

**TERMOELASTİK KOŞULLAR ALTINDA İKİ ELASTİK
KATI KARIŞIMI İLE İLGİLİ ANALİTİK ÇÖZÜMLER**

100762

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. M. Salih DOKUZ

(503930006012)

100762

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 Eylül 1999

Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Mart 2000

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN İÇİŞLERİ MERKEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İhsan T. GÜRGÖZE

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cemil ERKMAN (İ.T.Ü.)

: Prof. Dr. Yılmaz ÖZTÜRK (İ.T.Ü.)

: Prof. Dr. Uğur GÜVEN (Y.T.Ü.)

: Doç. Dr. Günay ANLAŞ (B.Ü.)

MART 2000

ÖNSÖZ

Karışımlar teorisi gaz, sıvı veya katı ortamların herhangi bir kombinasyonda bir araya gelmesi neticesinde oluşan yapıların davranışlarını belirlemekle uğraşır. Bu kapsamda elastik katı karışımları için de çeşitli termomekanik modeller ortaya konmuştur. Elastik katılardan oluşan ortamlar özellikle endüstride önemli bir yere sahiptir. Çeşitli uygulamalar için malzemeden beklenen değişik mekaniksel özellikleri genellikle tekil bir yapının verememesi nedeniyle alaşımlar ve kompozit malzemeler konusundaki araştırmalara önem verilmektedir.

Elastik katılardan oluşan karışımlar, her ne kadar karışımı oluşturan bileşenlerin davranışları birbirlerinden farklı olsa da, dışarıdan bakıldığında tekil bir elastik cisim gibi davranırlar. Bu durum, ortam bir bütün olarak ele alındığında, tekil ortamlar için geliştirilmiş olan çözüm metotlarının karışımın da davranışını belirlemekte kullanılabileceğini düşündürmektedir.

Bu çalışmaya karışımın tümü için kullanılabilecek olan metotların karışım bileşenleri için de kullanılabilir olup olmadığını inceleyen bir araştırma gözüyle bakmak mümkündür. Çalışmada elastisite ve termoelastisite teorilerindeki bazı çözüm metotları kullanılarak karışımı oluşturan bileşenlerin davranışlarını verecek olan bağıntılar formüle edilmekte ve çeşitli uygulamalar ele alınmaktadır.

Karışımlar teorisine ilgimi çeken, temel kavramları bana öğreten ve tüm çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. İhsan T. Gürgöze' ye ve cesaret verici telkinlerinden dolayı bütün çalışma arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 1999

M. Salih Dokuz

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Yapılan Çalışmalar	2
1.2. Çalışmanın Amacı ve İçeriği	6
2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER	8
2.1. Karışımın Kinematığı	8
2.2. İki Elastik Katı Karışımı İçin Lineer Bünye Denklemleri	10
3. SICAKLIK ALANININ İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI ÜZERİNDEKİ ETKİSİ İLE İLGİLİ ANALİTİK ÇÖZÜMLER VE KÜRESEL SICAKLIK ALANI İÇİN BİR UYGULAMA	16
3.1. Yer Değiştirme Potansiyelleri ve Sınır Şartları	16
3.2. Küresel Bir Sıcaklık Alanı Etkisi Altında İki Elastik Katı Karışımı	21
3.3. Özel Bir Küresel Sıcaklık Alanı İçin Uygulama	29
3.4. İki Elastik Katı Karışımı İçin Betti Karşıtlık Teoremi	33
3.5. İki Elastik Katı Karışımı İçin Maysel Formülü	36
3.6. Küresel Sıcaklık Alanı Problemi İçin Maysel Formülünün Kullanılması	39
4. İZOTERMAL KOŞULLAR ALTINDA İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İLE İLGİLİ PAPKOVICH-NEUBER ÇÖZÜMÜ VE KELVIN PROBLEMİ	46
4.1. Genelleştirilmiş Navier Denklemleri	47
4.2. Papkovich-Neuber Metoduyla Çözüm	50
4.3. Kelvin Problemi İçin Uygulama	53

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	65
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	72



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Karışımda şekil değiştirme.....	9
Şekil 3.1 : Küresel sıcaklık alanı kabulü.....	21
Şekil 3.2 : $u(R)$ ve $v(R)$ fonksiyonlarının değişimleri.....	32
Şekil 3.3 : σ_{RR} ve π_{RR} gerilme bileşenlerinin değişimleri.....	32
Şekil 3.4 : $\sigma_{\Theta\Theta} = \sigma_{\Phi\Phi}$ ve $\pi_{\Theta\Theta} = \pi_{\Phi\Phi}$ gerilme bileşenlerinin değişimleri..	33
Şekil 3.5 : Yayılı birim kuvvetlerin etkisine maruz küresel bir yüzey.....	39
Şekil 4.1 : Kelvin problemi.....	53
Şekil 4.2 : Yer değiştirme vektörlerinin u_R ve v_R bileşenlerinin değişimleri.....	63
Şekil 4.3 : Yer değiştirme vektörlerinin u_Φ ve v_Φ bileşenlerinin değişimleri.....	63
Şekil 4.4 : σ_{RR} ve π_{RR} gerilme bileşenlerinin değişimleri.....	64
Şekil 4.5 : $\sigma_{\Phi\Phi} = \sigma_{\Theta\Theta}$ ve $\pi_{\Phi\Phi} = \pi_{\Theta\Theta}$ gerilme bileşenlerinin değişimleri...	64
Şekil 4.6 : $\sigma_{R\Phi}$ ve $\pi_{R\Phi}$ gerilme bileşenlerinin değişimleri.....	64
Şekil 4.7 : Difüzyon kuvveti vektörü bileşenlerinin değişimleri.....	64

SEMBOL LİSTESİ

a	: Isıtılmış bölgenin yarıçapı
$C_1, \dots, c_1, \dots$	: İntegrasyon sabitleri
dS^*, dV^*	: Birim yarıçaplı küre için yüzey ve hacim elemanları
E	: Young modülü
$e_{ik}, g_{ik}, \varepsilon_{ik}$	: Şekil değiştirme tansörleri
e_1, e_2, e_3	: Kartezyen koordinatların birim vektörleri
e_R, e_Φ, e_Θ	: Küresel koordinatların birim vektörleri
$f^{(\xi)}$	: ξ numaralı bileşenin ivme vektörü
F_k, G_k	: Kütle kuvveti vektörleri
$H(x)$	: Heaviside fonksiyonu
$L(\xi_r, x_r)$	: ξ_r ve x_r noktaları arasındaki uzaklık
n_k	: Birim dış normal vektör
P	: P tekil yükünün şiddeti
P, P_1, P_2	: Karışımın ve karışım bileşenlerinin taşıdıkları tekil yükler
$P_i^{(1)}, P_i^{(2)}$	: Yüzey kuvvetleri
R	: Konum vektörü
R, Φ, Θ	: Küresel koordinat değişkenleri
t	: Zaman
$t_1^{(n)}, t_2^{(n)}$	: Gerilme vektörleri
T	: Sıcaklık değişimi
u_k, v_k	: Yer değiştirme vektörleri
u_s, v_s	: Yer değiştirme vektörlerinin solenoidal kısımları
u_{ir}, v_{ir}	: Yer değiştirme vektörlerinin irrotasyonel kısımları
$w_{ik}^{(1)}, w_{ik}^{(2)}$	: Yer değiştirme gradyanlarının antisimetrik kısımları
$w, w^{(\xi)}$	: Karışımın ve ξ numaralı bileşenin hız vektörleri
x	: Karışım bileşenlerinin ortak uzaysal konumu
$X^{(\xi)}$	: ξ numaralı bileşenin maddesel konumu
Λ	: Bileşenlerin taşıdıkları yükler arasındaki oran
Ψ	: Vektörel potansiyel fonksiyon
α_T	: Lineer ısı genleşme katsayısı
δ_{ik}	: Kronecker deltası
$\delta(x)$	: Dirac delta fonksiyonu
ϕ, ϕ_1, ϕ_2	: Skaler potansiyel fonksiyonlar
ϕ_{01}, ϕ_{02}	: Keyfi harmonik fonksiyonlar
$\gamma, \dots, \lambda_1, \dots, \mu_1, \dots$	: Karışım için malzeme sabitleri
φ, ψ	: Yer değiştirme potansiyelleri

$\kappa^{(i)}, \eta^{(i)}$	: Genleşme fonksiyonları
λ, μ	: Lamé sabitleri
ν	: Poisson oranı
π	: Pi sayısı
π_k	: Difüzyon kuvveti vektörü
θ_0, θ	: Karışımın maddesel ve uzaysal konumlardaki sıcaklıkları
$\rho, \rho_{(\xi)}$	: Karışımın ve ξ numaralı bileşenin yoğunlukları
$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$	: Karışım bileşenlerinin ilk andaki sabit yoğunlukları
$\sigma_{ik}, \pi_{ik}, t_{ik}$	: Gerilme tansörleri
∇	: Gradyan operatörü



TERMOELASTİK KOŞULLAR ALTINDA İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İLE İLGİLİ ANALİTİK ÇÖZÜMLER

ÖZET

İki veya daha fazla malzemenin birbirleri içerisinde difüzyona uğramaları sonucunda oluşan ortama karışım adı verilmektedir. Bu anlamda astrofiziksel, jeolojik veya biyolojik pek çok doğal oluşum karışım kavramının kapsamına girmektedir. Ancak, sadece doğal ortamların davranışını belirleme ihtiyacı değil, aynı zamanda, gelişen teknoloji de karışım konusu ile ilgilenmeyi gerekli kılmaktadır. Tekil malzemelerin ihtiyacı karşılayamadığı yerlerde kullanmak amacıyla geliştirilen yeni tür malzemeler karışımların davranışını duyarlı bir şekilde belirlemeyi teknolojik bir zorunluluk haline getirmiştir.

Bu çalışmada, gerçekte tekil malzemeler için geliştirilmiş olan elastisite ve termoelastisite teorilerindeki bazı çözüm metotlarının iki lineer elastik katıdan oluşan bir karışım için de uygulanabilir olup olmadığı incelenmekte ve karışım için yer değiştirme problemleri ele alınmaktadır. Çalışmada aynı zamanda verilen çözümlerin kullanıldığı uygulamalara da yer verilerek bu yöndeki girişimlere katkıda bulunmaktadır. Karışımlar teorisinin temel kabullerinin ve iki elastik katı karışımına ilişkin lineer bünye denklemlerinin verildiği bölüm dışında çalışma sıcaklık ve kuvvet tesiriyle oluşan yer değiştirmelerin incelendiği iki ana bölüme ayrılmaktadır.

Sıcaklık alanının etkisinin incelendiği ilk kısımda yer değiştirme potansiyeli tanımı kullanılarak her bileşenin yer değiştirmesini yöneten iki ayrı diferansiyel denklem elde edilmekte ve gerekli sınır şartları hesaplanmaktadır. Hesaplar küresel sıcaklık alanı problemine uygulanarak ısıtılmış bölgenin sınırını oluşturan süreksizlik yüzeyi üzerinde yer değiştirmelerin ve radyal doğrultudaki gerilmelerin sürekli kalması koşulu altında çözüm verilmektedir. Bu bölümde aynı zamanda iki elastik katı karışımı için Betti karşılıklı teoremi ve Maysel formülünün genelleştirilmiş formları da araştırılmaktadır.

Kuvvet etkisinin incelendiği ikinci kısımda ise Helmholtz teoremi yardımıyla iki adet Navier denklemi benzeri ifadeye ulaşılmakta ve bu denklemlerin çözümleri elastisite teorisinden Papkovitch-Neuber metodu olarak bilinen yöntemle harmonik vektör ve harmonik fonksiyonlar cinsinden elde edilmektedir. Daha sonra tekil bir yükün etkisinin incelendiği Kelvin problemi ele alınarak, her bileşene ait denge denklemleri yardımıyla, karışım bileşenlerinin taşıdıkları yük miktarları ve ortama ilişkin yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti alanları hesaplanmaktadır.

Çalışma karışım bileşenlerinin yer değiştirmelerini yöneten diferansiyel denklemlerin klâsik elastisite ve termoelastisite teorilerindekilerle şekilsel olarak benzerliğini ortaya koymuş ve bu nedenle burada ele alınan ve esas olarak tekil bir elastik malzeme için geliştirilmiş olan çözüm metotlarının iki lineer elastik katı karışımı için de kullanılabileceği sonucunu vermiştir.

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR A MIXTURE OF TWO ELASTIC SOLIDS UNDER THERMOELASTIC CONDITIONS

SUMMARY

A continuum that consists of two or more materials mutually diffused through each other is defined as a mixture. Most bodies, astrophysical, geological and biological are, in the spirit of the above definition, mixtures in which two or more constituents co-exist. However, not only the need of the determination of the behaviour of natural environments, but also the advanced technology, make the study of the theory of mixtures necessary. Because of the fact that materials of new kind are used in some areas instead of single materials that are not enough for our expectations, sensitive determination of the behaviour of the mixtures has been a technological obligation.

In this study, the applicability of some methods of the theories of elasticity and thermoelasticity for a mixture of two elastic solids are investigated and displacement problems for the mixture are considered. In addition, applications of the given solutions are included in the study to give some help to attempts in this way. Except for the chapter where fundamental assumptions in the theory of mixtures and linear constitutive equations for a mixture of two elastic solids are given, the study consists of two major parts where the effects of temperature and force on displacements are studied.

In the first part that is related to the effect of the temperature field, with the help of displacement potential definition, two differential equations which govern the displacements of each constituent are obtained and necessary boundary conditions are examined. By applying the obtained results to spherical thermal inclusion problem, the solutions are made under the condition that the continuity is valid for the displacement vectors and the radial stresses on the surface which enclose the spherical temperature field. At the same time, in this section, the generalized forms of Betti reciprocal theorem and Maysel formula for a mixture of two elastic solids are investigated.

In the second major part, the effect of force on the mixture is studied. Firstly, two equations in the similar form of Navier's equations are obtained by using the Helmholtz's theorem, and then with the help of Papkovitch-Neuber method of the theory of elasticity, the solutions of these equations are developed in terms of harmonic vectors and harmonic functions. Furthermore, the Kelvin problem that interest in the effect of a single force acting in the interior of the mixture is considered and taking into account the equilibrium equations, the rate of single forces and the fields of displacements, stresses and diffusive force are obtained for each constituent.

The study has shown that the differential equations, which govern displacements of constituents of the mixture, are formally the same with ones of the classical theories of elasticity and thermoelasticity. Therefore, the solution methods considered in this study which essentially have been developed for a single elastic solid can be used for a mixture of two elastic solids.



1. GİRİŞ

Farklı davranış biçimleri sergileyen ortamların mekaniğine olan ilginin tarihsel geçmişi oldukça eskilere dayanır. İlk dönemlerdeki yaygın kanı akışkan ve elastik katı gibi farklı tipteki maddesel cisimler arasında hiçbir ilişkinin olmadığı şeklindeydi. Fakat sürekli ortamlar mekaniği 17. yüzyıldan itibaren yaşadığı hızlı gelişmenin neticesi olarak şekil değiştiren ortamlar için ortamın tipinden bağımsız genel bir yaklaşım sunmayı başarmıştır. Bunun bir sonucu olarak benzer veya farklı davranış biçimleri gösteren birden fazla maddesel cismin bir arada bulunmasıyla oluşan ve karışım olarak tanımlanan yapının da sürekli ortamlar mekaniğini baz alan bir yaklaşımla incelenmesi mümkün olmaktadır. Bu yaklaşıma özel olarak karışımlar teorisi adı verilmektedir.

Karışımlar teorisi iki veya daha fazla maddenin birbirleri içerisinde difüzyona uğraması sonucunda oluşan ortamın mekanik davranışını belirlemekle uğraşan bilimsel bir alandır. Bir maddesel cismin karışım olarak nitelendirilebilmesi ortamı oluşturan bileşenlerin her birinin ortamın davranışları üzerinde kabul edilebilir bir tesirinin var olmasını gerektirir. Eğer bileşenlerden birinin etkisi yanında diğerlerinin etkileri ihmal edilebilecek mertebede ise bu durumda ortama baskın olanın tekil malzemesi gözüyle bakılabilir. Ancak bileşenlerden hiç birinin etkisinin diğerlerine göre ihmal edilemeyeceği sayısız durumlar da söz konusudur. Örneğin; biyolojik doku ve kaslar, kan, içinde petrol, su veya gaz barındıran toprak ve gözenekli kayalar, gaz karışımları, alaşımlar, kompozit malzemeler ilk akla gelen örneklerdir. Atmosferin üst katmanlarındaki gazlar gibi sürekli ortam kapsamına girmeyen karışımlar ise ayrı bir teorik yaklaşım gerektirirler.

Karışımlar sadece jeolojik veya biyolojik değil teknolojik sahada da çözülmesi gereken problemlerle karşımıza çıkmaktadır. Endüstrideki gelişmelere paralel olarak malzeme özelliklerine dair beklentilerin de artması ve tekil bir malzemenin bu beklentileri yerine getiremediği birçok durum sebebiyle çok bileşenli maddelerle

ilgili araştırmalar teknolojik bir ihtiyaç haline gelmiştir. Bunlara rnek olarak mukavemet/ağırlık oranı yüksek olan malzemelerin üretilmesi (uçak ve uzay endüstrisi), ilve katkı maddeleriyle mineral yağların özelliklerinin geliştirilmesi ve metal işleme sürecinde kullanılan su-yağ karışımları verilebilir. Bazı durumlarda ise isteyerek veya istemeyerek ortaya çıkan karışım problemleri dizayna tesir etmektedir. Buhar trbınlerinde kullanılan yağlayıcıların su ile karışması, petrol kuyularında sıklıkla aynı anda üretilen su veya gaz sebebiyle oluşan iki veya üç fazlı akışlar, hidrolik tarama sistemleri ve boru hatları ile taşıma bu türden sayılabileceklerden bazılarıdır.

1.1 Yapılan alışmalar

Araştırmalar çok fazlı malzemelerin teorik tanımlarına ayrı bir önem verildiğini ve baz alınabilecek teorik bir çerçevenin formülasyonu için gayret sarf edildiğini göstermektedir. Bu bağlamda bileşenler arasındaki difüzyonu tanımlamayı amaçlayan ilk alışmalar Fick, Darcy ve Stefan tarafından yapılmıştır [1, 2]. Bu çalışmalarda karışımlar teorisinin halen geçerli olan temel kabulü ortaya konmuş ve karışımın her biri kendi hareketini yapan n adet tekil ortamın bir süperpozisyonu olarak düşünülebileceği ifade edilmiştir. Ancak ngrlen kanunlar difüzyon sürecindeki bazı önemli bilgileri verme konusunda oldukça yetersizdir. Örneğin bu kanunları kullanarak katı bileşendeki gerilme ve şekil değiştirmeyi veya akışkanın akım alanını bulmak mümkün değildir. Hlbuki bu tür bilgiler katı malzemede çatlama, kopma veya başka tür tahribatların ortaya çıktığı durumlarda kritik bir öneme sahiptir. Bu yetersizlikler modern sürekli ortamlar mekaniğinin çok bileşenli malzemelere uygulanmasıyla aşılmıştır.

Karışımlar teorisinin modern safhasının 1957' de Truesdell tarafından ortaya konan ve daha sonra Truesdell ve Toupin [3] tarafından yeniden gözden geçirilen çalışmalarla başladığı kabul edilmektedir. Truesdell, gazların kinetik teorisinden etkilenerak, sezgiye ve mekanik düşüncelere dayanan bir teoriyle difüzyon hakkındaki çeşitli çalışmaların sınırlarını incelemiştir. Karışım bileşenlerine ait kısmi gerilme tansörlerinin simetrik olmamasına imkân tanıyan çalışmalarında her bileşen için korunum yasalarını yerel formda yazmış ve daha sonra karışımın tümü için geçerli olan denge denklemlerini bulmak amacıyla bunları bir araya getirmiştir.

Daha sonra Kelly [4] elektromagnetik etkileri de dikkate alarak bu çalışmaların bir genelleştirmesini yapmıştır. Aynı yaklaşımın devamı olarak Adkins [5], sıkıştırılabilir ve Newtonian olmayan akışkanların karışımlarının kararlı akışlarını inceleyerek, dönmekte olan eş eksenli silindirler arasındaki akış ile ilgili hesaplar vermiştir.

1963' e dek karışımlar bir tarafa tekil bir ortamın bile termodinamiği konusunda fikir ayrılıkları söz konusuydu. Coleman ve Noll [6] yaptıkları çalışmayla termodinamiğin ikinci aksiyomunun tekil malzemeler için rolü ve getirdiği kısıtlamalar ile ilgili soruları cevaplamış ve uygun bir form ortaya koymuşlardır. Eringen ve Ingram [7], Green ve Naghdi [8], Bowen [9] ve Müller [10] bu yaklaşımı karışımlar teorisine uygulayarak ilk karışım termodinamiği formülasyonlarını vermişlerdir.

Daha önce konu hakkında hazırlanmış raporlara ve verilen konferanslara rağmen Eringen ve Ingram [7] tekil bir ortamın termodinamiği için önerilen yaklaşımları karışımlar teorisine uyarlayan ilk araştırmacılarıdır. Karışım bileşenlerinin farklı sıcaklıklara sahip olmalarına imkân veren bu çalışma karışımların termomekanik teorisinin formülasyonu konusunda ilk gerçek girişim olarak kabul edilmektedir [1].

Aynı yıllarda Truesdell' in düşünce tarzından kısmen farklı bir metotla Green ve Naghdi [8] tarafından bileşenleri aynı sıcaklığa sahip ikili bir karışım için termodinamik bir teori sunulmuştur. Burada, genel teori için bir gereklilik arz etmediğini ve bir çok fikrîsel zorluklara da sebep olacağını ileri sürerek, iç enerji, iç ısı kaynağı, entropi ve yüzeyden geçen ısı akısı fonksiyonlarını karışımın her bir bileşeni için değil tüm karışım için tanımlamışlardır. Çalışma bileşenlere ait kısmî gerilme tansörlerinin simetrik olmak zorunda olmadığı fakat toplamalarının simetriklik şartını sağladığı sonucunu vermiştir. Aynı çalışmada ortaya konan formu kullanan Green ve Steel [11], katı-akışkan ve katı-katı karışımları için temel bünye denklemlerini verdikten sonra, katı-akışkan karışımı için geçerli olan denklemlerin lineer hallerini elde etmişlerdir. Katı-katı karışımının bünye denklemlerinin lineer halleri ise daha sonra Steel [12] tarafından verilerek karışım içerisindeki dalga hareketleri ile ilgili uygulamalar yapılmıştır. Teoriyi önce sıkıştırılmaz iki Newtonian akışkan karışımına uygulayan Mills [13], daha sonraki çalışmasında, bir elastik katı ve çok sayıdaki Newtonian akışkandan oluşan bir karışım için

genelleştirmiş ve izotropik bir rijit katı cisim içerisinde ikili bir gaz karışımının kararlı akışı için bir uygulamasını yapmıştır [14].

Bowen [9], Green ve Naghdi tarafından verilen formülasyonun aynı sıcaklığa sahip iki akışkan problemi durumunda çok özel sonuçlar verdiğini ileri sürerek farklı bir yaklaşım önermiştir. Coleman ve Noll tarafından geliştirilen metoda benzer bir yol izleyerek denge halindeki bir karışımda karışım bileşenlerine ait kısmî serbest enerji yoğunluğu fonksiyonlarının diğer bileşenlerin deformasyonlarından bağımsız olmalarına imkân veren bir formülasyon ortaya koymuştur. Çalışmasında akışkan karışımları söz konusu olduğunda böyle bir bağımlılığın deney sonuçlarıyla çelişkiye sebep olacağını ifade etmiştir.

Bu ve daha önceki teorik çalışmaları eleştiren Müller [10] ise Truesdell' in ortaya koyduğu modeli temel alarak hem fiziksel olarak anlamlı hem de klâsik termostatik ile tutarlı bir teori vermeye çalışmış ve iki akışkan karışımı için sekiz prensibe dayandırdığı termodinamik bir teori sunmuştur. Müller' in formülasyonunun önemli bir özelliği, kabul edilebilir bir genel karışım teorisi için, bünye değişkenleri arasında yoğunluk gradyanlarının da dahil edilmesi gerekliliğini ortaya koyan ilk çalışma olmasıdır [15]. Burada ortaya konan yaklaşımın bir devamı olarak, farklı sıcaklıklara sahip ve kimyasal olarak etkileşen iki gazdan oluşan bir karışım Dunwoody ve Müller [16] tarafından incelenmiştir. Bedford ve Ingram [17] ise aynı düşünce tarzını jeoloji ve biyomekanikte öneme sahip olan akışkanla dolu gözenekli ortamlar konusuna uyarlamıştır.

Elastik katıların karışımından hareketle kompozit malzemeler için bir teori Bedford ve Stern [18] tarafından verilmiştir. Bu teoride öncekilerden farklı olarak karışım bileşenlerinin uzaysal değil maddesel konumda aynı yeri işgal ettikleri kabul edilmekte ve bünye bağımsız değişkenlerinden olan bağıl hız yerine bağıl yer değiştirme alanı kullanılmaktadır [19, 20]. Teori daha sonra Pop ve Bowen [21] tarafından geliştirilerek uzun menzilli elastik etkileşimleri içeren bir termodinamik karışım modeli tesis edilmiştir. Diğer bir kompozitler teorisi Tiersten ve Jahanmir [22] tarafından ele alınmıştır. Burada da kompozit yapı karışım halindeki bir katı ortam olarak modellenip bileşenlerin birbirlerine göre bağıl hareketleri sonsuz küçük kabul edilmiştir.

Kimyasal olarak etkileşen akışkan-katı karışımları ile ilgili bir teorik çalışma da Demiray [23] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, karışımın korunum yasalarının yerleştirilmesinde farklı bir yol izlenerek, uzaysal eksen takımının zamana bağlı dönüşümleri altında değişmez kalan kısmî enerji denklemleri elde edilmektedir. Demiray, esasen tekil ortamlar için tanımlanmış olan eşdeğerlik (equipresence) aksiyomunu farklı bir tarzda kullanarak, bünye bağımlı değişkenlerini farklı bağımsız değişkenler cinsinden ifade etmiştir. Çalışmasının sonunda ise bu tür bir ortamda harmonik dalgaların yayılması problemine değinmiştir.

Borrelli ve Patria [24], iki lineer elastik katı karışımının matematiksel yönüyle ilgilenerek, karışımın denge hali için çeşitli sınır değer problemlerinin çözümlerinin tekliği hakkında teoriler ve ispatlarını vermişlerdir.

Bedford [25] Hamilton prensibini karışımların sürekli ortam teorisine uygulayarak akışkan-akışkan ve akışkan-elastik katı karışımları için sonuçlar vermiştir. Buradaki temel düşünce karışımı oluşturan bileşenlerden her birinin hacimsel değişiminin diğerlerinin hacimsel değişimlerine de bağımlı olduğudur. Lagrange çarpanları metoduyla bu kısıt karışım için bir Hamilton prensibi türetilmesinde kullanılmıştır.

İki sıkışamaz Newtonian akışkandan oluşan bir ortamda titreşen bir levhanın oluşturduğu akışlar ilk olarak Craine [26] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmanın bir devamı olarak, Göğüş [27] iki sonsuz paralel levhanın boyuna titreşimleri neticesinde oluşan akışı sabit bir basınç gradyanı için incelemiş ve analitik çözümünü vermiştir.

Gürgöze [28] Kelvin problemini bir elastik katı ve bir akışkandan oluşan karışımın denge hali için incelemiştir. Çalışmasında, Green ve Steel [11] tarafından verilen bağıntıları kullanarak, elastik katı bileşendeki yer değiştirmeleri yöneten diferansiyel denklemleri elde etmiş ve bu denklemlerin elastisite teorisinden bilinen Navier denklemlerinin benzerleri olduğunu göstermiştir. Çözüm için Galerkin vektörünün özel bir hali olan Love şekil değiştirme fonksiyonunu kullanarak yer değiştirme ve difüzyon kuvveti vektörleri ile gerilme tansörlerini hesaplamıştır.

Elastik bir katı ve bir akışkan karışımı için sıcaklık tesirinin incelendiği bir çalışma da Erkman ve Gürgöze [29] tarafından yapılmıştır. Çalışmada denge halindeki sonsuz bir akışkan-elastik katı karışımında $R=a$ yarıçaplı küresel bir sıcaklık alanı

etkisiyle oluşan yer değiştirme, difüzyon ve gerilme alanları hesaplanmıştır. Ayrıca bu tür bir karışım için Betti karşılık teoremi ve Maysel formülünün daha genel halleri verilmiştir.

Bedford ve Stern [18] tarafından önerilen Lagrange tanımı fikrini kullanan Ieşan [30], tanecikli kompozit yapıların ve jeolojik ortamların mekanik davranışını izah etmek amacıyla, iki elastik katı karışımı için bir teorik formülasyon ortaya koymuştur. Çalışmasında bağımsız bünye değişkenleri olarak yer değiştirme farkını, yer değiştirme gradyanlarını, her bileşenin hacimsel oranı ile bunların gradyanlarını kullanmıştır. İncelemesinin sonunda lineerleştirdiği bünye denklemlerini kullanarak bir teklik teoremi türetmiştir.

Sonsuz bir yarı-uzayı dolduran bir akışkan ve bir elastik katı karışımı için Boussinesq probleminin ele alındığı bir çalışma Gürgöze ve Dokuz [31] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, karışımın sınırını oluşturan düzlem üzerinde ve düzleme dik doğrultudaki bir tekil kuvvetin etkisi sebebiyle oluşan yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti alanlarını bulmak amacıyla Love şekil değiştirme fonksiyonundan yararlanılmıştır. Love fonksiyonunun denge denkleminde kullanılmasıyla ortaya çıkan biharmonik denklemin çözümü ise Hankel dönüşümü yardımıyla elde edilmiştir.

Gürgöze ve Dokuz [32] tarafından yapılan bir diğer çalışmada iki elastik katıdan oluşan sonsuz bir karışımın denge hali için Kelvin problemi ele alınmıştır.

1.2 Çalışmanın Amacı ve İçeriği

Gürgöze ve Dokuz [32] tarafından yapılmış olan çalışmada denge halindeki iki elastik katı karışımında kuvvet etkisi altında oluşan değişimler incelenmekte ve bir çözüm önerilmektedir. Bu çalışmada ise, buna ilâveten, sıcaklığın da karışım bileşenleri üzerindeki etkileri araştırılmakta ve böylece iki elastik katı karışımı için hem kuvvet hem de sıcaklık tesirlerine ilişkin çözüm metotları bir arada sunulmaktadır.

Çalışmada ilk olarak, genel bir karışıma ait temel kabuller ve karışımın kinematığı hakkında özet bir bilgi verildikten sonra, esas inceleme konusu olan iki elastik katı

karışımına ilişkin lineer bünye denklemleri ve gerekli korunum yasaları ortaya konmaktadır. Daha sonra denge denklemleri yer değiştirmeler cinsinden hesaplanmakta ve çözüm metotlarının uygulanacağı diferansiyel denklem takımı elde edilmektedir.

Bölüm 3' te yer değiştirmelere ait diferansiyel denklem takımı termoelastisiteden bilinen yer değiştirme potansiyelleri yardımıyla yeniden düzenlenmekte ve her bir bileşenin hareketini yöneten denklemler elde edilmektedir. Isıtılmış bölgeyi çevreleyen yüzey üzerinde problemin sınır şartları hesaplanarak sıcaklık alanının küresel şekilli olması durumuna ilişkin genel çözüm verilmektedir. Daha sonra sıcaklık fonksiyonu ve malzeme sabitleri için kabuller yapılarak alan büyüklüklerinin değişimlerine ait grafikler çizilmektedir. Bölümün sonunda ise, tekil bir malzeme için verilmiş olan Betti karşılıklı teoremi ve Maysel formülünün iki elastik katı karışımına ilişkin düzenlemesi yapılarak, küresel sıcaklık alanı problemi için Maysel formülünün verdiği sonuçlar genel çözümle karşılaştırılmaktadır.

Kuvvet tesiri altındaki değişimlerin incelendiği Bölüm 4' te, denge denklemlerinin vermiş olduğu diferansiyel denklem takımı bu kez Helmholtz teoremi yardımıyla düzenlenmekte ve bileşenlerin yer değiştirmelerine ait denklemler elde edilmektedir. Navier denklemi formunda olan ifadelerin çözümleri ise Papkovitch-Neuber metoduyla verilmekte ve bulunan çözüm formu tekil kuvvetin etkisinin incelendiği Kelvin probleminde kullanılmaktadır. Problem kuvvetin etkidiği noktada küresel bir eleman üzerinde her bileşenin dengesi düşünülerek çözüldükten sonra, bölümün sonunda, önceden verilmiş olan malzeme sabitlerinin geçerli olduğu bir karışım için bileşenlerin taşıdıkları yük miktarları hesaplanmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER

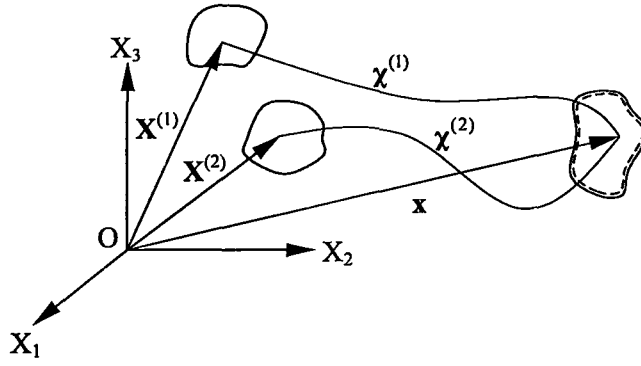
Bu bölümde, öncelikle, genel bir karışımın sürekli ortam düşüncesine dayanan ön kabulleri ele alınmakta ve karışımın hareketine ait kinematik büyüklükler ortaya konmaktadır. Daha sonra özel olarak iki elastik katıdan oluşan bir karışım için lineer hale ait denklemler verilmekte ve statik durumdaki denklemlere geçilmektedir. Bölümün sonunda bünye denklemlerinden şekil değiştirme tansörleri çekilerek iki lineer elastik katı karışımının gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının ters formları verilmektedir.

2.1 Karışımın Kinematığı

Karışımı oluşturan bileşenlerin karışıma ait uzayın her konumunda yeterli yoğunluğa sahip oldukları, yani sürekli ortam olarak nitelendirilebildikleri kabul edilsin. Bu durumda, karışım içerisinde herhangi bir noktayı çevreleyen yeteri kadar büyük bir ΔV hacmine bakıldığında, bunun karışımı oluşturan tüm bileşenlere ait parçacıkları ihtiva ettiği görülecektir. O an için aynı ΔV hacmini paylaşan bu parçacıklar karışımın şekil değiştirme sürecinde farklı konumlarda farklı parçacıklarla bir araya gelmek üzere yer değiştireceklerdir. Buna göre, karışım tarafından doldurulmuş olan uzayın her bir noktasının karışımı oluşturan tüm bileşenler tarafından işgal edildiği ve şekil değişiminden sonra da bu durumun değişmediği düşünülebilir. Karışımlar teorisinin temel kabulü olan bu düşünce matematiksel olarak

$$\mathbf{x} = \chi^{(\xi)}(\mathbf{X}^{(\xi)}, t), \quad \xi = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

dönüşümleriyle tanımlanmaktadır. Burada $\mathbf{X}^{(\xi)}$ karışımı oluşturan ortamlara ait maddesel hacim elemanlarının referans konumlarını, $\mathbf{x}$ ise şekil değişiminden sonra bu elemanların işgal ettikleri ortak konumu göstermektedir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Karışımın Şekil Değişirme

Karışımın hareketini tanımlayan (2.1) dönüşümü aynı zamanda belli bir uzay noktasından çeşitli zamanlarda bileşenlerin hangi parçacıklarının geçtiğini de belirler. Dönüşümlerin fiziksel bir harekete karşı gelebilmesi için sürekli olması ve

$$j_{(\xi)}(\mathbf{X}^{(\xi)}, t) = \det\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_k^{(\xi)}}\right) \quad (2.2)$$

Jakobyenlerinin sıfır veya sonsuz değerlerini almaması gerekir. Buna göre (2.1) dönüşümleri aynı zamanda uzaydaki bir bölgenin her t anında bileşenlerin farklı parçacıkları tarafından işgal edilebileceğini göstermektedir [33].

$\mathbf{x}$ konumundaki parçacıkların hız vektörleri

$$\mathbf{w}^{(\xi)} = \frac{D^{(\xi)} \mathbf{x}^{(\xi)}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{x}^{(\xi)}}{\partial t} \quad (2.3)$$

ifadesiyle tanımlanır. $\frac{D^{(\xi)}}{Dt}$ terimi ξ numaralı ortamda $\mathbf{X}^{(\xi)}$ nin sabit tutulmasıyla alınan maddesel türevi göstermektedir ve açık hali

$$\frac{D^{(\xi)}(.)}{Dt} = \frac{\partial(.)}{\partial t} + w_k^{(\xi)} \frac{\partial(.)}{\partial x_k} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada olduğu gibi tüm çalışma boyunca gerekli olan yerlerde Einstein toplama uylasımından yararlanılarak, parantez içindeki indisler dışında, tekrarlanan iki indis üzerinde 1'den 3'e kadar toplama yapılacağı kabul edilecektir. $\rho_{(\xi)}(\mathbf{x}, t)$ karışım bileşenlerinin yoğunluklarını göstermek üzere, karışımın ortalama hızı

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\rho} \sum_{\xi=1}^n \rho_{(\xi)} \mathbf{w}^{(\xi)} \quad (2.5)$$

bağıntısıyla tanımlanmaktadır. Eşitlikteki ρ büyüklüğü karışımın yoğunluğu olarak adlandırılır ve bileşenlerin yoğunluklarının toplamı olarak

$$\rho = \sum_{\xi=1}^n \rho_{(\xi)} \quad (2.6)$$

şeklinde verilir. ξ numaralı ortama ait ivme vektörü ise

$$\mathbf{f}^{(\xi)} = \frac{D^{(\xi)} \mathbf{w}^{(\xi)}}{Dt} \quad (2.7)$$

olarak tanımlanmaktadır.

2.2 İki Elastik Katı Karışımı İçin Lineer Bünye Denklemleri

İki bileşenli genel bir karışım için Green ve Naghdi [8] tarafından önerilen temel aksiyomların ışığı altında iki elastik katıdan oluşan bir karışıma ait nonlinear bünye denklemleri Green ve Steel [11] tarafından verilmiştir. Bu denklemlerin lineer halleri ise daha sonra Steel [12] tarafından elde edilmiştir. Karışımın sonlu şekil değiştirmelerini göz önüne alan genel teoride farklı maddesel konumlardaki bileşen parçacıklarının deformasyondan sonra aynı uzaysal $x_i = y_i$ konumuna geldikleri kabul edilmektedir. Ancak, burada sonsuz küçük yer değişimleri söz konusu olduğuna göre, bileşenlerin şekil değişiminden önce de ortak bir $X_i = Y_i$ konumunu işgal ettiklerini düşünmek mümkündür. Bu düşünceye ek olarak ilk anda karışım bileşenlerinin sabit θ_0 sıcaklığında ve sabit $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ yoğunluklarında dengede oldukları ve karışımın ilk anda izotropik olduğu varsayılmaktadır. Bütün yer değiştirmelerin, hızların, sıcaklık değişimlerinin ve bunların zamana ve konuma göre türevlerinin çok küçük oldukları, dolayısıyla kuadratik ve daha yüksek çarpım terimlerinin ihmal edilebileceği kabul edilmektedir. Maddesel ve uzaysal konumlar arasındaki yer değişimleri u_i, v_i ve sıcaklık değişimi T ile gösterilirse

$$x_i = X_i + u_i, \quad y_i = Y_i + v_i, \quad \theta = \theta_0 + T \quad (2.8)$$

yazılabilir. Bu şartlar altında iki elastik katıdan oluşan bir karışım için lineer bünye denklemleri

$$\sigma_{ik} = -\alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} - \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) - \gamma_1 T \delta_{ik}, \quad (2.9)$$

$$\pi_{ik} = \alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 e_{ik} + \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) - \gamma_2 T \delta_{ik}, \quad (2.10)$$

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} + \gamma (w_k^{(1)} - w_k^{(2)}), \quad (2.11)$$

ve karışım bileşenleri arasında herhangi bir kimyasal etkileşimin olmadığı kabul edilerek süreklilik denklemleri

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 (1 - e_{mm}), \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2 (1 - g_{mm}). \quad (2.12)$$

şeklinde verilmektedir [12, 34, 35]. Burada σ_{ik} ve π_{ik} bileşenlere ait kısmî gerilme tansörlerini, π_k Truesdell ve Toupin tarafından kullanıldığı şekliyle “momentum katkısı” vektörünü veya Green ve Adkins tarafından kullanılan ve bizim de tercih edeceğimiz “difüzyon kuvveti” vektörünü temsil etmektedir. $\bar{\rho}$ ve α_2

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4 \quad (2.13)$$

şeklinde ve tüm $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \dots, \lambda_5, \mu_1, \dots$ katsayıları $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ ve θ_0 büyüklüklerine bağlı sabitlerdir. Ayrıca δ_{ik} terimi Kronecker deltasını göstermekte ve e_{ik}, g_{ik} ve h_{ik} tansörleri lineer teori söz konusu olduğunda

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right), \quad g_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial Y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial Y_i} \right), \quad h_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial v_i}{\partial Y_k} \quad (2.14)$$

bağıntılarını ifade etmektedir. Bünye denklemlerinde h_{ik} lı terimlerin katsayısı olan λ_5 sabiti karışım bileşenlerinin izotropik olup olmamasını belirleyen bir büyüklüktür. Eğer karışımın ilk anda bir bütün olarak izotropik olması yerine bileşenlerinin ayrı ayrı izotropik oldukları kabulü yapılırsa $\lambda_5 = 0$ olmaktadır [34].

İki elastik katı karışımı için hareket denklemlerinin yerel formları

$$\sigma_{ik,i} - \pi_k + \bar{\rho}_1 F_k^{(1)} = \bar{\rho}_1 f_k^{(1)}, \quad \pi_{ik,i} + \pi_k + \bar{\rho}_2 F_k^{(2)} = \bar{\rho}_2 f_k^{(2)} \quad (2.15)$$

eşitlikleriyle verilmektedir. Burada $F_k^{(1)}$ ve $F_k^{(2)}$ bileşenlere ait kısmî kütle kuvveti vektörleridir. Bundan sonra bu büyüklükler için yazım kolaylığı açısından $\bar{\rho}_1 F_k^{(1)} = F_k$ ve $\bar{\rho}_2 F_k^{(2)} = G_k$ tanımları kullanılacaktır.

Karışımın denge haliyle ilgilenildiği takdirde hızlar $w_i^{(1)} = w_i^{(2)} = 0$ ve ivmeler $f_i^{(1)} = f_i^{(2)} = 0$ olacaktır. Bu durumda denge denklemleri

$$\sigma_{ik,i} - \pi_k + F_k = 0, \quad \pi_{ik,i} + \pi_k + G_k = 0 \quad (2.16)$$

olmakta ve (2.11) ile verilen difüzyon kuvveti vektörü

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} \quad (2.17)$$

şekline indirgenmektedir.

Denge denklemlerini yer değiştirme vektörleri cinsinden yazmak amacıyla (2.9), (2.10) ve (2.17) bağıntılarıyla (2.16) denklemlerine gidilirse

$$\lambda_1^* e_{mm,k} + \lambda_3^* g_{mm,k} + 2\mu_1 e_{ik,i} + 2\mu_3 g_{ik,i} - \lambda_5 (h_{ik,i} - h_{ki,i}) - \gamma_1 T_{,i} \delta_{ik} + F_k = 0, \quad (2.18)$$

$$\lambda_2^* g_{mm,k} + \lambda_4^* e_{mm,k} + 2\mu_2 g_{ik,i} + 2\mu_3 e_{ik,i} + \lambda_5 (h_{ik,i} - h_{ki,i}) - \gamma_2 T_{,i} \delta_{ik} + G_k = 0 \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada λ_1^* , λ_2^* , λ_3^* ve λ_4^* katsayıları

$$\lambda_1^* = \lambda_1 - \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}}, \quad \lambda_2^* = \lambda_2 + \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}}, \quad \lambda_3^* = \lambda_3 - \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}}, \quad \lambda_4^* = \lambda_4 + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \quad (2.20)$$

ifadelerini temsil etmektedirler. (2.14) ile verilen e_{ik} , g_{ik} ve h_{ik} tansörleri (2.18) ve (2.19)'da yerlerine konularak

$$\begin{aligned}
& (\mu_1 - \lambda_5)u_{k,ii} + (\mu_3 + \lambda_5)v_{k,ii} + (\lambda_1^* + \mu_1 + \lambda_5)u_{i,ik} \\
& + (\lambda_3^* + \mu_3 - \lambda_5)v_{i,ik} - \gamma_1 T_{,i} \delta_{ik} + F_k = 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_3 + \lambda_5)u_{k,ii} + (\mu_2 - \lambda_5)v_{k,ii} + (\lambda_4^* + \mu_3 - \lambda_5)u_{i,ik} \\
& + (\lambda_2^* + \mu_2 + \lambda_5)v_{i,ik} - \gamma_2 T_{,i} \delta_{ik} + G_k = 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
K_1 &= \mu_1 - \lambda_5, \quad K_2 = K_3 = K = \mu_3 + \lambda_5, \quad K_4 = \mu_2 - \lambda_5, \quad D_1 = \lambda_1^* + \mu_1 + \lambda_5, \\
D_2 &= \lambda_3^* + \mu_3 - \lambda_5, \quad D_3 = \lambda_4^* + \mu_3 - \lambda_5, \quad D_4 = \lambda_2^* + \mu_2 + \lambda_5
\end{aligned} \tag{2.23}$$

tanımları yapıldığında (2.21) ve (2.22) diferansiyel denklemleri vektörel olarak

$$K_1 \nabla^2 \mathbf{u} + K \nabla^2 \mathbf{v} + D_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \gamma_1 \nabla T + \mathbf{F} = 0, \tag{2.24}$$

$$K \nabla^2 \mathbf{u} + K_4 \nabla^2 \mathbf{v} + D_3 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_4 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \gamma_2 \nabla T + \mathbf{G} = 0 \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilebilir [24]. Ayrıca, D_2 ve D_3 katsayıları arasında, (2.20) ve (2.23) tanımları kullanılarak

$$D_2 = D_3 \tag{2.26}$$

eşitliğinin var olduğu gösterilebilir.

t_{ik} ve ε_{ik} sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerini temsil etmek üzere, izotropik tekil bir elastik cismin lineer bünye denklemi

$$t_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ik} - \gamma T \delta_{ik} \tag{2.27}$$

bağıntısıyla verilmektedir. Burada λ ve μ Lamé sabitleri olarak bilinen malzeme katsayılarıdır ve γ büyüklüğü bu katsayılarla

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \tag{2.28}$$

ifadesiyle bağımlıdır. α_T tekil malzeme için lineer ısı genleşme katsayısını göstermektedir. İki elastik katı karışımına ait (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerinde geçen γ_1 ve γ_2 büyüklüklerinin malzeme sabitlerine ne şekilde bağımlı olduklarını tespit etmek üzere, karışım bileşenlerinin ilk anda izotropik oldukları kabulü altında $\lambda_5 = 0$ alınarak, bünye denklemlerinden şekil değiştirme tansörleri hesaplanırsa

$$e_{ik} = \alpha_2 E H_1 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (-\mu_3 \pi_{ik} + \mu_2 \sigma_{ik}) + E (A_1 \pi_{mm} + B_1 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] + \alpha_{T1} T \delta_{ik} , \quad (2.29)$$

$$g_{ik} = -\alpha_2 E H_2 \delta_{ik} + \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} (\mu_1 \pi_{ik} - \mu_3 \sigma_{ik}) + E (A_2 \pi_{mm} + B_2 \sigma_{mm}) \delta_{ik} \right] + \alpha_{T2} T \delta_{ik} \quad (2.30)$$

elde edilir. Burada, $E, \dots, \alpha_{T2}$ katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$E = \frac{1}{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(3\lambda_2 + 2\mu_2) - (3\lambda_3 + 2\mu_3)(3\lambda_4 + 2\mu_3)} , \quad G = \mu_1 \mu_2 - \mu_3^2 ,$$

$$H_1 = 3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3) , \quad H_2 = 3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3) ,$$

$$A_1 = -\lambda_3 \mu_1 \mu_2 + \mu_3 \left[\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) - \lambda_4 \left(\frac{3}{2} \lambda_3 + \mu_3 \right) \right] ,$$

$$A_2 = -\lambda_1 \mu_3^2 + \mu_1 \left[-\lambda_2 \left(\frac{3}{2} \lambda_1 + \mu_1 \right) + \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) + \lambda_4 \mu_3 \right] ,$$

$$B_1 = -\lambda_2 \mu_3^2 + \mu_2 \left[-\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) + \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) + \lambda_4 \mu_3 \right] ,$$

$$B_2 = -\lambda_4 \mu_1 \mu_2 + \mu_3 \left[\lambda_1 \left(\frac{3}{2} \lambda_2 + \mu_2 \right) + \lambda_2 \mu_1 - \lambda_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_4 + \mu_3 \right) \right] ,$$

$$\alpha_{T1} = E [\gamma_1 (3\lambda_2 + 2\mu_2) - \gamma_2 (3\lambda_3 + 2\mu_3)] ,$$

$$\alpha_{T2} = E [\gamma_2 (3\lambda_1 + 2\mu_1) - \gamma_1 (3\lambda_4 + 2\mu_3)] . \quad (2.31)$$

(2.31)'deki son iki bağıntıdan γ_1 ve γ_2

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_{T1}(3\lambda_1 + 2\mu_1) + \alpha_{T2}(3\lambda_3 + 2\mu_3) , \\ \gamma_2 &= \alpha_{T1}(3\lambda_4 + 2\mu_3) + \alpha_{T2}(3\lambda_2 + 2\mu_2)\end{aligned}\quad (2.32)$$

şeklinde hesaplanır. Burada α_{T1} ve α_{T2} büyüklüklerine, (2.29) ve (2.30) denklemlerinden görüleceği üzere, karışım bileşenlerinin ısı genleşme katsayıları gözüyle bakmak mümkündür. Ancak bu büyüklüklerin her iki bileşenin de malzeme sabitlerine bağımlı olduğu gözden kaçırılmamalıdır.



3. SICAKLIK ALANININ İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI ÜZERİNDEKİ ETKİSİ İLE İLGİLİ ANALİTİK ÇÖZÜMLER VE KÜRESEL SICAKLIK ALANI İÇİN BİR UYGULAMA

Bu bölümde denge halindeki bir karışımda sıcaklık etkisiyle oluşan değişimler ele alınmaktadır. Öncelikle, (2.24) ve (2.25) vektörel denklemleri düzenlenerek, hem $\mathbf{u}$ hem de $\mathbf{v}$ yer değiştirmeleri ayrı ayrı denklemlerle ifade edilmekte ve gerekli sınır şartları incelenmektedir. Bulunan sonuçlar sıcaklık alanının küresel bir bölgeyi etkilemesi durumunda oluşacak olan yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti değişimlerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır. Daha sonra elastisite teorisinden bilinen Betti karşılıklı teoreminin sıcaklık etkisine maruz iki elastik katı karışımı için genel bir formu aranmakta ve Maysel formülünün küresel sıcaklık alanı problemi için verdiği sonuçlar genel çözümle karşılaştırılmaktadır.

Bu noktadan sonra tüm çalışma boyunca karışım bileşenlerinin ilk anda ayrı ayrı izotropik oldukları kabul edilerek $\lambda_5 = 0$ olarak alınacaktır. Bu durumda, (2.9) ve (2.10) bünye denklemlerine göre, kısmî gerilme tansörleri için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\sigma_{ik} = -\alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} - \gamma_1 T \delta_{ik} , \quad (3.1)$$

$$\pi_{ik} = \alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 e_{ik} - \gamma_2 T \delta_{ik} . \quad (3.2)$$

3.1 Yer Değiştirme Potansiyelleri ve Sınır Şartları

Tekil bir ortama ait denklemleri çözmek amacıyla yer değiştirme potansiyeli kullanılması düşüncesi ilk olarak Goodier tarafından ortaya atılmıştır [36]. Karışım bileşenlerinin yer değiştirmeleri için de benzer şekilde

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \varphi_{,i} \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{v} = \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \psi_{,i} \mathbf{e}_i \quad (3.3)$$

tanımları yapıyor olsun. F ve G ile gösterilen kütle kuvvetleri ihmal edilir ve (3.3) tanımları ile (2.24) ve (2.25)'e gidilirse

$$(K_1 + D_1)\nabla(\nabla^2\varphi) + (K + D_2)\nabla(\nabla^2\psi) - \gamma_1\nabla T = 0, \quad (3.4)$$

$$(K + D_3)\nabla(\nabla^2\varphi) + (K_4 + D_4)\nabla(\nabla^2\psi) - \gamma_2\nabla T = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir. Yer değıştirmelerin sadece sıcaklık tesiriyle oluştuğu düşüncesi altında bu denklemlerin integrasyonu

$$(K_1 + D_1)(\nabla^2\varphi) + (K + D_2)(\nabla^2\psi) - \gamma_1 T = 0, \quad (3.6)$$

$$(K + D_3)(\nabla^2\varphi) + (K_4 + D_4)(\nabla^2\psi) - \gamma_2 T = 0 \quad (3.7)$$

sonuçlarını verir. Bu iki denklem yardımıyla $\nabla^2\varphi$ ve $\nabla^2\psi$ büyüklükleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\nabla^2\varphi = s_1 T, \quad \nabla^2\psi = s_2 T. \quad (3.8)$$

Burada eşitliklerin sağındaki s_1 ve s_2 katsayıları

$$s_1 = \frac{(K_4 + D_4)\gamma_1 - (K + D_2)\gamma_2}{(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)}, \quad (3.9)$$

$$s_2 = \frac{(K_1 + D_1)\gamma_2 - (K + D_3)\gamma_1}{(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanmıştır.

Yer değıştirme potansiyeli fonksiyonlarının sağılamaları gereken (3.8) eşitlikleri Poisson diferansiyel denklemleri olarak adlandırılır ve çözümleri Poisson integralleriyle

$$\varphi(x_r) = -\frac{s_1}{4\pi} \int_V \frac{T(\xi_r) dV(\xi_r)}{L(\xi_r, x_r)}, \quad r = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

$$\psi(x_r) = -\frac{s_2}{4\pi} \int_V \frac{T(\xi_r) dV(\xi_r)}{L(\xi_r, x_r)}, \quad r = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

şeklinde verilir. Burada $L(\xi_r, x_r)$ terimi ξ_r ve x_r noktaları arasındaki uzaklığı ifade etmektedir. Potansiyel teoriye göre, (3.11) ve (3.12) eğer (3.8) diferansiyel denklemlerinin çözümleri iseler, φ ve ψ fonksiyonlarının aşağıda verilen koşulları sağlıyor olmaları gerekir [36]:

a) $\varphi(x_r)$ ve $\psi(x_r)$ fonksiyonlarının birinci türevleri $\varphi_{,i}$ ve $\psi_{,i}$ sıcaklık alanı T nin süreksiz olduğu konumlar da dahil olmak üzere tüm karışım bölgesinde süreklidir.

b) Karışım bölgesi içerisinde sıcaklık alanının $T^{(i\zeta)} - T^{(d\zeta)}$ şeklinde süreksizliğe maruz kaldığı bir S yüzeyi düşünölsün. P bu yüzey üzerindeki bir nokta olmak üzere, x_1 ve x_2 eksenleri P noktasındaki teğet düzlem içerisinde x_3 ise bu noktadaki dış normal doğrultusunda seçildiğı takdirde, $\varphi(x_r)$ ve $\psi(x_r)$ potansiyel fonksiyonlarının $\varphi_{,33}$ ve $\psi_{,33}$ ikinci mertebeden türevleri

$$\varphi_{,33}^{(i\zeta)} - \varphi_{,33}^{(d\zeta)} = s_1 \left(T^{(i\zeta)} - T^{(d\zeta)} \right), \quad (3.13)$$

$$\psi_{,33}^{(i\zeta)} - \psi_{,33}^{(d\zeta)} = s_2 \left(T^{(i\zeta)} - T^{(d\zeta)} \right) \quad (3.14)$$

süreksizliklerine maruz kalırken bunlar dışındaki tüm ikinci mertebeden türevler bölgenin her noktasında sürekli olurlar.

Yukarıdaki koşullar problemin sınır şartlarının belirlenmesinde faydalı olurlar. İlk koşul, (3.3) tanımları sebebiyle, u_i ve v_i yer değıştirmelerinin süreksizlik yüzeyi de dahil bölgenin her noktasında sürekli olacakları sonucunu verir.

$$u_i^{(i\zeta)} = u_i^{(d\zeta)}, \quad v_i^{(i\zeta)} = v_i^{(d\zeta)}. \quad (3.15)$$

İkinci koşulun getirdiklerini görebilmek için (3.1) ve (3.2) bünye denklemlerinin yer değıştirme potansiyelleri cinsinden yazılması gerekir. Bu amaçla önce (2.14) ile verilen e_{ik} ve g_{ik} şekil değıştirme tansörleri (3.3) yardımı ile hesaplanır

$$e_{ik} = \frac{1}{2} (\varphi_{,ik} + \varphi_{,ki}) = \varphi_{,ik}, \quad (3.16)$$

$$g_{ik} = \frac{1}{2}(\psi_{,ik} + \psi_{,ki}) = \psi_{,ik} \quad (3.17)$$

ve bunlarla (3.1) ve (3.2)'ye gidilirse

$$\sigma_{ik} = -\alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_1 \varphi_{,mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 \varphi_{,ik} + \lambda_3 \psi_{,mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 \psi_{,ik} - \gamma_1 T \delta_{ik} , \quad (3.18)$$

$$\pi_{ik} = \alpha_2 \delta_{ik} + \lambda_4 \varphi_{,mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 \varphi_{,ik} + \lambda_2 \psi_{,mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 \psi_{,ik} - \gamma_2 T \delta_{ik} \quad (3.19)$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre sıcaklık alanının süreksizliğe uğradığı S yüzeyini geçerken σ_{33} ve π_{33} gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(i\zeta)} - \sigma_{33}^{(ds)} &= \lambda_1 (\varphi_{,mm}^{(i\zeta)} - \varphi_{,mm}^{(ds)}) + 2\mu_1 (\varphi_{,33}^{(i\zeta)} - \varphi_{,33}^{(ds)}) + \lambda_3 (\psi_{,mm}^{(i\zeta)} - \psi_{,mm}^{(ds)}) \\ &\quad + 2\mu_3 (\psi_{,33}^{(i\zeta)} - \psi_{,33}^{(ds)}) - \gamma_1 (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) , \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \pi_{33}^{(i\zeta)} - \pi_{33}^{(ds)} &= \lambda_4 (\varphi_{,mm}^{(i\zeta)} - \varphi_{,mm}^{(ds)}) + 2\mu_3 (\varphi_{,33}^{(i\zeta)} - \varphi_{,33}^{(ds)}) + \lambda_2 (\psi_{,mm}^{(i\zeta)} - \psi_{,mm}^{(ds)}) \\ &\quad + 2\mu_2 (\psi_{,33}^{(i\zeta)} - \psi_{,33}^{(ds)}) - \gamma_2 (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde değişime uğrayacaklardır. (3.8) diferansiyel denklemleri kullanılarak ısıtılmış bölgenin içi ve dışı için elde edilen

$$\varphi_{,mm}^{(i\zeta)} - \varphi_{,mm}^{(ds)} = s_1 (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) , \quad (3.22)$$

$$\psi_{,mm}^{(i\zeta)} - \psi_{,mm}^{(ds)} = s_2 (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) \quad (3.23)$$

eşitlikleri ve (3.13), (3.14) koşulları (3.20) ve (3.21)'de yerlerine konulursa

$$\sigma_{33}^{(i\zeta)} - \sigma_{33}^{(ds)} = [s_1 (\lambda_1 + 2\mu_1) + s_2 (\lambda_3 + 2\mu_3) - \gamma_1] (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) , \quad (3.24)$$

$$\pi_{33}^{(i\zeta)} - \pi_{33}^{(ds)} = [s_1 (\lambda_4 + 2\mu_3) + s_2 (\lambda_2 + 2\mu_2) - \gamma_2] (T^{(i\zeta)} - T^{(ds)}) \quad (3.25)$$

bulunur. Eğer s_1 ve s_2 tanımları $\lambda_1, \mu_1, \dots$ için hesaplanıp gerekli işlemler yapılırsa, (3.24) ve (3.25)'in sağ taraflarındaki katsayıların

$$s_1 (\lambda_1 + 2\mu_1) + s_2 (\lambda_3 + 2\mu_3) - \gamma_1 = 0 , \quad (3.26)$$

$$s_1(\lambda_4 + 2\mu_3) + s_2(\lambda_2 + 2\mu_2) - \gamma_2 = 0 \quad (3.27)$$

oldukları görülür. Bu sonuca göre sıcaklık alanına ilişkin süreksizlik yüzeyinde σ_{33} ve π_{33} gerilme bileşenlerinin

$$\sigma_{33}^{(ic)} = \sigma_{33}^{(dis)} , \quad \pi_{33}^{(ic)} = \pi_{33}^{(dis)} \quad (3.28)$$

eşitliklerini sağlamak zorunda kaldıkları, yani sürekli oldukları anlaşılmaktadır. Verilen koşullar altında σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} , π_{12} , π_{23} ve π_{31} in de sürekli olduğu fakat σ_{11} , σ_{22} , π_{11} ve π_{22} nin

$$\sigma_{11}^{(ic)} - \sigma_{11}^{(dis)} = \sigma_{22}^{(ic)} - \sigma_{22}^{(dis)} = (\lambda_1 s_1 + \lambda_3 s_2 - \gamma_1)(T^{(ic)} - T^{(dis)}) , \quad (3.29)$$

$$\pi_{11}^{(ic)} - \pi_{11}^{(dis)} = \pi_{22}^{(ic)} - \pi_{22}^{(dis)} = (\lambda_4 s_1 + \lambda_2 s_2 - \gamma_2)(T^{(ic)} - T^{(dis)}) \quad (3.30)$$

sıçramalarına maruz kaldıkları kolaylıkla gösterilebilir.

(3.11) ve (3.12) integrallerinden u_i ve v_i yer değiştirme vektörlerine geçebilmek için (3.3) tanımları gereğince $\varphi(x_r)$ ve $\psi(x_r)$ fonksiyonlarının gradyanlarının alınması gerekir. Eğer

$$U_i(\xi_r, x_r) = -\frac{1}{4\pi[(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)]} \left[\frac{1}{L(\xi_r, x_r)} \right]_i \quad (3.31)$$

tanımı yapılırsa, yer değiştirme vektörleri için (3.9)-(3.12)'den

$$u_i(x_r) = [(K_4 + D_4)\gamma_1 - (K + D_2)\gamma_2] \int_V T(\xi_r) U_i(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) , \quad (3.32)$$

$$v_i(x_r) = [(K_1 + D_1)\gamma_2 - (K + D_3)\gamma_1] \int_V T(\xi_r) U_i(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) \quad (3.33)$$

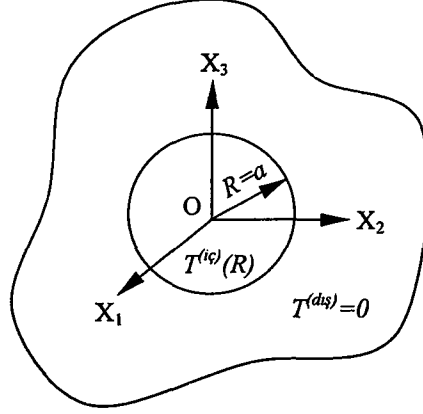
bağıntıları bulunur. (3.8) ifadelerinin gradyanlarını almak suretiyle yer değiştirmeleri yöneten diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = s_1 \nabla T , \quad (3.34)$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = s_2 \nabla T . \quad (3.35)$$

3.2 Küresel Bir Sıcaklık Alanı Etkisi Altında İki Elastik Katı Karışımı

Sonsuz bir karışım içerisinde $R = a$ yarıçaplı küresel bir bölgenin ısıtılmış olduğu ve sıcaklık alanının sadece R nin fonksiyonu olarak; $R > a$ için $T^{(dis)}(R) = 0$ ve $R < a$ için $T^{(ic)}(R)$ şeklinde verildiği kabul edilsin (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Küresel Sıcaklık Alanı Kabulü

Bu düşüncüyü matematiksel olarak

$$T(R) = T^{(ic)}(R) H(a - R) = \begin{cases} 0, & R > a \\ T^{(ic)}(R), & R < a \end{cases} \quad (3.36)$$

bağıntısıyla ifade etmek mümkündür. Burada $H(x)$ Heaviside fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx . \quad (3.38)$$

Sıcaklık alanının etkisiyle karışım bileşenlerine ait parçacıkların sadece radyal doğrultuda yer değiştirebildikleri kabul edilirse $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri

$$\mathbf{u} = u(R)\mathbf{e}_R, \quad \mathbf{v} = v(R)\mathbf{e}_R \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir. Küresel koordinatlarda şekil değiştirme tansörü, ∇ operatörü ve bununla ilgili bazı gerekli sonuçlar aşağıda toplu halde verilmektedir.

Bileşenleri R, Θ ve Φ nin fonksiyonu olan bir $\mathbf{W} = W_R \mathbf{e}_R + W_\Theta \mathbf{e}_\Theta + W_\Phi \mathbf{e}_\Phi$ yer değiştirme vektörü için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\Phi\Phi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial W_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{W_R}{R}, \quad \varepsilon_{\Theta\Theta} = \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial W_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{W_R}{R} + \frac{\cot \Phi}{R} W_\Phi, \\ \varepsilon_{RR} &= \frac{\partial W_R}{\partial R}, \quad \varepsilon_{\Phi\Theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial W_\Phi}{\partial \Theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial W_\Theta}{\partial \Phi} - \frac{\cot \Phi}{2R} W_\Theta \right), \\ \varepsilon_{R\Phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_R}{\partial \Phi} + \frac{\partial W_\Phi}{\partial R} - \frac{W_\Phi}{R} \right), \quad \varepsilon_{\Theta R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial W_R}{\partial \Theta} + \frac{\partial W_\Theta}{\partial R} - \frac{W_\Theta}{R} \right),\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\Phi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{e}_\Theta \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Theta}, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{W} &= \frac{1}{R \sin \Phi} \left[\frac{\partial}{\partial \Phi} (W_\Theta \sin \Phi) - \frac{\partial W_\Phi}{\partial \Theta} \right] \mathbf{e}_R + \left[\frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial W_R}{\partial \Theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R W_\Theta) \right] \mathbf{e}_\Phi \\ &\quad + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R W_\Phi) - \frac{\partial W_R}{\partial \Phi} \right] \mathbf{e}_\Theta, \end{aligned}\quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 W_R) + \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} (W_\Phi \sin \Phi) + \frac{1}{R \sin \Phi} \frac{\partial W_\Theta}{\partial \Theta}. \quad (3.43)$$

Ayrıca $\nabla^2 \mathbf{W}$ için

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) \quad (3.44)$$

vektörel özdeşliği verilebilir. (3.39) ile verilen vektörler söz konusu olduğunda (3.42) işleminin sonucunun

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (3.45)$$

olacağına dikkat edilirse, (3.34), (3.35) ve (3.44)'ten

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u} - s_1 T) = 0, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v} - s_2 T) = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. Bu denklemlerin bileşen formları ise aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 u) - s_1 T \right] = 0, \quad \frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 v) - s_2 T \right] = 0. \quad (3.47)$$

(3.47) diferansiyel denklemlerinin çözümleri $R < a$ için $u^{(ic)}$, $v^{(ic)}$ ve $R > a$ için $u^{(ds)}$, $v^{(ds)}$ şeklinde bulunduktan sonra bilinmeyen integrasyon sabitleri $R = a$ daki sınır şartları yardımıyla elde edilir.

$R < a$ bölgesi için $T = T^{(ic)}(R)$ olduğuna göre, (3.47) denklemlerinin integrasyonu

$$u^{(ic)}(R) = \frac{s_1}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{c_1}{3} R + c_2 \frac{1}{R^2}, \quad (3.48)$$

$$v^{(ic)}(R) = \frac{s_2}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{c_3}{3} R + c_4 \frac{1}{R^2} \quad (3.49)$$

sonuçlarını verir. $R = 0$ durumunda $u^{(ic)}(R)$ ve $v^{(ic)}(R)$ nin sonlu kalabilmesi için $c_2 = c_4 = 0$ olması gerekir. Bu durumda $R < a$ daki yer değiştirmeler için (3.47) denklemlerinin çözümleri

$$u^{(ic)}(R) = \frac{s_1}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_1 R, \quad (3.50)$$

$$v^{(ic)}(R) = \frac{s_2}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_2 R \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir.

Karışımın $R > a$ bölgesi için $T^{(ds)}(R) = 0$ kabul edildiğine göre, bu durumda (3.47) denklemlerinin integrasyonu

$$u^{(ds)}(R) = \frac{c_5}{3} R + c_6 \frac{1}{R^2}, \quad (3.52)$$

$$v^{(ds)}(R) = \frac{c_7}{3} R + c_8 \frac{1}{R^2} \quad (3.53)$$

ifadelerini verecektir. $R = \infty$ olması durumunda $u^{(ds)}(R)$ ve $v^{(ds)}(R)$ nin sonlu kalabilmesi için bu kez $c_5 = c_7 = 0$ olmak zorundadır. Buna göre $R > a$ için çözüm

$$u^{(ds)}(R) = C_3 \frac{1}{R^2}, \quad (3.54)$$

$$v^{(ds)}(R) = C_4 \frac{1}{R^2} \quad (3.55)$$

fonksiyonlarıyla belirlenir.

(3.15) sınır şartına göre sıcaklığın süreksizliğe uğradığı $R = a$ yarıçapı için

$$u^{(i\epsilon)}(a) = u^{(ds)}(a), \quad v^{(i\epsilon)}(a) = v^{(ds)}(a) \quad (3.56)$$

olmalıdır. Bu durumda (3.50), (3.51), (3.54) ve (3.55) eşitlikleri yardımıyla

$$C_3 = s_1 \int_0^a T^{(i\epsilon)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_1 a^3 \quad (3.57)$$

$$C_4 = s_2 \int_0^a T^{(i\epsilon)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_2 a^3 \quad (3.58)$$

bağıntıları elde edilir. Böylece (3.54) ve (3.55) ile verilen $u^{(ds)}(R)$ ve $v^{(ds)}(R)$ yer değiştirmeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u^{(ds)}(R) = \frac{s_1}{R^2} \int_0^a T^{(i\epsilon)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^2} C_1, \quad (3.59)$$

$$v^{(ds)}(R) = \frac{s_2}{R^2} \int_0^a T^{(i\epsilon)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^2} C_2. \quad (3.60)$$

(3.50), (3.51), (3.59) ve (3.60) ifadelerindeki bilinmeyen C_1 ve C_2 sabitleri (3.28) ile verilen sınır şartları yardımıyla belirlenir. x_3 olarak tanımlanan eksen burada radyal doğrultuya karşılık geldiği için sınır şartları

$$\sigma_{RR}^{(i\epsilon)}(a) = \sigma_{RR}^{(ds)}(a), \quad \pi_{RR}^{(i\epsilon)}(a) = \pi_{RR}^{(ds)}(a) \quad (3.61)$$

şeklinde olmaktadır.

(3.1) ve (3.2) bünye denklemlerinden $\sigma_{RR}^{(i\zeta)}$ ve $\pi_{RR}^{(i\zeta)}$ bileşenleri için

$$\sigma_{RR}^{(i\zeta)} = -\alpha_2 + \lambda_1 e_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_1 e_{RR}^{(i\zeta)} + \lambda_3 g_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_3 g_{RR}^{(i\zeta)} - \gamma_1 T^{(i\zeta)} , \quad (3.62)$$

$$\pi_{RR}^{(i\zeta)} = \alpha_2 + \lambda_2 g_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_2 g_{RR}^{(i\zeta)} + \lambda_4 e_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_3 e_{RR}^{(i\zeta)} - \gamma_2 T^{(i\zeta)} \quad (3.63)$$

bağıntıları ve $R > a$ durumunda, $T^{(d\zeta)} = 0$ olduğu hatırlanarak, $\sigma_{RR}^{(d\zeta)}$ ve $\pi_{RR}^{(d\zeta)}$ gerilme bileşenleri için

$$\sigma_{RR}^{(d\zeta)} = -\alpha_2 + \lambda_1 e_{mm}^{(d\zeta)} + 2\mu_1 e_{RR}^{(d\zeta)} + \lambda_3 g_{mm}^{(d\zeta)} + 2\mu_3 g_{RR}^{(d\zeta)} , \quad (3.64)$$

$$\pi_{RR}^{(d\zeta)} = \alpha_2 + \lambda_2 g_{mm}^{(d\zeta)} + 2\mu_2 g_{RR}^{(d\zeta)} + \lambda_4 e_{mm}^{(d\zeta)} + 2\mu_3 e_{RR}^{(d\zeta)} \quad (3.65)$$

bağıntıları elde edilir. (3.40) ile verilen şekil değiştirme tansörü bileşenleri (3.39) vektörleri için hesaplanırsa

$$e_{RR} = \frac{du}{dR} , \quad e_{\Phi\Phi} = e_{\Theta\Theta} = \frac{u}{R} , \quad e_{R\Phi} = e_{\Phi\Theta} = e_{\Theta R} = 0 ,$$

$$e_{mm} = e_{RR} + e_{\Theta\Theta} + e_{\Phi\Phi} = \frac{2}{R}u + \frac{du}{dR} , \quad (3.66)$$

$$g_{RR} = \frac{dv}{dR} , \quad g_{\Phi\Phi} = g_{\Theta\Theta} = \frac{v}{R} , \quad g_{R\Phi} = g_{\Phi\Theta} = g_{\Theta R} = 0 ,$$

$$g_{mm} = g_{RR} + g_{\Theta\Theta} + g_{\Phi\Phi} = \frac{2}{R}v + \frac{dv}{dR} \quad (3.67)$$

bulunur. Bu ifadelerde $u(R)$ ve $v(R)$ nin $R < a$ ve $R > a$ bölgeleri için hesaplanmış olan (3.50), (3.51), (3.59) ve (3.60) bağıntıları kullanılarak karışım elemanlarının şekil değiştirme tansörü bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$e_{RR}^{(i\zeta)} = -\frac{2s_1}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + s_1 T^{(i\zeta)}(R) + C_1 , \quad e_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = e_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = \frac{s_1}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_1 ,$$

$$e_{mm}^{(i\zeta)} = s_1 T^{(i\zeta)}(R) + 3C_1 , \quad (3.68)$$

$$g_{RR}^{(i\zeta)} = -\frac{2s_2}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + s_2 T^{(i\zeta)}(R) + C_2, \quad g_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = g_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = \frac{s_2}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_2,$$

$$g_{mm}^{(i\zeta)} = s_2 T^{(i\zeta)}(R) + 3C_2, \quad (3.69)$$

$$e_{mm}^{(d\zeta)} = 0, \quad e_{RR}^{(d\zeta)} = -\frac{2s_1}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi - \frac{2a^3}{R^3} C_1,$$

$$e_{\Theta\Theta}^{(d\zeta)} = e_{\Phi\Phi}^{(d\zeta)} = \frac{s_1}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^3} C_1, \quad (3.70)$$

$$g_{mm}^{(d\zeta)} = 0, \quad g_{RR}^{(d\zeta)} = -\frac{2s_2}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi - \frac{2a^3}{R^3} C_2,$$

$$g_{\Theta\Theta}^{(d\zeta)} = g_{\Phi\Phi}^{(d\zeta)} = \frac{s_2}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^3} C_2. \quad (3.71)$$

Bunlarla (3.62)-(3.65) denklemlerine gidilirse, gerilme tansörleri için

$$\begin{aligned} \sigma_{RR}^{(i\zeta)} = & -\alpha_2 - \frac{4(\mu_1 s_1 + \mu_3 s_2)}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + [(\lambda_1 + 2\mu_1)s_1 + (\lambda_3 + 2\mu_3)s_2 - \gamma_1] T^{(i\zeta)}(R) \\ & + (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 + (3\lambda_3 + 2\mu_3)C_2, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \pi_{RR}^{(i\zeta)} = & \alpha_2 - \frac{4(\mu_3 s_1 + \mu_2 s_2)}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + [(\lambda_4 + 2\mu_3)s_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)s_2 - \gamma_2] T^{(i\zeta)}(R) \\ & + (3\lambda_4 + 2\mu_3)C_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\sigma_{RR}^{(d\zeta)} = -\alpha_2 - \frac{4(\mu_1 s_1 + \mu_3 s_2)}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi - \frac{4\mu_1 a^3}{R^3} C_1 - \frac{4\mu_3 a^3}{R^3} C_2, \quad (3.74)$$

$$\pi_{RR}^{(d\zeta)} = \alpha_2 - \frac{4(\mu_3 s_1 + \mu_2 s_2)}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi - \frac{4\mu_3 a^3}{R^3} C_1 - \frac{4\mu_2 a^3}{R^3} C_2 \quad (3.75)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bilinmeyen C_1 ve C_2 sabitlerini belirlemek amacıyla (3.72)-(3.75) ifadeleri (3.61) sınır şartlarında kullanılırsa

$$3(\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 + 3(\lambda_3 + 2\mu_3)C_2 = -[(\lambda_1 + 2\mu_1)s_1 + (\lambda_3 + 2\mu_3)s_2 - \gamma_1]T^{(i\zeta)}(a), \quad (3.76)$$

$$3(\lambda_4 + 2\mu_3)C_1 + 3(\lambda_2 + 2\mu_2)C_2 = -[(\lambda_4 + 2\mu_3)s_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)s_2 - \gamma_2]T^{(i\zeta)}(a) \quad (3.77)$$

şeklinde iki denkleme ulaşılır ve buradan C_1 ve C_2 aşağıdaki şekilde bulunur:

$$C_1 = -\frac{T^{(i\zeta)}(a)}{3} \left[s_1 + \frac{\gamma_2(\lambda_3 + 2\mu_3) - \gamma_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)} \right], \quad (3.78)$$

$$C_2 = -\frac{T^{(i\zeta)}(a)}{3} \left[s_2 + \frac{\gamma_1(\lambda_4 + 2\mu_3) - \gamma_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)} \right]. \quad (3.79)$$

(3.1) ve (3.2) bünye bağıntılarından faydalanılarak, (3.66) ve (3.67) dikkate alındığında, gerilme tansörlerinin diğer bileşenleri için $R < a$ bölgesinde

$$\sigma_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = -\alpha_2 + \lambda_1 e_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_1 e_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} + \lambda_3 g_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_3 g_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} - \gamma_1 T^{(i\zeta)},$$

$$\sigma_{R\Phi}^{(i\zeta)} = \sigma_{R\Theta}^{(i\zeta)} = \sigma_{\Theta\Phi}^{(i\zeta)} = 0, \quad (3.80)$$

$$\pi_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = \alpha_2 + \lambda_2 g_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_2 g_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} + \lambda_4 e_{mm}^{(i\zeta)} + 2\mu_3 e_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} - \gamma_2 T^{(i\zeta)},$$

$$\pi_{R\Phi}^{(i\zeta)} = \pi_{R\Theta}^{(i\zeta)} = \pi_{\Theta\Phi}^{(i\zeta)} = 0 \quad (3.81)$$

ifadeleri elde edilir. (3.68) ve (3.69) eşitlikleri yardımıyla $\sigma_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)}$ ve

$\pi_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)}$ bileşenleri için

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = & -\alpha_2 + \frac{2(\mu_1 s_1 + \mu_3 s_2)}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + [\lambda_1 s_1 + \lambda_3 s_2 - \gamma_1] T^{(i\zeta)}(R) \\ & + (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 + (3\lambda_3 + 2\mu_3)C_2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\Theta\Theta}^{(i\zeta)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(i\zeta)} = & \alpha_2 + \frac{2(\mu_3 s_1 + \mu_2 s_2)}{R^3} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + [\lambda_4 s_1 + \lambda_2 s_2 - \gamma_2] T^{(i\zeta)}(R) \\ & + (3\lambda_4 + 2\mu_3)C_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

sonuçlarına ulaşılır. Aynı bileşenlerin $R > a$ bölgesinde aldıkları değerler ise, yine aynı yol izlenerek, $T^{(ds)} = 0$ için elde edilen

$$\sigma_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(ds)} = -\alpha_2 + \lambda_1 e_{mm}^{(ds)} + 2\mu_1 e_{\Theta\Theta}^{(ds)} + \lambda_3 g_{mm}^{(ds)} + 2\mu_3 g_{\Theta\Theta}^{(ds)},$$

$$\sigma_{R\Phi}^{(ds)} = \sigma_{R\Theta}^{(ds)} = \sigma_{\Theta\Phi}^{(ds)} = 0, \quad (3.84)$$

$$\pi_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(ds)} = \alpha_2 + \lambda_2 g_{mm}^{(ds)} + 2\mu_2 g_{\Theta\Theta}^{(ds)} + \lambda_4 e_{mm}^{(ds)} + 2\mu_4 e_{\Theta\Theta}^{(ds)},$$

$$\pi_{R\Phi}^{(ds)} = \pi_{R\Theta}^{(ds)} = \pi_{\Theta\Phi}^{(ds)} = 0 \quad (3.85)$$

ifadelerinde (3.70) ve (3.71) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\sigma_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(ds)} = -\alpha_2 + \frac{2(\mu_1 s_1 + \mu_3 s_2)}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{2\mu_1 a^3}{R^3} C_1 + \frac{2\mu_3 a^3}{R^3} C_2, \quad (3.86)$$

$$\pi_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(ds)} = \alpha_2 + \frac{2(\mu_3 s_1 + \mu_2 s_2)}{R^3} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{2\mu_3 a^3}{R^3} C_1 + \frac{2\mu_2 a^3}{R^3} C_2. \quad (3.87)$$

Difüzyon kuvveti vektörüne gelince; $R < a$ bölgesi için (2.17) vektörel denklemi

$$\vec{\pi}^{(i\zeta)} = \frac{\alpha_2}{\bar{\rho}} \left[\bar{\rho}_1 \nabla(g_{mm}^{(i\zeta)}) + \bar{\rho}_2 \nabla(e_{mm}^{(i\zeta)}) \right] \quad (3.88)$$

olacağına göre (3.68) ve (3.69) bağıntıları yardımıyla difüzyon kuvveti vektörünün bileşenleri

$$\pi_R^{(i\zeta)} = \frac{\alpha_2}{\bar{\rho}} (\bar{\rho}_1 s_2 + \bar{\rho}_2 s_1) \frac{dT^{(i\zeta)}(R)}{dR}, \quad \pi_{\Theta}^{(i\zeta)} = \pi_{\Phi}^{(i\zeta)} = 0 \quad (3.89)$$

şeklinde elde edilir. $R > a$ bölgesi söz konusu olduğunda (3.70) ve (3.71)'den görüleceği üzere $e_{mm}^{(ds)} = 0$ ve $g_{mm}^{(ds)} = 0$ şeklindedir. Bu durumda ısıtılmış bölgenin dışında difüzyon kuvveti vektörü sıfır olmaktadır.

$$\pi_R^{(ds)} = \pi_{\Theta}^{(ds)} = \pi_{\Phi}^{(ds)} = 0. \quad (3.90)$$

3.3 Özel Bir Küresel Sıcaklık Alanı İçin Uygulama

Yukarıda genel formülasyonları verilen büyüklüklerin belirli bir sıcaklık alanı için ne gibi sonuçlar verdiklerini görebilmek amacıyla $T^{(ic)}(R)$ sıcaklık alanı için aşağıdaki kabul yapılıyor olsun:

$$T^{(ic)}(R) = T_0 . \quad (3.91)$$

Yani $R = a$ yarıçaplı bölgenin içerisi sabit bir T_0 sıcaklığına sahip iken bölge dışında sıcaklık sıfır olmaktadır. Bu durumda ifadelerde geçen integraller

$$\int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{T_0 R^3}{3} , \quad \int_0^a T(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{T_0 a^3}{3} . \quad (3.92)$$

değerlerini alırlar. Böylece (3.50), (3.51), (3.59) ve (3.60) yer değiştirme vektörleri

$$u^{(ic)}(R) = R \left(\frac{s_1 T_0}{3} + C_1 \right) , \quad v^{(ic)}(R) = R \left(\frac{s_2 T_0}{3} + C_2 \right) , \quad (3.93)$$

$$u^{(dis)}(R) = \frac{a^3}{R^2} \left(\frac{s_1 T_0}{3} + C_1 \right) , \quad v^{(dis)}(R) = \frac{a^3}{R^2} \left(\frac{s_2 T_0}{3} + C_2 \right) ; \quad (3.94)$$

(3.72)-(3.75) gerilme tansörü bileşenleri

$$\sigma_{RR}^{(ic)} = -\alpha_2 + C_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) + C_2(3\lambda_3 + 2\mu_3) + \frac{T_0}{3} [s_1(3\lambda_1 + 2\mu_1) + s_2(3\lambda_3 + 2\mu_3) - 3\gamma_1] ,$$

$$\pi_{RR}^{(ic)} = \alpha_2 + C_1(3\lambda_4 + 2\mu_3) + C_2(3\lambda_2 + 2\mu_2) + \frac{T_0}{3} [s_1(3\lambda_4 + 2\mu_3) + s_2(3\lambda_2 + 2\mu_2) - 3\gamma_2] , \quad (3.95)$$

$$\sigma_{RR}^{(dis)} = -\alpha_2 - \frac{4a^3}{3R^3} [\mu_1(s_1 T_0 + 3C_1) + \mu_3(s_2 T_0 + 3C_2)] ,$$

$$\pi_{RR}^{(dis)} = \alpha_2 - \frac{4a^3}{3R^3} [\mu_3(s_1 T_0 + 3C_1) + \mu_2(s_2 T_0 + 3C_2)] ; \quad (3.96)$$

gerilme tansörlerinin (3.82), (3.83), (3.86) ve (3.87) ile verilen diğer bileşenleri

$$\sigma_{\Theta\Theta}^{(ic)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(ic)} = \sigma_{RR}^{(ic)} , \quad \pi_{\Theta\Theta}^{(ic)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(ic)} = \pi_{RR}^{(ic)} , \quad (3.97)$$

$$\sigma_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \sigma_{\Phi\Phi}^{(ds)} = -\alpha_2 + \frac{2a^3}{3R^3} [\mu_1(s_1T_0 + 3C_1) + \mu_3(s_2T_0 + 3C_2)],$$

$$\pi_{\Theta\Theta}^{(ds)} = \pi_{\Phi\Phi}^{(ds)} = \alpha_2 + \frac{2a^3}{3R^3} [\mu_3(s_1T_0 + 3C_1) + \mu_2(s_2T_0 + 3C_2)] \quad (3.98)$$

ve (3.89) ile verilen difüzyon kuvveti vektörü

$$\pi_R^{(i\zeta)} = 0 \quad (3.99)$$

şeklinde elde edilir.

İç ve dış bölge ($R < a, R > a$) düşüncesi ile ayrı ayrı yazılan tüm sonuçların Heaviside fonksiyonu kullanılarak

$$W(R) = W^{(i\zeta)} H(a - R) + W^{(ds)} H(R - a) \quad (3.100)$$

şeklinde birleştirilip tek bir ifade altında verilmesi mümkündür. Bu durumda (3.50), (3.59) ve (3.51), (3.60) eşitlikleri ile ayrı ayrı verilmiş olan $u(R)$ ve $v(R)$ yer değiştirme fonksiyonları için

$$u = \left[\frac{s_1}{R^2} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_1 R \right] H(a - R) + \left[\frac{s_1}{R^2} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^2} C_1 \right] H(R - a),$$

$$v = \left[\frac{s_2}{R^2} \int_0^R T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + C_2 R \right] H(a - R) + \left[\frac{s_2}{R^2} \int_0^a T^{(i\zeta)}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{a^3}{R^2} C_2 \right] H(R - a) \quad (3.101)$$

yazılabileceği gibi, bunlara ilişkin (3.93) ve (3.94) sonuçları da

$$u = \left(\frac{s_1 T_0}{3} + C_1 \right) \left[R H(a - R) + \frac{a^3}{R^2} H(R - a) \right],$$

$$v = \left(\frac{s_2 T_0}{3} + C_2 \right) \left[R H(a - R) + \frac{a^3}{R^2} H(R - a) \right] \quad (3.102)$$

bağıntılarıyla ifade edilebilir.

Malzeme sabitleri olarak tanımlanan $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \dots, \mu_1, \dots$ büyüklüklerinin değerleri için kabuller yapılarak çeşitli karışımlar için sıcaklık alanının etkisi grafiksel olarak gösterilebilir. Borrelli ve Patria [37] iki lineer elastik katı karışımının yer değiştirme probleminde ilişkin teoremler verdikleri bir çalışmalarında izotropik bir karışımda malzeme sabitlerinin maruz kaldıkları kısıtlamaları da ortaya koymuşlardır. Bu çalışmaya göre malzeme sabitleri

$$\lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}}\alpha_2 \geq 0, \quad \lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}\alpha_2 \geq 0,$$

$$\left(\lambda_3 + 2\mu_3 - \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}\alpha_2 \right)^2 \leq \left(\lambda_1 + 2\mu_1 - \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}}\alpha_2 \right) \left(\lambda_2 + 2\mu_2 + \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}}\alpha_2 \right),$$

$$\mu_1 - \lambda_5 \geq 0, \quad \mu_2 - \lambda_5 \geq 0, \quad (\mu_3 + \lambda_5)^2 \leq (\mu_1 - \lambda_5)(\mu_2 - \lambda_5) \quad (3.103)$$

kısıtlamalarına uygun olmak zorundadır. Sabitlerin değerlerinin rastgele seçilmesi yerine bir fikir vermesi açısından tekil malzemeler için deneysel yollarla bulunmuş olan sonuçlardan faydalanmak daha doğru olacaktır. Bu amaçla Tablo 3.1’de çeşitli metaller için malzeme sabitleri verilmektedir.

Tablo 3.1 Bazı Metallere Ait Malzeme Sabitleri

	Altın	Alüminyum	Bakır	Demir	Nikel	Titanyum
$\bar{\rho}$ (kg/m ³)	19300	2700	8920	7874	8908	4507
E (GPa)	78	70	130	211	200	116
μ (GPa)	27	26	48	82	76	44
ν	0.44	0.35	0.34	0.29	0.31	0.32
λ (GPa)	198	60.7	102	113.2	124	78.2
α_T (1/°K)	14.2×10 ⁻⁶	23.1×10 ⁻⁶	16.5×10 ⁻⁶	11.8×10 ⁻⁶	13.4×10 ⁻⁶	8.6×10 ⁻⁶

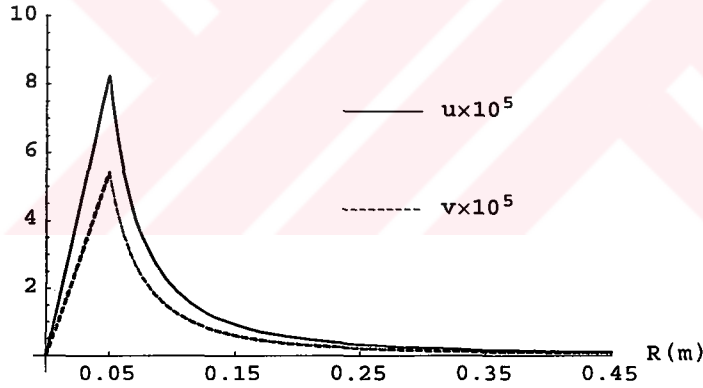
(3.103) kısıtlamalarına uygun olarak

$$\lambda_1 = 36 \text{ (GPa)}, \quad \lambda_2 = 77 \text{ (GPa)}, \quad \lambda_3 = 25 \text{ (GPa)}, \quad \lambda_4 = \lambda_3 - \alpha_2,$$

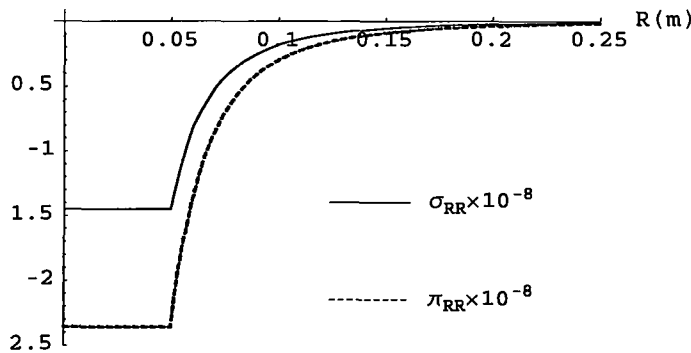
$$\mu_1 = 14 \text{ (GPa)}, \quad \mu_2 = 36 \text{ (GPa)}, \quad \mu_3 = 12 \text{ (GPa)}, \quad \alpha_{T1} = 23.1 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{^\circ K} \right),$$

$$\alpha_{T2} = 16.5 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{^\circ K} \right), \quad \bar{\rho}_1 = 2700 \text{ (kg/m}^3\text{)}, \quad \bar{\rho}_2 = 8920 \text{ (kg/m}^3\text{)} \quad (3.104)$$

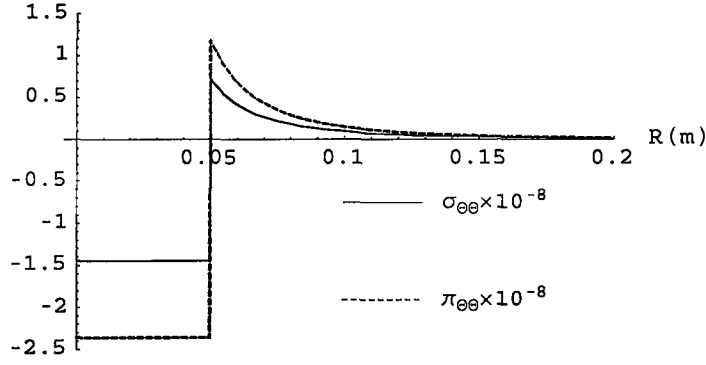
değerleri verilmiş olsun. Bu durumda, γ_1 ve γ_2 sabitleri (2.32) bağıntılarından $\gamma_1 = 4.775 \text{ (MPa/}^\circ\text{K)}$, $\gamma_2 = 7.286 \text{ (MPa/}^\circ\text{K)}$ olarak hesaplanır. $\alpha_2 = 1 \text{ (Pa)}$, ısıtılmış küresel bölgenin yarıçapı $a = 0.05 \text{ (m)}$ ve sıcaklık farkı $T_0 = 100 \text{ (}^\circ\text{K)}$ olarak alındığı takdirde, yukarıdaki malzeme sabitlerinin geçerli olduğu bir karışımın bileşenlerine ait yer değiştirme fonksiyonlarının ve gerilme bileşenlerinin değişimlerini gösteren grafikler aşağıdaki şekilde elde edilir:



Şekil 3.2 $u(R)$ ve $v(R)$ Fonksiyonlarının Değişimleri



Şekil 3.3 σ_{RR} ve π_{RR} Gerilme Bileşenlerinin Değişimleri



Şekil 3.4 $\sigma_{\Theta\Theta} = \sigma_{\Phi\Phi}$ ve $\pi_{\Theta\Theta} = \pi_{\Phi\Phi}$ Gerilme Bileşenlerinin Değişimleri

3.4 İki Elastik Katı Karışımı İçin Betti Karşılıklı Teoremi

Özel olarak tekil malzemelerin elastisite problemleri için verilmiş olan teorem 1951'de Maysel tarafından termoelastisite problemlerine genelleştirilmiştir [36, 38]. Teorem, özetle, elastik bir cismin iki farklı kütle ve yüzey kuvvetleri sistemine maruz kalması neticesinde oluşan yer değiştirmelerden birincisinin ikinci kuvvetler sistemiyle, ikincisinin ise birinci kuvvetler sistemiyle birlikte yapacakları işlerin eşit olduğunu ifade eder. Bu kısımda teorem iki elastik katı karışımı için genelleştirilmekte ve getirdiği kısıtlamalar ortaya konmaktadır.

Karışıma ait iki farklı denge hali ve bunlara ilişkin yer değiştirme vektörleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

- $F_i, G_i, P_i^{(1)}$ ve $P_i^{(2)}$ kütle ve yüzey kuvvetlerinin etkisiyle u_i ve v_i yer değiştirmeleri,
- $F'_i, G'_i, P_i'^{(1)}$ ve $P_i'^{(2)}$ kütle ve yüzey kuvvetlerinin etkisiyle u'_i ve v'_i yer değiştirmeleri.

Birinci kuvvetler sistemiyle ikinci yer değiştirme vektörlerinin birlikte yapacakları iş

$$\int_V F_i u'_i dV + \int_S P_i^{(1)} u'_i dS + \int_V G_i v'_i dV + \int_S P_i^{(2)} v'_i dS \quad (3.105)$$

integralleriyle belirlenir. n_k karışım elemanına ait bir birim dış normal vektör olmak üzere, $P_i^{(1)}$ ve $P_i^{(2)}$ yüzey kuvvetleri ile kısmî gerilme tansörleri arasındaki ilişki

$$P_i^{(1)} = \sigma_{ki} n_k, \quad P_i^{(2)} = \pi_{ki} n_k \quad (3.106)$$

şeklindedir. F_i ve G_i kütle kuvvetleri yerine (2.16) denge denklemlerine göre

$$F_i = -\sigma_{ki,k} + \pi_i, \quad G_i = -\pi_{ki,k} - \pi_i \quad (3.107)$$

eşitlikleri kullanılır ve (3.106), (3.107) bağıntıları ile (3.105) ifadesine gidilirse

$$\begin{aligned} & \int_V (F_i - \pi_i) u'_i dV + \int_S P_i^{(1)} u'_i dS + \int_V (G_i + \pi_i) v'_i dV + \int_S P_i^{(2)} v'_i dS \\ &= -\int_V \sigma_{ki,k} u'_i dV + \int_S \sigma_{ki} n_k u'_i dS - \int_V \pi_{ki,k} v'_i dV + \int_S \pi_{ki} n_k v'_i dS \end{aligned} \quad (3.108)$$

elde edilir. Diverjans (Gauss) teoreminin yardımıyla eşitliğin sağında bulunan ikinci ve dördüncü integralleri

$$\begin{aligned} & \int_S \sigma_{ki} n_k u'_i dS = \int_V (\sigma_{ki,k} u'_i + \sigma_{ki} u'_{i,k}) dV, \\ & \int_S \pi_{ki} n_k v'_i dS = \int_V (\pi_{ki,k} v'_i + \pi_{ki} v'_{i,k}) dV \end{aligned} \quad (3.109)$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. $u'_{i,k}$ ve $v'_{i,k}$ yer değiştirme gradyanlarının simetrik ve antisimetrik kısımları cinsinden

$$u'_{i,k} = e'_{ik} + w'_{ik}^{(1)}, \quad v'_{i,k} = g'_{ik} + w'_{ik}^{(2)} \quad (3.110)$$

şeklinde yazılabilecekleri ve (3.1), (3.2) bünye denklemlerine göre σ_{ki} ve π_{ki} kısmî gerilme tansörlerinin simetrik oldukları düşünülürse ifadelerde geçen $\sigma_{ki} u'_{i,k}$ ve $\pi_{ki} v'_{i,k}$ iç çarpımları

$$\sigma_{ki} u'_{i,k} = \sigma_{ki} e'_{ik}, \quad \pi_{ki} v'_{i,k} = \pi_{ki} g'_{ik} \quad (3.111)$$

sonuçlarını verir. Bu sonuçlarla birlikte (3.109) eşitlikleri (3.108)'de kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \int_V (F_i - \pi_i) u'_i dV + \int_S P_i^{(1)} u'_i dS + \int_V (G_i + \pi_i) v'_i dV + \int_S P_i^{(2)} v'_i dS \\
& = \int_V (\sigma_{ki} e'_{ik} + \pi_{ki} g'_{ik}) dV
\end{aligned} \quad (3.112)$$

elde edilir. Gerilme tansörlerinin (3.1) ve (3.2) ile verilmiş ifadeleri yerlerine konularak bu bağıntının sağındaki integral aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \int_V (\sigma_{ki} e'_{ik} + \pi_{ki} g'_{ik}) dV = \int_V [-(\alpha_2 + \gamma_1 T) e'_{ii} + (\alpha_2 - \gamma_2 T) g'_{ii} + \lambda_1 e_{mm} e'_{ii} + 2\mu_1 e_{ik} e'_{ik} \\
& + \lambda_2 g_{mm} g'_{ii} + 2\mu_2 g_{ik} g'_{ik} + \lambda_3 g_{mm} e'_{ii} + \lambda_4 e_{mm} g'_{ii} + 2\mu_3 (g_{ik} e'_{ik} + e_{ik} g'_{ik})] dV. \quad (3.113)
\end{aligned}$$

(2.14)'te verilen tanımlar gereğince $e'_{ii} = u'_{i,i}$ ve $g'_{ii} = v'_{i,i}$ olduğu dikkate alınarak diverjans teoreminin yardımıyla eşitliğin sağındaki ilk iki terim için

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\alpha_2 + \gamma_1 T) e'_{ii} dV = - \int_S (\alpha_2 + \gamma_1 T) u'_i n_i dS + \gamma_1 \int_V T_{,i} u'_i dV, \\
& \int_V (\alpha_2 - \gamma_2 T) g'_{ii} dV = \int_S (\alpha_2 - \gamma_2 T) v'_i n_i dS + \gamma_2 \int_V T_{,i} v'_i dV
\end{aligned} \quad (3.114)$$

düzenlemeleri yapılır ve (3.113), (3.114) ile (3.112)'ye gidilirse

$$\begin{aligned}
& \int_V \hat{F}_i u'_i dV + \int_S \hat{P}_i^{(1)} u'_i dS + \int_V \hat{G}_i v'_i dV + \int_S \hat{P}_i^{(2)} v'_i dS = \int_V [\lambda_1 e_{mm} e'_{ii} + 2\mu_1 e_{ik} e'_{ik} \\
& + \lambda_2 g_{mm} g'_{ii} + 2\mu_2 g_{ik} g'_{ik} + \lambda_3 g_{mm} e'_{ii} + \lambda_4 e_{mm} g'_{ii} + 2\mu_3 (g_{ik} e'_{ik} + e_{ik} g'_{ik})] dV
\end{aligned} \quad (3.115)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\hat{F}_i$, $\hat{G}_i$, $\hat{P}_i^{(1)}$ ve $\hat{P}_i^{(2)}$ büyüklükleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
& \hat{F}_i = F_i - \pi_i - \gamma_1 T_{,i}, \quad \hat{G}_i = G_i + \pi_i - \gamma_2 T_{,i}, \\
& \hat{P}_i^{(1)} = P_i^{(1)} + (\alpha_2 + \gamma_1 T) n_i, \quad \hat{P}_i^{(2)} = P_i^{(2)} - (\alpha_2 - \gamma_2 T) n_i
\end{aligned} \quad (3.116)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\lambda_3 = \lambda_4$ olması halinde (3.115)'in sağ tarafının üslü ve üssüz terimlerine göre simetrik olduğu görülür. Bu ise (2.13) tanımına göre $\alpha_2 = 0$ olması ve dolayısıyla (2.17)'den $\pi_i = 0$ olması anlamına gelir. O halde buradan iki

elastik katı karışımı için Betti karşılık teoreminin karışım bileşenlerinin ön gerilmesiz olduğu ve bundan dolayı da difüzyon etkisinin bulunmadığı bir durum için kullanılabileceği sonucuna ulaşılır. Teorem bu durumda aşağıdaki genel forma sahip olur:

$$\begin{aligned} & \int_V \hat{F}_i u'_i dV + \int_S \hat{P}_i^{(1)} u'_i dS + \int_V \hat{G}_i v'_i dV + \int_S \hat{P}_i^{(2)} v'_i dS \\ &= \int_V \hat{F}'_i u_i dV + \int_S \hat{P}'^{(1)}_i u_i dS + \int_V \hat{G}'_i v_i dV + \int_S \hat{P}'^{(2)}_i v_i dS . \end{aligned} \quad (3.117)$$

3.5 İki Elastik Katı Karışımı İçin Maysel Formülü

Genel olarak homojen olmayan sınır şartlarını sağlatarak diferansiyel denklemlerin direkt integrasyonu yoluyla ısı gerilme ve yer değiştirme alanlarını saptamak oldukça zordur. Bu nedenle varyasyonel prensipleri termoelastisite teorisine uygulayarak yaklaşık çözüm elde etme konusuna yönelmeler olmuştur. Ancak Betti karşılık teoremine dayanan Maysel metodu termoelastisite problemlerinin direkt çözümünü elde etme hususunda bir alternatif sunmaktadır. Bu metot sayesinde bir elastik cisimde ısı gerilme alanının saptanması problemi bir noktasal kuvvetin etkisini içeren izotermal elastisite probleminin çözümüne indirgenmektedir. Eğer yer değiştirme alanı eksenel simetriye sahipse, bu durumda termoelastisite problemi sınırı boyunca homojen bir şekilde dağılmış birim tekil kuvvetlerin etkisi altında olan ve homojen olarak ısıtılmış bulunan bir cismin ısıl gerilmelerinin saptanması problemine dönüşmektedir [38].

Betti karşılık teoreminin iki elastik katıdan oluşan bir karışım için genel bir hali elde edilmeye çalışılırken iki farklı kuvvet ve bunlara ilişkin deformasyon alanları düşüncesinden hareket edilmişti. Teoremin $\alpha_2 = 0$ (dolayısıyla $\pi_i = 0$) olması halinde geçerli olduğu hatırlanarak sözü edilen üslü ve üssüz deformasyon alanları için aşağıdaki kabuller yapılmaktadır:

a) Üssüz deformasyon halleri,

$$F_i = 0, G_i = 0 \text{ ve } P_i^{(1)} = P_i^{(2)} = 0 \quad (3.118)$$

olmak üzere, sadece ısıl etkiler sebebiyle oluşuyor olsun. Bu durumda (3.116)

tanımları

$$\hat{F}_i = -\gamma_1 T_i, \quad \hat{G}_i = -\gamma_2 T_i, \quad \hat{P}_i^{(1)} = \gamma_1 T n_i, \quad \hat{P}_i^{(2)} = \gamma_2 T n_i \quad (3.119)$$

bağıntılarına indirgenir.

b) Üslü deformasyon halleri ise, sıcaklık alanı

$$T' = 0 \quad (3.120)$$

olmak üzere, x_r konumunda x_i eksen yönünde etkiyen ve sırasıyla $P_i'^{(1)}$, F_i' ve $P_i'^{(2)}$, G_i' sistemlerine eşdeğer olan birim noktasal kuvvetler tarafından üretiliyor olsun. Diğer bir deyişle, birim noktasal kuvvetlerin sebep olduğu gerilme ve yer değiştirme alanları $P_i'^{(1)}$, F_i' ve $P_i'^{(2)}$, G_i' kuvvet sistemlerinin meydana getireceği gerilme ve yer değiştirme alanlarına eşdeğer kabul edilmektedir. Noktasal yüklerin belirtilmesinde $\delta(x - x_0)$ şeklinde gösterilen Dirac delta fonksiyonu sıklıkla kullanılır.

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan Dirac delta fonksiyonu $x = x_0$ konumunda sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0, & x_0 \notin (a, b) \\ f(x_0), & x_0 \in (a, b) \end{cases} \quad (3.121)$$

sonuçlarını verir.

Deformasyon alanları için yapılan kabullerle (3.117) bağıntısına gidilirse

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \delta(\xi_1 - x_1) \delta(\xi_2 - x_2) \delta(\xi_3 - x_3) u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \delta(\xi_1 - x_1) \delta(\xi_2 - x_2) \delta(\xi_3 - x_3) v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & = -\gamma_1 \int_V T_i u_i' dV + \gamma_1 \int_S T u_i' n_i dS - \gamma_2 \int_V T_i v_i' dV + \gamma_2 \int_S T v_i' n_i dS \end{aligned} \quad (3.122)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki yüzey integrallerine diverjans teoremi uygulanır ve eşitliğin solundaki integrallerin (3.121) özelliği gereğince

$$u_i(x_r), \quad v_i(x_r), \quad r = 1, 2, 3$$

vereceğine dikkat edilirse aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$u_i(x_r) + v_i(x_r) = \gamma_1 \int_V T(\xi_r) \kappa^{(i)}(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) + \gamma_2 \int_V T(\xi_r) \eta^{(i)}(\xi_r, x_r) dV(\xi_r). \quad (3.123)$$

Bu bağıntı iki elastik katı karışımı için Maysel formülünün genelleştirilmiş bir ifadesidir. İntegrallerde yer alan $\kappa^{(i)}(\xi_r, x_r)$ ve $\eta^{(i)}(\xi_r, x_r)$ büyüklükleri için

$$\kappa^{(i)}(\xi_r, x_r) = \nabla \cdot \mathbf{u}' = u'_{i,i}, \quad \eta^{(i)}(\xi_r, x_r) = \nabla \cdot \mathbf{v}' = v'_{i,i} \quad (3.124)$$

tanımları yapılmıştır. Mekaniksel açıdan bu fonksiyonların x_r noktasında konumlanmış olan ve x_i yönünde etkiyen birim noktasal yükler sebebiyle karışımın ξ_r noktasında bileşenlerde meydana gelen genleşmeler olarak yorumlanması mümkündür [36]. Ayrıca, üslü yer değiştirme alanlarından türetildikleri için bunların izotermal hale ait büyüklükler olduklarına da dikkat edilmelidir. (i) üst indisi $\kappa^{(i)}$ ve $\eta^{(i)}$ büyüklüklerinin x_i yönünde etkiyen noktasal kuvvetlerden dolayı oluştuklarını ifade etmek amacıyla kullanılmaktadır.

(3.123)'te toplam olarak ortaya çıkan yer değiştirmeleri ayrı ayrı elde etmek amacıyla (3.32) ve (3.33)'ün toplamaları alınır ve elde edilen

$$u_i(x_r) + v_i(x_r) = [(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2] \times \int_V T(\xi_r) U_i(\xi_r, x_r) dV(\xi_r) \quad (3.125)$$

eşitliği (3.123) ile karşılaştırılırsa $U_i(\xi_r, x_r)$ büyüklüğünün $\kappa^{(i)}(\xi_r, x_r)$ ve $\eta^{(i)}(\xi_r, x_r)$ cinsinden

$$U_i(\xi_r, x_r) = \frac{\gamma_1 \kappa^{(i)}(\xi_r, x_r) + \gamma_2 \eta^{(i)}(\xi_r, x_r)}{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2} \quad (3.126)$$

değerine eşit olduğu görülür. $U_i(\xi_r, x_r)$ için bulunan bu değer (3.32) ve (3.33)'te kullanılarak bileşenlere ait yer değiştirme vektörleri

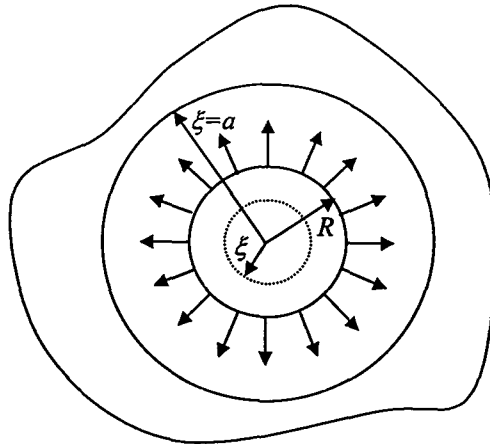
$$u_i(x_r) = \left[\frac{(K_4 + D_4)\gamma_1 - (K + D_2)\gamma_2}{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2} \right] \times \int_V T(\xi_r) [\gamma_1 \kappa^{(i)}(\xi_r, x_r) + \gamma_2 \eta^{(i)}(\xi_r, x_r)] dV(\xi_r), \quad (3.127)$$

$$v_i(x_r) = \left[\frac{(K_1 + D_1)\gamma_2 - (K + D_3)\gamma_1}{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2} \right] \times \int_V T(\xi_r) [\gamma_1 \kappa^{(i)}(\xi_r, x_r) + \gamma_2 \eta^{(i)}(\xi_r, x_r)] dV(\xi_r) \quad (3.128)$$

şeklinde elde edilir.

3.6 Küresel Sıcaklık Alanı Problemi İçin Maysel Formülünün Kullanılması

Karışım bileşenlerinin Şekil 3.5'te gösterildiği gibi R yarıçaplı küresel bir yüzey üzerinde homojen olarak dağılmış bulunan ve $1.\delta(\xi - R)$ şeklinde tanımlanan birim radyal kuvvetlerin etkisine maruz kaldığı kabul edilsin. Burada ξ yarıçap doğrultusundaki koordinat değişimini göstermektedir. Ayrıca bu etkiler sebebiyle ξ yarıçaplı bölgede bileşenlerde meydana gelen genleşmeler $\kappa(\xi, R)$ ve $\eta(\xi, R)$ büyüklükleriyle tanımlanıyor olsun.



Şekil 3.5 Yayılı Birim Kuvvetlerin Etkisine Maruz Küresel Bir Yüzey

Bu yükleme durumu ve (3.119), (3.120) kabulleri ile (3.117)'ye gidilirse

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - R) u(\xi) dV(\xi) + \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - R) v(\xi) dV(\xi) \\ &= -\gamma_1 \int_V T_{,i} u'_i dV + \gamma_1 \int_S T u'_i n_i dS - \gamma_2 \int_V T_{,i} v'_i dV + \gamma_2 \int_S T v'_i n_i dS \end{aligned}$$

elde edilir. Bağıntının sağ tarafına diverjans teoremi uygulanıp hacim integralleri yeniden düzenlendiğinde elde edilen

$$\begin{aligned} & 4\pi \int_0^{\infty} \delta(\xi - R) u(\xi) \xi^2 d\xi + 4\pi \int_0^{\infty} \delta(\xi - R) v(\xi) \xi^2 d\xi \\ &= 4\pi \gamma_1 \int_0^{\infty} T(\xi) \kappa(\xi, R) \xi^2 d\xi + 4\pi \gamma_2 \int_0^{\infty} T(\xi) \eta(\xi, R) \xi^2 d\xi \end{aligned}$$

eşitliğinde Dirac delta fonksiyonunun (3.121) ile verilen özelliği kullanılırsa

$$u(R) + v(R) = \frac{1}{R^2} \int_0^{\infty} T(\xi) [\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R)] \xi^2 d\xi \quad (3.129)$$

sonucuna ulaşılır. (3.32) ve (3.33) integralleri ise bu durumda aşağıdaki şekildedir:

$$u(R) = 4\pi [(K_4 + D_4) \gamma_1 - (K + D_2) \gamma_2] \int_0^{\infty} T(\xi) U(\xi, R) \xi^2 d\xi, \quad (3.130)$$

$$v(R) = 4\pi [(K_1 + D_1) \gamma_2 - (K + D_3) \gamma_1] \int_0^{\infty} T(\xi) U(\xi, R) \xi^2 d\xi. \quad (3.131)$$

Bu ifadelerin toplamı alınır ve sonuç (3.129) ile karşılaştırılırsa $U_i(\xi_r, x_r)$ fonksiyonu için

$$U(\xi, R) = \frac{\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R)}{4\pi R^2 [(K_4 + D_4 - K - D_3) \gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2) \gamma_2]} \quad (3.132)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı kullanılarak (3.130) ve (3.131) ile verilen radyal yer değiştirmeler $\kappa(\xi, R)$ ve $\eta(\xi, R)$ cinsinden

$$u(R) = \left[\frac{(K_4 + D_4)\gamma_1 - (K + D_2)\gamma_2}{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2} \right] \\ \times \frac{1}{R^2} \int_0^\infty T(\xi) [\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R)] \xi^2 d\xi , \quad (3.133)$$

$$v(R) = \left[\frac{(K_1 + D_1)\gamma_2 - (K + D_3)\gamma_1}{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2} \right] \\ \times \frac{1}{R^2} \int_0^\infty T(\xi) [\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R)] \xi^2 d\xi \quad (3.134)$$

şeklinde elde edilir.

$\kappa(\xi, R)$ ve $\eta(\xi, R)$ genleşme fonksiyonları, genel hallerinin verildiği (3.124) bağıntılarından görüleceği üzere, üslü deformasyon hallerine (izotermal hal) karşılık gelen çözümlerden elde edilmektedir. Küresel sıcaklık alanı etkisine maruz iki elastik katı karışımının yer değiştirmelerini yöneten diferansiyel denklem takımı (3.47) ile verilmişti. Radyal koordinat değişimi ξ ile gösterildiğinde (3.47) denklemleri izotermal durum için

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 u') \right] = 0 , \quad \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 v') \right] = 0 \quad (3.135)$$

şeklini alırlar. Çözüm yine iki bölgenin yardımıyla elde edilmektedir. Yalnız burada bölgeler sıcaklık alanının etkideği $\xi = a$ yarıçapı için değil, homojen birim yüklerin etkideği $\xi = R$ yarıçapı için ayrılmaktadır. Bundan sonra $0 < \xi < R$ bölgesi için elde edilen çözümler $\bar{u}'$ ve $\bar{v}'$ ile, $R < \xi < \infty$ bölgesi için elde edilenler ise $\bar{\bar{u}}'$ ve $\bar{\bar{v}}'$ ile gösterilecektir.

Sınır şartları $\xi = R$ konumunda bileşenlere ait yer değiştirmelerin sürekli olacağı, buna karşılık, küresel yüzey üzerinde bulunan radyal birim yükler sebebiyle $\sigma'_{\xi\xi}$ ve $\pi'_{\xi\xi}$ gerilme tansörü bileşenlerinin birim artımlara maruz kalacağı düşünülerek

$$\left| \bar{u}' - \bar{\bar{u}}' \right|_{\xi=R} = 0 , \quad \left| \bar{v}' - \bar{\bar{v}}' \right|_{\xi=R} = 0 , \quad (3.136)$$

$$\left| \bar{\sigma}'_{\xi\xi} - \bar{\bar{\sigma}}'_{\xi\xi} \right|_{\xi=R} = 1, \quad \left| \bar{\pi}'_{\xi\xi} - \bar{\bar{\pi}}'_{\xi\xi} \right|_{\xi=R} = 1 \quad (3.137)$$

şeklinde verilir.

(3.135) diferansiyel denklemlerinin integrasyonu ile

$$u' = C_5 \xi + C_6 \frac{1}{\xi^2}, \quad v' = C_7 \xi + C_8 \frac{1}{\xi^2} \quad (3.138)$$

elde edilir. Yer değiştirmelerin $0 < \xi < R$ bölgesinde $\xi \rightarrow 0$ için, $R < \xi < \infty$ bölgesinde ise $\xi \rightarrow \infty$ için sonlu kalacağı kabul edilirse her iki bölgeye ait çözümler

$$\bar{u}' = C_5 \xi, \quad \bar{v}' = C_7 \xi, \quad (3.139)$$

$$\bar{\bar{u}}' = C_6 \frac{1}{\xi^2}, \quad \bar{\bar{v}}' = C_8 \frac{1}{\xi^2} \quad (3.140)$$

bağıntılarına indirgenir. (3.139) bağıntılarının (3.136) sınır şartlarında kullanılması halinde integrasyon sabitleri arasında

$$C_6 = C_5 R^3, \quad C_8 = C_7 R^3 \quad (3.141)$$

ilişkilerinin var olduğu görülür. Gerilmeler cinsinden verilen (3.137) sınır şartlarını kullanabilmek için öncelikle $\bar{\sigma}'_{\xi\xi}$, $\bar{\bar{\sigma}}'_{\xi\xi}$, $\bar{\pi}'_{\xi\xi}$ ve $\bar{\bar{\pi}}'_{\xi\xi}$ gerilme bileşenlerinin hesabı gerekir. (3.1) ve (3.2) bünye denklemlerinin $\alpha_2 = 0$ ve $T' = 0$ durumu için

$$\begin{aligned} \sigma'_{\xi\xi} &= \lambda_1 e'_{mm} + 2\mu_1 e'_{\xi\xi} + \lambda_3 g'_{mm} + 2\mu_3 g'_{\xi\xi}, \\ \pi'_{\xi\xi} &= \lambda_2 g'_{mm} + 2\mu_2 g'_{\xi\xi} + \lambda_4 e'_{mm} + 2\mu_3 e'_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (3.142)$$

verecekleri dikkate alınır ve bağıntılarda yer alan şekil değiştirme tansörlerine ait değerler için (3.66) ve (3.67) ifadelerine başvurulursa, (3.142)'den

$$\begin{aligned} \sigma'_{\xi\xi} &= 2\lambda_1 \frac{u'}{\xi} + 2\lambda_3 \frac{v'}{\xi} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{du'}{d\xi} + (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{dv'}{d\xi}, \\ \pi'_{\xi\xi} &= 2\lambda_4 \frac{u'}{\xi} + 2\lambda_2 \frac{v'}{\xi} + (\lambda_4 + 2\mu_3) \frac{du'}{d\xi} + (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{dv'}{d\xi} \end{aligned} \quad (3.143)$$

sonuçları elde edilir. Burada geçen u' ve v' yerine önce (3.139) ve daha sonra da (3.140) çözümleri yerleştirilerek aşağıdaki ifadelerle ulaşılır:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}'_{\xi\xi} &= C_5(3\lambda_1 + 2\mu_1) + C_7(3\lambda_3 + 2\mu_3) , \\ \bar{\pi}'_{\xi\xi} &= C_5(3\lambda_4 + 2\mu_3) + C_7(3\lambda_2 + 2\mu_2) , \\ \bar{\bar{\sigma}}'_{\xi\xi} &= -\frac{4}{\xi^3}(C_6\mu_1 + C_8\mu_3) , \\ \bar{\bar{\pi}}'_{\xi\xi} &= -\frac{4}{\xi^3}(C_6\mu_3 + C_8\mu_2) .\end{aligned}\quad (3.144)$$

Bu hesaplar sonucunda, (3.137) sınır şartları ve (3.141) bağıntıları yardımıyla

$$\begin{aligned}C_5(3\lambda_1 + 6\mu_1) + C_7(3\lambda_3 + 6\mu_3) &= 1 , \\ C_5(3\lambda_4 + 6\mu_3) + C_7(3\lambda_2 + 6\mu_2) &= 1\end{aligned}\quad (3.145)$$

denklemleri ve bunların çözümünü de C_5 ve C_7 integrasyon sabitleri için

$$\begin{aligned}C_5 &= \frac{\lambda_2 - \lambda_3 + 2(\mu_2 - \mu_3)}{3[(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)]} , \\ C_7 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_4 + 2(\mu_1 - \mu_3)}{3[(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)]}\end{aligned}\quad (3.146)$$

değerleri elde edilir.

Böylece (3.139) ve (3.140) ile verilen ve izotermal hale ait olan tüm $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{\bar{u}}'$, $\bar{\bar{v}}'$ yer değiştirmeleri belirlenmiş olmaktadır. Bu durumda karışım bileşenlerinde $\xi = R$ bölgesinin içi ve dışı için meydana gelen genleşmeler, (3.43) bağıntısı yardımıyla, (3.139) ve (3.140) ifadelerinden aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(\xi, R) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}' &= \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \bar{u}') = 3C_5 , \quad \bar{\eta}(\xi, R) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}' = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \bar{v}') = 3C_7 , \\ \bar{\bar{\kappa}}(\xi, R) = \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{u}}}' &= \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \bar{\bar{u}}') = 0 , \quad \bar{\bar{\eta}}(\xi, R) = \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{v}}}' = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \bar{\bar{v}}') = 0 .\end{aligned}\quad (3.147)$$

İki ayrı bölge için hesaplanan bağıntıları Heaviside fonksiyonu yardımıyla tek bir ifade altında vermek mümkündür:

$$\kappa = \bar{\kappa} H(R - \xi) + \bar{\bar{\kappa}} H(\xi - R) , \quad \eta = \bar{\eta} H(R - \xi) + \bar{\bar{\eta}} H(\xi - R) .$$

Buna göre karışım bileşenlerine ait genleşme fonksiyonları

$$\kappa(\xi, R) = 3C_5 H(R - \xi) , \quad \eta(\xi, R) = 3C_7 H(R - \xi) \quad (3.148)$$

şeklindedir. Yer değiştirmeleri verecek olan (3.133) ve (3.134) bağıntılarında yerlerine koymak üzere $\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R)$ büyüklüğü teşkil edilir ve bulunan ifadede $\alpha_2 = 0$ için (2.20), (2.23) ve (2.26) kullanılırsa

$$\gamma_1 \kappa(\xi, R) + \gamma_2 \eta(\xi, R) = \frac{(K_4 + D_4 - K - D_3)\gamma_1 + (K_1 + D_1 - K - D_2)\gamma_2}{(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)} H(R - \xi) \quad (3.149)$$

eşitliği ve bu eşitliğin (3.133) ve (3.134) bağıntılarında kullanılması neticesinde

$$u(R) = \left[\frac{(K_4 + D_4)\gamma_1 - (K + D_2)\gamma_2}{(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)} \right] \frac{1}{R^2} \int_0^\infty T(\xi) H(R - \xi) \xi^2 d\xi , \quad (3.150)$$

$$v(R) = \left[\frac{(K_1 + D_1)\gamma_2 - (K + D_3)\gamma_1}{(K_1 + D_1)(K_4 + D_4) - (K + D_2)(K + D_3)} \right] \frac{1}{R^2} \int_0^\infty T(\xi) H(R - \xi) \xi^2 d\xi \quad (3.151)$$

şeklinde yer değiştirme vektörleri elde edilir. İntegrallerin katsayıları (3.9) ve (3.10) tanımlarıyla karşılaştırıldığında birinci integrale ait katsayının s_1 e ikincisinin ise s_2 ye eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca integraller içerisindeki Heaviside fonksiyonları üst sınırın R olarak değiştirilmesini gerektirir. Bu durumda $T(\xi)$ şeklindeki bir sıcaklık alanının tesiri altındaki iki elastik katıdan oluşan bir karışımda bileşenlerde meydana gelen yer değiştirmeleri ifade eden bağıntılar Maysel formülü yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$u(R) = \frac{s_1}{R^2} \int_0^R T(\xi) \xi^2 d\xi , \quad v(R) = \frac{s_2}{R^2} \int_0^R T(\xi) \xi^2 d\xi . \quad (3.152)$$

Özel olarak sıcaklık alanı (3.36)'daki gibi $T(\xi) = T^{(ic)}(\xi)H(a - \xi)$ şeklinde seçilirse;

$$u(R) = \frac{S_1}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) H(a - \xi) \xi^2 d\xi, \quad v(R) = \frac{S_2}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) H(a - \xi) \xi^2 d\xi$$

olur ve R ye göre iki durum ortaya çıkar:

1) $0 < R < a$ için

$$u^{(ic)}(R) = \frac{S_1}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi, \quad v^{(ic)}(R) = \frac{S_2}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi, \quad (3.153)$$

2) $a < R < \infty$ için

$$u^{(dis)}(R) = \frac{S_1}{R^2} \int_0^a T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi, \quad v^{(dis)}(R) = \frac{S_2}{R^2} \int_0^a T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (3.154)$$

(3.153) ve (3.154)'te $R < a$ ve $R > a$ için ayrı ayrı verilen yer değiştirme alanları tüm karışım bölgesi için Heaviside fonksiyonu yardımıyla

$$u(R) = \left[\frac{S_1}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi \right] H(a - R) + \left[\frac{S_1}{R^2} \int_0^a T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi \right] H(R - a), \quad (3.155)$$

$$v(R) = \left[\frac{S_2}{R^2} \int_0^R T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi \right] H(a - R) + \left[\frac{S_2}{R^2} \int_0^a T^{(ic)}(\xi) \xi^2 d\xi \right] H(R - a) \quad (3.156)$$

şeklinde birleştirilebilir. Bu sonuçların ise $C_1 = C_2 = 0$ olması halinde (3.101) ile aynı oldukları görülmektedir. Gerçekten de, Maysel formülü α_2 ön gerilmesinin sıfır olduğu durum için geçerli olduğuna göre, (2.20) ve (2.23)'ün $\alpha_2 = 0$ için verdikleriyle (3.9) ve (3.10)'a gidilirse

$$s_1 = \frac{\gamma_1(\lambda_2 + 2\mu_2) - \gamma_2(\lambda_3 + 2\mu_3)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)},$$

$$s_2 = \frac{\gamma_2(\lambda_1 + 2\mu_1) - \gamma_1(\lambda_4 + 2\mu_3)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) - (\lambda_3 + 2\mu_3)(\lambda_4 + 2\mu_3)} \quad (3.157)$$

bağıntıları ve bu bağıntıların (3.78) ve (3.79)'da kullanılması neticesinde de $C_1 = 0$ ve $C_2 = 0$ sonuçları elde edilir.

4. İZOTERMAL KOŞULLAR ALTINDA İKİ ELASTİK KATI KARIŞIMI İLE İLGİLİ PAPKOVICH-NEUBER ÇÖZÜMÜ VE KELVIN PROBLEMİ

Bir önceki bölümde sıcaklığın tesiriyle oluşan değişimler ve bu duruma ilişkin çözüm tartışılmıştı. Bu bölümde ise sıcaklık yerine kuvvet tesirinin var olması halinde çözümün nasıl bulunacağı incelenmektedir. İlk olarak, (2.24) ve (2.25) ile verilen yer değiştirmelere ait diferansiyel denklemler Helmholtz teoremi yardımıyla düzenlenmekte ve elastisite teorisinden bilinen Navier denklemlerinin benzerleri elde edilmektedir. Daha sonra bu denklemler Papkovich-Neuber metodu kullanılarak çözülmekte ve bulunan çözümünden tekil bir kuvvetin etkisinin incelendiği Kelvin probleminde yararlanılmaktadır.

Sıcaklık alanının bulunmadığı ve kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda (2.24) ve (2.25) diferansiyel denklemleri

$$K_1 \nabla^2 \mathbf{u} + K \nabla^2 \mathbf{v} + D_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (4.1)$$

$$K \nabla^2 \mathbf{u} + K_4 \nabla^2 \mathbf{v} + D_3 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + D_4 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (4.2)$$

şeklini alırlar. (2.14) ile tanımlanan şekil değiştirme tansörleri için

$$2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T, \quad 2\mathbf{g} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = e_{mm}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = g_{mm} \quad (4.3)$$

gösterimleri kullanılırsa, $\lambda_5 = 0$ için (2.9), (2.10) ve (2.17) bünye bağıntılarının tansörel formları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma = -\alpha_2 \mathbf{I} + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu_1 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \lambda_3 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu_3 [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (4.4)$$

$$\pi = \alpha_2 \mathbf{I} + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu_2 [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda_4 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu_3 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (4.5)$$

$$\bar{\pi} = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (4.6)$$

4.1 Genelleştirilmiş Navier Denklemleri

İki elastik katıdan oluşan bir karışım için yer değiştirme probleminin temel denklemleri olan (4.1) ve (4.2) diferansiyel denklemlerini de sağlayacak olan bir başka formun bulunmasında Helmholtz teoreminden faydalanılabilir. Bu teoreme göre, basit bağımlı bir Ω bölgesinde kendisi ve türevi sürekli olan ve sonsuzda sıfır değerini alan herhangi bir $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ vektör alanı bir solenoidal ve bir irrotasyonel vektörün toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{ir}(\mathbf{x}) . \quad (4.7)$$

Solenoidal ve irrotasyonel vektör alanları

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_s(\mathbf{x}) = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{f}_{ir}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır ve ϕ bir skaler potansiyel fonksiyonu ve ψ bir vektörel potansiyel fonksiyonu göstermek üzere

$$\mathbf{f}_s = \nabla \times \psi , \quad \mathbf{f}_{ir} = \nabla \phi \quad (4.9)$$

bağıntıları yazılabilir.

Yer değiştirme vektörleri için de Helmholtz teoremi gereğince

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_{ir} , \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_{ir} , \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{u}_{ir} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{v}_{ir} = 0 \quad (4.11)$$

tanımları yapılır ve (4.11) dikkate alınarak (4.10) ifadeleri ile (4.1)'e gidilirse

$$K_1 \nabla^2 (\mathbf{u}_{ir} + \mathbf{u}_s) + K \nabla^2 (\mathbf{v}_{ir} + \mathbf{v}_s) + D_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{ir}) + D_2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_{ir}) = 0$$

elde edilir. İlk iki terim

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) \quad (4.12)$$

vektörel özdeşliği uyarınca yeniden düzenlenerek

$$\nabla \{ \nabla \cdot [(K_1 + D_1) \mathbf{u}_{ir} + (K + D_2) \mathbf{v}_{ir}] \} - \nabla \times [\nabla \times (K_1 \mathbf{u}_s + K \mathbf{v}_s)] = 0$$

denklemini bulunur. Son denklemin iki kısımda ele alınması ve

$$\begin{aligned}\nabla\{\nabla\cdot[(K_1 + D_1)\mathbf{u}_{ir} + (K + D_2)\mathbf{v}_{ir}]\} &= 0, \\ \nabla\times[\nabla\times(K_1\mathbf{u}_s + K\mathbf{v}_s)] &= 0\end{aligned}\quad (4.13)$$

şeklinde yazılması mümkündür [39]. (4.13) eşitlikleri aynı zamanda, (4.11) tanımları dikkate alınarak, (4.12) özdeşliği yardımıyla

$$\nabla^2[(K_1 + D_1)\mathbf{u}_{ir} + (K + D_2)\mathbf{v}_{ir}] = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla^2(K_1\mathbf{u}_s + K\mathbf{v}_s) = 0 \quad (4.15)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (4.10)'dan (4.13)'e kadar olan işlemleri (4.2) vektörel denklemi için tekrarlamak yerine (4.1) ve (4.2) arasındaki benzeşim kullanılırsa kolayca aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$\nabla^2[(K + D_2)\mathbf{u}_{ir} + (K_4 + D_4)\mathbf{v}_{ir}] = 0, \quad (4.16)$$

$$\nabla^2(K\mathbf{u}_s + K_4\mathbf{v}_s) = 0. \quad (4.17)$$

Burada (2.26) ile verilen $D_2 = D_3$ eşitliği kullanılmıştır. Bulunan diferansiyel denklemler (4.14), (4.16) ve (4.15), (4.17) şeklinde gruplandırılarak ele alınırsa

$$\begin{aligned}(K_1 + D_1)\nabla^2\mathbf{u}_{ir} + (K + D_2)\nabla^2\mathbf{v}_{ir} &= 0, \\ (K + D_2)\nabla^2\mathbf{u}_{ir} + (K_4 + D_4)\nabla^2\mathbf{v}_{ir} &= 0,\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}K_1\nabla^2\mathbf{u}_s + K\nabla^2\mathbf{v}_s &= 0, \\ K\nabla^2\mathbf{u}_s + K_4\nabla^2\mathbf{v}_s &= 0\end{aligned}\quad (4.19)$$

denklemler sistemi elde edilir. (3.103) ile verilen kısıtlamalara uygun olarak her iki denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfırdan farklı kabul edilirse

$$\nabla^2\mathbf{u}_s = 0, \quad \nabla^2\mathbf{v}_s = 0, \quad \nabla^2\mathbf{u}_{ir} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{v}_{ir} = 0 \quad (4.20)$$

ifadelerine varılır. Bu sonuç $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{u}_{ir}$ ve $\mathbf{v}_{ir}$ büyüklüklerinin harmonik vektörler olduklarını göstermektedir. $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ ile gösterilen iki vektörel büyüklük için

$$\mathbf{U} = (K + K_1)\nabla^2 \mathbf{u} + (D_1 + D_2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{V} = (K + K_4)\nabla^2 \mathbf{v} + (D_2 + D_4)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (4.22)$$

tanımları yapılmış olsun. Bu durumda (4.1) ve (4.2) denklemlerinin toplamı

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = 0 \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) eşitlikleri ile (4.21) ve (4.22)'ye gidilirse

$$\mathbf{U} = \nabla^2 [(K + K_1 + D_1 + D_2)\mathbf{u}_{ir} + (K + K_1)\mathbf{u}_s], \quad (4.24)$$

$$\mathbf{V} = \nabla^2 [(K + K_4 + D_2 + D_4)\mathbf{v}_{ir} + (K + K_4)\mathbf{v}_s] \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada, (4.9) bağıntılarına göre, $\mathbf{f}_{ir} = \nabla \phi$ olarak yazılabileceği düşünülerek $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}_{ir}) = \nabla^2(\nabla \phi) = \nabla^2 \mathbf{f}_{ir}$ işlemi yapılmıştır. (4.20) ifadeleri dikkate alındığı takdirde (4.24) ve (4.25)'in

$$\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{V} = 0 \quad (4.26)$$

olduğu ve bu nedenle de (4.21) ve (4.22)'den

$$(K + K_1)\nabla^2 \mathbf{u} + (D_1 + D_2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (4.27)$$

$$(K + K_4)\nabla^2 \mathbf{v} + (D_2 + D_4)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (4.28)$$

yazılabileceği görülür. Böylece her iki bileşenin yer değiştirme vektörlerini içeren (4.1) ve (4.2) diferansiyel denklemlerinden yer değiştirme vektörlerini ayrı ayrı yöneten iki adet Navier formunda denkleme geçilmiş olmaktadır.

4.2 Papkovich-Neuber Metoduyla Çözüm

Navier denklemlerinin bir çözümünü verebilmek amacıyla Papkovich ve Neuber tarafından ayrı ayrı geliştirilmiş olan metot temel olarak Helmholtz teoremine dayanmaktadır. (4.24) ve (4.25) ifadelerindeki parantez içi terimler için aşağıdaki tanımlar yapılmış olsun:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (K + K_1 + D_1 + D_2)\mathbf{u}_{ir} + (K + K_1)\mathbf{u}_s , \\ \Phi_2 &= (K + K_4 + D_2 + D_4)\mathbf{v}_{ir} + (K + K_4)\mathbf{v}_s .\end{aligned}\quad (4.29)$$

Bu durumda (4.26)'ya göre

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0 , \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0 \quad (4.30)$$

olacağından Φ_1 ve Φ_2 nin de harmonik vektörler oldukları anlaşılır.

Yer değiştirme vektörleri için bir çözüm formu verebilmek amacıyla önce Φ_1 ve Φ_2 vektörlerine diverjans işlemi uygulanır ve ardından (4.11) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Phi_1 &= (K + K_1 + D_1 + D_2)\nabla \cdot \mathbf{u}_{ir} , \\ \nabla \cdot \Phi_2 &= (K + K_4 + D_2 + D_4)\nabla \cdot \mathbf{v}_{ir}\end{aligned}\quad (4.31)$$

elde edilir. (4.9) bağıntılarına göre $\mathbf{u}_{ir}$ ve $\mathbf{v}_{ir}$ için

$$\mathbf{u}_{ir} = \nabla \phi_1 , \quad \mathbf{v}_{ir} = \nabla \phi_2 \quad (4.32)$$

yazılabileceğinden (4.31) eşitliklerini

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_1 &= \frac{1}{(K + K_1 + D_1 + D_2)} \nabla \cdot \Phi_1 , \\ \nabla^2 \phi_2 &= \frac{1}{(K + K_4 + D_2 + D_4)} \nabla \cdot \Phi_2\end{aligned}\quad (4.33)$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. Bu eşitlikleri sağlayan ϕ_1 ve ϕ_2 çözümleri ise, R yer vektörünü göstermek üzere,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2(K + K_1 + D_1 + D_2)}(\phi_{01} + \Phi_1 \cdot \mathbf{R}), \\ \phi_2 &= \frac{1}{2(K + K_4 + D_2 + D_4)}(\phi_{02} + \Phi_2 \cdot \mathbf{R})\end{aligned}\quad (4.34)$$

bağıntılarıyla verilebilir [39]. Burada ϕ_{01} ve ϕ_{02} keyfi harmonik fonksiyonlardır. Çözümün bu şekilde verilebileceğini göstermek amacıyla (4.34)'ün ilkinin ∇^2 operatörü uygulanır

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{2(K + K_1 + D_1 + D_2)}[\nabla^2 \phi_{01} + \nabla^2(\Phi_1 \cdot \mathbf{R})]$$

ve

$$\nabla^2(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R}) = 2\nabla \cdot \mathbf{W} + \mathbf{R} \cdot \nabla^2 \mathbf{W} \quad (4.35)$$

özdeşliği kullanılırsa

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{2(K + K_1 + D_1 + D_2)}[\nabla^2 \phi_{01} + 2\nabla \cdot \Phi_1 + \mathbf{R} \cdot \nabla^2 \Phi_1]$$

ifadesi bulunur. ϕ_{01} in keyfi bir harmonik fonksiyon olarak tanımlandığına ve Φ_1 in (4.30)'dan görüleceği üzere harmonik bir vektör olduğuna dikkat edilirse (4.33)'teki ilk denkleme varılmış olur.

(4.29) bağıntılarının vereceği

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_s &= \frac{1}{(K + K_1)}\Phi_1 - \frac{(K + K_1 + D_1 + D_2)}{(K + K_1)}\mathbf{u}_{ir}, \\ \mathbf{v}_s &= \frac{1}{(K + K_4)}\Phi_2 - \frac{(K + K_4 + D_2 + D_4)}{(K + K_4)}\mathbf{v}_{ir}\end{aligned}\quad (4.36)$$

ifadeleri ile (4.10)'a gidilirse

$$\mathbf{u} = \frac{1}{(K + K_1)}\Phi_1 - \frac{(D_1 + D_2)}{(K + K_1)}\mathbf{u}_{ir}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{(K + K_4)}\Phi_2 - \frac{(D_2 + D_4)}{(K + K_4)}\mathbf{v}_{ir}$$

elde edilir. $\mathbf{u}_{ir}$ ve $\mathbf{v}_{ir}$ yerine (4.32) ifadeleri gereğince (4.34)'ün gradyanları kullanılırsa bileşenlere ait yer değiştirme vektörleri için aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_1 - \frac{D_1 + D_2}{2(K + K_1 + D_1 + D_2)} \nabla(B_{01} + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{R}) , \quad (4.37)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}_2 - \frac{D_2 + D_4}{2(K + K_4 + D_2 + D_4)} \nabla(B_{02} + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{R}) . \quad (4.38)$$

Burada

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{K + K_1} \Phi_1 , \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{K + K_4} \Phi_2 , \quad B_{01} = \frac{1}{K + K_1} \phi_{01} , \quad B_{02} = \frac{1}{K + K_4} \phi_{02}$$

tanımları yapılmıştır. Bu tanımlara göre $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, B_{01} ve B_{02} büyüklüklerinin de harmonik vektörel ve harmonik skaler fonksiyonlar oldukları görülmektedir.

$$\nabla^2 \mathbf{B}_1 = 0 , \quad \nabla^2 \mathbf{B}_2 = 0 , \quad \nabla^2 B_{01} = 0 , \quad \nabla^2 B_{02} = 0 . \quad (4.39)$$

Bulunan yer değiştirme vektörlerinin (4.1) ve (4.2) denklemler sistemi için bir çözüm olup olmadığını kontrol etmek amacıyla

$$A = -\frac{D_1 + D_2}{2(K + K_1 + D_1 + D_2)} , \quad B = -\frac{D_2 + D_4}{2(K + K_4 + D_2 + D_4)} \quad (4.40)$$

tanımlarını kullanarak (4.37) ve (4.38) ile (4.1) ve (4.2)'ye gidilir ve (4.39) dikkate alınarak işlemler yapılırsa

$$A(K_1 + D_1) \nabla^2 (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{R}) + B(K + D_2) \nabla^2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{R}) + D_1 (\nabla \cdot \mathbf{B}_1) + D_2 (\nabla \cdot \mathbf{B}_2) = 0 ,$$

$$A(K + D_2) \nabla^2 (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{R}) + B(K_4 + D_4) \nabla^2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{R}) + D_2 (\nabla \cdot \mathbf{B}_1) + D_4 (\nabla \cdot \mathbf{B}_2) = 0$$

elde edilir. Bulunan bu ifadelerde (4.35) özdeşliğine göre açılım yapılarak elde edilen

$$\begin{aligned} [2A(K_1 + D_1) + D_1] (\nabla \cdot \mathbf{B}_1) + [2B(K + D_2) + D_2] (\nabla \cdot \mathbf{B}_2) &= 0 , \\ [2A(K + D_2) + D_2] (\nabla \cdot \mathbf{B}_1) + [2B(K_4 + D_4) + D_4] (\nabla \cdot \mathbf{B}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

denklem sisteminin katsayılar determinanı hesaplanırsa

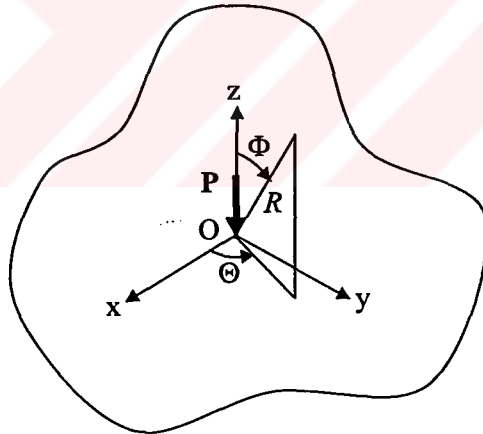
$$\begin{vmatrix} 2A(K_1 + D_1) + D_1 & 2B(K + D_2) + D_2 \\ 2A(K + D_2) + D_2 & 2B(K_4 + D_4) + D_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

olduğu görülür. Böylece, $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 \neq 0$ ve $\nabla \cdot \mathbf{B}_2 \neq 0$ olduğuna göre, (4.37) ve (4.38) yer değiştirme vektörlerinin (4.1) ve (4.2) sistemi için bir çözüm olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç olarak, iki lineer elastik katıdan oluşan bir karışımın yer değiştirme problemi için genel bir çözüm Papkovitch-Neuber metodu yardımıyla harmonik vektörler ve harmonik fonksiyonlar cinsinden (4.37) ve (4.38) bağıntılarıyla verilmiş olmaktadır.

4.3 Kelvin Problemi İçin Uygulama

Sonsuz bir karışım içerisinde bir O noktasına Şekil 4.1’de görüldüğü gibi sabit bir P tekil yükü etkiliyor olsun.



Şekil 4.1 Kelvin Problemi

Bu durumda O noktasını çevreleyen keyfi bir hacimsel eleman için bileşenlere ait denge denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= -\int_S \mathbf{t}_1^{(n)} dS, & \mathbf{P}_2 &= -\int_S \mathbf{t}_2^{(n)} dS, \\ \mathbf{M}_1 &= \int_S \mathbf{R} \times \mathbf{t}_1^{(n)} dS = 0, & \mathbf{M}_2 &= \int_S \mathbf{R} \times \mathbf{t}_2^{(n)} dS = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $t_1^{(n)}$ ve $t_2^{(n)}$ normal doğrultusu n olan yüzeye etkiyen gerilme vektörlerini, R yer vektörünü, P_1 ve P_2 birinci ve ikinci elastik katı cismin taşıdıkları tekil yük miktarlarını temsil etmektedir.

P nin P_1 ve P_2 nin toplamına eşit olduğu ve aynı zamanda P_1 , P_2 vektörlerinin birbirlerine paralel ve aynı yönde oldukları düşünülürse, Λ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$P = P_1 + P_2, \quad P_1 = \Lambda P_2 \quad (4.44)$$

bağıntıları yazılabilir.

Kütle kuvvetinin olmaması halinde Papkovitch-Neuber çözüm metodunda yer değiştirme vektörünü belirleyen dört fonksiyondan (B_1 ve B_2 için üçer, B_{01} ve B_{02} için birer) keyfi olarak seçilen bir tanesinin sıfıra eşit kılınması ve bu şekilde bir çözümün aranması mümkündür [39, 40]. Bu sebeple, $f(R)$ harmonik bir fonksiyon olmak üzere, problemin

$$B_1 = P_1 f, \quad B_{01} = 0, \quad B_2 = P_2 f, \quad B_{02} = 0 \quad (4.45)$$

şeklinde bir çözümü aranmaktadır.

İki elastik katı karışımı için yer değiştirme vektörleri (4.37), (4.38) ve (4.40) bağıntılarına göre

$$\begin{aligned} u &= B_1 + A \nabla (B_{01} + B_1 \cdot R), \\ v &= B_2 + B \nabla (B_{02} + B_2 \cdot R) \end{aligned} \quad (4.46)$$

şeklindedir. (4.45) kabulleri sonucunda bu ifadelerden

$$\begin{aligned} u &= [(A+1)P_1 f + A(R \cdot P_1) \nabla f], \\ v &= [(B+1)P_2 f + B(R \cdot P_2) \nabla f] \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. Burada, P_1 ve P_2 nin sabit vektörler olduğu düşünülerek, W sabit bir vektörü temsil etmek üzere

$$\nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{W} f) = \mathbf{W} f + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{W}) \nabla f \quad (4.48)$$

açılımı kullanılmıştır. Yer değiştirmeler O noktasındaki tekil kuvvetler nedeniyle oluştuğuna göre $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin bu noktada tekillik göstermesi ve R sonsuza giderken sıfıra yaklaşması beklenmektedir. Bu durumda $f(R)$ fonksiyonu için harmoniklik şartı yanında bu hususlara da dikkat edilerek

$$f(R) = \frac{\alpha}{R} \quad (4.49)$$

şeklinde bir çözüm kabulü yapılabilir. α ileride tespit edilecek olan sabit bir katsayıdır. Küresel koordinatlardaki ∇^2 ifadesi kullanılarak (4.49)'un

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) = 0$$

sonucunu verdiği, yani harmonik bir fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

$\mathbf{W}$ sabit vektör olmak üzere hesaplarda gerekli olabilecek bazı işlemler aşağıda toplu halde verilmektedir:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{W}}{R} \right) = -\frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3}, \quad \nabla \left[\frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \right] = \frac{\mathbf{W}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{W}}{R} \right) = -\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{W}, \quad \mathbf{n} \times \left[\nabla \times \left(\frac{\mathbf{W}}{R} \right) \right] = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{W} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})}{R^3} \mathbf{R}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \left[\frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right] = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})}{R^3} \mathbf{R} + \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{n} - \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^5} \mathbf{R}, \quad (4.52)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right] = \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3}, \quad \mathbf{n} \times \left\{ \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right] \right\} = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{W} - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{W})}{R^3} \mathbf{R}. \quad (4.53)$$

Ayrıca, $\mathbf{V}$ gibi değişken bir vektörel alanın gradyanı ikinci mertebeden bir tansör ifade edeceğinden, $\nabla \mathbf{V}$ nin

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] + \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} - (\nabla \mathbf{V})^T]$$

şeklinde simetrik ve antisimetrik kısımlara ayrılabilceğı düşünülür ve

$$\mathbf{n} \cdot [(\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V}] = \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] = 2\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (4.54)$$

vektörel eşitliği de yazılabilir.

(4.49) kabulüyle (4.47) bağıntılarına gidilir ve (4.50)'deki ilk eşitlik hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha \left[(A+1) \frac{\mathbf{P}_1}{R} - A \frac{(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right], \\ \mathbf{v} &= \alpha \left[(B+1) \frac{\mathbf{P}_2}{R} - B \frac{(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^3} \mathbf{R} \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir.

Bilinmeyen α , $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ büyüklüklerini belirleyebilmek için (4.43) ve (4.44) bağıntılarından yararlanılabilir. (4.43) denge denklemlerinde kullanılmak üzere normal doğrultusu $\mathbf{n}$ olan yüzeydeki gerilme vektörleri (4.4) ve (4.5) bağıntılarından

$$\mathbf{t}_1^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\alpha_2 \mathbf{n} + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu_1 \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \lambda_3 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} + \mu_3 \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T],$$

$$\mathbf{t}_2^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi} = \alpha_2 \mathbf{n} + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} + \mu_2 \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda_4 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu_3 \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

şeklinde elde edilir. (4.54) vektörel denklemi uyarınca bu ifadeler aynı zamanda

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^{(n)} &= -\alpha_2 \mathbf{n} + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu_1 [2\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})] + \lambda_3 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} \\ &\quad + \mu_3 [2\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{v})], \\ \mathbf{t}_2^{(n)} &= \alpha_2 \mathbf{n} + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} + \mu_2 [2\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{v})] + \lambda_4 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \\ &\quad + \mu_3 [2\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u})] \end{aligned} \quad (4.56)$$

şeklinde de yazılabilir. Yer değiştirme vektörleri için bulunan (4.55) bağıntıları (4.56)'da yerlerine konulur ve ardından (4.50)-(4.53) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1^{(n)} &= -\alpha_2 \mathbf{n} + \frac{\alpha}{R^3} \{M_1[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1)\mathbf{R}] + M_2[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{R}] + N_1(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} \\
&\quad + N_2(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} + Y_1 \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} + Y_2 \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R}\} , \\
\mathbf{t}_2^{(n)} &= \alpha_2 \mathbf{n} + \frac{\alpha}{R^3} \{M_3[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1)\mathbf{R}] + M_4[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{R}] + N_3(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} \\
&\quad + N_4(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} + Y_3 \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} + Y_4 \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R}\} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

ifadelerine ulaşılır. Burada $M_1, \dots, Y_4$ katsayıları için

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\mu_1(1 + 2A) , \quad M_2 = -\mu_3(1 + 2B) , \quad M_3 = -\mu_3(1 + 2A) , \quad M_4 = -\mu_2(1 + 2B) , \\
N_1 &= -[\lambda_1 + 2A(\lambda_1 + \mu_1)] , \quad N_2 = -[\lambda_3 + 2B(\lambda_3 + \mu_3)] , \\
N_3 &= -[\lambda_4 + 2A(\lambda_4 + \mu_3)] , \quad N_4 = -[\lambda_2 + 2B(\lambda_2 + \mu_2)] , \\
Y_1 &= 6\mu_1 A , \quad Y_2 = 6\mu_3 B , \quad Y_3 = 6\mu_3 A , \quad Y_4 = 6\mu_2 B \quad (4.58)
\end{aligned}$$

tanımları yapılmıştır.

O noktasını çevreleyen yüzeyin keyfi değil de R yarıçaplı bir küre olduğu kabul edilirse, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{(R)}$ ve $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_{(R)}$ olacağı için, (4.57) bağıntılarında yer alan vektörel işlemleri

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_1 &= R \mathbf{P}_1 , \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{P}_2 = R \mathbf{P}_2 , \\
(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1)\mathbf{R} &= R (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)} , \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2)\mathbf{R} = R (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)} , \\
(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} &= R (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)} , \quad (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} = R (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)} , \\
(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} &= R^3 (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)} , \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} = R^3 (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)})\mathbf{e}_{(R)}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlemek mümkün olur ve bu durumda (4.57)'den

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^{(n)} = & -\alpha_2 \mathbf{n} + \frac{\alpha}{R^2} \left[M_1 \mathbf{P}_1 + (M_1 + N_1 + Y_1) (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} \right. \\ & \left. + M_2 \mathbf{P}_2 + (M_2 + N_2 + Y_2) (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2^{(n)} = & \alpha_2 \mathbf{n} + \frac{\alpha}{R^2} \left[M_3 \mathbf{P}_1 + (M_3 + N_3 + Y_3) (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} \right. \\ & \left. + M_4 \mathbf{P}_2 + (M_4 + N_4 + Y_4) (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.59) bağıntısı (4.43) denge denklemlerinin ilkinde götürülürse

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 = & \alpha_2 \int_S \mathbf{n} dS - \alpha \int_S \frac{1}{R^2} [M_1 \mathbf{P}_1 + M_2 \mathbf{P}_2] dS - \alpha (M_1 + N_1 + Y_1) \int_S \frac{1}{R^2} (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} dS \\ & - \alpha (M_2 + N_2 + Y_2) \int_S \frac{1}{R^2} (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} dS \end{aligned} \quad (4.61)$$

ifadesi bulunur. İlk integral

$$\int_S F \mathbf{n} dS = \int_V \nabla F dV \quad (4.62)$$

diverjans teoremi gereğince sıfıra eşit olur ve $dS = R^2 dS^*$, $dS^* = \sin \Phi d\Phi d\Theta$ tanımları yardımıyla ikinci integral

$$\int_S (M_1 \mathbf{P}_1 + M_2 \mathbf{P}_2) dS^* = (M_1 \mathbf{P}_1 + M_2 \mathbf{P}_2) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \Phi d\Phi d\Theta = 4\pi (M_1 \mathbf{P}_1 + M_2 \mathbf{P}_2) \quad (4.63)$$

sonucunu verir. dS^* ın tanımına dikkat edilirse bunun aslında yarıçapı birim uzunlukta olan bir kürenin yüzey elemanını temsil ettiği görülmektedir. Bu durumda $\mathbf{e}_{(R)} = \mathbf{R}$ dir. Aynı zamanda $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{(R)}$ olduğuna göre üçüncü integral için

$$\int_S (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} dS^* = \int_S (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} dS^*$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafına (4.62) diverjans teoremi uygulanır

$$\int_S (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} dS^* = \int_V \nabla (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}) dV^*$$

ve (4.48) özdeşliği kullanılarak $\nabla (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{P}_1$ olacağına dikkat edilirse

$$\int_S (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} dS^* = \mathbf{P}_1 \int_V dV^* = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}_1 \quad (4.64)$$

elde edilir. Burada dV^* birim yarıçaplı küre için hacim elemanını temsil etmektedir. Aynı düşünceler altında dördüncü integralin de

$$\int_S (\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{e}_{(R)}) \mathbf{e}_{(R)} dS^* = \mathbf{P}_2 \int_V dV^* = \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}_2 \quad (4.65)$$

olacağı görülür. (4.63)-(4.65) sonuçlarıyla (4.61) denkleminde gidilirse

$$\mathbf{P}_1 = -\alpha \frac{4\pi}{3} [(4M_1 + N_1 + Y_1)\mathbf{P}_1 + (4M_2 + N_2 + Y_2)\mathbf{P}_2] \quad (4.66)$$

sonucuna ulaşılır. Aynı işlemler (4.60) bağıntısı ve (4.43)'teki ikinci denge denklemi için tekrarlandığı takdirde

$$\mathbf{P}_2 = -\alpha \frac{4\pi}{3} [(4M_3 + N_3 + Y_3)\mathbf{P}_1 + (4M_4 + N_4 + Y_4)\mathbf{P}_2] \quad (4.67)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{4\pi}{3} (4M_1 + N_1 + Y_1), & k_2 &= -\frac{4\pi}{3} (4M_2 + N_2 + Y_2), \\ k_3 &= -\frac{4\pi}{3} (4M_3 + N_3 + Y_3), & k_4 &= -\frac{4\pi}{3} (4M_4 + N_4 + Y_4) \end{aligned} \quad (4.68)$$

tanımları kullanılarak (4.66) ve (4.67)

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\alpha k_2}{1 - \alpha k_1} \mathbf{P}_2, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1 - \alpha k_4}{\alpha k_3} \mathbf{P}_2 \quad (4.69)$$

şeklinde ifade edilebilir ve buradan bilinmeyen α sabiti için

$$\alpha^2(k_2k_3 - k_1k_4) + \alpha(k_1 + k_4) - 1 = 0 \quad (4.70)$$

denklemini elde edilir. Bilinmeyen P_1 ve P_2 vektörleri ise (4.44) ve (4.69) bağıntılarından

$$P_1 = \frac{\alpha k_2}{1 + \alpha(k_2 - k_1)} P, \quad P_2 = \frac{1 - \alpha k_1}{1 + \alpha(k_2 - k_1)} P \quad (4.71)$$

şeklinde bulunur. Böylece iki elastik katı karışımı için Kelvin problemine ait bilinmeyen α , P_1 ve P_2 büyüklükleri belirlenmiş olmaktadır. Bu durumda bileşenlere ait yer değiştirme vektörleri bu bağıntılar yardımıyla (4.55)'ten aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 \left[(A+1) \frac{P}{R} - A \frac{(P \cdot R)}{R^3} R \right], \\ v &= \beta_2 \left[(B+1) \frac{P}{R} - B \frac{(P \cdot R)}{R^3} R \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Burada β_1 ve β_2

$$\beta_1 = \frac{\alpha^2 k_2}{1 + \alpha(k_2 - k_1)}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha(1 - \alpha k_1)}{1 + \alpha(k_2 - k_1)} \quad (4.73)$$

ifadelerini temsil etmektedir. Bu hesaplara göre tekil kuvvetler arasında

$$\alpha P_1 = \beta_1 P, \quad \alpha P_2 = \beta_2 P \quad (4.74)$$

eşitlikleri de yazılabilir.

Koordinat takımının birim vektörleri $\mathbf{m}$ ile gösterildiği takdirde gerilme tansörlerinin bileşenleri

$$\sigma_{nm} = t_1^{(n)} \cdot \mathbf{m}, \quad \pi_{nm} = t_2^{(n)} \cdot \mathbf{m} \quad (4.75)$$

bağıntıları yardımıyla bulunabilir. Buna göre (4.57), (4.74) ve (4.75)'ten kısmi gerilme tansörleri için

$$\sigma_{nm} = -\alpha_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \frac{1}{R^3} \{ (\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2) [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}] + (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + (\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{m} \} , \quad (4.76)$$

$$\pi_{nm} = \alpha_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \frac{1}{R^3} \{ (\beta_1 M_3 + \beta_2 M_4) [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{P} \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}] + (\beta_1 N_3 + \beta_2 N_4) (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + (\beta_1 Y_3 + \beta_2 Y_4) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R})}{R^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{m} \} \quad (4.77)$$

ifadeleri elde edilir.

Difüzyon kuvveti vektörünü belirlemek amacıyla (4.72) yer değiştirme vektörleriyle (4.6)'ya gidilirse, (4.50)-(4.53) bağıntılarının yardımıyla

$$\vec{\pi} = \frac{k_5}{R^3} \left[\mathbf{P} - \frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \right] \quad (4.78)$$

bulunur. Burada k_5 büyüklüğü

$$k_5 = -\frac{\alpha_2}{\bar{\rho}} [\bar{\rho}_2 (1 + 2A) \beta_1 + \bar{\rho}_1 (1 + 2B) \beta_2] \quad (4.79)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Böylece yer değiştirme vektörleri, gerilme tansörleri ve difüzyon kuvveti vektörü $\mathbf{P}$ tekil kuvveti cinsinden verilmiş olmaktadır. $\mathbf{P}$ kuvveti Şekil 4.1'de gösterildiği gibi kabul edildiği takdirde

$$\mathbf{P} = P \left(-\cos \Phi \mathbf{e}_{(R)} + \sin \Phi \mathbf{e}_{(\Phi)} \right) \quad (4.80)$$

yazılabilir. $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_{(R)}$ olduğuna göre (4.72) bağıntılarından yer değiştirme vektörlerinin bileşenleri için

$$u_R = -\frac{\beta_1 P \cos \Phi}{R} , \quad u_\Phi = \frac{\beta_1 (A+1) P \sin \Phi}{R} , \quad u_\Theta = 0 ,$$

$$v_R = -\frac{\beta_2 P \cos \Phi}{R} , \quad v_\Phi = \frac{\beta_2 (B+1) P \sin \Phi}{R} , \quad v_\Theta = 0 \quad (4.81)$$

değerleri elde edilir.

Gerilme tansörlerinin bileşenleri, (4.76) ve (4.77)'den aşağıdaki şekilde bulunur:

$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{(R)}$ ve sırasıyla $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(R)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Phi)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Theta)}$ için;

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= -\alpha_2 - [\beta_1(2M_1 + N_1 + Y_1) + \beta_2(2M_2 + N_2 + Y_2)] \frac{P \cos \Phi}{R^2}, \\ \sigma_{R\Phi} &= (\beta_1 M_1 + \beta_2 M_2) \frac{P \sin \Phi}{R^2}, \quad \sigma_{R\Theta} = 0, \quad (4.82)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_{RR} &= \alpha_2 - [\beta_1(2M_3 + N_3 + Y_3) + \beta_2(2M_4 + N_4 + Y_4)] \frac{P \cos \Phi}{R^2}, \\ \pi_{R\Phi} &= (\beta_1 M_3 + \beta_2 M_4) \frac{P \sin \Phi}{R^2}, \quad \pi_{R\Theta} = 0. \quad (4.83)\end{aligned}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{(\Phi)}$ ve sırasıyla $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(R)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Phi)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Theta)}$ için;

$$\sigma_{\Phi R} = \sigma_{R\Phi}, \quad \sigma_{\Phi\Phi} = -\alpha_2 - (\beta_1 N_1 + \beta_2 N_2) \frac{P \cos \Phi}{R^2}, \quad \sigma_{\Phi\Theta} = 0, \quad (4.84)$$

$$\pi_{\Phi R} = \pi_{R\Phi}, \quad \pi_{\Phi\Phi} = \alpha_2 - (\beta_1 N_3 + \beta_2 N_4) \frac{P \cos \Phi}{R^2}, \quad \pi_{\Phi\Theta} = 0. \quad (4.85)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{(\Theta)}$ ve sırasıyla $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(R)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Phi)}$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_{(\Theta)}$ için;

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta R} &= \sigma_{\Theta\Phi} = 0, \quad \sigma_{\Theta\Theta} = \sigma_{\Phi\Phi}, \\ \pi_{\Theta R} &= \pi_{\Theta\Phi} = 0, \quad \pi_{\Theta\Theta} = \pi_{\Phi\Phi}. \quad (4.86)\end{aligned}$$

Difüzyon kuvveti vektörü bileşenleri ise (4.78) ve (4.80)'den

$$\pi_R = \frac{2Pk_5 \cos \Phi}{R^3}, \quad \pi_\Phi = \frac{Pk_5 \sin \Phi}{R^3}, \quad \pi_\Theta = 0 \quad (4.87)$$

olarak elde edilir.

Örnek olarak, $\alpha_2 = 1$ (Pa) alınarak (3.104)'te verilmiş olan malzeme sabitleri kullanılırsa (4.70) denkleminde α sabiti için

$$\alpha = 1.93 \times 10^{-12}, \quad \alpha = 8.81 \times 10^{-12}$$

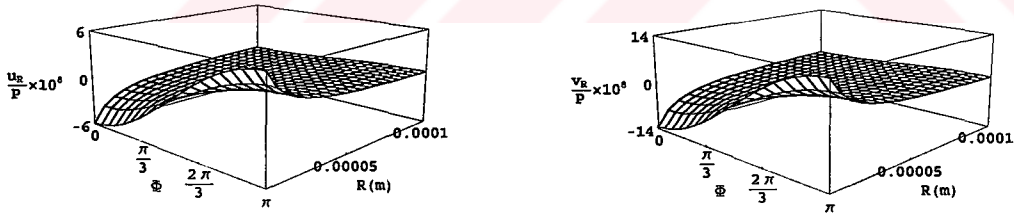
değerleri bulunur. (4.44) ve (4.69) bağıntılarına göre P_1 ve P_2 arasındaki ilişkiyi veren

$$\Lambda = \frac{\alpha k_2}{1 - \alpha k_1} = \frac{1 - \alpha k_4}{\alpha k_3} \quad (4.88)$$

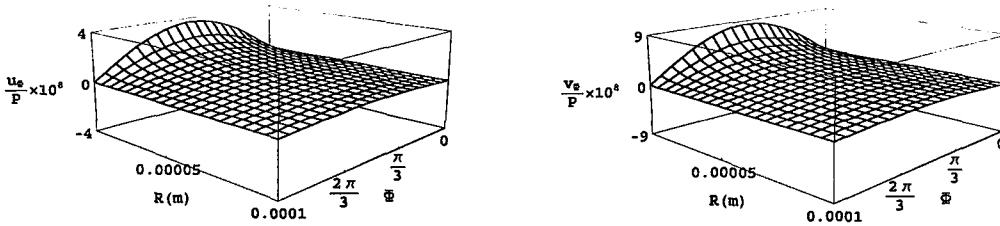
büyüklüğü bu α değerleri için sırasıyla

$$\Lambda = 0.443, \quad \Lambda = -2.297$$

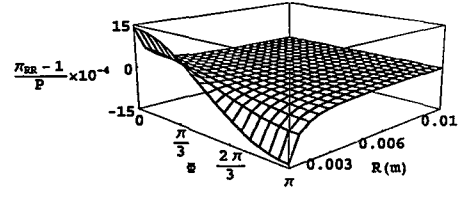
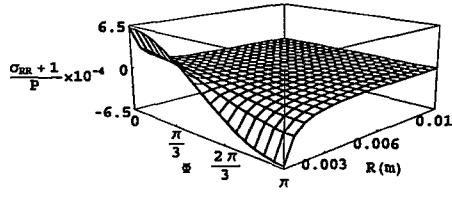
sonuçlarını vermektedir. İkinci sonuç, fiziksel olarak kabul edilemez olan, P_1 ve P_2 nin yönlerinin birbirlerine ters olmaları anlamına geleceğinden terk edilerek α için çözüm olarak 1.93×10^{-12} değeri kullanılmaktadır. Bu durumda yer değiştirme vektörü, gerilme tansörü ve difüzyon kuvveti vektörü bileşenleri için aşağıdaki grafikler elde edilir:



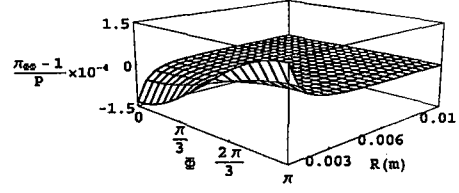
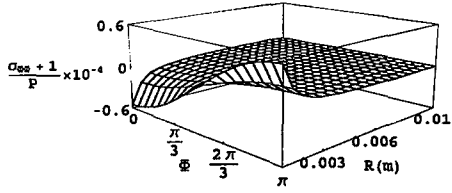
Şekil 4.2 Yer Değiştirme Vektörlerinin u_R ve v_R Bileşenlerinin Değişimleri



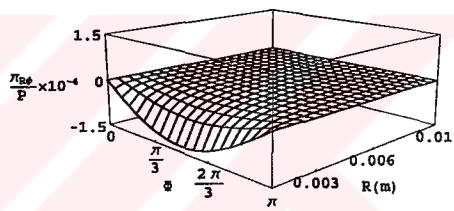
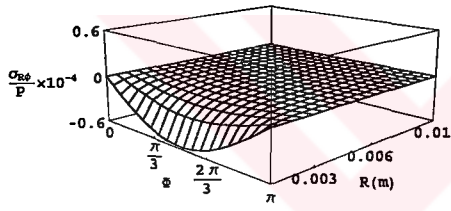
Şekil 4.3 Yer Değiştirme Vektörlerinin u_ϕ ve v_ϕ Bileşenlerinin Değişimleri



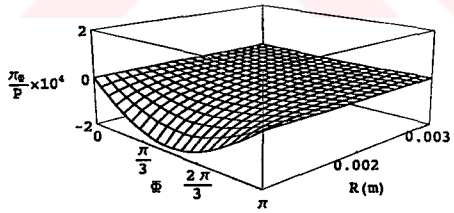
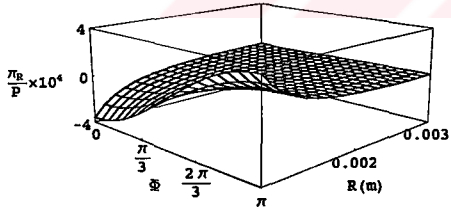
Şekil 4.4 σ_{RR} ve π_{RR} Gerilme Bileşenlerinin Değişimleri



Şekil 4.5 $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}$ ve $\pi_{\phi\phi} = \pi_{\theta\theta}$ Gerilme Bileşenlerinin Değişimleri



Şekil 4.6 $\sigma_{R\phi}$ ve $\pi_{R\phi}$ Gerilme Bileşenlerinin Değişimleri



Şekil 4.7 Difüzyon Kuvveti Vektörü Bileşenlerinin Değişimleri

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Karışım birden fazla malzemenin bir araya gelmesiyle oluşan bir yapıdır. Karışım bileşenleri tek başlarına iken kendilerine özgü malzeme özellikleri ve davranış biçimlerine sahip olmalarına rağmen, bir araya geldiklerinde bunlardan etkilenmiş fakat daha farklı cevap veren yeni bir ortamı oluşturmaktadırlar. Bu ortamda dış kuvvetler bileşenler tarafından ortaklaşa taşınmakta, fakat bileşenlerin karışım içerisindeki yer değiştirmeleri birbirlerinden farklı olmaktadır. Ancak dışarıdan bakan bir gözlemcinin göreceği şey ortamın bir tekil malzeme gibi değişimlere uğradığıdır. Gerçekten de, karışıma özellikleri kendini oluşturanlarınkinden farklı bir üçüncü tekil malzeme gözüyle bakmak mümkündür. O halde, bunun tersi olarak, tekil malzemeleri de karışımlar teorisi açısından yeniden ele almak söz konusu olabilir. Eğer karışıma ait malzeme sabitlerinin deneysel olarak bulunması mümkün olursa, bu durumda, tekil malzemelerin davranışlarına bir başka açıdan bakmak ve onları daha hassas olarak tayin etmek imkânı da doğacaktır.

İki elastik katı karışımına ilişkin lineer bünye denklemleri incelendiğinde bileşenlerin birbirlerine olan tesirleri sebebiyle denklemlerin diğer bileşene ait büyüklükleri de içerdiği görülmektedir. Karışımın tümüne ait gerilme tansörü $\sigma_{ik} + \pi_{ik}$ şeklinde verildiğine göre ([2]), iki elastik katı karışımı için

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} + \pi_{ik} = & (\lambda_1 + \lambda_4)e_{mm}\delta_{ik} + (\lambda_2 + \lambda_3)g_{mm}\delta_{ik} + 2(\mu_1 + \mu_3)e_{ik} \\ & + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{ik} - (\gamma_1 + \gamma_2)T\delta_{ik}\end{aligned}\quad (5.1)$$

bünye bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntı, izotropik bir elastik cismin lineer bünye denklemi olarak bilinen

$$t_{ik} = \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik} - \gamma T\delta_{ik}$$

ifadesi göz önüne alındığında, iki adet tekil malzemenin bünye denklemlerinin toplamına şekilsel olarak benzerlik arz etmektedir.

Bir diğerk husus da, (5.1)'den göröleceğı üzere, tüm karışım için herhangi bir ön gerilme söz konusu olmamasına rağmen bileşenler açısından olaya bakıldığında α_2 ile temsil edilen bir ön gerilmenin var olabileceğidir. Difüzyon kuvveti vektörü statik halde α_2 büyüklüğüyle doğru orantılıdır. Bu nedenle difüzyon direncinin bileşen parçacıklarının normal konumlarına ulaşmalarını engellediğı ve bu durumun da bileşenler arasında bir ön gerilmeye sebep olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Çalışmada difüzyon kuvvetinin de değışimini inceleyebilmek amacıyla örnek olarak $\alpha_2 = 1$ kabulü yapılmıştır. α_2 nin başka değerleri için yer değıştirmelerde meydana gelen farklılıklar ise Tablo 5.1'de verilmektedir. Tabloya göre yer değıştirmeleri u vektörüyle temsil edilen birinci elastik katı bileşene ait sonuçlarda α_2 nin pozitif değerlerinde hem sıcaklık hem de Kelvin problemleri için artma, buna karşılık, yer değıştirmeleri v vektörüyle temsil edilen ikinci katı bileşene ait sonuçlarda ise azalma görölmektedir. Karışım bileşenlerinin bünye denklemlerine dikkat edilecek olursa α_2 nin pozitif olduğu durum için ön gerilme birinci bileşene basma ikinci bileşene ise çekme şeklinde tesir etmektedir. Bu sebeple sıcaklık veya kuvvet tesiri göz önüne alınan noktalarda birinci bileşenin ikinci bileşene nazaran daha fazla yer değıştirmesine neden olmaktadır. α_2 nin negatif olması durumunda ise birinci bileşen çekme ikinci bileşen basma etkisine maruz kalmakta ve dış tesirler sebebiyle şekil değışimi öncekilere ters olarak gerçekleşmektedir. Ön gerilmenin şekil değıştirme üzerinde etkisinin $\mp 10^9$ değerinden itibaren hissedilmesi ise yer değıştirmeleri yöneten diferansiyel denklemlerde etkili olan $D_1, \dots, D_4$ katsayılarındaki α_2 li terimlerin etkisinin diğerklerine nazaran az olmasından kaynaklanmaktadır.

Sıcaklık tesirinin incelendiğı Bölüm 3' te yer değıştirme vektörlerinin her ikisini de içeren diferansiyel denklem takımından potansiyel fonksiyonlar yardımıyla her bir bileşene ait denklemler tesis edilmiştir. Elde edilen yeni denklemlerin, tekil bir malzeme için verilenle biçimsel olarak aynı olmakla birlikte, her iki karışım bileşeninin de etkisini içerdığı görölmektedir. Ayrıca, sınır şartları için yapılan hesaplar yardımıyla ısıtılmış bölgeyi çevreleyen yüzeyi geçerken yer değıştirmelerin ve yüzeye dik gerilme bileşenlerinin sürekli olması gerektiğı gösterilmiştir.

Tablo 5.1 α_2 nin Yer Değiştirmeler Üzerindeki Etkisi

α_2	Sıcaklık Problemi ($R = 0.05 \text{ m}$)		Kelvin Problemi ($R = 10^{-5} \text{ m}$, $\Phi = \pi \text{ rad}$)	
	$u(R)$	$v(R)$	$ u /P$	$ v /P$
-10^{10}	8.039×10^{-5}	5.742×10^{-5}	5.838×10^{-8}	1.342×10^{-7}
-10^9	8.257×10^{-5}	5.457×10^{-5}	5.912×10^{-8}	1.338×10^{-7}
-10^7	8.280×10^{-5}	5.428×10^{-5}	5.921×10^{-8}	1.337×10^{-7}
0	8.280×10^{-5}	5.427×10^{-5}	5.921×10^{-8}	1.337×10^{-7}
10^7	8.280×10^{-5}	5.427×10^{-5}	5.922×10^{-8}	1.337×10^{-7}
10^9	8.302×10^{-5}	5.398×10^{-5}	5.931×10^{-8}	1.337×10^{-7}
10^{10}	8.490×10^{-5}	5.153×10^{-5}	6.026×10^{-8}	1.331×10^{-7}

Bir uygulama olarak sıcaklık alanı küresel, sıcaklık ise $T^{(i)}(R) = T_0 = 100$ ($^{\circ}\text{K}$) olarak alınmıştır. Çizilen grafiklerde yer değiştirme vektörlerinin ve yüzeye dik σ_{RR} ve π_{RR} gerilme bileşenlerinin $R = a$ konumu için öngörülen süreklilik şartını gerçekledikleri ve aynı konumda $\sigma_{\Theta\Theta} = \sigma_{\Phi\Phi}$ ve $\pi_{\Theta\Theta} = \pi_{\Phi\Phi}$ gerilme bileşenlerinin ise yapılan teorik hesaplara uygun olarak sırasıyla, 2.173×10^8 (Pa) ve 3.537×10^8 (Pa) değerlerinde sıçramalara maruz kaldıkları görülmüştür.

Bölüm 3' te aynı zamanda tekil bir elastik malzeme için verilmiş olan Betti karşılık teoreminin iki lineer elastik malzeme için genel bir hali araştırılmıştır. Yapılan hesaplar neticesinde bu tür bir ortam için geçerli bir teorik yapının ön gerilmeyi temsil eden α_2 sabitinin sıfır olduğu durumda verilebileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bu ise, Betti karşılık teoreminin karışım bileşenlerine ait parçacıkların doğal konumlarına ulaşabildikleri ve dolayısıyla da difüzyon kuvvetinin var olmadığı bir statik hal kabulü altında kullanılabileceği anlamına gelmektedir. Bu bölümde yapılan hesaplara ek olarak iki elastik katı karışımına ilişkin Maysel formülü küresel sıcaklık alanı problemine uygulanmış ve sonuçlar genel çözümle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, $\alpha_2 = 0$ durumunda genel çözümdeki integrasyon

sabitlerinin sıfıra eşit olması nedeniyle, her iki çözümün de aynı sonuçları verdiği görülmüştür.

Bölüm 4' te iki lineer elastik katıdan oluşan bir karışımın kuvvet tesiri altındaki yer değiştirmelerini veren bir çözüm metodu ortaya konmuştur. Uygulama olarak karışım uzayında bir noktaya tesir eden tekil bir yükün etkisinin incelendiği Kelvin problemi ele alınmış ve problemin harmonik fonksiyonların sıfır olduğu, harmonik vektörlerin ise α/R büyüklüğüne bağlı olduğu bir çözümü aranmıştır. Tekil yükün karışım bileşenleri tarafından ortaklaşa taşındığı düşüncesi altında, her bileşenin taşıdığı kuvvet P_1 ve P_2 ile gösterildiğinde, problemin bilinmeyenleri α , P_1 ve P_2 şeklinde olmaktadır. Her bileşen için yazılan denge denklemleri ve $P = P_1 + P_2$ bağıntısı yardımıyla bilinmeyenler çözülmüş ve yapılan hesaplar neticesinde önceden verilmiş olan malzeme sabitlerinin geçerli olduğu bir karışım için bileşenlerin

$$P_1 = 0.307 P , \quad P_2 = 0.693 P$$

şeklinde tekil yükü paylaştıkları sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Atkin, R.J. and Craine, R.E., 1976. Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **29**, 209-245.
- [2] Rajagopal, K.R. and Tao, L., 1995. Mechanics of mixtures, World Scientific Publishing, Singapore.
- [3] Truesdell, C. and Toupin, R., 1960. The classical field theories, in *Handbuch der Physik*, vol. III/1, Ed. Flügge, S., Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Kelly, P., 1964. A reacting continuum, *Int. J. Engng. Sci.*, **2**, 129-153.
- [5] Adkins, J.E., 1963. Nonlinear diffusion, I. Diffusion and flow of mixtures of fluids, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A255**, 607-633.
- [6] Coleman, B.D. and Noll, W., 1963. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **13**, 167-178.
- [7] Eringen, A.C. and Ingram, J.D., 1965. A continuum theory of chemically reacting media-I, *Int. J. Engng. Sci.*, **3**, 197-212.
- [8] Green, A.E. and Naghdi, P.M., 1965. A dynamical theory of interacting continua, *Int. J. Engng. Sci.*, **3**, 231-241.
- [9] Bowen, R.M., 1967. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **24**, 370-403.
- [10] Müller, I., 1968. A thermodynamic theory of mixtures of fluids, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **28**, 1-39.
- [11] Green, A.E. and Steel, T.R., 1966. Constitutive equations for interacting continua, *Int. J. Engng. Sci.*, **4**, 483-500.
- [12] Steel, T.R., 1967. Applications of a theory of interacting continua, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **20**, 57-72.
- [13] Mills, N., 1966. Incompressible mixtures of Newtonian fluids, *Int. J. Engng. Sci.*, **4**, 97-112.
- [14] Mills, N., 1967. On a theory of multi-component mixtures, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **20**, 499-508.

- [15] **Bowen, R.M.**, 1976. Theory of mixtures, in *Continuum Physics*, vol. III/1, Ed. Eringen, A.C., Academic Press, New York.
- [16] **Dunwoody, N. and Müller, I.**, 1968. A thermodynamic theory of two chemically reacting ideal gases with different temperatures, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **29**, 344-369.
- [17] **Bedford, A. and Ingram, J.D.**, 1971. A continuum theory of fluid saturated porous media, *J. Appl. Mech.*, **38**, 1-7.
- [18] **Bedford, A. and Stern, M.**, 1972. A multi-continuum theory for composite elastic materials, *Acta Mechanica*, **14**, 85-102.
- [19] **Quintanilla, R.**, 1994. Continuous dependence results in nonlinear theory of elastic mixtures, *Arch. Mech.*, **46**, 37-47.
- [20] **İeşan, D.**, 1992. A theory of mixtures of nonsimple elastic solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **30**, 317-328.
- [21] **Pop, J.J. and Bowen, R.M.**, 1978. A theory of mixtures with a long range spatial interaction, *Acta Mechanica*, **29**, 21-34.
- [22] **Tiersten, H.F. and Jahanmir, M.**, 1977. A theory of composites modeled as interpenetrating solid continua, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **65**, 153-192.
- [23] **Demiray, H.**, 1981. A continuum theory of chemically reacting mixtures of fluids and solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **19**, 253-268.
- [24] **Borrelli, A. and Patria, M.C.**, 1984. Uniqueness in the boundary-value problems for the static equilibrium equations of a mixture of two elastic solids occupying an unbounded domain, *Int. J. Engng. Sci.*, **22**, 23-38.
- [25] **Bedford, A.**, 1985. Mechanics of mixtures, in *Hamilton's principle in continuum mechanics*, pp. 59-87, Pitman Publishing Limited, London.
- [26] **Craine, R.E.**, 1971. Oscillations of a plate in a binary mixture of incompressible Newtonian fluids, *Int. J. Engng. Sci.*, **9**, 1177-1192.
- [27] **Göğüş, M.Ş.**, 1988. The influence of vibrating plates on Poiseuille flow of a binary mixture, *Int. J. Engng. Sci.*, **26**, 313-323.
- [28] **Gürgöze, İ.T.**, 1989. An equilibrium solution for the Kelvin's problem of an infinite mixture of an elastic solid and a fluid, *Bull. Tech. Univ. İstanbul*, **42**, 317-327.
- [29] **Erkman, C. and Gürgöze, İ.T.**, 1991. Thermostatistics of an infinite mixture of an elastic solid and a fluid containing a spherical thermal inclusion, *Int. J. Engng. Sci.*, **29**, 1269-1276.

- [30] **İeşan, D.**, 1994. On the theory of mixtures of elastic solids, *Journal of Elasticity*, **35**, 251-268.
- [31] **Gürgöze, İ.T. and Dokuz, M.S.**, 1998. An equilibrium solution for the Boussinesq problem for a mixture of an elastic solid and a fluid in an infinite half-space, *Int. J. Engng. Sci.*, **36**, 645-653.
- [32] **Gürgöze, İ.T. and Dokuz, M.S.**, 1999. Papkovitch-Neuber solution for a mixture of two elastic solids and Kelvin problem, *Int. J. Engng. Sci.*, **37**, 497-507.
- [33] **Chen, P.J. and Rudeen, D.K.**, 1996. Clarifications and further implications of the concept of motion in mixture theories, *Journal of Elasticity*, **45**, 135-137.
- [34] **Steel, T.R.**, 1967. Linearised theory of plane strain of a mixture of two solids, *Int. J. Engng. Sci.*, **5**, 775-789.
- [35] **İeşan, D.**, 1997. A theory of mixtures with different constituent temperatures, *Journal of Thermal Stresses*, **20**, 147-167.
- [36] **Nowacki, W.**, 1962. Thermoelasticity, Pergamon Press, New York.
- [37] **Borrelli, A. and Patria, M.C.**, 1983. Uniqueness and reciprocity in the boundary-initial value problem for a mixture of two elastic solids occupying an unbounded domain, *Acta Mechanica*, **46**, 99-109.
- [38] **Kovalenko, A.D.**, 1969. Thermoelasticity, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen.
- [39] **Little, R.W.**, 1973. Elasticity, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [40] **Tameroğlu, S.**, 1991. Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

M. Salih Dokuz 1968 yılında Trabzon’ da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’ da Ahmet Haşim İlkokulu ve Rıfat Canayakın Lisesi’ nde tamamladıktan sonra, 1985 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesi’ ne girdi. Fakülteden 1989 yılında mezun olarak aynı sene İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Robotik programında yüksek lisans eğitimine başladı. 1992 yılında yüksek lisans eğitimini bitiren M. Salih Dokuz, 1990 yılından beri İ.T.Ü. Makina Fakültesi Mekanik Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Karışımlar Teorisi Konusunda Yayınlanmış Çalışmaları:

1. **Gürgöze, İ.T. and Dokuz, M.S.**, 1998. An equilibrium solution for the Boussinesq problem for a mixture of an elastic solid and a fluid in an infinite half-space, *Int. J. Engng. Sci.*, **36**, 645-653.
2. **Gürgöze, İ.T. and Dokuz, M.S.**, 1999. Papkovitch-Neuber solution for a mixture of two elastic solids and Kelvin problem, *Int. J. Engng. Sci.*, **37**, 497-507.