

TOPLANABİLME METOTLARININ DENKLİKLERİ

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**Tezi Hazırlayan
F. Berna AKPINAR**

109527

**Tez Yöneticisi
Yrd. Doç. Dr. Hikmet SEYHAN ÖZARSLAN**

109527

**Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü' ne
Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi Olarak
Sunulmuştur.**

**Temmuz 2001
KAYSERİ**

Erciyes Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

.16../07../2001

Başkan: Prof. Dr. Hüseyin BOR
Üye : Doç. Dr. Himmət. CAN
Üye : Doç. Dr. Hikmet. ÖZARSLAN
.....
.....

Onay :

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım

20 AĞUSTOS 2001

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ✓

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : F.Berna AKPINAR
Baba Adı : Burhanettin
Ana Adı : Zeynep
Doğum Yeri : Kayseri
Doğum Tarihi : 19.03.1978

İlk ve orta öğrenimini Kayseri’ de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nden lisans diploması olarak 1999 yılında mezun oldu. 22.03.2001 tarihinde Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü “ Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi ” Anabilim Dalı’ na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü’ nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Adres: Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, KAYSERİ

TEŐEKKÜR

Bu alıŐma konusunu bana veren, çalıŐmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Hikmet SEYHAN ÖZARSLAN' a ve manevi destekleri için aileme sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

F. Berna AKPINAR

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı. İkinci bölümde, bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotları ile $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ ve $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ toplanabilme metotlarının denklikleri için gerek ve yeter şartları içeren iki teorem ifade ve ispat edildi. Dördüncü bölümde, ikinci bölümde verilen Teorem 2.26 ve Teorem 2.27 yi genelleştiren iki teorem ifade ve ispat edildi.

ABSTRACT

This thesis consist of four chapters: In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis. In the second chapter, some basic definitions and theorems are given. In the third chapter, two theorems are stated and proved for the equivalence of $|R, p_n|_k$, $|R, q_n|_k$ summability methods and $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$, $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ summability methods. In the fourth chapter two theorems, which generalize the Theorem 2.26 and Theorem 2.27 in the second chapter, are stated and proved.

SEMBOLLER

N : Doğal Sayılar Cümlesi

$\sum a_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

(s_n) : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini kısmi toplamlar dizisi

$s_n = O(1)$: (s_n) dizisi sınırlı

İÇİNDEKİLER

| | <u>SAYFA</u> |
|---|--------------|
| 1. GİRİŞ..... | 1 |
| 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER..... | 2 |
| 3. $ R, p_n _k$, $ R, q_n _k$, $\varphi - R, p_n; \delta _k$ ve $\varphi - R, q_n; \delta _k$ TOPLANABİLME METOTLARI İLE İLGİLİ TEOREMLER..... | 13 |
| 4. $ R, p_n; \delta _k$ ve $ C, \alpha; \delta _k$ TOPLANABİLME METOTLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ..... | 25 |
| 5. KAYNAKLAR..... | 32 |

BÖLÜM I

GİRİŞ

Son zamanlarda “bazı şartlar altında toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler”, farklı matematikçiler tarafından incelenmiş ve bunlardan bir takım sonuçlar elde edilmiştir.

Biz bu çalışmamızda $|R, p_n|_k$, $|R, q_n|_k$ ve $|C, \alpha|_k$ toplanabilme metotları için yapılan çalışmaları $|R, p_n; \delta|_k$, $|C, \alpha; \delta|_k$, $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ ve $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ metotları için en genel şekilde ele alarak, hangi şartlar altında birinin diğerini gerektirdiğini inceledik.

BÖLÜM II

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım ve teoremleri vererek işe başlayacağız.

Aksi bir şey söylenmedikçe (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n) ,

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (P_{-i} = p_{-i} = 0, \quad i \geq 1)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

TANIM 2.1. (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (u_n) de 1-inci mertebeden Cesàro ortalamasını göstersiz. Yani

$$u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \tag{2.1}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(C,1)$ toplanabilir denir.

TANIM 2.2. (u_n) , (2.1) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \quad (2.2)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilir denir [6].

TANIM 2.3. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \quad (2.3)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilir denir [7].

Özel olarak, (2.3) de $k = 1$ alırsak, $|C,1|$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.4. (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\alpha > -1$ olmak üzere u_n^α ve t_n^α sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizisinin α -ıncı mertebeden n -inci Cesàro ortalamasını gösterebilirler. Yani

$$u_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\alpha-1} s_v \quad (2.4)$$

$$t_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \quad (2.5)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^\alpha = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C, α) toplanabilir denir. Burada

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha), \quad \alpha > -1, \quad A_0^\alpha = 1, \quad n > 0, \quad A_{-n}^\alpha = 0 \quad (2.6)$$

dır [10].

TANIM 2.5. (u_n^α) , (1.4) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer $\alpha > -1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha| < \infty \quad (2.7)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|$ toplanabilir denir [6].

TANIM 2.6. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha|^k < \infty \quad (2.8)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilir denir [7].

Burada $t_n^\alpha = n(u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha)$ ([13]) olduğundan (2.8) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |t_n^\alpha|^k < \infty$$

şeklinde yazılabilir.

TANIM 2.7. $\delta \geq 0$, $\alpha > -1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k-1} |t_n^\alpha|^k < \infty \quad (2.9)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [8].

Özel olarak (2.9) da $\delta = 0$ alırsak, $|C, \alpha|_k$ toplanabilmeyi ve yine (2.9) da $\delta = 0$ ve $\alpha = 1$ alırsak $|C, 1|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.8. (p_n) ,

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve (T_n) de diziden diziye (R, p_n) ortalamasını gösterebilir. Yani

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.11)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (R, p_n) toplanabilirdir denir [9].

TANIM 2.9. (T_n) , (2.11) deki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n - T_{n-1}| < \infty \quad (2.12)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|$ toplanabilirdir denir [19].

TANIM 2.10. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (2.13)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [2].

TANIM 2.11. $\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k + k - 1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (2.14)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|R, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [3].

Özel olarak, (2.14) de $\delta = 0$ alırsak, $|R, p_n|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.12. (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve (φ_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k + k - 1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (2.15)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [16].

TANIM 2.13. (p_n) , (2.10) da ki gibi tanımlanmak üzere pozitif sayıların bir dizisi ve (t_n) de diziden diziye Riesz veya kısaca (\bar{N}, p_n) ortalamasını gösterebilir. Yani

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.16)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine Riesz veya kısaca (\bar{N}, p_n) toplanabilir denir [9].

(\bar{N}, p_n) metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır [15].

TANIM 2.14. (t_n) , (2.16) daki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty \quad (2.17)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilir denir [12].

TANIM 2.15. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \quad (2.18)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir denir [1].

Özel olarak, (2.18) de $\forall n \in N$ için $p_n = 1$ alırsak, $|C,1|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz.

TANIM 2.16. A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. A toplanabilen her dizi aynı değere B toplanabiliyorsa, A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, A metodu B metoduna denktir denir [15].

TANIM 2.17. Bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir B toplama metodu yardımıyla toplanabiliyorsa, (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin B metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [10].

TANIM 2.18. F reel veya kompleks sayıların bir cismi ve $v, n = 0, 1, 2, \dots$ için $a_{mv} \in F$ olmak üzere bir $A = (a_{mv})$ sonsuz matrisi ve (s_n) de F de bir dizi olsun. Bu taktirde (s_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{mv} s_v \quad (2.19)$$

olarak tanımlansın. (t_n) dizisine, (s_n) dizisinin A dönüşüm dizisi denir ve A ya da diziden diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olması için (2.19) daki sonsuz toplamın her n için yakınsak olması gerekir.

TANIM 2.19. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $A = (a_{mv})$ matrisi yardımıyla (t_n) dönüşüm dizisi, (2.19) daki şekilde tanımlansın.

Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$$

ise $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine A toplanabilir denir.

TANIM 2.20. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $A = (a_{mn})$ matrisi yardımıyla (t_n) dönüşüm dizisi, (2.19) daki şekilde tanımlansın. Eğer $(t_n) \in BV$ ise $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine mutlak A toplanabilir ya da $|A|$ toplanabilirdir denir [13].

Eğer $\sum a_n$ serisi $|A|$ toplanabilirse $\sum a_n \in |A|$ veya $(s_n) \in |A|$ sembollerinden biri ile gösterilir.

TANIM 2.21. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $A = (a_{mn})$ matrisi yardımıyla (t_n) dönüşüm dizisi, (2.19) daki şekilde tanımlansın. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (2.20)$$

ise, $\sum a_n$ serisine $|A|_k$ toplanabilir denir. $k=1$ özel durumunda $|A|_k$ toplanabilirlik $|A|$ toplanabilirlikle aynıdır [13].

TANIM 2.22. Hepsi birden sıfır olmayan non-negatif reel sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun. $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $p_0 \geq 0, (n=0,1,2,\dots)$ olmak üzere bir (s_n) dizisinden (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.21)$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması ya da Riesz dönüşümü denir ve kısaca (R, p_n) ortalaması denir [13].

(p_n) ve (P_n) dizileri için (2.20) ile ifade edilen dönüşümün matris elemanları

$$a_{mv} = \begin{cases} \frac{p_v}{P_n}, & v \leq n \\ 0, & v > n \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilir [13].

TANIM 2.23. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q} \quad (2.23)$$

dur [11].

TANIM 2.24. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \quad (2.24)$$

dır [11].

Şimdi, birinci bölümün son kısmında konumuzla ilgili teoremlerin sadece ifadelerini vermekle yetineceğiz.

TEOREM 2.25. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler olsun. $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilen her serinin $|\bar{N}, q_n|$ toplanabilir olması için

$$\frac{q_n}{Q_n} \leq K \frac{P_n}{P_n} \quad (2.25)$$

şartının sağlanabilmesi gereklidir [5][19].

TEOREM 2.26. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $k \geq 1$ olsun. $|R, p_n|$ toplanabilen her serinin $|R, q_n|$ toplanabilir olması için

$$\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} = O(1) \quad (2.26)$$

şartının sağlanması gereklidir. Eğer

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}} = O\left\{ \frac{v^{k-1} q_v^{k-1}}{Q_v^k} \right\} \quad (2.27)$$

şartı da sağlanıyorsa (2.26) şartı aynı zamanda yeterlidir [2].

TEOREM 2.27. $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ olsun. (p_n)

$$P_n = O(n^\alpha p_n), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.28)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilir ise, bu takdirde bu seri $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir [4].

TEOREM 2.28. $k \geq 1$, $\alpha \geq 1$ olsun. (p_n)

$$P_n = O(np_n), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilir ise, bu takdirde bu seri $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir [4].

LEMMA 2.29. $k \geq 1$ ve $A = (a_{nv})$ sonsuz bir matris olsun. $A \in (I^k, I^k)$ olması için gerek ve yeter şart, tüm $n, v \geq 0$ için

$$a_{nv} = O(1) \quad (2.30)$$

olmalıdır [2].

LEMMA 2.30. Eğer $\alpha > \beta > 0$ ise, bu takdirde

$$\sum_{n=v+1}^m \frac{A_{n-v}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = \sum_{n=v+1}^m \frac{(n-v)^{\beta-1}}{n^\alpha} = O(v^{\beta-\alpha}), m \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

dır [18].

BÖLÜM III

Bu bölümde ilk olarak $k \geq 1$ olmak üzere (p_n) ve (q_n) dizileri için $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotlarının denkliği için yeterli şartları veren bir teorem ifade ve ispat edilecektir. Bunun için [5], [19] sonuçları $k > 1$ şartına genişletilecektir. Diğer teoremimizde ise $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ ve $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ toplanabilme metotlarının denk olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilerek bu şartlar için ispat yapılacaktır.

TEOREM 3.1. (p_n) ve (q_n)

(i) $nq_n = O(Q_n)$

(ii) $P_n = O(np_n)$

(iii) $Q_n = O(nq_n)$

şartlarını sağlayan pozitif diziler olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilir ise, bu takdirde $|R, q_n|_k$ toplanabilirdir ([14]).

İSPAT: $\sum a_n$ serisinin (R, p_n) ortalaması T_n olsun. Bu takdirde

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v \quad (3.1)$$

elde ederiz. $\sum a_n$ serisinin $|R, p_n|_k$ toplanabilir olması demek (2.13) şartının sağlanması

demektir. Diğer taraftan $n \geq 1$ ve $\Delta T_{n-1} = T_0 = a_0$ olmak üzere

$$\Delta T_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \quad (3.2)$$

olduğundan (3.2) de n yerine $n-1$ alırsak,

$$\Delta T_{n-2} = -\frac{P_{n-1}}{P_{n-1} P_{n-2}} \sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v$$

bulunur. Buradan da

$$a_n = \frac{P_n}{P_n} \Delta T_{n-1} - \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta T_{n-2} \quad (3.3)$$

elde ederiz. Eğer $\sum a_n$ serisinin (R, q_n) ortalaması (t_n) ise, benzer olarak

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n (Q_n - Q_{v-1}) a_v \quad (3.4)$$

elde ederiz. Böylece (3.2) deki düşüncüyü kullanarak

$$\Delta t_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} a_v \quad (3.5)$$

buluruz. (3.3) de elde ettiğimiz a_v değerini (3.5) de yerine yazarsak,

$$\Delta t_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \left\{ \frac{P_v}{P_v} \Delta T_{v-1} - \frac{P_{v-2}}{P_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n P_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v} \Delta T_{v-1} \\
&= \frac{q_n P_n}{P_n Q_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{v-1}}{p_v} (Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1})
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1} &= Q_{v-1} P_v - Q_v (P_v - p_v) \\
&= Q_{v-1} P_v - P_v Q_v + Q_v p_v \\
&= (Q_{v-1} - Q_v) P_v + p_v Q_v \\
&= -q_v P_v + p_v Q_v
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\Delta t_{n-1} &= \frac{q_n P_n}{P_n Q_n} \Delta T_{n-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} q_v \Delta T_{v-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \Delta T_{v-1} \\
&= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}
\end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için $k > 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak,
 $i = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^m n^{k-1} |t_{n,i}|^k < \infty, \quad m \rightarrow \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak Teorem 3.1 in (i) ve (ii) şartları ve (2.13) şartından

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n^{k-1} |t_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \frac{q_n P_n}{p_n Q_n} \Delta T_{n-1} \right|^k \\ &\leq O(1) \sum_{n=1}^m n^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. $i=2$ için Teorem 3.1 in (i), (ii) şartlarından ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |t_{n,2}|^k &\leq \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \right)^{k-1} \\ &= O(1) \left\{ \frac{1}{n^{k-1}} \cdot \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Yine (2.13), (i) ve (ii) şartlarından

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} n^{k-1} |t_{n,2}|^k &= O(1) \left\{ \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\ &= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m v^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $i = 3$ için

$$\sum_{v=1}^{n-1} Q_v |\Delta T_{v-1}| = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v}{q_v} |\Delta T_{v-1}| q_v$$

yazabiliriz. Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
|t_{n,3}|^k &\leq \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \right)^{k-1} \\
&= O(1) \left\{ \frac{1}{n^{k-1}} \cdot \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yine (iii) ve (2.13) şartlarından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} n^{k-1} |t_{n,3}|^k &= O(1) \left\{ \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^m v^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $i = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^m n^{k-1} |t_{n,i}|^k < \infty, \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. Teorem 3.1 deki (p_n) ve (q_n) dizilerinin rollerini değiştirecek aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

TEOREM 3.2. Teorem 3.1 in (ii) ve (iii) şartları sağlansın ve

$$(iv) \quad np_n = O(P_n)$$

olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer $\sum a_n$ serisi $|R, q_n|_k$ toplanabilir ise bu takdirde bu seri $|R, p_n|_k$ toplanabilirdir.

TEOREM 3.3. (p_n) ve (q_n)

$$(i) \quad nq_n = O(Q_n)$$

$$(ii) \quad P_n = O(np_n)$$

$$(iii) \quad Q_n = O(nq_n)$$

$$(iv) \quad np_n = O(P_n)$$

şartlarını sağlayan pozitif diziler olsun $k \geq 1$ olmak üzere $|R, p_n|_k$ toplanabilme $|R, q_n|_k$ toplanabilmeye denktir. Yani

$$|R, p_n|_k \equiv |R, q_n|_k$$

dır. Eğer her n için $p_n = 1$ alırsak $P_n = n$ olur. Bu durumda $|R, p_n|_k$ toplanabilme $|C, 1|_k$ toplanabilmeye indirgenir.

SONUÇ 3.4. (q_n) pozitif dizisi

$$(i) \quad nq_n = O(Q_n),$$

$$(ii) \quad Q_n = O(nq_n)$$

şartlarını sağlasın. Böylece $k \geq 1$ olmak üzere $|R, q_n|_k$ toplanabilmesi, $|C, 1|_k$ toplanabilmesine denktir. Yani

$$|R, q_n|_k \equiv |C, 1|_k$$

TEOREM 3.5. (φ_n) pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{\varphi_n^{\delta k + k - 1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} = O \left\{ \varphi_v^{\delta k + k - 1} \frac{q_v^{k-1}}{Q_v^k} \right\} \quad (3.6)$$

olsun. $k > 1$ ve $0 \leq \delta k < 1$ olmak üzere $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ toplanabilen her serinin $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$

toplanabilir olması için (2.26) şartının sağlanması gereklidir. Eğer

$$p_n Q_n = O(P_n q_n) \quad (3.7)$$

şartı da sağlanıyorsa, (2.26) şartı aynı zamanda yeterlidir ([16]).

TEOREMİN İSPATI:

YETERLİLİK: $\sum a_n$ serisinin (R, p_n) ortalaması T_n olsun. Bu takdirde

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v \quad (3.8)$$

elde ederiz. $\sum a_n$ serisinin $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ toplanabilir olması demek,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta k + k - 1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty \quad (3.9)$$

olmasıdır. Diğer taraftan

$$\Delta T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v, \quad n \geq 1, \quad (P_{-1} = 0) \quad (3.10)$$

dır. Eğer $\sum a_n$ serisinin (R, q_n) ortalaması t_n ise, benzer olarak

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n (Q_n - Q_{v-1}) a_v \quad (3.11)$$

elde ederiz. Böylece (3.10) daki benzer düşüncüyü kullanarak,

$$\Delta t_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} a_v, \quad n \geq 1, \quad (Q_{-1} = 0) \quad (3.12)$$

elde ederiz. (3.4) de elde ettiğimiz a_v değerini (3.12) de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \\ &= \frac{q_n P_n}{Q_n P_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v} \Delta T_{v-1} \\ &= \frac{q_n P_n}{p_n Q_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{v-1}}{p_v} (Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1} &= Q_{v-1} P_v - Q_v (P_v - p_v) \\ &= Q_{v-1} P_v - P_v Q_v + Q_v p_v \\ &= (Q_{v-1} - Q_v) P_v + p_v Q_v \\ &= -q_v P_v + p_v Q_v \end{aligned}$$

yazabiliriz. (3.7) den dolayı $Q_v p_v = O(q_v P_v)$ olduğundan

$$Q_{v-1}P_v - Q_vP_{v-1} = O(q_vP_v)$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= \frac{P_n q_n}{P_n Q_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} q_v \Delta T_{v-1} \\ &= t_{n,1} + t_{n,2} \end{aligned}$$

bulunur. Teoremin yeterliliğini göstermek için $k \geq 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, $r = 1, 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} |t_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek kafidir. İlk olarak (2.26) den dolayı $q_n P_n = O(Q_n P_n)$ olduğundan ve (3.9) dan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} |t_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} \left| \frac{P_n q_n}{Q_n P_n} \Delta T_{n-1} \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} |\Delta T_{n-1}|^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi de $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} |t_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} \left| \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} q_v \Delta T_{v-1} \right|^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} q_v \Delta T_{v-1} \right|^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} q_v |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \times \left\{ \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{\varphi_n^{\delta_{k+k-1}} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.6), (3.7) ve (3.9) gereğince

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \varphi_v^{\delta_{k+k-1}} \frac{q_v^{k-1}}{Q_v^k} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \varphi_v^{\delta_{k+k-1}} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $r = 1, 2$ için

$$\sum_{n=1}^m \varphi_n^{\delta_{k+k-1}} |t_{n,r}|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu ise teoremin yeterliliğinin ispatını verir.

GEREKLİLİK: Gerekliliğin ispatı için (2.11) in seriden seriye dönüşümünü ve $n \geq 1$ için (3.10) ve (3.12) ifadelerini göz önüne alalım. $n \geq 1$ için yeterliliğin ispatında hesapladığımız gibi

$$\Delta t_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{v-1}}{P_v} (Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v) + \frac{q_n P_n}{P_n Q_n} \Delta T_{n-1} \quad (3.13)$$

dır. Buradan $\left(\varphi_n^{\delta k + k - 1/k} \Delta T_{n-1} \right)$ den $\left(\varphi_n^{\delta k + k - 1/k} \Delta t_{n-1} \right)$ içine matris dönüşümünü yazabiliriz.

Böylece $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ toplanabilen her serinin $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ toplanabilir olması demek, $A \in (l^k, l^k)$ olması demektir. Lemma (2.30) dan dolayı $\varphi - |R, p_n; \delta|_k$ toplanabilen her serinin $\varphi - |R, q_n; \delta|_k$ toplanabilir olması için gerekli şart, A matrisinin elemanlarının sınırlı olmasıdır. Özel olarak, bunun diagonal elemanlarının sınırlı olması gerekir. Bu da bize (3.7) şartının gerekliğini verir.

BÖLÜM IV

Bu bölümde amacımız $|R, p_n; \delta|_k$ ve $|C, \alpha; \delta|_k$ toplanabilme metotları için verilen teoremleri genelleştirmektir.

TEOREM 4.1. $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$ ve $0 \leq \delta k < 1$ olsun. (p_n) , Teorem 2.26'nin (2.28) şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|R, p_n; \delta|_k$ toplanabilirse, bu takdirde bu seri $|C, \alpha; \delta|_k$ toplanabilirdir ([17]).

TEOREM 4.2. $k \geq 1$, $\alpha \geq 1$ ve $0 \leq \delta k < 1$ olsun. (p_n) , Teorem 2.27'nin (2.29) şartını sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|R, p_n; \delta|_k$ toplanabilirse, bu takdirde bu seri $|C, \alpha; \delta|_k$ toplanabilirdir ([17]).

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'de $\delta = 0$ alırsak; Teorem 2.26 ve Teorem 2.27'yi elde ederiz.

TEOREM 4.1 İN İSPATI:

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere t_n^α , (na_n) dizisinin n-inci Cesàro ortalamasını gösterebiliriz. (3.3) den

$$\alpha_n = -\frac{P_n}{P_n} \Delta T_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta T_{n-2} \quad (4.1)$$

dir. (2.5) de (4.1) i yerine yazarsak

$$\begin{aligned} t_n^\alpha &= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\alpha-1} \quad v \left\{ -\frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{P_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\} \\ &= -\frac{n P_n}{P_n A_n^\alpha} \Delta T_{n-1} - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} v A_{n-v}^{\alpha-1} \frac{P_v}{P_v} \Delta T_{v-1} + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^n v A_{n-v}^{\alpha-1} \frac{P_{v-2}}{P_{v-1}} \Delta T_{v-1} \\ &= -\frac{n P_n}{P_n A_n^\alpha} \Delta T_{n-1} + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{P_v} \Delta T_{v-1} \left\{ -v P_v A_{n-v}^{\alpha-1} + (v+1) A_{n-v-1}^{\alpha-1} P_{v-1} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$-v P_v A_{n-v}^{\alpha-1} + (v+1) A_{n-v-1}^{\alpha-1} P_{v-1} = -v P_v \Delta_v A_{n-v}^{\alpha-1} - v p_v A_{n-v-1}^{\alpha-1} + P_{v-1} A_{n-v-1}^{\alpha-1},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} t_n^\alpha &= -\frac{n P_n}{P_n A_n^\alpha} \Delta T_{n-1} - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} v \frac{P_v}{P_v} \Delta_v A_{n-v}^{\alpha-1} \Delta T_{v-1} - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} v A_{n-v-1}^{\alpha-1} \Delta T_{v-1} + \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-v-1}^{\alpha-1} \Delta T_{v-1} \\ &= t_{n,1}^\alpha + t_{n,2}^\alpha + t_{n,3}^\alpha + t_{n,4}^\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için $k \geq 1$ olmak üzere Minkowski Eşitsizliğinden yararlanarak, $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^m n^{\delta k-1} |t_{n,r}^\alpha|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1 in hipotezinden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m n^{\delta k-1} |t_{n,1}^\alpha|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m n^{\delta k+k-1} \left(\frac{P_n}{n^\alpha p_n} \right)^k |\Delta T_{n-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m n^{\delta k+k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. $P_n = O(n^\alpha p_n)$ olması, $0 < \alpha < 1$ için $P_n = O(np_n)$ olmasını gerektirir. $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği ve Teorem 4.1 in hipotezinden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k-1} |t_{n,2}^\alpha|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k-1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v \frac{P_v}{P_v} |\Delta_v A_{n-v}^{\alpha-1}| |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k - \delta k + 1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k (n-v)^{\alpha-2} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} (n-v)^{\alpha-2} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k - \delta k + 1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k (n-v)^{\alpha-2} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{(n-v)^{\alpha-2}}{n^{\alpha k - \delta k + 1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\Delta T_{v-1}|^k v^{\delta k - \alpha k - 1} \sum_{n=v+1}^{m+1} (n-v)^{\alpha-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{v^\alpha p_v} \right)^k v^{\delta k + k - 1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{\delta k + k - 1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yine Teorem 4.1 in hipotezi ve Lemma 2.30 gereğince

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k - 1} |t_{n,3}^\alpha|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k - 1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v A_{n-v}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k - 1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v A_{n-v}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k - 1 - \alpha} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^k A_{n-v}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \left\{ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} A_{n-v}^{\alpha-1} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{(n-v)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1-\delta k}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^k v^{\delta k - 1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{\delta k + k - 1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak, yine Teorem 4.1 in hipotezi ve Lemma 2.30 gereğince

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k-1} |t_{n,4}^\alpha|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k-1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-v-1}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k-1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} A_{n-v}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k-1}}{A_n^\alpha} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k A_{n-v}^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \left\{ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} A_{n-v}^{\alpha-1} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k-1-\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k (n-v)^{\alpha-1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{(n-v)^{\alpha-1}}{n^{\alpha+1-\delta k}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k v^{\delta k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{\delta k+k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\sum_{n=1}^m n^{\delta k-1} |t_{n,r}^\alpha|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

TEOREM 4.2 NİN İSPATI:

$\alpha = 1$ olma durumu açıktır. $\alpha > 1$ durumunu göz önüne alalım. Diğer durumlar Teorem 4.1 deki benzer olduğundan, sadece $r = 1, 2$ için

$$\sum_{n=1}^m n^{\delta k - 1} |t_{n,r}^\alpha|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. İlk olarak, $P_n = O(np_n)$ olması, $\alpha \geq 1$ için $P_n = O(n^\alpha p_n)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n^{\delta k - 1} |t_{n,1}^\alpha|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m n^{\delta k + k - 1} \left(\frac{P_n}{n^\alpha p_n} \right)^k |\Delta T_{n-1}|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m n^{\delta k + k - 1} |\Delta T_{n-1}|^k \\ &= O(1), \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer $\alpha = 1$ ise bu takdirde $\Delta_v A_{n-v}^{\alpha-1} = 0$ dir. Böylece $t_{n,2}^\alpha = 0$ dir. Buna göre $\alpha > 1$ durumunu göz önüne alalım. (2.29), (2.31) şartlarından ve

$$\sum_{v=1}^{n-1} (n-v)^{\alpha-2} = O(1) \int_1^{n-1} (n-x)^{\alpha-2} dx = O(n^{\alpha-1}),$$

olduğundan $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} n^{\delta k-1} |t_{n,2}^\alpha|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{n^{\delta k-1}}{(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v \frac{P_v}{P_v} |\Delta_v A_{n-v}^{\alpha-1}| |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k - \delta k + 1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k (n-v)^{\alpha-2} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} (n-v)^{\alpha-2} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{\alpha k - \delta k + 1}} \sum_{v=1}^{n-1} v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k (n-v)^{\alpha-2} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{(n-v)^{\alpha-2}}{n^{\alpha+k-\delta k}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{\delta k-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{\delta k+k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $r = 1, 2$ için,

$$\sum_{n=1}^m n^{\delta k-1} |t_{n,r}^\alpha|^k = O(1), \quad m \rightarrow \infty$$

bulunur. Bu da teoremi ispatlar.

KAYNAKLAR

- [1]. H. Bor, On $\left| \overline{N}, p_n \right|_k$ Summability Factors of Infinite Series, Tamkang J. Math., 16, 13-20 (1985).
- [2]. H. Bor, On the Relative Strength of two Absolute Summability Methods, Proc. Amer. Math. Soc., 113, 1009-1012, (1991).
- [3]. H. Bor, A Note on two Absolute Summability Methods, Proc. Indian Acad. Sci., 102, 125-128, (1992).
- [4]. H. Bor and M. A. Sarıgöl, On two Summability Methods, Math. Slovaca 43, 317-325, (1993).
- [5]. L. S. Bosanquet, Mathematical Reviews, 2, 654, (1950).
- [6]. M. Fekete, Zur Theorie der Divergenten Reihen, Math. És Termesz. Értesítő (Budapest) 29, 719-726 (1911).
- [7]. T. M. Fleet, On an Extension of Absolute Summability and Some Theorems of Littlewood and Paley, Proc. London Math. Soc. 7, 113-141 (1957).
- [8]. T. M. Fleet, Some More Theorems Concerning the Absolute Summability of Fourier Series, Proc. London Math. Soc. 8, 357 (1958).
- [9]. G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford (1949).
- [10]. N. Kishore and G. C. Hotta, On $\left| \overline{N}, p_n \right|$ Summability Factors, Acta Sci. Mat. (Szeged), 31, 9-12 (1970).
- [11]. I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press (1970).
- [12]. S. M. Mazhar, On the Summability Factors of Infinite Series, Publ. Math

- (Debrecen), 13, 229-236 (1966).
- [13]. C. Orhan, On Absolute Summability. *Bull. Inst. Math. Academia Sinica* 15, 433-437 (1987).
- [14]. C. Orhan, On Equivalence of Summability Methods, *Math. Slovaca* 40, 2, 171-175 (1990).
- [15]. G. M. Peterson, *Regular Matrix Transformations* Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London (1966).
- [16]. H. Seyhan, A Note on Relative Strength of Two Absolute Summability Methods, *J. Analysis* 6, 7-11 (1999).
- [17]. H. Seyhan, A Note on Summability Methods, *Math. Slovaca*, 49, 2, 201-208 (1999).
- [18]. W. T. Sulaiman, A Study on a Relation Between two Summability Methods, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115, 303-312 (1992).
- [19]. G. Sunouchi, Notes on Fourier Analysis XVIII Absolute Summability of Series with Constant Terms, *Tohoku Math. J.*, 2, 57-65 (1949)
- [20]. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol I, Cambridge Univ. Press (1959)