

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRSEL SÜPERSİMETRİ GRUPLARI VE CEBİRLERİ

Yasemen UÇAN

105969

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. İsmail Hakkı DURU

TC YÖKTEKİTİM KURULU
DOKÜMAN YASAK MERKEZİ

2001, EDİRNE

105969

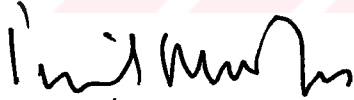
T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRSEL SÜPERSİMETRİ GRUPLARI VE CEBİRLERİ

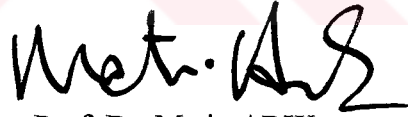
Yasemen UÇAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 6 / 8 / 2001 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.



Prof. Dr. İsmail Hakkı DURU
(Danışman)



Prof. Dr. Metin ARIK
(Üye)



Prof. Dr. Yılmaz Asad VERDİYEV
(Üye)

ÖZET

Bir Lie cebirinin n .kökü ve duali (yani Kesirsel süpergrup) S_n permütasyon grubu üzerinde tanımlanan invaryant formlar üzerine kuruldu. Kesirsel süperuzaylarda $S_3 - graded\ sl(2)$ ve Virasoro cebirleri ve onların temsilleri oluşturuldu. Bu çalışmanın planı aşağıdaki gibidir:

Birinci bölümde bu çalışmanın akla yatkın bir oluşumu içerdiği anlatıldı, ikinci bölümde supercebirler ve grupların formülasyonlarını Hopf cebiri formalizminde verdik. Üçüncü bölümde Kesirsel süpercebirleri ve onların duallerini (Kesirsel süpergruplarını) tanımladık. Dördüncü bölümde örnekler verildi ($S_3 - graded\ sl(2)$ ve Virasoro cebirleri ve onların Kesirsel süperuzay'larda tanımlarını verdik).



SUMMARY

n^{th} root of a Lie algebra and its dual (that is Fractional supergroup) based on the permutation group S_n invariant forms is defined. $S_3 - \text{graded } sl(2)$ and Virasoro algebras and their representations in fractional superspaces are constructed explicitly. The plan of this study is as followed:

In section 1, to make the treatment reasonably self consistent. In section 2 we give a formulation of super algebras and groups in the Hopf algebra formalism. In section 3 we define fractional super algebras and discuss the structure of their dual (Fractional supergroups). In section 4 we give the examples: We define $S_3 - \text{graded } sl(2)$ and Virasoro algebras and give their realizations in fractional superspaces.

ÖNSÖZ

Çalışmalarımı her zaman destekleyen, görüşleri ile yardımcı olan değerli hocam sayın Prof. Dr. İsmail Hakkı DURU'ya saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Aynı zamanda bana kendisi ile çalışma olanağı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Haji AHMEDOV'a ve her zaman yanımda olan biricik babama saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Yasemen UÇAN



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
1. GİRİŞ	1
2. SÜPERCEBİRLER VE SÜPERGRUPLAR	4
3. KESİRSEL SÜPERCEBİRLER VE KESİRSEL SÜPERGRUPLAR	9
3.1. Kesirsel Süpercebirlere	9
3.2. Ko-cebir Yapısı İle Cebirin Tutarlılığı	10
3.3. Kesirsel Süper Jacobi Özdeşlikleri	13
3.4. S_n Kesirsel Süpercebir	19
3.5. Kesirsel Süpergruplar	21
4. ÖRNEKLER	25
4.1. $sl(2)$ Cebiri	25
4.1.1. $N = 1$ ya da $l = 0$ Durumu	26
4.1.2. $N = 2$ ya da $l = 1/2$ Durumu	26
4.1.3. $N = 3$ Durumu	32
4.2. Virasoro Cebiri	40
EK A	47
HOPF CEBİRLERİ	47
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

1. GİRİŞ

Poincare ve ayar simetri cebirlerini aşikar olmayan bir yolla birleştirmeyi denemek için, bilinen Lie cebiri yapısını genişletmek gereklidir. Kısaca bildiğimiz X_j (göz önüne aldığımız g cebirinin tabanı) elemanlarına aşağıdaki bağıntıları sağlayan yeni Q_α elemanlarını eklemek zorundayız. Bu elemanların sağladığı bağıntılar;

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = b'_{\alpha\beta} X_j \quad (1.1)$$

$$\{Q_\alpha, X_j\} = a^j_{\alpha\beta} Q_\beta \quad (1.2)$$

şeklinde verilir. Grup seviyesinde yukarıdaki değişiklik, grup parametresine

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0 \quad (1.3)$$

olacak şekilde θ_α grassmann değişkenlerini eklemek gerektiğini gösterir, (1.3)'den $\theta_\alpha^2 = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Tezin amacı $n > 2$ olduğu zaman $\theta_\alpha^n = 0$ durumunu gözönüne alarak, yukarıda açıkladığımız yapıyı genelleştirmektir. Bunun için (1.3)'deki antikomütatörün S_2 permütasyon veya Z_2 devirli simetri gruplarını kabul ettiği gözlemini kullanırız. Biz çalışmamızda S_n veya Z_n invaryant formlarını kullanacağız. Kolaylık olması için, incelememizi $n=3$ durumu ile sınırlayacağız. Bu durumda Z_3 invaryant formu;

$$Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma + Q_\gamma Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\gamma Q_\alpha = b^j_{\alpha\beta\gamma} X_j \quad (1.4)$$

ve S_3 invaryant formu;

$$Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \quad (1.5)$$

ile verilir.

$n > 2$ için S_n ve Z_n invaryant formlarının birbirinden farklı olduğunu görürüz. Bu durumda bilinen süpersimetriyi genelleştirmek için yukarıdaki formların hangisinin daha uygun olduğu sorusu ortaya çıkar. Bu soruyu cevaplamak için yapımızın sahip olması gereken tüm özellikleri gözönüne almalıyız. Bunun için süpercebirlere iki formülasyonu da kabul ettiğini belirtiriz. Bunlar bildiğimiz geometrik [3] ve cebirsel [4] formülasyonlardır. İlk durumda geometrik formülasyon, süper vektör uzayını ve süpercebirlere bildiğimiz Lie cebirine benzer bir yolla tanımlar. İkinci durumda Hopf cebiri formülasyonu kullanılır. Bu durumda Lie cebiri yerine evrensel zarf cebirleri kullanılır [6]. Maalesef geometrik yaklaşımın, $n > 2$ durumlarını incelemek için yeterli olmadığı görülmektedir. Bunun nedeni Q_α süper üreteçleri arasında bilineer (ikili) bağıntı olmamasıdır. $n=3$ için bütün ikili bağıntılar serbestir. Burada yalnızca üçlü bağıntılar mevcuttur. Bu nedenle Kesirsel süpersimetriyi oluşturmak için cebirsel yaklaşımı uyguluyoruz. Bu yapıda (1.4) ve (1.5) bağıntılarına ek olarak ko-cebir işlemlerini hepsi tutarlı olacak şekilde düzenlemeliyiz. Bu kısıtlama Kesirsel süpercebirlere için Z_n invaryant formu seçimini dışarıda bırakır. Gerçekten, $K Q_\alpha = q Q_\alpha K$, $q^n = 1$ olmak üzere

$$\Delta(Q_\alpha) = Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha \quad (1.6)$$

ko-çarpımı, S_n invaryant formu ile uyumlu fakat Z_n ile uyumlu değildir. İlk olarak [1,2]'de Kesirsel süpercebirlere formülasyonu için S_n invaryant formu kullanılmıştır. Geometrik yaklaşımı kullanan yazarlar bu yaklaşımın yetersiz olduğunu görmüşlerdir.

[7] ve [12] literatürlerinde Kesirsel süpersimetriye daha başka yaklaşımlar da vardır.Örneğin, [13]'de birimin köklerinde kuantum gruplarının kullanılması ile Kesirsel süpergruplar elde edilebilir.

Bu çalışmada , tezin planı aşağıdaki şekildedir. Temel materyalin tanıtımını anlaşılabilir hale getirmek için, 2. bölümde Hopf cebiri formülasyonunda Kesirsel süpercebirlere ve grupların temel tanım ve örnekleri verildi.3. bölümde, Hopf cebiri formülasyonu ve S_n invaryant formlarını kullanarak Kesirsel süpercebir ve grupları oluşturduk. 4. bölümde, Kesirsel süpercebir $sl(2)$ ve dualini ayrıntılı inceledik. Aynı zamanda süper Virasoro cebirini gözönüne aldık ve bunu bazı Kesirsel süperuzaylarda gerçekleştirdik.



2. SUPERCEBİRLER VE GRUPLAR

Sonraki bölümleri daha iyi anlayabilmek için, bu bölümde süpercebirlere ve süpergruplara Hopf cebiri formülasyonunda veriyoruz. Hopf cebirine aşina olmayan okuyucuya Ek-A da Hopf cebirinin genel tanım ve örnekleri verilmiştir [A-1].

Bildiğimiz gibi g Lie cebiri bir vektör uzayıdır ve bu uzayda Jacobi koşulunu sağlayan antisimetrik ikili(bilineer) form tanımlıdır. Eğer X_j , $j = 1, 2, \dots, N$ elemanları vektör uzayının taban elemanlarıysa $[\cdot, \cdot]$ ile gösterilen bilineer form kullanılır, yani

$$[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k \quad (2.1)$$

olur ve Jacobi koşulunu

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_i, X_j]] + [X_j, [X_k, X_i]] = 0 \quad (2.2)$$

verir. Şimdi X_j 'lerin bazı vektör uzayında operatörler olduğunu düşünelim. O halde bilineer form;

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i \quad (2.3)$$

antikomütatörü ile verilir. Yukarıdaki X_i ve X_j arasındaki çarpım bilinen operatör çarpımıdır. Bu durumda Jacobi koşulunun sağlandığı gösterilebilir. Otomatik olarak şimdi X_i ile üretilen polinomlar cebiri $U(g)$ ile gösterilir ve bu cebirde taban

$$X_{i_1}^{n_1} X_{i_2}^{n_2} \dots X_{i_N}^{n_N}, \quad i_r = 1, \dots, N, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots$$

ile verilir. Elde edilen $U(g)$ ye g Lie cebirinin evrensel zarf cebiri denir. Bu $U(g)$ cebirini Hopf cebiri yapısıyla donatabiliriz. Bunun için

$$\begin{aligned}\Delta: U(g) &\rightarrow U(g) \otimes U(g) \\ S: U(g) &\rightarrow U(g) \\ \varepsilon: U(g) &\rightarrow C\end{aligned}$$

şeklinde verilen ko-çarpım, antipod ve ko-birim aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$\begin{aligned}\Delta(X_j) &= X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j \\ S(X_j) &= -X_j \\ \varepsilon(X_j) &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Şimdi $U(g)$ 'yi üreten X_j elemanlarına

$$KQ_\alpha = -Q_\alpha K, K^2 = 1\tag{2.5}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{j=1}^{\dim(g)} b_{\alpha\beta}^j X_j\tag{2.6}$$

$$[Q_\alpha, X_j] = \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha j}^\beta Q_\beta\tag{2.7}$$

olacak şekilde yeni $Q_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ ve K ekleyelim. Böylece X_j, Q_α ve K ile üretilen yeni cebiri $U_2^N(g)$ ile gösteririz. (2.6) ve (2.7) bağıntılarındaki $a_{\alpha j}^\beta$ ve $b_{\alpha\beta}^j$ elemanları keyfi değerlerdir. Bu cebirin yani $U_2^N(g)$ 'nin birleşmeli (assosiyatif) olması için bu elemanlar üzerine bazı koşullar (Jacobi özdeşliğine benzeyen koşullar) koymalıyız. $\{ , \}$ antikomütatör ve $[,]$ komütatör arasında bazı özdeşlikler tanımlarız.

Bu özdeşlikler;

$$[X_i, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] + \{Q_\alpha, X_i\} Q_\beta + Q_\alpha, [Q_\beta, X_i] = 0 \quad (2.8)$$

$$[X_i, [X_j, Q_\alpha]] + [Q_\alpha, [X_i, X_j]] + [X_j, [Q_\alpha, X_i]] = 0 \quad (2.9)$$

ile verilir. Ayrıca yazdığımız bu özdeşliklerin gerçekleştiği görülebilir. Yukarıdaki özdeşlikler $a_{\alpha\beta}^j$ ve $b_{\alpha\beta}^j$ katsayıları üzerine aşağıdaki koşulları getirir:

$$[a^i, a^j] = c_{ij}^k a^k \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\dim(g)} (b_{\alpha\beta\gamma}^k a_{\sigma\tau}^k + b_{\sigma\alpha\beta}^k a_{\gamma\tau}^k + b_{\gamma\sigma\alpha}^k a_{\beta\tau}^k + b_{\beta\gamma\sigma}^k a_{\alpha\tau}^k) = 0 \quad (2.11)$$

Aynı zamanda bu cebiri Hopf cebiri yapısı ile donatabiliriz. Gerçekten aşağıdaki

$$\Delta(Q_\alpha) = Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha, \Delta(K) = K \otimes K \quad (2.12)$$

$$\varepsilon(Q_j) = 0, \varepsilon(K) = 1 \quad (2.13)$$

$$S(Q_j) = Q_j K, S(K) = K \quad (2.14)$$

ve (2.4) formüllerinin (2.1), (2.5), (2.6), (2.7) cebir yapısı ile tutarlı olduğu gösterilebilir. Böylece Hopf cebiri formülasyonunda süpercebir $U_2^N(g)$ 'dir.

Süper grup, $U_2^N(g)$ 'ye dual Hopf cebiri olarak tanımlanır ve $A_2^N(G)$ ile gösterilir. Burada G , g Lie cebirinin Lie grubudur. $U_2^N(g)$ 'nin her X_j, Q_α ve K elemanlarına karşı gelen a_j, θ_α ve λ ile dualite [Ek-(A-1)] kurabiliriz.

$q^2 = 1$ olmak üzere dualite bağıntıları;

$$\begin{aligned}\langle a_i, X_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \langle \theta_\alpha, Q_\beta \rangle &= \delta_{\alpha\beta} \\ \langle \lambda, K \rangle &= q\end{aligned}\tag{2.15}$$

ile verilir. Böylece $A_2^N(G)$, a_j, θ_α ve λ elemanları ile üretilir. Ek A'nın (A.10) koşulu ile aşağıdaki bağıntılar

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0, \{\lambda, \theta_\alpha\} = 0, \lambda^2 = 1\tag{2.16}$$

ve a_j 'nin diğer tüm elemanlarla değişmeli olduğu gerçekleştirilebilir. Bu durumda θ_α ve λ elemanları ile üretilen cebiri Λ_2^N ve a_j ile üretilen cebiri $A(G)$ ile gösterelim. O zaman $A_2^N(G)$ cebiri yukarıdaki cebirlerin direkt çarpımıdır. Yani, $A_2^N(G) = A(G) \times \Lambda_2^N$ 'dir. $A_2^N(G)$ 'nin ko-cebir yapısını tanımlamak için dualite özelliklerini kullanabiliriz. $A_2^N(G)$ cebiri üzerindeki ko-cebir işlemleri $U_2^N(g)$ cebirinin c_{ij}^k , $b_{\alpha\beta}^j$ ve $a_{\alpha\beta}^j$ yapı sabitlerine bağlıdır.

Örnek 1:

X_α, Q_α ve K ile üretilen Hopf cebirini gözönüne alalım. Öyle ki bu cebir ;

$$\{Q_\beta, Q_\alpha\} = \delta_{\beta\alpha} P_\alpha, [X_\beta, X_\alpha] = 0, [Q_\beta, X_\alpha] = 0\tag{2.17}$$

bağıntıları ile tanımlanır. Dual cebir z_α, θ_α ve λ ile üretilir.

Ve ekte verilen dualite özelliklerini kullanarak ko-cebir işlemleri

$$\Delta(\theta_\alpha) = \theta_\alpha \otimes 1 + \lambda \otimes \theta_\alpha, \Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda \quad (2.18)$$

$$\Delta(z_\alpha) = z_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes z_\alpha + \lambda \theta_\alpha \otimes \theta_\alpha$$

$$\varepsilon(\theta_\alpha) = 0, \varepsilon(\lambda) = 1, \varepsilon(z_\alpha) = 0 \quad (2.19)$$

$$S(\theta_\alpha) = -\lambda \theta_\alpha, S(\lambda) = \lambda, S(z_\alpha) = -z_\alpha \quad (2.20)$$

şeklinde verilir.



3. KESİRSSEL SÜPERCEBİRLER VE KESİRSSEL SÜPERGRUPLAR

3.1 Kesirsel Süpercebirlere

2. bölüm ile paralel olarak, aşağıdaki bağıntıları sağlayan yeni $Q_\alpha, K, \alpha = 1, 2, \dots, N$ elemanlarının eklenmesi ile $U_3^N(g)$ evrensel zarf cebirinin genellemesini yapıyoruz. Bu cebirin sağladığı bağıntılar;

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \quad (3.1)$$

$$\{Q_\alpha Q_\beta, Q_\gamma\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \quad (3.2)$$

$$[Q_\alpha, X_j] = a_{\alpha\beta}^j Q_\beta \quad (3.3)$$

$$KQ_\alpha = qQ_\alpha K, \quad q^3 = 1, \quad K^3 = 1 \quad (3.4)$$

Yukarıdaki $U_3^N(g)$ cebirinin Hopf cebiri yapısı:

$$\begin{aligned} \Delta X_j &= X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j, \\ \Delta(Q_\alpha) &= Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha, \quad \Delta(K) = K \otimes K \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(X_j) &= 0, \quad \varepsilon(Q_j) = 0, \quad \varepsilon(K) = 1, \\ S(X_j) &= -X_j, \quad S(Q_j) = -K^2 Q_j, \quad S(K) = K^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Burada

$$\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} \equiv Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\} \quad (3.7)$$

bağıntısı S_3 invariant formudur.

3.2 Ko-cebir yapısı ile cebirin tutarlılığı

Gerçekten $U_3^N(g)$ cebirinin komütasyon ve anti komütasyon bağıntılarının ko-cebir yapısı ve antipod ile tutarlı olduğunu gösterebiliriz. (3.1), (3.3) ve (3.4) 'ün ilk bağıntısının ko-çarpım, ko-birim ve antipod ile tutarlılığı aşıkardır olduğundan burada sadece cebir yapısındaki (3.2) bağıntısının ko-çarpım ve antipod ile tutarlılığını göstermemiz yeterli olacaktır. (3.2) bağıntısının ko-çarpım ile tutarlılığı:

$$\Delta\{Q_\alpha Q_\beta, Q_\gamma\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j \Delta X_j \quad (3.8)$$

Bağıntısının gerçekleştiğini göstermemiz gerekir ve Δ bir homomorfizm olduğundan;

$$\Delta\{Q_\alpha Q_\beta, Q_\gamma\} = \{\Delta(Q_\alpha), \Delta(Q_\beta), \Delta(Q_\gamma)\} \quad (3.9)$$

yazabiliriz.

Ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına S_3 invariant formu uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
 \{\Delta(Q_\alpha), \Delta(Q_\beta), \Delta(Q_\gamma)\} &= \\
 &= \Delta(Q_\alpha)\{\Delta(Q_\beta), \Delta(Q_\gamma)\} + \Delta(Q_\beta)\{\Delta(Q_\alpha), \Delta(Q_\gamma)\} + \Delta(Q_\gamma)\{\Delta(Q_\alpha), \Delta(Q_\beta)\} \\
 &= (Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha)\{(Q_\beta \otimes 1 + K \otimes Q_\beta), (Q_\gamma \otimes 1 + K \otimes Q_\gamma)\} + \\
 &\quad + (Q_\beta \otimes 1 + K \otimes Q_\beta)\{(Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha), (Q_\gamma \otimes 1 + K \otimes Q_\gamma)\} + \\
 &\quad + (Q_\gamma \otimes 1 + K \otimes Q_\gamma)\{(Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha), (Q_\beta \otimes 1 + K \otimes Q_\beta)\}
 \end{aligned}$$

Antikomütasyon tanımı ile lineerlik özellikleri kullanarak ve $q^3 = 1$ alarak;

$$\begin{aligned}
 &= Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} \otimes 1 + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} \otimes 1 + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\} \otimes 1 + \\
 &\quad + K^3 \otimes Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + K^3 \otimes Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + K^3 \otimes Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\}
 \end{aligned}$$

ve $K^3 = 1$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
 &= (Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\}) \otimes 1 + \\
 &\quad + 1 \otimes (Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\} + Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\}) \\
 &= \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} \otimes 1 + 1 \otimes \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} \\
 &= b_{\alpha\beta\gamma}^j (X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j)
 \end{aligned}$$

(3.5) bağıntısından

$$= b_{\alpha\beta\gamma}^j \Delta X_j$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.2) bağıntısının antipod ile tutarlılığı:

$$S\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} = b_{\alpha\beta\gamma}^j S(X_j)$$

ifadesinin sağlandığını gösterelim. Hatırladığımız gibi S (antipod) bir anti homomorfizmdir. Yani $S(Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma) = S(Q_\gamma)S(Q_\beta)S(Q_\alpha)$ 'dır.

$$S\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} = \{S(Q_\gamma), S(Q_\beta), S(Q_\alpha)\} \quad (3.10)$$

$$= S(Q_\gamma)\{S(Q_\beta), S(Q_\alpha)\} + S(Q_\beta)\{S(Q_\gamma), S(Q_\alpha)\} + S(Q_\alpha)\{S(Q_\gamma), S(Q_\beta)\}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki toplamın birinci kısmını hesaplamak yeterlidir çünkü diğerleri ile simetrik olduğundan onların sonucunu doğrudan yazabiliriz.

$$S(Q_\gamma)\{S(Q_\beta), S(Q_\alpha)\} = S(Q_\gamma)(S(Q_\beta)S(Q_\alpha) + S(Q_\alpha)S(Q_\beta))$$

olur. (3.6) bağıntısından;

$$= -K^2 Q_\gamma ((-K^2 Q_\beta)(-K^2 Q_\alpha) + (-K^2 Q_\alpha)(-K^2 Q_\beta))$$

(3.4) bağıntılarını da kullanarak;

$$= -(Q_\gamma Q_\beta Q_\alpha + Q_\gamma Q_\alpha Q_\beta)$$

$$= -Q_\gamma \{Q_\beta, Q_\alpha\}$$

bulunur.

Toplamın ikinci kısmı için;

$$S(Q_\beta)\{S(Q_\gamma), S(Q_\alpha)\} = -Q_\beta \{Q_\gamma, Q_\alpha\}$$

ve toplamın üçüncü kısmı da;

$$S(Q_\alpha)\{S(Q_\gamma), S(Q_\beta)\} = -Q_\alpha\{Q_\gamma, Q_\beta\}$$

olur.

Bu sonuçları (3.10) da yerine yazıp S_3 invaryant formunu da kullanarak;

$$\begin{aligned} S\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} &= -\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} \\ &= -b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j \\ &= b_{\alpha\beta\gamma}^j S(X_j) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 Kesirsel Süper Jakobi Özdeşlikleri

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad (3.11)$$

$$[A, \{B, C, D\}] + \{[B, A], C, D\} + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = 0 \quad (3.12)$$

Ve

$$[A, \{B, C, D\}] + [B, \{A, C, D\}] + [C, \{B, A, D\}] + [D, \{B, C, A\}] = 0 \quad (3.13)$$

Özdeşliklerinin gerçekten sağlandığını göstermek gerekir. Bunun için önce (3.11) ile verilen Jakobi özdeşliğinin gerçekleştiğini gösterelim:

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$$

Yukarıdaki ifadedeki sadece bir parçayı açık olarak hesaplamamız yeterli olur. Çünkü diğer iki ifade de aynı şekilde hesaplanır. Birinci ifadeyi alalım;

$$\begin{aligned}
 [A, [B, C]] &= [A, BC - CB] \\
 &= [A, BC] - [A, CB] \\
 &= [A, B]C - B[C, A] - ([A, C]B - C[B, A]) \\
 &= (AB - BA)C - B(CA - AC) - ((AC - CA)B - C(BA - AB)) \\
 &= ABC - BCA - ACB + CBA
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde ikinci ifade

$$[C, [A, B]] = CAB - ABC - CBA + BAC$$

ve üçüncü ifade de

$$[B, [C, A]] = BCA - CAB - BAC + ACB$$

bulunur. Bulduğumuz bu üç sonuç özdeşlikte yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] &= ABC - BCA - ACB + CBA + CAB - ABC - \\
 &\quad - CBA + BAC + BCA - CAB - BAC + ACB \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.11) özdeşliği gerçekleşmiş olur.

(3.12) özdeşliğinin gerçekleştiğini gösterelim:

$$[A, \{B, C, D\}] + \{[B, A], C, D\} + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = 0$$

Özdeşlikte ilk ifadeyi alalım. (3.7) bağıntısını kullanarak

$$[A, \{B, C, D\}] = [A, B\{C, D\}] + C\{B, D\} + D\{B, C\}$$

elde edilir ve komütatör bağıntısının lineerlik özelliğinden;

$$\begin{aligned}
 &= [A, B\{C, D\}] + [A, C\{B, D\}] + [A, D\{B, C\}] \\
 &= [A, B]\{C, D\} - B[\{C, D\}, A] + [A, C]\{B, D\} - C[\{B, D\}, A] + [A, D]\{B, C\} - D[\{B, C\}, A]
 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde ikinci ifade;

$$[\{B, A\}, C, D] = [B, A]\{C, D\} + C[\{B, A\}, D] + D[\{B, A\}, C]$$

üçüncü ifade;

$$\{B, [C, A], D\} = B\{[C, A], D\} + [C, A]\{B, D\} + D\{B, [C, A]\}$$

ve dördüncü ifade de

$$\{B, C, [D, A]\} = B\{C, [D, A]\} + C\{B, [D, A]\} + [D, A]\{B, C\}$$

bulunur.

Elde edilen sonuçlar özdeşlikte yerine yazılır, komütatör ve anti komütatör tanımları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
 &[A, \{B, C, D\}] + [\{B, A\}, C, D] + \{B, [C, A], D\} + \{B, C, [D, A]\} = \\
 &= ABCD - BCDA + ABDC - BDCA + ACBD - CBDA + ACDB - CDBA + \\
 &+ AD BC - DBCA + ADCB - DCBA + BACD - BADC - ABCD - ABDC + \\
 &+ CBAD - CABD + CDBA - CDAB + DBAC - DABC + DCBA - DCAB + \\
 &+ BCAD - BACD + BDCA - BDAC + CABD + CADB - ACBD - ACDB + \\
 &+ DBCA - DBAC + DCAB - DACB + BCDA - BCAD + BDAC - BADC + \\
 &+ CBDA - CBAD + CDAB - CADB + DABC + DACB - ADBC - ADCB \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Kesirsel süper Jacobi özdeşliği sağlanmış olur.

(3.13) özdeşliğin gerçeklendiğini gösterelim;

$$[A, \{B, C, D\}] + [B, \{A, C, D\}] + [C, \{B, A, D\}] + [D, \{B, C, A\}] = 0$$

Özdeşliğin ilk ifadesini alalım ve sırasıyla (3.7) bağıntısı ile lineerlik özelliklerinden

yararlanarak;

$$\begin{aligned} [A, \{B, C, D\}] &= [A, B\{C, D\} + C\{B, D\} + D\{B, C\}] \\ &= [A, B\{C, D\}] + [A, C\{B, D\}] + [A, D\{B, C\}] \\ &= [A, B]\{C, D\} - B[\{C, D\}, A] + [A, C]\{B, D\} - C[\{B, D\}, A] + [A, D]\{B, C\} - D[\{B, C\}, A] \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde ikinci ifade;

$$\begin{aligned} [B, \{A, C, D\}] &= \\ &= [B, A]\{C, D\} - A[\{C, D\}, B] + [B, C]\{A, D\} - C[\{A, D\}, B] + [B, D]\{A, C\} - D[\{A, C\}, B] \end{aligned}$$

üçüncü ifade;

$$\begin{aligned} [C, \{B, A, D\}] &= \\ &= [C, B]\{A, D\} - B[\{A, D\}, C] + [C, A]\{B, D\} - A[\{B, D\}, C] + [C, D]\{B, A\} - D[\{B, A\}, C] \end{aligned}$$

ve dördüncü ifade de

$$\begin{aligned} [D, \{B, C, A\}] &= \\ &= [D, B]\{C, A\} - B[\{C, A\}, D] + [D, C]\{B, A\} - C[\{B, A\}, D] + [D, A]\{B, C\} - A[\{B, C\}, D] \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu sonuçlar özdeşlikte yerine yazıldığında özdeşliğin sağlandığı görülür.

Şimdi (3.11) özdeşliğinde:

$$A = X_i, \quad B = X_j, \quad C = Q_\alpha \quad (3.14)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$[X_i, [X_j, Q_\alpha]] + [Q_\alpha, [X_i, X_j]] + [X_j, [Q_\alpha, X_i]] = 0$$

olur.

(3.1) ve (3.3) bağıntılarını kullanarak;

$$\begin{aligned} [X_i, -a_{\alpha\gamma}^j Q_\gamma] + [Q_\alpha, c_{ij}^k X_k] + [X_j, a_{\alpha\gamma}^i Q_\gamma] &= 0 \\ -a_{\alpha\gamma}^j [X_i, Q_\gamma] + c_{ij}^k [Q_\alpha, X_k] + a_{\alpha\gamma}^i [X_j, Q_\gamma] &= 0 \end{aligned}$$

ve yine (3.3) ile komütatörün antisimetrik özelliğinden

$$\begin{aligned} -a_{\alpha\gamma}^j (-a_{\gamma\beta}^i Q_\beta) + c_{ij}^k (a_{\alpha\beta}^k Q_\beta) + a_{\alpha\gamma}^i (-a_{\gamma\beta}^j Q_\beta) &= 0 \\ (a_{\alpha\gamma}^i a_{\gamma\beta}^j - a_{\alpha\gamma}^j a_{\gamma\beta}^i) Q_\beta &= (c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k) Q_\beta \end{aligned}$$

ve toplamı $\gamma = \sigma$ üzerinden alırsak;

$$\sum_{\sigma=1}^N (a_{\alpha\sigma}^i a_{\sigma\beta}^j - a_{\alpha\sigma}^j a_{\sigma\beta}^i) = \sum_{k=1}^{\dim(g)} c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k \quad (3.15)$$

elde ederiz. Bu bağıntıyı (3.1) ile karşılaştırdığımızda $a^j \equiv (a_{\alpha\beta}^j)_{\alpha,\beta=1}^N$ $N \times N$ lik matrisleri verilen Lie cebirinin N-boyutlu temsili tanımlar.

(3.12) özdeşliğinde

$$A = X_k, \quad B = Q_\alpha, \quad C = Q_\beta, \quad D = Q_\gamma \quad (3.16)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$[X_k, \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\}] + \{Q_\alpha, X_k, Q_\beta, Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, [Q_\beta, X_k], Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, Q_\beta, [Q_\gamma, X_k]\} = 0$$

(3.7) ve (3.3) bağıntıları ile birlikte komütatör özelliğinden faydalanarak

$$[X_k, b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j] + \{a_{\alpha\sigma}^k Q_\sigma, Q_\beta, Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, a_{\beta\sigma}^k Q_\sigma, Q_\gamma\} + \{Q_\alpha, Q_\beta, a_{\gamma\sigma}^k Q_\sigma\} = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j c_{kj}^i X_i + a_{\alpha\sigma}^k b_{\sigma\beta\gamma}^j X_j + a_{\beta\sigma}^k b_{\sigma\alpha\gamma}^j X_j + a_{\gamma\sigma}^k b_{\alpha\beta\sigma}^j X_j = 0$$

gerekli düzenlemeyi yaparsak

$$\sum_{\sigma=1}^N (a_{\alpha\sigma}^k b_{\sigma\beta\gamma}^i + a_{\beta\sigma}^k b_{\sigma\alpha\gamma}^i + a_{\gamma\sigma}^k b_{\sigma\beta\alpha}^i) = \sum_{j=1}^{\dim(g)} c_{jk}^i b_{\alpha\beta\gamma}^j \quad (3.17)$$

bağıntısı bulunur.

(3.13) özdeşliğinde

$$A = Q_\sigma, \quad B = Q_\alpha, \quad C = Q_\beta, \quad D = Q_\gamma \quad (3.18)$$

değerleri yerine yazıldığında

$$[Q_\sigma, \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\}] + [Q_\alpha, \{Q_\sigma, Q_\beta, Q_\gamma\}] + [Q_\beta, \{Q_\alpha, Q_\sigma, Q_\gamma\}] + [Q_\gamma, \{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\sigma\}] = 0$$

yukarıdaki özdeşlikte (3.2) bağıntısını kullanırsak

$$[\mathcal{Q}_\sigma, b_{\alpha\beta\gamma}^j X_j] + [\mathcal{Q}_\alpha, b_{\sigma\beta\gamma}^j X_j] + [\mathcal{Q}_\beta, b_{\alpha\sigma\gamma}^j X_j] + [\mathcal{Q}_\gamma, b_{\alpha\beta\sigma}^j X_j] = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j [\mathcal{Q}_\sigma, X_j] + b_{\sigma\beta\gamma}^j [\mathcal{Q}_\alpha, X_j] + b_{\alpha\sigma\gamma}^j [\mathcal{Q}_\beta, X_j] + b_{\alpha\beta\sigma}^j [\mathcal{Q}_\gamma, X_j] = 0$$

$$b_{\alpha\beta\gamma}^j a_{\sigma\tau}^j \mathcal{Q}_\tau + b_{\sigma\beta\gamma}^j a_{\alpha\tau}^j \mathcal{Q}_\tau + b_{\alpha\sigma\gamma}^j a_{\beta\tau}^j \mathcal{Q}_\tau + b_{\alpha\beta\sigma}^j a_{\gamma\tau}^j \mathcal{Q}_\tau = 0$$

yukarıdaki bağıntıyı düzenlersek

$$\sum_{k=1}^{\dim(g)} (b_{\alpha\beta\gamma}^k a_{\sigma\tau}^k + b_{\sigma\beta\gamma}^k a_{\alpha\tau}^k + b_{\alpha\sigma\gamma}^k a_{\beta\tau}^k + b_{\alpha\beta\sigma}^k a_{\gamma\tau}^k) = 0 \quad (3.19)$$

bağıntısını elde ederiz.

3.4 S_n Kesirsel Süper Cebir

Yukarıda kullandığımız yöntem ve hesaplara paralel olarak S_n -graded Lie cebirlerini tanımlayabiliriz. Aşağıdaki komütasyon ve anti komütasyon bağıntılarını sağlayan

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$$

$$\{\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \mathcal{Q}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_n}\} = b_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^j X_j \quad (3.20)$$

$$[\mathcal{Q}_\alpha, X_j] = a_{\alpha\beta}^j \mathcal{Q}_\beta$$

$$K\mathcal{Q}_\alpha = q\mathcal{Q}_\alpha K, \quad q^n = 1, \quad K^n = 1$$

$Q_{\alpha_1}, \dots, Q_{\alpha_n}, K$ elemanlarının eklenmesi ile oluşturulan bu cebirin Hopf cebiri yapısı

$$\begin{aligned}\Delta X_j &= X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j, \\ \Delta(Q_\alpha) &= Q_\alpha \otimes 1 + K \otimes Q_\alpha, \quad \Delta(K) = K \otimes K\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(X_j) &= 0, \quad \varepsilon(Q_\alpha) = 0, \quad \varepsilon(K) = 1, \\ S(X_j) &= -X_j, \quad S(Q_\alpha) = -K^{n-1} Q_\alpha, \quad S(K) = K^{n-1}\end{aligned}$$

ile verilir. Bu cebir $U_n^N(g)$ ile gösterilir. Burada S_n invaryant formu

$$\{Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_2}, \dots, Q_{\alpha_n}\} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S_n} Q_{\alpha_1} Q_{\alpha_2} \dots Q_{\alpha_n}. \quad (3.21)$$

dır.

Bu cebirin oluşumunda faydalandığımız Kesirsel süper Jakobi özdeşlikleri (3.11), (3.12) ve (3.13) özdeşliklerinin bir genellemesidir. (3.11) özdeşliği aynı kalacağından (3.12) ve (3.13) özdeşliklerinin genel durumu:

$$[B, \{A_1, \dots, A_n\}] + \{[A_1, B], A_2, \dots, A_n\} + \dots + \{A_1, A_2, \dots, [A_n, B]\} = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} [A_i, \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_{n+1}\}] = 0 \quad (3.23)$$

Bu özdeşliklerin sağlandığı görülür. İspatları da sırasıyla (3.12) ve (3.13) 'e benzer şekilde yapılır.

$$(3.22) \quad \text{özdeşliğinde} \quad B = X_k \quad A_i = Q_{\alpha_i} \quad \alpha_i = 1, 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alındığında (3.3) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak

$$\sum_{\sigma=1}^N \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_n} a_{\alpha_1}^k b_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^i = \sum_{j=1}^{\dim(g)} c_{jk}^i b_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^j \quad (3.24)$$

elde edilir. Ve benzer şekilde (3.23) özdeşliğinde $A_i = Q_{\alpha_i}$ $i = 1, 2, \dots, n+1$ alınır ve (3.20) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\dim(g)} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in Z_{n+1}} b_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} a_{\alpha_{n+1}, \tau}^k = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir.

3.5 Kesirsel Süpergruplar

2. bölüm ile paralel olarak Kesirsel süpergrupları, $U_n^N(g)$ Hopf cebirinin duali olarak tanımlarız. $U_n^N(g)$ cebirini üreten X_j , Q_α ve K elemanlarına aşağıda vereceğimiz dualite bağıntıları ile a_j , θ_α ve λ elemanlarını karşı getireceğiz. Sözünü ettiğimiz dualite bağıntıları

$$\begin{aligned} \langle Q_\alpha, \theta_\beta \rangle &= \delta_{\alpha\beta} \\ \langle K, \lambda \rangle &= q \\ \langle X_i, a_j \rangle &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ve diğer tüm dualite bağıntıları sıfırdır [Ek A]. Duallik bağıntılarının özelliklerini kullanarak aşağıdaki bağıntıları sağlayan a_j , θ_α ve λ elemanlarını hesaplarız. Yukarıda bahsettiğimiz bu bağıntılar

$$\{\theta_{\alpha_1}, \theta_{\alpha_2}, \dots, \theta_{\alpha_n}\} = 0, \quad \alpha_k \in 1, 2, \dots, N \quad (3.27)$$

$$\lambda \theta_\alpha = q \theta_\alpha \lambda, \quad \lambda^n = 1 \quad (3.28)$$

ve a_j 'nin diğer tüm elemanlarla değişmeli olmasıdır. Örneğin, $n = 3$ durumu için (3.26)'yı gösterelim. Herhangi bir $\Phi \in U_n^N(\mathfrak{g})$ için

$$\langle \Phi, \{\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma\} \rangle = 0 \quad (3.29)$$

olduğunu gösteririz. (Ek A-10) özelliklerini ve S_3 invaryant formunu kullanarak

$$\langle \Phi, \{\theta_\alpha, \theta_\beta, \theta_\gamma\} \rangle = \langle \Delta\Phi, \theta_\alpha \otimes \{\theta_\beta, \theta_\gamma\} + \theta_\beta \otimes \{\theta_\alpha, \theta_\gamma\} + \theta_\gamma \otimes \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} \rangle \quad (3.30)$$

olur.

(3.26) ve ko-çarpım'dan Φ en az bir X_j elamanını kapsadığı zaman (3.30)'un sağ tarafı sıfır olacaktır. Aşık olmaya tek durum Φ 'nin şu

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \quad (3.31)$$

formda olduğu zamandır. dualite ikililerinin lineerliğinden;

$$\Phi = Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \quad (3.32)$$

için (3.29) eşitliğine sahip olmak yeterlidir. Bulduğumuz (3.32) ifadesini (3.30) 'da yerine yazar ve ko-çarpım kuralını kullandıktan sonra (3.29) eşitliğini buluruz.

θ_α ve λ ile üretilen cebiri Λ_n^N ile gösterilir. $A(G)$, verilen $\mathfrak{g}$ cebirinin G Lie grubu üzerindeki polinomların cebiri olsun. Burada $A(G)$ 'nin $U(\mathfrak{g})$ evrensel zarf cebirinin duali olduğu bilinir. $A(G)$ ve Λ_n^N cebirlerinin direkt çarpımı $A_n^N(G)$ ile gösterilir. Yani $A_n^N(G) = A(G) \times \Lambda_n^N$ 'dır. $A_n^N(G)$ 'nin ko-cebir yapısını tanımlamak için dualite bağıntılarını kullanmak zorundayız [Ek A]. Benzer şekilde $A_n^N(G)$ 'nin cebir yapısını da tanımlarız. Bununla beraber, genelde bu oldukça güç problemdir.

$A_n^N(G)$ 'nin ko-cebir yapısının, $U_n^N(g)$ cebirinin $c_{ij}^k, a_{\alpha\beta}^j$ ve $b_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ yapı sabitlerine bağlı olduğunu dikkate almalıyız. $A_n^N(G)$ 'nin bu sabitleri içermeyen en basit olanları

$$\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$$

$$S(\lambda) = \lambda^{n-1}, \quad \varepsilon(\lambda) = 1$$

dır. Yukarıdaki oluşumu desteklemek için basit bir örnek verelim. Bunun için

$$Q^n = X, \quad [X, Q] = 0, \quad KQ = qQK$$

bağıntılarına sahip olan Kesirsel süpercebiri gözönüne alalım. Yukarıdaki cebire karşı gelen Kesirsel süpergrup z, θ ve λ ile üretilir.

Öyle ki,

$$\theta^n = 0, \quad \theta\lambda = q\lambda\theta, \quad q^n = 1$$

ve z, θ ve λ ile değişmelidir. Böylece gösterebilirizki, ko-cebir işlemleri:

$$\Delta(\theta) = \theta \otimes 1 + \lambda \otimes \theta \tag{3.33}$$

$$\Delta(z) = z \otimes 1 + 1 \otimes z + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^{n-k} \theta^k \otimes \theta^{n-k}}{(q : q)_k (q : q)_{n-k}} \tag{3.34}$$

$$\varepsilon(\theta) = 0, \quad \varepsilon(\lambda) = 1 \tag{3.35}$$

ve

$$S(\theta) = -\lambda^{n-1} \theta, \quad S(\lambda) = 1 \tag{3.36}$$

elde edilir. Burada

$$(q : q)_k = \prod_{j=1}^k (1 - q^j) \quad (3.37)$$

dir.



4. ÖRNEKLER

4.1 $sl(2)$

$sl(2)$ cebirinin X_j , $j = 1, 2, 3$ üreteçleri

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad , \quad [X_3, X_1] = 2X_1 \quad , \quad [X_3, X_2] = -2X_2 \quad (4.1)$$

bağıntılarını sağlar ve (3.1) bağıntısına göre bu cebirin yapı sabitleri

$$c_{12}^3 = 1 \quad , \quad c_{31}^1 = 2 \quad , \quad c_{32}^2 = -2 \quad (4.2)$$

elde edilir. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} X_1 | \alpha \rangle &= \sqrt{(l - \alpha)(l + \alpha + 1)} | \alpha + 1 \rangle \\ X_3 | \alpha \rangle &= 2\alpha | \alpha \rangle \\ X_2 | \alpha \rangle &= \sqrt{(l + \alpha)(l - \alpha + 1)} | \alpha - 1 \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

formülleri $sl(2)$ 'nin $2l + 1$ boyutlu indirgenemez T^l temsillerini tanımlar. Burada $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ Ayrıntı için referans [14]'e bakınız . aşağıda bu cebirin üç durumunu inceleyeceğiz. Tabiki bu üç durumda da $n = 3$ (grade 3) alınıp $N = 1, 2$ ve 3 durumlarını göz önüne alacağız.

4.1.1. $N = 1$ ya da $l = 0$ Durumu

Bu cebiri $U_3^1(sl(2))$ ile gösteririz. Bu durumda bir tane Q_α , $\alpha = 1$ var ve (3.15) bağıntısına göre $a_{\alpha 1}^i a_{1\beta}^j - a_{\alpha 1}^j a_{1\beta}^i = c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k$ sisteminin çözümü aşıkardır yani, $a_{\alpha\beta}^j = 0$ ve $b_{\alpha\beta\gamma}^j = 0$.

4.1.2. $N = 2$ ya da $l = 1/2$ Durumu

Bu durumda cebiri $U_3^2(sl(2))$ ile gösteririz. Bu cebirde iki tane Q_α , $\alpha = 1, 2$ mevcut ve $\sum_{\sigma=1}^2 (a_{\alpha\sigma}^i a_{\sigma\beta}^j - a_{\alpha\sigma}^j a_{\sigma\beta}^i) = \sum_{k=1}^3 c_{ij}^k a_{\alpha\beta}^k$ bağıntısı ile $a^j \equiv (a_{\alpha\beta}^j)_{\alpha,\beta=1}^2$ 2. mertebeden kare matrislerdir. Yukarıdaki bağıntıyı kısaca

$$[a^i, a^j] = c_{ij}^k a^k \quad (4.4)$$

Şeklinde ifade edebiliriz. Elde etmiş olduğumuz yapı sabitleri ile bu sistemin çözüm matrisleri:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

bulunur. (3.17) ve (3.19) bağıntılarını kullanarak $b_{\alpha\beta\gamma}^j$ katsayılarını hesaplayalım.

$C_{12}^3 = 1$ durumunda (3.17) bağıntısı ;

$$\alpha = 1 \quad , \quad \beta = 1 \quad \text{durumu}$$

$$a_{\gamma 1}^2 b_{111}^3 + a_{\gamma 2}^2 b_{211}^3 = b_{11\gamma}^1 \quad (4.6)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow b_{111}^1 = 0$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow b_{111}^3 = b_{112}^1$$

$$\alpha = 2 \quad , \quad \beta = 2 \quad \text{durumu}$$

$$2b_{12\gamma}^3 + a_{\gamma 1}^2 b_{122}^3 + a_{\gamma 2}^2 b_{222}^3 = b_{22\gamma}^1 \quad (4.7)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow 2b_{121}^3 = b_{221}^1$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow 3b_{122}^3 = b_{222}^1$$

$$\alpha = 1 \quad , \quad \beta = 2 \quad \text{durumu}$$

$$b_{11\gamma}^3 + a_{\gamma 1}^2 b_{121}^3 + a_{\gamma 2}^2 b_{221}^3 = b_{12\gamma}^1 \quad (4.8)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow b_{111}^3 = b_{121}^1$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow b_{112}^3 + b_{121}^3 = b_{122}^1$$

olur.

$C_{31}^1 = 2$ durumunda (3.17) bağıntısı;

$\alpha = 1$, $\beta = 1$ *durumu*

$$a_{\gamma 1}^1 b_{111}^1 + 2b_{21\gamma}^1 + a_{\gamma 2}^1 b_{211}^1 = 2b_{11\gamma}^3 \quad (4.9)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow 3b_{211}^1 = 2b_{111}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow 2b_{212}^1 = 2b_{112}^3$$

$\alpha = 2$, $\beta = 2$ *durumu*

$$a_{\gamma 1}^1 b_{122}^1 + a_{\gamma 2}^1 b_{222}^1 = 2b_{22\gamma}^3 \quad (4.10)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow b_{221}^1 = 2b_{221}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow 0 = 2b_{222}^3$$

$\alpha = 1$, $\beta = 2$ *durumu*

$$a_{\gamma 1}^1 b_{121}^1 + b_{22\gamma}^1 + a_{\gamma 2}^1 b_{221}^1 = 2b_{12\gamma}^3 \quad (4.11)$$

$$\gamma = 1 \Rightarrow 2b_{221}^1 = 2b_{121}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow b_{222}^1 = 2b_{122}^3$$

olur.

$C_{32}^2 = -2$ olduğunda (3.17) bağıntısı;

$\alpha = 1$, $\beta = 1$ durumu

$$a_{\gamma 1}^2 b_{111}^2 + a_{\gamma 2}^2 b_{21}^2 = -2b_{11\gamma}^3$$

(4.12)

$$\gamma = 1 \Rightarrow 0 = -2b_{111}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow b_{111}^2 = -2b_{112}^3$$

$\alpha = 2$, $\beta = 2$ durumu

$$a_{\gamma 1}^2 b_{122}^2 + a_{\gamma 2}^2 b_{222}^2 + 2b_{12\gamma}^2 = -2b_{22\gamma}^3$$

(4.13)

$$\gamma = 1 \Rightarrow 2b_{121}^2 = -2b_{221}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow 3b_{122}^2 = -2b_{222}^3$$

$\alpha = 1$, $\beta = 2$ durumu

$$a_{\gamma 1}^2 b_{121}^2 + a_{\gamma 2}^2 b_{221}^2 + b_{11\gamma}^2 = -2b_{12\gamma}^3$$

(4.14)

$$\gamma = 1 \Rightarrow b_{111}^2 = -2b_{121}^3$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow b_{112}^2 + b_{121}^2 = -2b_{122}^3$$

olur.

(4.12), (4.6), (4.8) ve (4.9) bağıntılarından sırasıyla, $b_{111}^3 = 0$, $b_{112}^1 = 0$, $b_{121}^1 = 0$, $b_{211}^1 = 0$ olur ve (3.19) bağıntısından;

$\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ durumu

$$b_{111}^1 a_{\sigma 2}^1 + b_{\sigma 11}^1 a_{12}^1 + b_{1\sigma 1}^1 a_{12}^1 + b_{11\sigma}^1 a_{12}^1 + b_{111}^2 a_{\sigma 2}^2 + b_{\sigma 11}^2 a_{12}^2 + b_{1\sigma 1}^2 a_{12}^2 + b_{11\sigma}^2 a_{12}^2 = 0$$

$$\Rightarrow b_{\sigma 11}^1 + b_{1\sigma 1}^1 + b_{11\sigma}^1 + b_{111}^2 a_{\sigma 2}^2 = 0$$

$$\sigma = 2 \Rightarrow b_{1\sigma 1}^1 = 0 \text{ olur.}$$

$$\tau = 1, \sigma = 2 \Rightarrow b_{111}^2 a_{\sigma 1}^2 + 3b_{\sigma 11}^3 = 0 \text{ ve burada (4.12)'yi kullanırsak } b_{211}^3 = 0$$

bulunur.

$\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ durumunda, (3.19) bağıntısının da $\tau = 1$ alınır;

$$b_{121}^2 a_{\sigma 1}^2 + b_{1\sigma 1}^2 + b_{121}^3 a_{\sigma 1}^3 + b_{\sigma 12}^3 + b_{21\sigma}^3 = 0$$

$$\sigma = 2 \Rightarrow 2b_{121}^2 + 2b_{212}^3 = 0 \text{ ve (4.13)'den } b_{221}^3 = 0$$

olur.

Bulduğumuz bu değeri (4.10) 'da yerine yazdığımızda $b_{222}^1 = 0$ ve (4.11)'den $b_{122}^3 = 0$ ve $b_{121}^3 = 0$ olduğundan $b_{221}^1 = 0$ olur. (3.19) bağıntısında

$$\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 2 \text{ ve } \tau = \sigma = 1$$

durumu incelendiğinde $b_{222}^3 = 0$ ve yine aynı durumda $\sigma = 2 \Rightarrow b_{222}^2 = 0$ olur. Eğer

$\tau = 2$, $\sigma = 1 \Rightarrow b_{222}^1 = 0$ olur ve (4.14) den $b_{122}^2 = 0$ dır. Bu katsayıların simetrik olduğunu gözönünde bulundurursak tüm $b_{\alpha\beta\gamma}^j = 0$ olur.

Böylece $a_{\alpha\beta}^j$ ve $b_{\alpha\beta\gamma}^j$ değerlerine göre cebirin sıfırdan farklı olan bağıntıları:

(3.3) bağıntısı ile

$$[Q_1, X_1] = Q_2, \quad [Q_2, X_2] = Q_1, \quad [Q_1, X_3] = Q_1, \quad [Q_2, X_3] = -Q_2 \quad (4.15)$$

elde edilir ve Hopf cebiri yapısı da (3.5) ve (3.6) bağıntıları ile verilir. $U_3^2(sl(2))$ Kesirsel süpercebirinin duali olan $A_3^2(SL(2))$ Kesirsel süpergrubu, (3.26), (3.27) ve

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (4.16)$$

bağıntılarını sağlayan $\lambda, \theta_n, a_{nm}, m=1,2$ elemanları ile üretilir. Aynı zamanda aşağıdaki ko-cebir yapısına sahip olduğu görülür:

$$\Delta(a_{nm}) = a_{nk} \otimes a_{km} \quad (4.17)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda \quad (4.18)$$

$$\Delta(\theta_1) = \theta_2 \otimes a_{21} + \theta_1 \otimes a_{11} + \lambda \otimes \theta_1 \quad (4.19)$$

$$\Delta(\theta_2) = \theta_2 \otimes a_{22} + \theta_1 \otimes a_{12} + \lambda \otimes \theta_2 \quad (4.20)$$

$$\varepsilon(\lambda) = 1, \quad \varepsilon(\theta_k) = 0, \quad \varepsilon(a_{nm}) = \delta_{nm} \quad (4.21)$$

ve antipod

$$S(\lambda) = \lambda^2, \quad S(\theta_1) = \lambda^2(a_{21}\theta_2 - a_{22}\theta_1), \quad S(\theta_2) = \lambda^2(a_{12}\theta_1 - a_{11}\theta_2) \quad (4.22)$$

$$S(a_{11}) = a_{22}, \quad S(a_{22}) = a_{11}, \quad S(a_{12}) = -a_{12}, \quad S(a_{21}) = -a_{21} \quad (4.23)$$

ile verilir. Ve $A_3^1(SL(2))$ ile $U_3^1(sl(2))$ arasındaki duallik bağıntıları:

$$\begin{aligned} \langle X_3, a_{nn} \rangle &= (-1)^{n+1} , \quad \langle X_1, a_{12} \rangle = 1 , \quad \langle K, a_{nm} \rangle = \delta_{nm} \\ \langle X_2, a_{21} \rangle &= 1 , \quad \langle Q_k, \theta_k \rangle = 1 , \quad \langle K, \lambda \rangle = q \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.1.3. N = 3 Durumu:

Bu durumda T^1 veya $T^{\frac{1}{2}} \otimes T^0$ temsillerine karşı gelen a^j matrislerini seçebiliriz. Sonuç olarak iki farklı Kesirsel super $sl(2)$ 'ye sahip olacağız. Tabi ki, aynı zamanda $T^0 \otimes T^0 \otimes T^0$ seçimi de vardır ve bu durum aşıkardır. Basitlik olması için $T^{\frac{1}{2}} \otimes T^0$ durumunu gözönüne alacağız. Bu durumda a^j matris temsilleri:

$$a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

dır ve $b_{\alpha\beta\gamma}^j$ katsayıları N=2 durumuna benzer şekilde hesaplanacağından sadece sıfırdan farklı olan katsayıları doğrudan yazalım:

$$\sum_{\sigma=1}^3 (a_{\alpha\sigma}^k b_{\sigma\beta\gamma}^i + a_{\beta\sigma}^k b_{\sigma\alpha\gamma}^i + a_{\gamma\sigma}^k b_{\sigma\beta\alpha}^i) = \sum_{j=1}^3 c_{jk}^i b_{\alpha\beta\gamma}^j$$

bağıntısına göre sırasıyla sıfırdan farklı yapı sabitleri ile $j=1, k=2, i=3$ durumunu gözönüne aldığımızda

$$\sum_{\sigma=1}^3 (a_{\alpha\sigma}^2 b_{\sigma\beta\gamma}^3 + a_{\beta\sigma}^2 b_{\sigma\alpha\gamma}^3 + a_{\gamma\sigma}^2 b_{\sigma\beta\alpha}^3) = c_{12}^3 b_{\alpha\beta\gamma}^1$$

$$(a_{\alpha 1}^2 b_{1\beta\gamma}^3 + a_{\beta 1}^2 b_{1\alpha\gamma}^3 + a_{\gamma 1}^2 b_{1\beta\alpha}^3) + (a_{\alpha 2}^2 b_{2\beta\gamma}^3 + a_{\beta 2}^2 b_{2\alpha\gamma}^3 + a_{\gamma 2}^2 b_{2\beta\alpha}^3) = b_{\alpha\beta\gamma}^1$$

sağlanmalı, a^2 matrisinde $a_{21}^2 \neq 0$ olduğundan $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 3$ durumunda

$$1.b_{123}^3 + 1.b_{123}^3 = 2b_{123}^3 = 1.b_{223}^1 \Rightarrow b_{123}^3 = 1/2 \text{ ve } b_{223}^1 = 1$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$(a_{\alpha 1}^3 b_{1\beta\gamma}^2 + a_{\beta 1}^3 b_{1\alpha\gamma}^2 + a_{\gamma 1}^3 b_{1\beta\alpha}^2) + (a_{\alpha 2}^3 b_{2\beta\gamma}^2 + a_{\beta 2}^3 b_{2\alpha\gamma}^2 + a_{\gamma 2}^3 b_{2\beta\alpha}^2) = c_{23}^2 b_{\alpha\beta\gamma}^2$$

sağlanmalı, a^3 matrisinde $a_{11}^3 = 1$ ve $a_{22}^3 = -1$ olduğuna göre $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 3$ alırsak $2b_{113}^2 = -2$ ise $b_{113}^2 = -1$ olmalıdır.

Böylece

$$b_{223}^1 = 1, \quad b_{113}^2 = -1, \quad b_{123}^3 = 1/2 \quad (4.26)$$

elde edilir. Ve diğer tüm $b_{\alpha\beta\gamma}^j$ yapı sabitleri sıfırdır. Böylece (3.2) bağıntısı yardımı ile elde edilen cebirin açık formu, (4.15) bağıntısı ve

$$\{Q_1, Q_1, Q_3\} = -X_2, \quad \{Q_2, Q_2, Q_3\} = X_1, \quad \{Q_1, Q_2, Q_3\} = \frac{1}{2} X_3 \quad (4.27)$$

ile verilir ve diğer bağıntılar sıfırdır. Yukarıdaki hesabın doğruluğunu kontrol edebiliriz. Burada $A_3^1(C) = C^\infty(C) \times \Lambda$ dır. $C^\infty(C)$ 'un elamanları sonsuz kere diferensiyellenebilir kompleks değişkenli fonksiyonlar ve Λ : θ ve K ile üretilen cebirdir, öyleki $\theta^3 = 0$ ve $q^{2\pi/3} = 1$ 'dir. Gerçekleştirdiğimiz bu cebirin üreteçleri:

$$X_1 = -z^2 \frac{d}{dz} - zL, \quad X_2 = \frac{d}{dz}, \quad X_3 = 2z \frac{d}{dz} + L \quad (4.28)$$

$$Q_1 = D_\theta, \quad Q_2 = -zD_\theta, \quad Q_3 = \frac{q}{2}\theta^2 \frac{d}{dz}, \quad K = q^L \quad (4.29)$$

dır. Burada q-türevi;

$$D_\theta \theta^k = \frac{1-q^k}{1-q} \theta^{k-1} \quad (4.30)$$

ve $L = -q(2\theta^2 D_\theta^2 + D_\theta \theta^2 D_\theta)$ grading operatörü

$$L\theta^k = k\theta^k \quad (4.31)$$

ve $[L, D_\theta] = -D_\theta$ bağıntılarını gerçekler. Bunlardan (4.31) bağıntısının sağlandığını gösterelim:

$L\theta^0 = 0$ durumu aşikar ve

$$\begin{aligned}
 L\theta &= -q(2\theta^2 D_\theta^2 + D_\theta \theta^2 D_\theta)\theta \\
 &= -q(2\theta^2 D_\theta^2 \theta + D_\theta \theta^2 D_\theta \theta) \\
 &= -qD_\theta \theta^2 \\
 &= -q(1+q)\theta = \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L\theta^2 &= -q(2\theta^2 D_\theta^2 + D_\theta \theta^2 D_\theta)\theta^2 \\
 &= -q(-2q^2 \theta^2 D_\theta \theta - q^2 D_\theta \theta^2 \theta) \\
 &= 2\theta^2
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki tanımlardan faydalananarak (4.15) ve (4.27) bağıntılarının gerçekleştiğini gösterelim:

ilk olarak (4.27)'in birinci bağıntısını gösterelim;

$$\begin{aligned}
 \{Q_1, Q_1, Q_3\} &= Q_1 \{Q_1, Q_3\} + Q_1 \{Q_1, Q_3\} + Q_3 \{Q_1, Q_1\} \\
 &= 2D_\theta \left\{ D_\theta, \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \{D_\theta, D_\theta\} \\
 &= 2D_\theta \left(D_\theta \left(\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right) + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta \right) + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} (D_\theta^2 + D_\theta^2)
 \end{aligned}$$

$$= 2D_{\theta} \left(\frac{q}{2} \frac{1-q^2}{1-q} \theta \frac{d}{dz} + (q\theta)^2 \frac{q}{2} D_{\theta} \frac{d}{dz} + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} D_{\theta} \right) + q\theta^2 \frac{d}{dz} D_{\theta}^2$$

burada $1+q = -q^2$ ve $q^3 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} &= 2D_{\theta} \left(-\frac{1}{2} \theta \frac{d}{dz} - \frac{q^2}{2} \theta^2 D_{\theta} \frac{d}{dz} \right) + q\theta^2 \frac{d}{dz} D_{\theta}^2 \\ &= -\frac{d}{dz} - (q\theta) D_{\theta} \frac{d}{dz} - q^2 \frac{(1-q^2)}{1-q} \theta D_{\theta} \frac{d}{dz} - q^2 (q\theta)^2 D_{\theta}^2 \frac{d}{dz} + q\theta^2 \frac{d}{dz} D_{\theta}^2 \\ &= -\frac{d}{dz} - q\theta D_{\theta} \frac{d}{dz} + q\theta D_{\theta} \frac{d}{dz} - q\theta^2 D_{\theta}^2 \frac{d}{dz} + q\theta^2 \frac{d}{dz} D_{\theta}^2 \\ &= -\frac{d}{dz} = -X_2 \end{aligned}$$

Benzer şekilde (4.27)'in ikinci bağıntısı;

$$\begin{aligned} \{Q_2, Q_2, Q_3\} &= Q_2 \{Q_2, Q_3\} + Q_2 \{Q_2, Q_3\} + Q_3 \{Q_2, Q_2\} \\ &= -2z D_{\theta} \left\{ -z D_{\theta}, \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \{ -z D_{\theta}, -z D_{\theta} \} \\ &= -2z D_{\theta} \left(-z D_{\theta} \left(\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right) + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} (-z D_{\theta}) \right) + q\theta^2 \frac{d}{dz} (z^2 D_{\theta}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2z D_\theta \left(-z \frac{q}{2} (-q^2) \theta \frac{d}{dz} + -z \frac{q}{2} (q\theta)^2 D_\theta \frac{d}{dz} - \frac{q}{2} \theta^2 D_\theta - \frac{q}{2} \theta^2 z \frac{d}{dz} D_\theta \right) + \\
&\quad + q\theta^2 \frac{d}{dz} z^2 D_\theta^2 \\
&= -2z D_\theta \left(\frac{z}{2} \theta \frac{d}{dz} - \frac{z}{2} \theta^2 D_\theta \frac{d}{dz} - \frac{q}{2} \theta^2 D_\theta - \frac{q}{2} \theta^2 z \frac{d}{dz} D_\theta \right) + q\theta^2 \frac{d}{dz} z^2 D_\theta^2 \\
&= -z^2 \frac{d}{dz} - z^2 \theta D_\theta \frac{d}{dz} - q^2 z^2 \theta D_\theta \frac{d}{dz} + q^2 z^2 \theta^2 D_\theta^2 \frac{d}{dz} - z \theta D_\theta + z \theta^2 D_\theta^2 - z^2 \theta \frac{d}{dz} D_\theta + \\
&\quad + z^2 \theta^2 D_\theta \frac{d}{dz} D_\theta + 2qz\theta^2 D_\theta^2 + qz^2 \theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta^2
\end{aligned}$$

burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ;

$$\begin{aligned}
\{Q_1, Q_2, Q_3\} &= -z^2 \frac{d}{dz} - z \theta D_\theta + z \theta^2 D_\theta^2 + 2qz\theta^2 D_\theta^2 \\
&= -z^2 \frac{d}{dz} - z(\theta D_\theta + \theta^2 D_\theta^2 + 2q\theta^2 D_\theta^2) \\
&= -z^2 \frac{d}{dz} - z(-q(2\theta^2 D_\theta^2 + D_\theta \theta^2 D_\theta)) \\
&= -z^2 \frac{d}{dz} - zL = X_1
\end{aligned}$$

bulunur.(4.27)'in üçüncü bağıntısı;

$$\{Q_1, Q_2, Q_3\} = Q_1 \{Q_2, Q_3\} + Q_2 \{Q_1, Q_3\} + Q_3 \{Q_1, Q_2\}$$

burada $Q_1 = D_\theta$, $Q_2 = -zD_\theta$, $Q_3 = \frac{q}{2}\theta^2 \frac{d}{dz}$ degerleri yerine yazılırsa

Eşitliğin sağ tarafındaki birinci ifadeyi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
Q_1\{Q_2, Q_3\} &= D_\theta \left\{ -zD_\theta, \frac{q}{2}\theta^2 D_\theta \right\} = D_\theta \left(-zD_\theta \left(\frac{q}{2}\theta^2 D_\theta \right) + \frac{q}{2}\theta^2 D_\theta (-zD_\theta) \right) \\
&= D_\theta \left(-z \frac{q}{2} (-q^2) \theta \frac{d}{dz} - z \frac{q}{2} q^2 \theta^2 D_\theta \frac{d}{dz} - \frac{q}{2} \theta^2 D_\theta - \frac{q}{2} z \theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta \right) \\
&= D_\theta \left(\frac{z}{2} \theta \frac{d}{dz} - \frac{q}{2} \theta^2 D_\theta + \frac{q^2}{2} z \theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta \right)
\end{aligned}$$

q-türev tanımını uygularsak;

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{2} \frac{d}{dz} + \frac{z}{2} q \theta D_\theta \frac{d}{dz} - \frac{q}{2} (-q^2) \theta D_\theta - \frac{q}{2} q^2 \theta^2 D_\theta^2 + \frac{q^2}{2} z (-q^2) \theta \frac{d}{dz} D_\theta + \frac{q}{2} z q^2 \theta^2 D_\theta \theta D_\theta \\
&= \frac{z}{2} \frac{d}{dz} + \frac{z}{2} q \theta D_\theta \frac{d}{dz} + \frac{\theta}{2} D_\theta - \frac{1}{2} \theta^2 D_\theta^2 - \frac{q}{2} z \theta \frac{d}{dz} D_\theta + \frac{1}{2} z \theta^2 D_\theta \frac{d}{dz} D_\theta \\
&= \frac{z}{2} \frac{d}{dz} + \frac{\theta}{2} D_\theta - \frac{1}{2} \theta^2 D_\theta^2 + \frac{q}{2} z \theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta^2
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer hesaplamalar ile sağ taraftaki ikinci ifade;

$$\begin{aligned}
Q_2\{Q_1, Q_3\} &= -zD_\theta \left\{ D_\theta, \frac{q}{2}\theta^2 \frac{d}{dz} \right\} \\
&= -zD_\theta \left(D_\theta \left(\frac{q}{2}\theta^2 \frac{d}{dz} \right) + \frac{q}{2}\theta^2 \frac{d}{dz} D_\theta \right) \\
&= \frac{1}{2} z \frac{d}{dz} + \frac{q}{2} z \theta^2 D_\theta^2 \frac{d}{dz}
\end{aligned}$$

bulunur.

Ve üçüncü ifade de;

$$\begin{aligned}
 Q_3 \{Q_1, Q_2\} &= \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \{D_\theta, -zD_\theta\} \\
 &= \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} (D_\theta (-zD_\theta) - zD_\theta D_\theta) \\
 &= -q\theta^2 D_\theta^2 - q\theta^2 z \frac{d}{dz} D_\theta^2
 \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu üç ifadeyi toplarsak;

$$\begin{aligned}
 \left\{ D_\theta, -zD_\theta, \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} &= z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \theta D_\theta - \frac{1}{2} \theta^2 D_\theta^2 - q\theta^2 D_\theta^2 \\
 &= z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} L \\
 &= \frac{1}{2} \left(2z \frac{d}{dz} + L \right) = \frac{1}{2} X_3
 \end{aligned}$$

Şimdi de (4.15) bağıntılarının gerçekleştiğini gösterelim

$$\begin{aligned}
 [Q_1, X_1] &= \left[D_\theta, -z^2 \frac{d}{dz} - zL \right] = \left[D_\theta, -z^2 \frac{d}{dz} \right] + [D_\theta, -zL] \\
 &= 0 + [D_\theta, -z]L + z[L, D_\theta] \\
 &= 0 + 0 - zD_\theta = Q_2
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 [Q_2, X_2] &= \left[-zD_\theta, \frac{d}{dz} \right] = -zD_\theta \frac{d}{dz} + \frac{d}{dz} (zD_\theta) \\
 &= D_\theta = Q_1
 \end{aligned}$$

(4.15)'nin üçüncü bağıntısı

$$\begin{aligned}
 [Q_1, X_3] &= \left[D_\theta, 2z \frac{d}{dz} + L \right] \\
 &= \left[D_\theta, 2z \frac{d}{dz} \right] + [D_\theta, L] \\
 &= 0 + D_\theta = Q_1
 \end{aligned}$$

bulunur.

4.2 Virasoro Cebiri

Hatırlandığı gibi Virasoro cebiri

$$[X_i, X_j] = (i - j)X_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad (4.32)$$

ile verilir. $A_3^1(S^2)$ Kesirsel süper uzayında, bu cebiri gerçekleyen iki Kesirsel süper Virasoro cebiri veriyoruz. Yukarıdaki cebiri, yeni Q_α elemanlarının eklenmesiyle genişletebiliriz. Burada $\alpha = \frac{1}{3} + j$ ya da $\alpha = \frac{2}{3} + j$, $j \in \mathbb{Z}$ dir.

$$X_j = -z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{3} z^j L, \quad (4.33)$$

$$Q_\alpha = \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} (D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz}) \quad (4.34)$$

Olmak üzere, aşağıdaki bağıntıları sağlarlar:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma\} = X_{\alpha+\beta+\gamma} \quad (4.35)$$

$$\{Q_\alpha, X_j\} = (\alpha - \frac{j}{3}) Q_{\alpha+j} \quad (4.36)$$

Gerçekten bu bağıntıların gerçekleştiğini gösterelim : İlk olarak (4.35) in gerçekleştiğini gösterelim. S_3 invariant formu kullanarak ;

$$\{Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma\} = \underbrace{Q_\alpha \{Q_\beta, Q_\gamma\}}_1 + \underbrace{Q_\beta \{Q_\alpha, Q_\gamma\}}_2 + \underbrace{Q_\gamma \{Q_\alpha, Q_\beta\}}_3 \quad (4.37)$$

Önce bir nolu bağıntıyı açık olarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) \left\{ \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\beta+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right), \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\gamma+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right\} \\ &= \underbrace{\left(\frac{q}{6} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right)}_A \times \\ &\quad \times \left(\left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right), z^{\gamma+\frac{1}{3}} D_\theta \right\} + \left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right), z^{\gamma+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} \right) \\ &= A \left(\left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} D_\theta, z^{\gamma+\frac{1}{3}} D_\theta \right\} + \left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz}, z^{\gamma+\frac{1}{3}} D_\theta \right\} + \left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} D_\theta, z^{\gamma+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ z^{\beta+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz}, z^{\gamma+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} \right) \end{aligned}$$

Yukarıda elde edilen ifadede her bir parça için önce süperkomütatör tanımını kullanır ve daha sonra da türev ve q-türev tanımlarını kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$= A \left(2z^{\beta+\gamma+\frac{2}{3}} D_{\theta}^2 + (\beta+\gamma+\frac{2}{3}) z^{\beta+\gamma-\frac{1}{3}} \theta^2 D_{\theta} - 2qz^{\beta+\gamma+\frac{2}{3}} \theta^2 D_{\theta} \frac{d}{dz} - 2q^2 z^{\beta+\gamma+\frac{2}{3}} \theta \frac{d}{dz} \right)$$

Buradan A 'nın yerine değeri yazılır, tekrar türev ve q-türev tanımları kullanılır ve $q^3 = 1$, $\theta^3 = 0$ değerleri kullanılırsa;

$$= -\frac{1}{3} z^{\alpha+\beta+\gamma+1} \frac{d}{dz} - \frac{1}{6} (\beta+\gamma+\frac{2}{3}) z^{\alpha+\beta+\gamma} L$$

elde edilir.

Benzer şekilde iki nolu ifade hesaplanırsa;

$$Q_{\beta} \{Q_{\alpha}, Q_{\gamma}\} = -\frac{1}{3} z^{\alpha+\beta+\gamma+1} \frac{d}{dz} - \frac{1}{6} (\alpha+\gamma+\frac{2}{3}) z^{\alpha+\beta+\gamma} L$$

ve üç nolu ifade de ;

$$Q_{\gamma} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = -\frac{1}{3} z^{\alpha+\beta+\gamma+1} \frac{d}{dz} - \frac{1}{6} (\alpha+\beta+\frac{2}{3}) z^{\alpha+\beta+\gamma} L$$

olur. Bulduğumuz bu üç sonucu (4.37)'de yerine yazarsak;

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}, Q_{\gamma}\} = -z^{\alpha+\beta+\gamma+1} \frac{d}{dz} - \frac{(\alpha+\beta+\gamma+1)}{3} z^{\alpha+\beta+\gamma} L$$

$$= X_{\alpha+\beta+\gamma}$$

bulunur.

Şimdi (4.36) bağıntısının gerçekleştiğini gösterelim;

$$[Q_\alpha, X_j] = \left[\sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right), -z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{3} z^j L \right]$$

komütatör tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned} &= \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} D_\theta \left(-z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{3} z^j L \right) + \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{d}{dz} \left(-z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{3} z^j L \right) + \\ &+ z^{j+1} \frac{d}{dz} \left(\sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) + \frac{j+1}{3} z^j L \left(\sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitliğin sağ tarafını hesaplarken (4.30), (4.31) tanımlarından faydalanarak ,

$$\begin{aligned} &- \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} z^{j+1} D_\theta \frac{d}{dz} - \sqrt[3]{\frac{q}{6}} \frac{j+1}{3} z^{\alpha+\frac{1}{3}} z^j D_\theta L + \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \theta^2 \left(-(j+1) z^j \frac{d}{dz} - z^{j+1} \frac{d^2}{dz^2} \right) + \\ &+ \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \theta^2 \frac{j+1}{3} \left(-j z^{j-1} L - z^j \frac{d}{dz} L \right) + z^{j+1} \sqrt[3]{\frac{q}{6}} \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) \left(z^{\alpha+\frac{1}{3}-1} D_\theta + z^{\alpha+\frac{1}{3}-1} \theta^2 \frac{d}{dz} \right) + \\ &+ z^{j+1} \sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{dz} D_\theta + \theta^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) + \sqrt[3]{\frac{q}{6}} \frac{j+1}{3} z^{j+\alpha+\frac{1}{3}} \left(L D_\theta + 2\theta^2 \frac{d}{dz} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifadeyi düzenleyip gerekli sadeleştirmeyi yaptığımızda;

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, X_j] &= \left(\alpha - \frac{j}{3} \right) \left(\sqrt[3]{\frac{q}{6}} z^{\alpha+j+\frac{1}{3}} \left(D_\theta + \theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) \\ &= \left(\alpha - \frac{j}{3} \right) Q_{\alpha+j} \end{aligned}$$

bulunur.

(4.32) nin başka genişlemesi de vardır ve bu cebir $\alpha, \beta = \frac{1}{2} + j$, $j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$X_j = -z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{2} z^j L, \quad (4.38)$$

$$Q_\alpha = z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta, \quad Q = \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \quad (4.39)$$

İle üretilir ve aşağıdaki bağıntıları sağlarlar:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta, Q\} = X_{\alpha+\beta} \quad (4.40)$$

$$[Q_\alpha, X_j] = \left(\alpha - \frac{j}{2}\right) Q_{\alpha+j} \quad (4.41)$$

$$[Q, X_j] = 0 \quad (4.42)$$

diğer üçlü bağıntılar sıfırdır. Gerçekten sırası ile bu bağıntıların sağlandığını gösterelim. (4.40) bağıntısı

$$\{Q_\alpha, Q_\beta, Q\} = Q_\alpha \{Q_\beta, Q\} + Q_\beta \{Q_\alpha, Q\} + Q \{Q_\alpha, Q_\beta\} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} Q_\alpha \{Q_\beta, Q\} &= z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta \left\{ z^{\beta+\frac{1}{2}} D_\theta, \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right\} \\ &= z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta \left(z^{\beta+\frac{1}{2}} D_\theta \left(\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \right) + \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \left(z^{\beta+\frac{1}{2}} D_\theta \right) \right) \\ &= z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta \left(-\frac{1}{2} z^{\beta+\frac{1}{2}} \theta \frac{d}{dz} + \frac{q}{2} \theta^2 \left(\beta + \frac{1}{2} \right) z^{\beta-\frac{1}{2}} D_\theta - \frac{q^2}{2} \theta^2 z^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} D_\theta \right) \end{aligned}$$

tekrar q-türev ve Leibnitz kuralını kullanıp gerekli sadeleştirme yapılırsa;

$$= z^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} z^{\beta+\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} - \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \theta z^{\beta-\frac{1}{2}} D_{\theta} + \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \theta^2 z^{\beta-\frac{1}{2}} D_{\theta}^2 - \frac{q}{2} z^{\beta+\frac{1}{2}} \theta^2 D_{\theta}^2 \frac{d}{dz} \right)$$

Benzer şekilde ;

$$Q_{\beta} \{Q_{\alpha}, Q\} =$$

$$= z^{\beta+\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} z^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \theta z^{\alpha-\frac{1}{2}} D_{\theta} + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \theta^2 z^{\alpha-\frac{1}{2}} D_{\theta}^2 - \frac{q}{2} z^{\alpha+\frac{1}{2}} \theta^2 D_{\theta}^2 \frac{d}{dz} \right)$$

ve

$$\begin{aligned} Q\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} &= \frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz} \left\{ z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_{\theta}, z^{\beta+\frac{1}{2}} D_{\theta} \right\} \\ &= q \theta^2 (\alpha + \beta + 1) z^{\alpha+\beta} D_{\theta}^2 + q \theta^2 z^{\alpha+\beta+1} \frac{d}{dz} D_{\theta}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu üç ifadeyi (4.43) bağıntısında yerine yazdığımızda ;

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha} Q_{\beta} Q\} &= -z^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} - \frac{\alpha+\beta+1}{2} z^{\alpha+\beta} \theta D_{\theta} + \frac{\alpha+\beta+1}{2} z^{\alpha+\beta} \theta^2 D_{\theta}^2 + q(\alpha+\beta+1) z^{\alpha+\beta} \theta^2 D_{\theta}^2 \\ &= -z^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} - \frac{\alpha+\beta+1}{2} z^{\alpha+\beta} L = X_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
[Q_\alpha, X_j] &= \left[z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta, -z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{2} z^j L \right] = \left[z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta, -z^{j+1} \frac{d}{dz} \right] + \left[z^{\alpha+\frac{1}{2}} D_\theta, -\frac{j+1}{2} z^j L \right] \\
&= (\alpha + \frac{1}{2}) z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} D_\theta - \frac{j+1}{2} z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} D_\theta L + \frac{j+1}{2} z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} L D_\theta \\
&= (\alpha + \frac{1}{2}) z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} D_\theta - \frac{j+1}{2} z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} D_\theta \\
&= (\alpha - \frac{j}{2}) z^{\alpha+j+\frac{1}{2}} D_\theta \\
&= (\alpha - \frac{j}{2}) Q_{\alpha+j}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
[Q, X_j] &= \left[\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz}, -z^{j+1} \frac{d}{dz} - \frac{j+1}{2} z^j L \right] = \left[\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz}, -z^{j+1} \frac{d}{dz} \right] + \left[\frac{q}{2} \theta^2 \frac{d}{dz}, -\frac{j+1}{2} z^j L \right] \\
&= \frac{q}{2} \left(\theta^2 \frac{d}{dz} \left(-z^{j+1} \frac{d}{dz} \right) + z^{j+1} \frac{d}{dz} \left(\theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) - \frac{q}{2} \frac{j+1}{2} \left(\theta^2 \frac{d}{dz} (z^j L) - z^j L \left(\theta^2 \frac{d}{dz} \right) \right) \\
&= \frac{q}{2} \left(\theta^2 \left(-(j+1) z^j \frac{d}{dz} - z^{j+1} \frac{d^2}{dz^2} \right) + z^{j+1} \theta^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) - \\
&\quad - \frac{q}{2} \frac{j+1}{2} \left(\theta^2 j z^{j-1} L + \theta^2 z^j \frac{d}{dz} L - 2 z^j \theta^2 \frac{d}{dz} - z^j \theta^2 L \frac{d}{dz} \right)
\end{aligned}$$

Yukarıda $\theta^3 = 0$ değeri kullanılır ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa;

$$[Q, X_j] = 0$$

bulunur.

EK-A**HOPF CEBİRLERİ**

Tanım Bir A cebiri üzerinde tanımlanan $m, \Delta, \varepsilon, S$ işlemleri aşağıdaki özdeşlikleri sağlıyorsa bu cebire Hopf cebiri denir. Bu işlemler [6]

$$\begin{aligned}
 \text{Çarpım} & : m : A \otimes A \rightarrow A \\
 \text{Ko-çarpım} & : \Delta : A \rightarrow A \otimes A \\
 \text{Ko-birim} & : \varepsilon : A \rightarrow C \\
 \text{Antipod} & : S : A \rightarrow A
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

ile verilir ve aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \otimes id) \circ \Delta &= (id \otimes \Delta) \circ \Delta \\
 (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta &= (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id \\
 m \circ ((S \otimes id) \circ \Delta) &= m \circ ((id \otimes S) \circ \Delta) = 1\varepsilon
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

Örnek:

A , $SL(2, C)$ üzerindeki polinomların cebiri olsun. A , $xy - uv = 1$ bağıntısını sağlayan x, u, v, y kompleks sayıları ile üretilir. A üzerindeki ko-cebir yapısı:

ko-çarpım:

$$\begin{aligned}
 \Delta(x) &= x \otimes x + u \otimes v & \Delta(u) &= x \otimes u + u \otimes y \\
 \Delta(v) &= v \otimes x + y \otimes v & \Delta(y) &= y \otimes y + v \otimes u
 \end{aligned} \tag{A-3}$$

antipode:

$$S(x) = x \quad S(u) = -u \quad S(v) = -v \quad S(y) = y \quad (\text{A-4})$$

ve ko-birim:

$$\varepsilon(x) = 1 \quad , \quad \varepsilon(u) = 0 \quad , \quad \varepsilon(v) = 0 \quad , \quad \varepsilon(y) = 1 \quad (\text{A-5})$$

ile verilir.

Örnek:

A yı üreten x, u, v, y kompleks değişkenleri kuantizasyondan sonra aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$\begin{aligned} uv = vu \quad , \quad ux = qxu \quad , \quad vx = qxv \quad , \quad yu = quy \quad , \quad yv = qvy \\ xy - q^{-1}uv = 1 \quad , \quad yx - quv = 1 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

Böylece cebir değişmeli olmayan bir cebire dönüşür ve bu cebir üzerinde ko-çarpım:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes x + u \otimes v & \Delta(u) &= x \otimes u + u \otimes y \\ \Delta(v) &= v \otimes x + y \otimes v & \Delta(y) &= y \otimes y + v \otimes u \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

ko-birim:

$$\varepsilon(x) = 1 \quad , \quad \varepsilon(u) = 0 \quad , \quad \varepsilon(v) = 0 \quad , \quad \varepsilon(y) = 1 \quad (\text{A-8})$$

ve antipode:

$$S(x) = y \quad S(u) = -qu \quad S(v) = -q^{-1}v \quad S(y) = x \quad (\text{A-9})$$

ile verilir.

$A(G)$ Hopf Cebirinin Duali:

$A(G)$ ye dual Hopf cebiri, $m_u, \Delta_u, \varepsilon_u, S_u$ işlemleri ile tanımlanan $U(g) = \text{Hom}(A(G), C)$ lineer fonksiyonellerinin vektör uzayıdır. Bu işlemler aşağıdaki bağıntılar ile tanımlanır:

$$(m_u(\phi \otimes \phi'), f) = (\phi \otimes \phi', \Delta(f))_2 \quad (\text{A-10})$$

$$(\Delta_u(\phi), f \otimes f')_2 = (\phi, m(f \otimes f')) \quad (\text{A-11})$$

$$(S_u(\phi), f) = (\phi, S(f)) \quad (\text{A-12})$$

$$(1_u, f) = \varepsilon(f) \quad (\text{A-13})$$

$$(\phi, 1) = \varepsilon_u(\phi) \quad (\text{A-14})$$

Burada $\forall \phi, \phi' \in U(g)$ ve $f, f' \in A(G)$ ve eğer G bir lie grubu ise $U(g)$, g lie cebirinin evrensel zarf cebiridir [6].

Örnek :

$U(sl(2, C))$ Hopf cebiri aşağıdaki komütasyon bağıntıları ve ko-cebir yapısını sağlayan E_+, E_- ve H ile üretilir [17]:

$$[H, E_{\pm}] \equiv \pm 2E_{\pm} \quad , \quad [E_+, E_-] \equiv H \quad (\text{A-15})$$

ko-cebir yapısı:

$$\Delta_u(E_{\pm}) = E_{\pm} \otimes 1 + 1 \otimes E_{\pm}$$

$$\Delta_u(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_u(E_{\pm}) &= 0 & \varepsilon_u(H) &= 1 \\
S_u(E_{\pm}) &= -E_{\pm} & S_u(H) &= -H
\end{aligned}
\tag{A-16}$$

ile verilir.

Ve duallik bağıntıları da:

$$\begin{aligned}
\langle E_+^n E_-^m H^k, u^s v^t x^l \rangle &= n! m! l! \delta_{ns} \delta_{mt} \delta_{kl} \\
\langle E_+^n E_-^m H^k, u^s v^t y^l \rangle &= -n! m! l! \delta_{ns} \delta_{mt} \delta_{kl}
\end{aligned}
\tag{A-17}$$

ile verilir.



KAYNAKLAR

- [1] RAUSH DE TRAUNBENBERG , M. AND SLUPINSKI, M., (2000)., "Fractional supersymmetry and Fth-roots of representations," J. Math. Phys., 41, 4556.
- [2] RAUSH DE TRAUNBENBERG, M. , "Fractional supersymmetri and Lie algebras", arXiv:hep-th/0007150.
- [3] DE VITT, B., (1984)., "Supermanifolds", Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [4] KOSTANT, B., (1977). "Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, " in Lecture Notes in Mathematics, Spriger Verlag, New York, vol. 570, 177 .
- [5] BATCHELOR,M., (1980)., Tran. Am. Math. Soc., 258, 257 .
- [6] VILENKIN, N.YA. and KLIMYK, A.U., (1991)., " Representations of Lie Groups and Special Functions", vol 3, Kluwer Academic Press, The Netherland.
- [7] AHN, C., BERNARD, D. and LECLAIR, A., (1990)., "Fractional supersymmetries in perturbed coset CFT and integrable solition theory", Nucl. Phys., B 346, 409
- [8] RAUSH DE TRAUNBENBERG, M. and SLUPINSKI, M.J., (1997)., Mod. Phys. Lett. A, 39, 3051.
- [9] KERNER, R., (1992)., "Z-graded algebras and the cubic root of supersymmetry translations.", J. Math. Phys., 33, 403 .
- [10] ABRAMOV, V., KERNER, R. and LE ROY, B., (1997)., "A Z-graded generalization of supersymmetry", J. Math. Phys., 38, 1650.
- [11] DE AZCARRAGA, J.A. and MACFARLANE, M.J., (1996)., "Group theoretical foundations of fractinal supersymmetry.", J. Math. Phys., 37, 1115.
- [12] DURAND, S., (1992)., Mod. Phys. Lett., A7, 2905.
- [13] AHMEDOV, H. and DAYI, Ö.F., (1999)., " SL(2,R) at roots of unity.", J. Phys. A, 32, 1895.
- [14] AHMEDOV, H. and DAYI, Ö.F., (1999)., "Two dimensional fractional supersymmetry from the Quantum Poincare group at roots of unity.", J.Phys. A.32.6247.
- [15] AHMEDOV, H. and DAYI, Ö.F., (2000)., "Non -abelian Fractional supersymmetry in two dimensions." , Mod.Phys.Lett.A,15.,29,1801.

- [16] AHMEDOV, H., (2000)., Turkish J.Phys.,24.3,175.
- [17] VILENKIN, N.YA. and KLIMYK, A.U., (1991)., "Representations of Lie Groups and Special Functions", vol 1, Kluwer Academic Press, The Netherland .
- [18] GREEN, M.B., SCHWARZ, J.H.and WITTEN, E., (1987)., "Superstring theory", vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York.
- [19] HORSLEY, R., (1978)., " The group theoretic structure of the dual current vertex.", Nucl. Phys. B 138, 474.
- [20] HORSLEY, R., (1978)., "Some isomorphic function and Fock space representations of the dual model superconformal group.", Nucl.Phys.B138, 493.
- [21] JAMES GATES, S., GRISARU, M.T., ROCEK, M., SIEGEL, W., (1983).,"Superspace" , Cummings Publishing Company, INC. Massachusetts.
- [22] AHMEDOV, H., (1998)., "Representations of Quantum Groups and Their Applications: special case of $SU_q(2)$ and $E_q(2)$ ", Ph. D, Boğaziçi Univ.
- [23] LE ROY, B., (1996)., "Z-graded generalization of supersymmetries.",J. Math.Phys.,37,1.
- [24] WON-SANG CHUNG, (1994)., "Quantum Z-graded space.", J.Math.Phys., 35 , 5.

ÖZGEÇMİŞ

Yasemen Uçan 1967 yılında Silivri’de doğdu.İlköğrenimini Çanta Köyü İlkokulu’nda,orta ve lise öğrenimini Silivri Lisesi’nde tamamladı.1985 Ö.S.Y.S sınav sonuçlarına göre Trakya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’nde okumaya hak kazandı.1989 yılında mezun olup aynı yıl T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı.1990 yılında T.Ü, Fen Edebiyat Fak. Arş.Gör. kadrosu ile Matematik Bölümü’nde Araştırma görevlisi oldu. Şubat 1992 yılında Yüksek Lisans’ı tamamladı. Eylül 1992’de T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü ,Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora yapmaya hak kazandı.

Şubat 1999’da Y.T.Ü,Kimya-Metalurji Fakültesi Kadrosu ile Matematik Mühendisliği Bölümü’nde Arş.Gör. olarak çalışmaya başladı ve halen bu görevdedir.

