$\mathrm{e}^{i\theta}: \quad (2\rho_0\Lambda i\omega - 2\mu i k - 16\mu m^2 i k^3) u_{3,\zeta}^{(1)} = 0 \tag{5.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2i\theta}: \quad & \{-4\rho_0\omega^2 + 4[\lambda\alpha^2 + \mu(1+\alpha^2)]k^2 + 64\mu m^2(1+\nu\alpha^2)k^4\} u_1^{(2)} \\
& \qquad + [4\alpha\beta(\lambda+\mu)k^2 + 64\mu m^2 \alpha\beta\nu k^4] u_2^{(2)} = 0 \\
& \{-4\rho_0\omega^2 + 4[\lambda\beta^2 + \mu(1+\beta^2)]k^2 + 64\mu m^2(1+\nu\beta^2)k^4\} u_2^{(2)} \\
& \qquad + [4\alpha\beta(\lambda+\mu)k^2 + 64\mu m^2 \alpha\beta\nu k^4] u_1^{(2)} = 0 \\
& \qquad (-4\rho_0\omega^2 + 4\mu k^2 + 64\mu m^2 k^4) u_3^{(2)} = 0
\end{aligned} \tag{5.21}$$

denklemleri elde edilir. $u_3^{(1)}$ fonksiyonunun keyfi bir fonksiyon olduğu hatırlanacak olursa, (5.20) denkleminin sağlanması için katsayı fonksiyonunun sıfır olması gerektiği ortaya çıkar. Bu ise Λ reel büyüklüğünün r doğrultusunda yayılan dalganın grup hızı olduğunu gösterir:

$$\Lambda = \frac{1}{\rho_0\omega}(\mu k + 8\mu m^2 k^3).$$

İkinci moda karşı gelen $(5.21)_3$ denkleminde $u_3^{(2)}$ fonksiyonunun katsayısı $D_3(2k, 2\omega)$'tür. Bu çalışmada yüksek harmoniklerle etkileşim incelenmediğinden $D_3(2k, 2\omega) \neq 0$ olup $u_3^{(2)} = 0$ elde edilir. (5.21)'de verilen ilk iki denklem $u_1^{(2)}$ ve $u_2^{(2)}$ bilinmeyenleri için lineer homojen bir denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı, Δ, uzun ve karmaşık işlemlerden sonra

$$\Delta = D_1(2k, 2\omega)D_2(2k, 2\omega)$$

olarak hesaplanır. Burada $\Delta \neq 0$ alındığından $(5.21)_1$ ve $(5.21)_2$ homojen denklem sisteminin tek çözümünün

$$u_1^{(2)} = u_2^{(2)} = 0 \tag{5.22}$$

olduğu bulunur.

Son olarak ϵ^3 mertebesinde sıfırıncı ve birinci moda karşı gelen denklemler

$$\begin{aligned}
\epsilon^{i0}: \quad & [\rho_0\Lambda^2 - \lambda\alpha^2 - \mu(1+\alpha^2)]u^{(0)}_{1,\zeta\zeta} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u^{(0)}_{2,\zeta\zeta} \\
& \qquad -(\alpha\lambda + 2\alpha\mu + \alpha A/2 + \alpha B)k^2|u_3^{(1)}|^2_{,\zeta} = 0 \\
& [\rho_0\Lambda^2 - \lambda\beta^2 - \mu(1+\beta^2)]u^{(0)}_{2,\zeta\zeta} - \alpha\beta(\lambda+\mu)u^{(0)}_{1,\zeta\zeta} \\
& \qquad -(\beta\lambda + 2\beta\mu + \beta A/2 + \beta B)k^2|u_3^{(1)}|^2_{,\zeta} = 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}: \quad & -2\rho_0 i\omega u^{(1)}_{3,\tau} + (\rho_0\Lambda^2 - \mu - 24\mu m^2k^2)u^{(1)}_{3,\zeta\zeta} \\
& + \alpha(\lambda + 4\mu + A/2 + B)[k^2u^{(0)}_{1,\zeta}u_3^{(1)} - 2ik^3(u_3^{(1)})^*u_1^{(2)}] \\
& + \beta(\lambda + 4\mu + A/2 + B)[k^2u^{(0)}_{2,\zeta}u_3^{(1)} - 2ik^3(u_3^{(1)})^*u_2^{(2)}] = 0
\end{aligned} \tag{5.24}$$

şeklindedir. Sıfırıncı moddan $u_1^{(0)}$ ve $u_2^{(0)}$ bilinmeyenleri için elde edilen homojen olmayan denklemler ζ'ya göre integre edilip $u^{(0)}_{1,\zeta}$ ve $u^{(0)}_{2,\zeta}$ için çözülürse

$$u^{(0)}_{1,\zeta} = \frac{(\lambda + 2\mu + A/2 + B)}{\rho_0\Lambda^2 - \lambda - 2\mu}\alpha k^2|u_3^{(1)}|^2 \tag{5.25}$$

ve

$$u_{2,\zeta}^{(0)} = \frac{(\lambda + 2\mu + A/2 + B)}{\rho_0 \Lambda^2 - \lambda - 2\mu} \beta k^2 |u_3^{(1)}|^2 \tag{5.26}$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar boyuna $u_1^{(0)}$ ve enine $u_2^{(0)}$ büyüklüklerinin enine $u_3^{(1)}$ moduna bağlı olduğunu gösterir. Eğer (5.25), (5.26) ve (5.22) sonuçları (5.24) denkleminde yerleştirilirse, $u_3^{(1)}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} &-2\rho_0 i\omega u_{3,\tau}^{(1)} + (\rho_0\Lambda^2 - \mu - 24\mu m^2 k^2) u_{3,\zeta\zeta}^{(1)} \\ &+ (\lambda + 4\mu + A/2 + B) k^2 [\alpha u_{1,\zeta}^{(0)} u_3^{(1)} + \beta u_{2,\zeta}^{(0)} u_3^{(1)}] = 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

evolüsyon denklemi elde edilir. Böylece $u_3^{(1)} \equiv \phi$ olmak üzere enine birinci mertebe dalga genliğinin modülasyonunu karakterize eden nonlineer kısmi diferansiyel denklem

$$i\phi_\tau + \Gamma\phi_{\zeta\zeta} + \kappa|\phi|^2\phi = 0 \tag{5.28}$$

olarak bulunur. Burada Γ ve κ

$$\Gamma = \frac{(-\rho_0\Lambda^2 + \mu + 24\mu m^2 k^2)}{2\rho_0\omega}, \quad \kappa = \frac{(\lambda + 4\mu + A/2 + B)(\lambda + 2\mu + A/2 + B)}{2\rho_0\omega(\rho_0\Lambda^2 - \lambda - 2\mu)} k^4$$

olarak tanımlanmıştır. (5.28) ile verilen denklem Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi olarak bilinir ve enine dalganın genlik modülasyonunu karakterize eder.

Enine dalganın genlik modülasyonunu yöneten (5.28) ile verilen NLS denklemini xy kartezyen koordinatlarında yazmak için (5.17) koordinat dönüşümünde $r = \alpha x + \beta y$ yazılırsa

$$\zeta = \epsilon(\alpha x + \beta y - \Lambda t) \tag{5.29}$$

elde edilir. k, r doğrultusundaki dalga sayısı; $k_x = \alpha k$, $k_y = \beta k$ ve $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ olmak üzere (5.16) dispersiyon bağıntısından $\partial\omega/\partial k_x$ ve $\partial\omega/\partial k_y$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} -\rho_0\omega\frac{\partial\omega}{\partial k_x} + \mu k_x + 8\mu m^2 k^2 k_x = 0 \\ -\rho_0\omega\frac{\partial\omega}{\partial k_y} + \mu k_y + 8\mu m^2 k^2 k_y = 0 \end{aligned} \tag{5.30}$$

bulunur. (5.30) denklemlerinin birincisi α , ikincisi β ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$-\rho_0\omega\frac{d\omega}{dk} + \mu k + 8\mu m^2 k^3 = 0$$

dispersiyon bağıntısı elde edilir. Burada $k = \alpha k_x + \beta k_y$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu işlemler sonucunda Λ büyüklüğünün

$$\Lambda = \frac{d\omega}{dk} = \alpha\frac{\partial\omega}{\partial k_x} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial k_y} = \alpha\Lambda_x + \beta\Lambda_y \tag{5.31}$$

şeklinde yazılabileceği bulunur. Bu sonuç (5.29) denkleminde yazılırsa

$$\zeta = \alpha\epsilon(x - \Lambda_x t) + \beta\epsilon(y - \Lambda_y t)$$

ve

$$\xi = \epsilon(x - \Lambda_x t), \qquad \eta = \epsilon(y - \Lambda_y t) \tag{5.32}$$

tanımları yapılırsa $\zeta = \alpha\xi + \beta\eta$ bulunur. Bu durumda ζ koordinatına dik olan $\zeta' = -\beta\xi + \alpha\eta$ olup, ters koordinat dönüşümleri

$$\xi = \alpha\zeta - \beta\zeta', \quad \eta = \beta\zeta + \alpha\zeta' \tag{5.33}$$

olarak elde edilir. Burada (5.28) denklemindeki konum türevleri ise $\xi\eta$ koordinatlarında

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \beta\frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{5.34}$$

formunda yazılır. (5.34)'deki sonuçlar kullanılırsa (5.28) denklemi $\xi\eta$ koordinatlarında

$$i\phi_\tau + \Gamma\alpha^2\phi_{\xi\xi} + 2\Gamma\alpha\beta\phi_{\xi\eta} + \Gamma\beta^2\phi_{\eta\eta} + \kappa|\phi|^2\phi = 0 \tag{5.35}$$

ile verilen (2+1) NLS denklemine dönüşür.

(5.35) denklemi daha önceden elastik bir zemine oturan ince bir plağın eğilme dalgalarını karakterize eden denklem olarak elde edilmiştir [15]. Adı geçen çalışmada araştırıcılar doğrudan iki boyutlu ortamda dalga yayılımını incelemişler ve (2+1) NLS denklemini elde etmişlerdir. Bu çalışmada ise ortam bir boyutlu gibi düşünülerek r doğrultusunda yayılan dalga modülasyonu incelenmiş ve genliği yöneten denklem (1+1) NLS denklemi olarak hesaplanmıştır. Daha sonra orijinal koordinat sistemi (1+1) NLS denkleminde yerleştirilerek (2+1) NLS denklemi elde edilmiştir.

Özel olarak (5.35) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ alınırsa

$$i\phi_\tau + \Gamma\phi_{\xi\xi} + \kappa|\phi|^2\phi = 0 \tag{5.36}$$

şeklindeki (1+1) NLS denklemi bulunur. Bu denklem ξ doğrultusunda yayılan dalganın genliğinin değişimini verir. Diğer yandan $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alındığında ise

$$i\phi_\tau + \Gamma\phi_{\eta\eta} + \kappa|\phi|^2\phi = 0 \tag{5.37}$$

denklemi η doğrultusundaki dalga yayılımı durumunu tanımlar. Son olarak $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ ise ξ ekseni ile 45° açı yapan doğrultuda dalga yayılımı durumunda genlik modülasyonunun

$$2i\phi_\tau + \Gamma\phi_{\xi\xi} + 2\Gamma\phi_{\xi\eta} + \Gamma\phi_{\eta\eta} + 2\kappa|\phi|^2\phi = 0 \tag{5.38}$$

denklemi ile karakterize edilebileceği gösterir.

5.3 NLS Denkleminin Bazı Özel Çözümleri

Çalışmanın bu kısmında (5.35) ile verilen NLS denkleminin özel çözümleri, bir önceki bölümde KMKP denklemlerinin özel çözümlerini bulmak için kullanılan değiştirilmiş Hirota Metodu ile elde edilecektir [24,25].

İlk olarak (5.35) ile verilen NLS denklemini adi differansiyel denklem sistemine dönüştürebilmek için

$$\phi(\xi,\eta,\tau) = (\frac{\Gamma}{\kappa})^{1/2}(\alpha k_1 + \beta k_2)u(\zeta)\exp\ (i\theta) \tag{5.39}$$

gezen dalga dönüşümünü ele alalım. Burada $\zeta = k_1\xi + k_2\eta - \Omega\tau$ faz fonksiyonu olup

$$\theta = \frac{\Omega}{2\Gamma(\alpha k_1 + \beta k_2)^2}(k_1\xi + k_2\eta) + \Gamma a^2(\alpha k_1 + \beta k_2)^2\tau - \frac{\Omega^2}{4\Gamma(\alpha k_1 + \beta k_2)^2}\tau$$

şeklindedir. Burada a sabittir.

(5.39) ile önerilen ifade (5.35) denklemlerine yerleştirilir ise

$$u'' - a^2u + u^3 = 0 \tag{5.40}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir.

(5.40) denklemi (4.64) denkleminin $a = \alpha$ ve $\gamma^2 = 1$ durumuna karşı geldiğinden (5.40) diferansiyel denkleminin Jacobi eliptik fonksiyonları yardımı ile

$$u = \sqrt{c_2} + \sqrt{(c_3 - c_2)}\mathrm{cn}\{[\frac{1}{2}(c_3 - c_1)]^{1/2}(xk_x + rk_r - \omega t\ ); k\} \tag{5.41}$$

çözümünü bulmak mümkündür.

(5.40) denklemini değiştirilmiş Hirota metodunu kullanarak çözmek için u çözüm fonksiyonunun, g ve f reel fonksiyonlar olmak üzere

$$u = \frac{g(\zeta)}{f(\zeta)} \tag{5.42}$$

şeklinde yazılabileceği varsayılacaktır. (5.42) ile önerilen çözümler (5.40) sisteminde yazılırsa

$$\frac{1}{f^2}(fg'' - gf'' - 2f'g' - a^2fg) + \frac{g}{f^3}(2f'^2 + g^2) = 0 \tag{5.43}$$

denklemi elde edilir. (5.43) denkleminin sağlanması için g ve f fonksiyonları için

$$\begin{aligned} &fg'' + gf'' - 2f'g' - a^2gf = 0 \\ &g^2 - 2ff'' - 2f'^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.44}$$

ile verilen denklemlerin sağlanması gerekir. (5.44) denklem sistemine

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)}(\zeta)\varepsilon^n, \quad f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\zeta)\varepsilon^n \tag{5.45}$$

ile verilen kuvvet serileri şeklinde çözüm aranabileceğini varsayalım. Burada ε, açılımdaki terimleri izleyebilmek için tanımlanmış bir parametredir. g ve f fonksiyonları için (5.45) ile önerilen seri açılımları (5.44) denklem sisteminde yazılırsa, ε açılım parametresinin kuvvetlerine göre denklem hiyerarşileri elde edilecek ve Bölüm 4.3 'de yapıldığı gibi elde edilen denklemlerin her mertebe için çözülmesiyle çözüm fonksiyonları bulunacaktır. Bu çözüm fonksiyonlarında sonlu sayıda terimden sonra açılımın terimleri sıfır olursa istenen tam çözüm elde edilmiş olacaktır. Birinci mertebe problemden, yani $\mathcal{O}(\varepsilon)$ için

$$g^{(1)}_{\zeta\zeta} - a^2g^{(1)} = 0, \quad f^{(1)}_{\zeta\zeta} = 0 \tag{5.46}$$

denklemleri elde edilir. Buradan $g^{(1)}$ ve $f^{(1)}$ fonksiyonları için bir çözüm

$$g^{(1)} = 2aA\exp(a\zeta), \quad f^{(1)} = 0 \tag{5.47}$$

şeklinde seçilebilir. Burada $A = \exp(-a\zeta_1)$ ve olup ζ_1 ise sabittir.

İkinci mertebe denklemler

$$g^{(2)}_{\zeta\zeta} - a^2\, g^{(2)} = 0, \quad f^{(2)}_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2} g^{(1)2} \tag{5.48}$$

formundadır. Burada $g^{(2)}$ denkleminin bir çözümü sıfır olarak seçilirse ve (5.47) sonuçları (5.48) denklemlerinde kullanılırsa, ikinci mertebedeki çözüm fonksiyonları

$$g^{(2)} = 0, \quad f^{(2)} = \frac{1}{2}A^2\, \exp(2a\zeta) \tag{5.49}$$

olarak elde edilir.

Üçüncü mertebedeki denklemler

$$\begin{aligned} &g^{(3)}_{\zeta\zeta} + f^{(2)} g^{(1)}_{\zeta\zeta} + g^{(1)} f^{(2)}_{\zeta\zeta} - 2 g^{(1)}_{\zeta} f^{(2)}_{\zeta} - a^2\, (g^{(3)} + f^{(2)} g^{(1)}) = 0, \\ &f^{(3)}_{\zeta\zeta} = 0 \end{aligned} \tag{5.50}$$

şeklindedir. (5.48) ve (5.49) denklemlerinden elde edilen sonuçlar (5.50) denklem sisteminde kullanılırsa, sistemin

$$g^{(3)}_{\zeta\zeta} - a^2\, g^{(3)} = 0, \quad f^{(3)}_{\zeta\zeta} = 0 \tag{5.51}$$

formuna indirgendiği gözlenir. (5.51) sisteminin bir çözümü ise

$$g^{(3)} = 0, \quad f^{(3)} = 0 \tag{5.52}$$

olarak elde edilir. Böylece diğer bütün $g^{(n)}$ ve $f^{(n)}$ $(n \geq 3)$ çözümlerinin sıfır olduğu kolaylıkla görülür.

Bu noktada seri açılımlarının kesilebileceğini ve bütün yukarı mertebe terimlerinin sıfır olacağını kabul edersek g ve f çözüm fonksiyonları

$$g(\zeta) = 2aA\exp(a\zeta), \quad f(\zeta) = 1 + \frac{1}{2}A^2\, \exp(2a\zeta) \tag{5.53}$$

şeklini alır. Elde edilen bu sonuçlar (5.42) ile verilen ifadede yazılırsa $u(\zeta)$ çözüm fonksiyonunun formu

$$u(\zeta)=\frac{4aAe^{a\zeta}}{2+A^2e^{2a\zeta}} \tag{5.54}$$

olarak elde edilir.

Son olarak (5.54)'de u için elde edilen ifade (5.39)'de yerleştirilirse ϕ çözüm fonksiyonu

$$\phi(\xi,\eta,\tau)=(\frac{\Gamma}{\kappa})^{1/2}(\alpha k_1+\beta k_2)\frac{4aAe^{a\zeta}}{2+A^2e^{2a\zeta}}\exp(i\theta) \tag{5.55}$$

şeklinde elde edilir. Burada ζ ve θ

$$\zeta=k_1\xi+k_2\eta-\Omega\tau$$

ve

$$\theta=\frac{\Omega}{2\Gamma(\alpha k_1+\beta k_2)^2}(k_1\xi+k_2\eta)+\Gamma a^2(\alpha k_1+\beta k_2)^2\tau-\frac{\Omega^2}{4\Gamma(\alpha k_1+\beta k_2)^2}\tau$$

olarak tanımlanmıştır.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, zayıf nonlineer ve zayıf dispersif elastik bir ortamda uzay ve zaman değişkenlerinin farklı ölçeklerine karşı gelen durumlarda dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Çalışma, yapılan katkı itibarı ile, iki ana bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde uzun dalga yaklaşımında zayıf nonlineer, zayıf dispersif ve zayıf ikinci boyut etkilerinin olması durumunda enine dalgaların evolüsyonunun KMKP denklemleri ile tanımlanabileceği gösterilmiştir. Zayıf ikinci boyut etkilerinin uygun seçilen eğik bir koordinatta olduğu varsayılarak elde edilen KMKP denklemlerinin kuplaj terimlerinin simetrik olması sağlanmıştır. KMKP denklemlerinin özel halleri kısaca incelenmiş ve değiştirilmiş bir Hirota metodu kullanılarak KMKP denklemlerinin özel bir çözümü elde edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde xy düzleminde eğik bir koordinat boyunca sinüsoidal dalgaların yayılımı problemi incelenmiş ve enine dalganın genliğinin iki boyutlu NLS denklemi ile verilebileceği gösterilmiştir. (5.35) NLS denkleminde nonlineer terimin katsayısı $\rho_0\Lambda^2 = \lambda + 2\mu$ için sonsuza gider. Diğer bir deyişle boyuna dalganın faz hızı, $[(\lambda+2\mu)/\rho_0]^{1/2}$, ile enine dalganın grup hızı, Λ, birbirine eşit olduğu zaman NLS denkleminin nonlineer teriminin katsayısı çok büyür. Bu durumda NLS denklemi geçerli olmaktan çıkar ve dalganın hareketini belirlemek için yeni bir evolüsyon denklemi gerekir. Boyuna dalga faz hızının enine dalganın grup hızına eşit olması durumunda, üç dalga etkileşiminin limit hali olarak nitelenen uzun dalga-kısa dalga etkileşimi söz konusudur [29]. Bu özel kısıt altında etkileşim denklemlerinin elde edilmesi ilginç olabilir. Yakın zamanda bir boyutlu durumda uzun boyuna bir dalganın kısa enine dalgalarla etkileşim problemi incelenmiş ve literatürde uzun dalga-kısa dalga etkileşim denklemleri olarak adlandırılan evolüsyon denklemlerinin genelleştirilmiş hali elde edilmiştir

[30]:

$$
\begin{aligned}
&L_t - (|S_1|^2 + |S_2|^2)_x = 0 \\
&iS_{1,t} + S_{1,xx} - LS_1 = 0 \\
&iS_{2,t} + S_{2,xx} - LS_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Burada $L(x,t)$ boyuna uzun dalga, $S_i(x,t)$, $(i = 1,2)$ ise enine kısa dalgaların genliklerini göstermektedir. L ile ilgili denklemin KdV ve S_1, S_2 ile ilgili denklemlerin ise NLS denklemlerine benzemesi dikkat çekicidir.

Etkileşim problemleri için bir sonraki aşama ise uzun ve kısa dalgaların iki boyutlu olduğu halin incelenmesidir. İki boyutlu uzun ve kısa dalgaların etkileşim denklemleri

$$
\begin{aligned}
(L_t + 6LL_x + L_{xxx})_x + 3L_{yy} - 8\kappa(|S|^2)_{xx} &= 0 \\
iS_y - S_{xx} - LS &= 0
\end{aligned}
$$

olarak verilir [31,32]. Burada $L(x,y,t)$ uzun dalga, $S(x,y,t)$ ise kısa dalganın genliğini göstermektedir. Melnikov denklemleri olarak adlandırılan bu denklemlerde L ile ilgili denklemin KP denklemi ve S ile ilgili denklemin ise NLS denklemi olması ilgi çekicidir. Bilindiği kadarı ile Melnikov denklemlerinin fiziksel bir model için türetilmesi literatürde mevcut değildir. Türetilmesi oldukça karmaşık olduğu tahmin edilen bu denklemlerin zayıf nonlineer ve zayıf dispersif iki boyutlu bir sistem için türetilmesi ilginç bir problem olarak görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Whitham, G.B., 1974. Linear and Nonlinear Waves. Wiley& Sons, New York.

[2] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D., and Morris, H.C., 1982. Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic Press, London.

[3] Infeld, E. and Rowlands, G., 1990. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Jeffrey, A. and Engelbrecht, J., 1994. Nonlinear Waves in Solids. Eds. Jeffrey, A. & Engelbrecht, J., Springer-Verlag, New York.

[6] Engelbrecht, J., 1997. Nonlinear Wave Dynamics, Complexity and Simplicity. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[7] Ames, W.F., 1992. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, Boston.

[8] Jeffrey, A. and Kawahara, T., 1982. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory. Pitman, London.

[9] Taniuti, T. and Nishihara, K., 1983. Nonlinear Waves. Pitman, London.

[10] Jeffrey, A. and Kakutani, T., 1972. Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, *SIAM Rev.*, **11**, 582-643.

[11] Korteweg, D.J., and de Vries, G., 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary waves, *Philos. Mag. Ser.*, **39**, 422-443.

[12] Kadomtsev, B.B. and Petviashvili, V.I., 1970. The stability of solitary waves in weakly dispersive media, *Dokl. Akad. Nauk SSR.*, **192**, 753-756.

[13] Grimshaw, R.H.J. and Pullin, D.I., 1985. Stability of finite-amplitude interfacial waves. Part1. Modulational instability for small-amplitude waves, *J.Fluid Mech.*, **160**, 297-315.

[14] Pouget, J., Remoissenet, M. and Tamga, J.M., 1993. Energy self-localization and gap local pulses in a two-dimensional nonlinear lattice, *Phys. Rev. B*, **47**, 14866-14874.

[**15**] Collet, B. and Pouget, J., 1998. Two-dimensional modulation and instabilities of flexural waves of a thin plate on nonlinear elastic foundation, *Wave Motion*, **27**, 341-354.

[**16**] Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., 1964. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids -I, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 189-203.

[**17**] Suhubi, E.S. and Eringen, A.C., 1964. Nonlinear theory of micro-elastic solids -II, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 389-404.

[**18**] Erofeyev,V.I. and Potapov, A.I., 1989. Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure, in *Nonlinear World*, pp. 1197-1215, Ed. Bar'yakhtar, V.G., *et. al.* World Scientific, Singapore.

[**19**] Erofeyev, V.I. and Potapov, A.I., 1993. Longitudinal strain waves in non-linearly-elastic media with couple stresses, *Int. J. Non-Linear Mechanics* , **28**, 483-488.

[**20**] Erbay, S. and Şuhubi, E.S., 1989. Nonlinear wave propagation in micropolar media-I. The general theory, *Int. J. Engng. Sci.*, **27**, 895-914.

[**21**] Erbay, H.A., 1998. Nonlinear transverse waves in a generalised elastic solid and the complex modified Korteweg-de Vries equation, *Physica Scripta*, **58**, 9-14.

[**22**] Erbay, S., 1999. Coupled modified Kadomtsev-Petviashvili equations in dispersive elastic media, *Int.J.Non-Linear Mechanics*, **34**, 289-297.

[**23**] Konopelchenko, B.G. and Dubrovsky, V.G., 1984. Some new integrable nonlinear evolution equations in 2+1 dimensions, *Phys. Lett.*, **102A**, 15-17.

[**24**] Tratnik, M.V. and Sipe, J. E., 1988. Bound solitary waves in a birefringent optical fiber, *Phys. Rev.*, **A38**, 2011-2017.

[**25**] David,D. and Tratnik, M.V., 1991. Polarization modulated solitary waves in an optical fiber, *Physica*, **D**, 308-315.

[**26**] Bryd, P.F. and Friedman, M.D., 1971. Handbook of Eliptic Integrals for Engineers and Scientists. Springer-Verlag, New York.

[**27**] Erbay, S., Erbay, H.A. and Dost, S., 1991. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media-I. Longitudinal waves, *Int. J. Engng. Sci.*, **29**, 845-858.

[**28**] Erbay, H.A., Erbay, S. and Dost, S., 1991. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media-II. Transverse waves, *Int. J.Engng. Sci.*, **29**, 859-868.

[**29**] Benney, D.J., 1977. A general theory for interaction between short and long waves, *Studies Appl. Math.*, **56**, 81-94.

[30] Erbay, S., 1999. Nonlinear interaction between long and short waves in a generalized elastic solid, *Chaos, Solitons & Fractals*, (baskıda).

[31] Mel'nikov, V.K., 1983. On equations for wave interactions, *Lett. Math. Phys.* **7**, 129-136.

[32] Mel'nikov, V.K., 1987. Reflection of waves in nonlinear integrable systems, *J. Math. Phys.* **28**, 2603-2609.

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğretimini Pangaltı Lisesi'nin ilk kısmında, ortaokul ve lise eğitimini Beyoğlu Anadolu Lisesi'nde, yüksek öğrenimini ise 1993-1997 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde lisans üstü eğitimine başladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı, halen bu göreve devam etmektedir.