

T.C.  
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ  
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİMDALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DENEYİM MERKEZİ

**LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL  
DENKLEMLERİN  
CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

103777

BERNA CANTÜRK GÜNHAN

Danışman  
Yrd. Doç. Dr. Hayrettin KÖROĞLU

İZMİR  
Kasım 2001

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri” adlı çalışmanın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.



*Berna Cantürk Günhan*

...../...../2001

Berna CANTÜRK GÜNHAN

**TUTANAK**

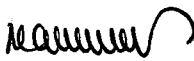
Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünün 13.12.2001 tarih ve 09. sayılı toplantısında oluşturulan jüri, Lisans Üstü Eğitim Yönetmeliğinin .... maddesine göre Matematik Eğitimi Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Berna CANTÜRK GÜNHAN'ın "Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri" konulu tezi incelenmiş ve aday 30.11.2001 tarihinde, saat 14:00 da jüri önünde tez savunmasına alınmıştır.

Adayın kişisel çalışmaya dayanan tezini savunmasından sonra 45... dakikalık süre içinde gerek tez konusu, gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından jüri üyelerince sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin .... **BASARILI**..... olduğuna oy ..**bir kişi**..... ile karar verildi.


**BAŞKAN**

  
Yrd. Doç. Dr. Hayrettin KOROĞLU

ÜYE

  
Prof. Dr. Hüseyin ALKAN

ÜYE

  
Prof. Dr. Mehmet SEZER

ÜYE

ÜYE

**YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DÖKÜMANTASYON MERKEZİ**  
**TEZ VERİ FORMU**

**Tez No:**                      **Konu Kodu:**                      **Üniv. Kodu:**

**Tezin Yazarının**

**Soyadı:** Cantürk Günhan                      **Adı:** Berna

**Tezin Türkçe Adı:** Lineer Olmayan Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri

**Tezin Yabancı Dildeki Adı:** Approximate Solutions of Non-linear Differential and Integral Equations by Chebyshev Method.

**Tezin Yapıldığı**

**Üniversite:** Dokuz Eylül Üni.                      **Enstitü:** Eğitim Bilimleri Enst.                      **Yıl:** 2001

**Diğer Kuruluşlar:**

**Tezin Türü:**

- |                       |                                     |                 |          |
|-----------------------|-------------------------------------|-----------------|----------|
| 1- Yüksek lisans      | <input checked="" type="checkbox"/> | Dili            | : Türkçe |
| 2- Doktora            | <input type="checkbox"/>            | Sayfa Sayısı    | : 59     |
| 3- Tıpta uzmanlık     | <input type="checkbox"/>            | Referans Sayısı | : 21     |
| 4- Sanatta yeterlilik | <input type="checkbox"/>            |                 |          |

**Tez Danışmanlarının**

**Ünvanı Adı Soyadı:** Yrd. Doç. Dr. Hayrettin Köroğlu

**Türkçe Anahtar Kelimeler**

- 1- Chebyshev serileri
- 2- Lineer olmayan diferansiyel denklemler
- 3- Lineer olmayan integral denklemler

**İngilizce Anahtar Kelimeler**

- 1- Chebyshev Series
- 2- Non-linear differential equations
- 3- Non-linear integral equations

- 1- Tezinden fotokopi yapılmasına izin veriyorum.
- 2- Tezinden dipnot gösterilmek şartıyla bir bölümünün fotokopisi alınabilir.
- 3- Kaynak gösterilmek şartıyla tezimin tamamının fotokopisi alınabilir.

**Tarih:** ...../...../2001

**İmza:** 

## TEŐEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmamda bana yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hayrettin KÖROĞLU'na bütün katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam sırasında bana yol gösteren Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında göstermiş olduğu yardım ve teşviklerinden dolayı eşime ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen aileme minnet borçluyum.



## ÖZET

Bu çalışmada, lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin verilen koşullara göre yaklaşık çözümlerini Chebyshev polinomları cinsinden bulmak için Chebyshev matris yöntemi sunulmuştur.

Yöntemin ilk bölümünde verilen denklem, Chebyshev seri katsayılarına bağlı bir matris denklemine dönüştürülür. Ardından da koşulların matris formu ile birleştirilerek yeni bir matris denklemi oluşturulur. Buradan Chebyshev katsayıları bulunarak kesilmiş Chebyshev seri yaklaşımı elde edilir.

Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuya temel olacak kavramlar; ikinci bölümde Chebyshev katsayılarının hesaplanması; üçüncü bölümde problemin tanımlanması, bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin ve koşullarının matris formları ve lineer olmayan diferansiyel denklemin matris denklemine dönüştürülmesi ve denklemin çözüm yöntemi; dördüncü bölümde lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denkleminin matris denklemine dönüştürülmesi ve çözüm yöntemi sunulmuştur. Son bölümde ise çözüm yöntemlerinin uygulanması verilmiştir.

## ABSTRACT

In this study, Chebyshev matrix method was presented, in order to find the approximate solutions of non-linear differential and integral equations, in terms of Chebyshev polynomials for a given conditions.

The equation given in the first chapter of method was transformed into the matrix equations, depending on the Chebyshev series coefficients and then a new equation system was formed by combining conditions with the matrix form. Hence, the finite Chebyshev series approach was obtained by finding the Chebyshev coefficients.

The study consisted of five chapters. In the first chapter, concepts which were the basis for the topic; in the second chapter, calculations of Chebyshev coefficients; in the third chapter, description of the problem, derivatives of unknown functions and the matrix form of the conditions, non-linear differential equations to transform into the matrix equations and solution method of this equation; in the fourth chapter, non-linear Volterra-Fredholm integral equation to transform into the matrix equation and solution method were presented. In the last chapter, application of solution methods was given.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET	V
ABSTRACT	VI
İÇİNDEKİLER	VII
TABLolar LİSTESİ	IX

### Bölüm 1

#### TEMEL KAVRAMLAR

1.1. GİRİŞ	1
1.2. PROBLEMİN TANITILMASI	2
1.3. TEK DEĞİŞKENLİ CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE SERİLERİ	3
1.4. İKİ DEĞİŞKENLİ CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE SERİLERİ	7

### Bölüm 2

#### CHEBYSHEV KATSAYILARININ HESABI

2.1. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI	10
2.2. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI	13
2.3. FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI	15

### Bölüm 3

#### LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU

3.1. GİRİŞ	19
3.2. TEMEL MATRİS GÖSTERİMLERİ	19
3.2.1. $f(x)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi	19
3.2.2. $y(x)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi	20
3.2.3. $[y(x)]^2$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi	20
3.2.4. $x^p y^{(s)}$ Türev Fonksiyonunun Matris Gösterimi	22

3.2.5. Koşulların Matris Formunda Gösterimi	25
3.3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMİN MATRİS DENKLEMİ	25

#### **Bölüm 4**

### **LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU**

4.1. LİNEER FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ	28
4.2. LİNEER OLMAYAN FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ	30
4.3. LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ	31
4.4. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ	33
4.5. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ	34

#### **Bölüm 5**

### **UYGULAMALAR**

SONUÇ ve TARTIŞMA	47
KAYNAKÇA	49

**TABLULAR LİSTESİ**

<b>Tablo 1.</b> $b_i = (a_i, a_s)$ katsayılarının hesabı	22
<b>Tablo 2.</b> Örnek 5.1'in sayısal çözümleri	37
<b>Tablo 3.</b> Örnek 5.6'nın sayısal çözümleri	46



## BÖLÜM 1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### 1.1. GİRİŞ

Lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemler fen ile mühendislik dallarında bir matematik modeli olarak karşımıza çıkmaktadır. Lineer olmayan diferansiyel denklemlere özellikle, elektronik devrelerde kullanılan transistörlerde, akışkanlar mekaniğinde ve kuantum fiziği gibi çeşitli alanlarda karşılaşmaktayız. Bu tür denklemlerin analitik çözümlerini bulmak, çoğu kere zordur. O nedenle yaklaşık çözümlerinin bulunması gereği doğar.

Yaklaşık çözümler için uygun yöntemlerden biri Chebyshev seri veya polinomlarını kullanan yöntemlerdir. Chebyshev polinomları yüzyıl kadar önce Rus Matematikçisi Chebyshev tarafından bulunmuştur. Elli yıl kadar sonra C. Lanczos sayısal hesaplamalardaki önemini ortaya çıkarmıştır. Bilgisayarların kullanılmaya başlamasıyla Chebyshev yaklaşımları, Chebyshev polinom ve serilerinin uygulamaları üzerine yapılan çalışmalar hızla artmıştır.

Clenshaw 1956'da Chebyshev polinom ve serilerini adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için ilk kez kullandı [5,6]. Daha sonra bu yöntem ile ilgili araştırma yapanların başında D. Elliot [9], M. A. Wolfe [20], S. E. El-gendi [8], N. K. Basu [2,3], M. Sasaki ve T. Kiyono [18], R. Piessens ve M. Branders [4] gelmektedir.

Son yıllarda integral denklemlere olan ilgi artmaktadır. Fredholm, Neuman, Hilbert-Schmidt, Taylor ve Chebyshev açılımları iyi bilinenlerdir [11,12,14,21]. Özellikle Chebyshev serileri yardımıyla çoğu integral denklemlerin çözülebileceği keşfedilmiştir [8,9].

Günümüzde de Chebyshev yöntemleri içerisinde Chebyshev – Matris yöntemi lineer diferansiyel denklemler için (M. Kaynak)[17] sonra integral denklemler için (S. Doğan)[7] ve daha sonra lineer integrodiferansiyel denklemler için (H. Köroğlu)[13] kullanıldı.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, Chebyshev matris yöntemini lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Daha önce lineer olmayan integral denklemler için Setenay Doğan'ın 1994'te geliştirdiği matris yöntemini  $0 \leq x \leq 1$  aralığında Volterra – Fredholm integral denklemi için geliştirmek ve uygulamaktır.

Yöntem; önce denklem içindeki katsayı fonksiyonlarının, lineer olmayan kısmının ve bilinmeyen fonksiyon ile türevlerinin kesilmiş (sonlu) Chebyshev seri açılımlarının alınmasına sonra bunların matris formlarının yerine konularak sadeleştirilmesine ve bir matris denkleme dönüştürülmesine dayandırılır. Bu matris denklemi lineer olmayan denklem sistemine karşılık gelir. Bu da bilinen sayısal yöntemlerle çözülebilir.

## 1.2. PROBLEMİN TANITILMASI

Bu çalışmada problemimiz

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y + S(x)y^2 = f(x) \quad (1.1)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin verilen koşullar altında

$$y(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \quad (1.2)$$

formunda bir Chebyshev seri çözümünü bulmaktır.

Öbür taraftan

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^1 K_F^*(x,t)[y(t)]^p dt + \lambda_2 \int_0^x K_V^*(x,t)[y(t)]^q dt \quad (1.3)$$

ikinci tür lineer olmayan Volterra – Fredholm integral denkleminde

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.4)$$

formunda bir Chebyshev seri çözümünü aranır.

(1.1) diferansiyel denklemindeki  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$ ,  $S(x)$  ve  $f(x)$  bilinen fonksiyonlardır. (1.3) integral denklemindeki  $f(x)$ ,  $K^*(x,t)$  bilinen fonksiyonları  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında sürekli fonksiyonlar,  $y(t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  reel parametrelerdir.  $K^*(x,t)$  denklemin çekirdek fonksiyonlarıdır.  $p=q=1$  ise denklem lineer adını alır. (1.2) ve (1.4) seri çözümündeki  $T_r(x)$  ve  $T_r^*(x)$  Chebyshev polinomlarıdır.

### 1.3. TEK DEĞİŞKENLİ CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE SERİLERİ

Tek değişkenli birinci tip Chebyshev polinomları,  $r$  herhangi bir tam sayı olmak üzere

$$T_r(x) = \cos(r\theta) \quad , \quad \cos(\theta) = x \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.5)$$

ve

$$T_r^*(x) = \cos(r\theta) \quad , \quad \cos(\theta) = 2x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.6)$$

bağlantıları ile tanımlanır.

Bu tanıma göre Chebyshev polinomlarının bazı önemli özellikleri aşağıda sıralanmıştır [10,11].

$$\text{a) } T_{-r}(x) = T_r(x), \quad T_{-r}^*(x) = T_r^*(x) \quad (1.7)$$

$$\text{b) } T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \quad \text{ve} \quad T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x \quad (1.8)$$

$$T_{r+1}^*(x) = 2(2x-1)T_r^*(x) - T_{r-1}^*(x) \quad \text{ve} \quad T_0^*(x) = 1 \quad T_1^*(x) = 2x-1 \quad (1.9)$$

c)  $r \geq 1$  için

$$T_r(x) = \frac{1}{2} \left\{ (2x)^r - \left[ 2 \binom{r-1}{1} - \binom{r-2}{1} \right] (2x)^{r-2} + \dots \right\} \quad (1.10)$$

ve

$$T_r^*(x) = \frac{1}{2} \left\{ 2^{2r} x^r - \left[ 2 \binom{2r-1}{1} - \binom{2r-2}{1} \right] 2^{2r-2} x^{r-1} + \dots \right\} \quad (1.11)$$

Bu açılımlara göre ilk birkaç Chebyshev polinomu

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

.....

ve

$$T_0^*(x) = 1$$

$$T_1^*(x) = 2x - 1$$

$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

$$T_4^*(x) = 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1$$

$$T_5^*(x) = 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1$$

.....

d)  $x$ 'in kuvvetlerinin  $T_r(x)$  ve  $T_r^*(x)$  polinomları cinsinden yazılımı için genel bağıntılar

$$x^r = \frac{1}{2^r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} T_{2i-r}(x) \quad (1.12)$$

ve

$$x^r = \frac{1}{2^{2r}} \sum_{i=0}^{2r} \binom{2r}{i} T_{i-r}^*(x) \quad (1.13)$$

şeklinde ifade edilir. Bunların ilk birkaç teriminin açık formda yazılışı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} 1 &= T_0(x) \\ x &= T_1(x) \\ 2x^2 &= T_0(x) + T_2(x) \\ 4x^3 &= 3T_1(x) + T_3(x) \\ 8x^4 &= 3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x) \\ 16x^5 &= 10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 1 &= T_0^*(x) \\ 2x &= T_0^*(x) + T_1^*(x) \\ 8x^2 &= 3T_0^*(x) + 4T_1^*(x) + T_2^*(x) \\ 32x^3 &= 10T_0^*(x) + 15T_1^*(x) + 6T_2^*(x) + T_3^*(x) \\ 128x^4 &= 35T_0^*(x) + 56T_1^*(x) + 28T_2^*(x) + 8T_3^*(x) + T_4^*(x) \\ 512x^5 &= 126T_0^*(x) + 210T_1^*(x) + 120T_2^*(x) + 45T_3^*(x) + 10T_4^*(x) + T_5^*(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

e) Trigonometrik özdeşliklerden yararlanarak Chebyshev polinomlarının çarpımı

$$\begin{aligned} 2T_r(x)T_s(x) &= T_{r+s}(x) + T_{r-s}(x) \\ 2T_r^*(x)T_s^*(x) &= T_{r+s}^*(x) + T_{r-s}^*(x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

f)  $T_r(x)$  ve  $T_r^*(x)$  polinomlarının belirsiz integralleri

$$\int T_r(x) dx = \begin{cases} T_1(x) & (r=0) \\ \frac{1}{4} T_2(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}(x)}{2(r+1)} - \frac{T_{r-1}(x)}{2(r-1)} & (r>1) \end{cases} \quad (1.15)$$

ve

$$\int T_r^*(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} T_1^*(x) & (r=0) \\ \frac{1}{8} T_2^*(x) & (r=1) \\ \frac{T_{r+1}^*(x)}{4(r+1)} - \frac{T_{r-1}^*(x)}{4(r-1)} & (r>1) \end{cases} \quad (1.16)$$

Eğer bir  $f(x)$  fonksiyonu  $-1 \leq x \leq 1$  aralığında sürekli ve sınırlı değişimli ise, o zaman aralık boyunca düzgün yakınsayan

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \quad (1.17)$$

şeklinde bir seri açılımı vardır[3,14]. Burada  $\sum'$ , ilk terimin yarısı alınan bir toplamı gösterir. Bu seri tek değişkenli Chebyshev serisi ve  $a_r$ 'lerde Chebyshev katsayıları olarak adlandırılır. Bu katsayılar [9]

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \theta) \cos r \theta d\theta, \quad r=0,1,2,\dots \quad (1.18)$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. İntegralin ortogonal özelliği kullanılarak bulunan bu formül pratikte pek fazla kullanılmaz.

(1.17) Chebyshev serisi,  $f(\cos \theta)$  fonksiyonunun Fourier cosinüs seri açılımıdır. Dolayısıyla yakınsama şartları, Fourier serisinin yakınsaklık koşullarından türetilir. Ancak Chebyshev seri açılımı, genel Fourier serisi olmayan, periyodik olma özelliğine sahiptir. Böyle açılımlar, Fourier serisi ve periyodik olmayan fonksiyonların benzer

açılımlarından daha hızlı yakınsarlar. Ayrıca, periyodik olmayan fonksiyonların uç noktalarındaki süreksizlikleri Fourier serisinin Chebyshev formu ile ortadan kaldırılabılır [6].

Benzer biçimde  $f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  aralığında sürekli ve sınırlı değişimli ise

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) \quad (1.19)$$

şeklinde düzgün yakınsak bir seriye açılabilir.

Sonuç olarak Fourier serisinin sonuçlarından faydalanılarak, Chebyshev serisi için aşağıdaki teorem çıkarılabilir [14].

**Teorem 1.1** Eğer  $f(x)$ , bazı  $\delta > 0$  için  $[-1 - \delta, 1 + \delta]$  aralığında sınırlı değişimli ve sürekli ise o zaman  $[-1, 1]$  aralığında (1.17) formunda düzgün yakınsak tek değişkenli Chebyshev serisi açılımına sahiptir.

#### 1.4. İKİ DEĞİŞKENLİ CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE SERİLERİ

İki değişkenli Chebyshev polinomları

$$T_{r,s}(x,y) = T_r(x)T_s(y) , \quad -1 \leq x,y \leq 1 \quad (1.20)$$

ve

$$T_{r,s}^*(x,y) = T_r^*(x)T_s^*(y) , \quad 0 \leq x,y \leq 1 \quad (1.21)$$

şeklindedir. Buradaki  $T_r(x)$ ,  $T_s(y)$ ,  $T_r^*(x)$  ve  $T_s^*(y)$  tek değişkenli Chebyshev polinomlarıdır.

$$T_r(x) = \cos(r\theta) , \quad \cos(\theta) = x , \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$T_s(y) = \cos(s\phi) , \quad \cos(\phi) = y , \quad -1 \leq y \leq 1$$

ve

$$T_r^*(x) = \cos(r\theta), \quad \cos(\theta) = 2x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$T_s^*(y) = \cos(s\phi), \quad \cos(\phi) = 2y - 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Bu tanımları kullanarak şu sonuçları çıkarabiliriz.

$$T_{r,s}(x,y)T_{p,q}(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 T_{r+(-1)^i p, s+(-1)^j q}(x,y) \quad (1.22)$$

$$T_{r,s}^*(x,y)T_{p,q}^*(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 T_{r+(-1)^i p, s+(-1)^j q}^*(x,y) \quad (1.23)$$

$$2xT_{r,s}(x,y) = T_{r+1,s}(x,y) + T_{r-1,s}(x,y) \quad (1.24)$$

$$2(2x-1)T_{r,s}^*(x,y) = T_{r+1,s}^*(x,y) + T_{r-1,s}^*(x,y) \quad (1.25)$$

$$2yT_{r,s}(x,y) = T_{r,s+1}(x,y) + T_{r,s-1}(x,y) \quad (1.26)$$

$$2(2y-1)T_{r,s}^*(x,y) = T_{r,s+1}^*(x,y) + T_{r,s-1}^*(x,y) \quad (1.27)$$

$$x^m y^n T_{r,s}(x,y) = \frac{1}{2^{m+n}} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} T_{r-m+2i, s-n+2j}(x,y) \quad (1.28)$$

$$x^m y^n T_{r,s}^*(x,y) = \frac{1}{2^{2m+2n}} \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2m}{i} \binom{2n}{j} T_{r-m+i, s-n+j}^*(x,y) \quad (1.29)$$

$$\int T_{r,s}(x,y) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^i T_{r+(-1)^i, s}(x,y)}{r + (-1)^i} \quad (1.30)$$

$$\int T_{r,s}(x,y) dy = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j T_{r, s+(-1)^j}(x,y)}{s + (-1)^j} \quad (1.31)$$

$$\int T_{r,s}^*(x, y) dx = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^i T_{r+(-1)^i, s}^*(x, y)}{r + (-1)^i} \quad (1.32)$$

$$\int T_{r,s}^*(x, y) dy = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j T_{r, s+(-1)^j}^*(x, y)}{s + (-1)^j} \quad (1.33)$$

**Teorem 1.2**  $f(x, y)$ ,  $-1 \leq x, y \leq 1$  aralığında sürekli ve sınırlı değişimli ise o zaman bu bölgede düzgün yakınsayan

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} T_{r,s}(x, y) \quad (1.34)$$

formunda iki değişkenli Chebyshev seri açılımına sahiptir [14].

Benzer şekilde  $f(x, y)$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$  aralığında sürekli ve sınırlı değişimli ise

$$f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} T_{r,s}^*(x, y) \quad (1.35)$$

formunda düzgün yakınsayan iki değişkenli Chebyshev serisine açılabilir.

## BÖLÜM 2

### CHEBYSHEV KATSAYILARININ HESABI

#### 2.1. TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI

$x=0$  civarında Taylor seri açılımı yardımıyla  $-1 \leq x \leq 1$  aralığında bir  $f(x)$  fonksiyonunun Chebyshev seri açılımı bulunabilir. Bu yöntemin özü Lanczos [6] tarafından verilmiştir ve şu formüllerin kullanımına bağlıdır.

$$x^{2n} = 2^{-2n+1} \sum_{i=0}^n \binom{2n}{n-i} T_{2i}(x)$$

$$x^{2n+1} = 2^{-2n} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{n-i} T_{2i+1}(x)$$

Bu formüller kullanılarak Taylor serisindeki  $x$ 'in kuvvetleri yerine Chebyshev polinomlarındaki açılımları konularak seriler aşağıdaki formda yeniden düzenlenirler.

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r T_r(x)$$

$r=0,1,2,\dots,N$  alınır ve kullanılan bu metod ile şu sonuçları çıkarabiliriz.

$$f(x) = \sum_{r=0}^N f_r T_r(x) \quad (2.1)$$

formunda  $N$ . dereceden kesilmiş tek değişkenli Chebyshev serisi olan bir  $f(x)$  fonksiyonu alalım. Bu  $f(x)$  fonksiyonunu matris formunda yazabiliriz.

$$f(x) = T_x F \quad (2.2)$$

Burada

$$T_x = [T_0(x) \ T_1(x) \ \dots \ T_N(x)]$$

ve

$$F = \left[ \frac{1}{2} f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_N \right]^t \quad \text{dir.}$$

Şimdi de  $f(x)$  fonksiyonuna  $x=0$  civarında  $N$ . dereceden Taylor polinomları yardımıyla yaklaşalım, yani

$$f(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n \quad (2.3)$$

$$X = [x^0 \ x^1 \ \dots \ x^N], \quad B = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_N]^t$$

olmak üzere (2.3) matris formu

$$f(x) = XB \quad (2.4)$$

şeklinde dir.

(2.2) ve (2.4) denklemlerinden şu bağıntıyı elde edebiliriz.

$$T_x F = XB \quad (2.5)$$

Diğer taraftan (1.12) bağıntısını tekrar hatırlarsak ve  $n=0,1,2,\dots,N$  alınırsa matris denklemleri

$$X^t = D T_x^t \quad \text{ya da} \quad X = T_x D^t \quad (2.6)$$

olur. Burada  $X$  (2.4)'te ve  $T_x$  (2.2)'de tanımlandı.  $D$  de aşağıdaki gibi tanımlandı.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 2^{-2n} \binom{2n}{n-0} & 0 & 2^{-2n+1} \binom{2n}{n-1} & 0 & \dots & 2^{-2n+1} \binom{2n}{0} & 0 \\ 0 & 2^{-2n} \binom{2n+1}{n-0} & 0 & 2^{-2n} \binom{2n+1}{n-1} & \dots & 0 & 2^{-2n} \binom{2n+1}{0} \end{bmatrix}$$

D matrisinde N tek için son satırı, N çift için bir önceki satırı matrisin son satırı olarak kullanacağız. (2.6)'yı (2.5)'de yazarsak

$$F = D^t B \text{ veya } B = (D^t)^{-1} F \quad (2.7)$$

matris eşitliğini elde ederiz ki bu da  $f(x)$  fonksiyonu için Taylor ve Chebyshev katsayıları arasındaki ilişkidir. Benzer biçimde  $0 \leq x \leq 1$  aralığında tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonuna

$$f(x) = \sum_{r=0}^N f_r^* T_r^*(x) \quad (2.8)$$

kesilmiş Chebyshev serisi ile yaklaşım aynı yol izlenirse

$$F^* = \left[ \frac{1}{2} f_0^* f_0^* \dots f_N^* \right]^t,$$

$$D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{15}{32} & \frac{3}{16} & \frac{1}{32} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{7}{128} & \frac{7}{16} & \frac{7}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{28} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 2^{-2n} \binom{2n}{n} & 2^{-2n+1} \binom{2n}{n+1} & 2^{-2n+1} \binom{2n}{n+2} & 2^{-2n+1} \binom{2n}{n+3} & 2^{-2n+1} \binom{2n}{n+4} & \dots & 2^{-2n+1} \binom{2n}{2n} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$F^* = D^{*t} B \text{ veya } B = (D^{*t})^{-1} F^* \quad (2.9)$$

matris eşitliğini elde ederiz.

## 2.2. İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI

$K(x,y)$  fonksiyonuna  $-1 \leq x, y \leq 1$  için

$$K(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} k_{r,s} T_{r,s}(x, y) \quad (2.10)$$

formunda  $x$  ve  $y$ 'ye göre  $N$ . dereceden iki değişkenli kesilmiş bir Chebyshev serisi ile yaklaşalım.  $T_{r,s}(x, y) = T_r(x)T_s(y)$  olduğunu göz önüne alır ve

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} k_{00} & \frac{1}{2} k_{01} & \dots & \frac{1}{2} k_{0N} \\ \frac{1}{2} k_{10} & k_{11} & \dots & k_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{2} k_{N0} & k_{N1} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

dersek (2.10)'u matris formunda

$$K(x, y) = T_x K T_y \quad (2.11)$$

olarak ifade edebiliriz.

Şimdi de  $K(x, y)$  fonksiyonuna  $x=y=0$  civarında  $x$  ve  $y$ 'ye göre  $N$ . dereceden Taylor polinomları yardımıyla yaklaşalım, yani [16]

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N c_{n,m} x^n y^m \quad (2.12)$$

Burada

$$c_{n,m} = \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} K(0,0)}{\partial x^n \partial y^m}$$

olur.

$$X = [x^0 \quad x^1 \quad \dots \quad x^N], \quad Y = [y^0 \quad y^1 \quad \dots \quad y^N] \text{ ve}$$

$C = [c_{n,m}]$   $n, m = 0, 1, 2, \dots, N$  olmak üzere (2.12)'yi matris formunda

$$K(x, y) = X C Y^t \quad (2.13)$$

olarak ifade edebiliriz.

(2.6), (2.11) ve (2.13) bağıntılarını kullanarak Chebyshev ve Taylor katsayıları arasındaki ilişkiyi

$$K = D^t C D \quad (2.14)$$

olarak elde ederiz

Eğer  $K(x, y)$  fonksiyonu  $0 \leq x, y \leq 1$  aralığında tanımlanmışsa  $K(x, y)$  fonksiyonuna

$$K(x, y) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N k_{r,s}^* T_{r,s}^*(x, y) \quad (2.15)$$

iki değişkenli kesilmiş Chebyshev serisi ile yaklaşık aynı yol izlenirse

$$K^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} k_{00}^* & \frac{1}{2} k_{01}^* & \dots & \frac{1}{2} k_{0N}^* \\ \frac{1}{2} k_{10}^* & k_{11}^* & \dots & k_{1N}^* \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{1}{2} k_{N0}^* & k_{N1}^* & \dots & k_{NN}^* \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$K^* = D^{*t} C D^* \quad (2.16)$$

matris eşitliğini elde ederiz.

### 2.3. FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ İÇİN CHEBYSHEV KATSAYILARI

$-1 \leq x \leq 1$  aralığında  $y(x)$  fonksiyonu ve  $n$ . basamaktan türevlerini kabul edelim ki Chebyshev seri açılımları

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \text{ ve } y^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r^{(n)} T_r(x) \quad (2.17)$$

olarak ifade edilsin. Burada  $a_r^{(n)}$  ve  $a_r$  Chebyshev katsayılarıdır.  $a_r^{(0)} = a_r$  ve  $y^{(0)} = y$  açıkça görülmektedir. (1.15) bağlantısı kullanarak  $y^{(n)}$  ve  $y^{(n+1)}$ 'in katsayıları arasındaki rekürans bağıntısı [6,10] tarafından aşığıdaki gibi bulundu.

$$2r a_r^{(n)} = a_{r-1}^{(n+1)} - a_{r+1}^{(n+1)}, \quad r \geq 1. \quad (2.18)$$

(2.18) bağıntısına dayalı olarak řu bağıntıları yazabiliriz.

$$2(r+1)a_{r+1}^{(n)} = a_r^{(n+1)} - a_{r+2}^{(n+1)}$$

$$2(r+3)a_{r+3}^{(n)} = a_{r+2}^{(n+1)} - a_{r+4}^{(n+1)}$$

$$2(r+5)a_{r+5}^{(n)} = a_{r+4}^{(n+1)} - a_{r+6}^{(n+1)}$$

...

ve bu bağıntılardan

$$a_r^{(n+1)} = 2 \left[ (r+1)a_{r+1}^{(n)} + (r+3)a_{r+3}^{(n)} + (r+5)a_{r+5}^{(n)} + \dots \right]$$

ya da

$$a_r^{(n+1)} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(n)} \quad (2.19)$$

elde edilir.

(2.19) bağıntısına göre  $a_r^{(1)}$  ve  $a_r^{(2)}$  katsayılarını açarsak

$$a_r^{(1)} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (r+2i+1)a_{r+2i+1}$$

ve

$$a_r^{(2)} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} (r+2i+1)a_{r+2i+1}^{(1)} \quad \text{ya da} \quad a_r^{(2)} = 4 \sum_{i=0}^{\infty} i(r+i)(r+2i)a_{r+2i} \quad (2.20)$$

Burada  $r=0,1,2,\dots,N$  alınır ve  $r>N$  ise  $a_r = a_r^{(1)} = a_r^{(2)} = \dots = 0$  kabul edilir.

(2.19) bağıntısını matris formunda

$$A^{(n+1)} = 2MA^{(n)} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \quad (2.21)$$

olarak ifade edebiliriz.

Burada  $A^{(n)} = \left[ \frac{1}{2} a_0^{(n)} \quad a_1^{(n)} \quad \dots \quad a_N^{(n)} \right]^t$  dir.

(2.21)'den N tek için

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \dots & \dots & \frac{N}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & \dots & \dots & N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ve N çift için

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & \dots & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

elde ederiz.

(2.21) bağıntısında  $n=0,1,2,\dots$  için

$$\begin{aligned}
 A^{(1)} &= 2MA \\
 A^{(2)} &= 2MA^{(1)} = 2^2 M^2 A \\
 A^{(3)} &= 2MA^{(2)} = 2^3 M^3 A \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 A^{(n)} &= 2MA^{(n-1)} = 2^n M^n A
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Burada  $A^{(0)} = A$  olduğu açıkça görülmektedir [17].

Eğer  $y(x)$  fonksiyonu  $0 \leq x \leq 1$  aralığında tanımlı ise (2.22) bağıntısı

$$A^{(n)} = 4^n M^n A \tag{2.23}$$

şeklinde olur.

## BÖLÜM 3

### LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU

#### 3.1. GİRİŞ

Bu bölümde amacımız (1.1) bağıntısı ile tanımlanan

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y + S(x)y^2 = f(x) \quad (3.1)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleminin

$$y(x) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(x) \quad -1 \leq x \leq 1, \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümünü bulmaktır. Burada  $a_r$  bilinmeyen katsayılar,  $T_r(x)$  Chebyshev polinomları ve  $N \in \mathbb{N}$  serinin kesme sınırındır.

#### 3.2. TEMEL MATRİS GÖSTERİMLERİ

Burada daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı fonksiyonların Chebyshev açılımlarının matris gösterimini sunacağız.

##### 3.2.1. $f(x)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

Bilinen  $f(x)$  fonksiyonunun kesilmiş Chebyshev seri formunda yazılışı

$$f(x) = \sum_{r=0}^N f_r T_r(x)$$

şeklindedir. Bu fonksiyonun matris gösterimi ise

$$f(x) = T_x F \quad (3.3)$$

$$F = \left[ \frac{1}{2} f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_N \right]^t, \quad T_x = [T_0(x) \quad T_1(x) \quad \dots \quad T_N(x)]$$

biçiminde yazılır. Burada  $f_r$ 'ler  $f(x)$  fonksiyonunun Chebyshev seri açılımındaki katsayılarıdır.

### 3.2.2. $y(x)$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

$$y(x) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(x) = [T_0(x) \quad T_1(x) \quad \dots \quad T_N(x)] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix}$$

Eğer  $T_x = [T_0(x) \quad T_1(x) \quad \dots \quad T_N(x)]$

$$A = \left[ \frac{1}{2} a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N \right]^t$$

olarak alırsak  $y(x)$  bilinmeyen fonksiyonunun matris formu

$$y(x) = T_x A \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır.

### 3.2.3. $[y(x)]^2$ Fonksiyonunun Matris Gösterimi

$$y(x) = \sum_{r=0}^N a_r T_r(x) \text{ olduğuna göre}$$

$$\begin{aligned} [y(x)]^2 &= \left[ \sum_{r=0}^N a_r T_r(x) \right]^2 = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N a_r a_s T_r(x) T_s(x) \\ &= \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N \frac{a_r a_s}{2} [T_{r+s}(x) + T_{r-s}(x)] \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifade açılıp tek bir toplam işareti altında düzenlenirse

$$[y(x)]^2 = \sum_{i=0}^{2N} b_i T_i(x) = \sum_{r=0}^N \sum_{s=0}^N \frac{a_r a_s}{2} [T_{r+s}(x) + T_{r-s}(x)] \quad (3.5)$$

olur. Burada  $b_i$  katsayıları  $(a_r, a_s)$ ;  $r, s=0, 1, 2, \dots, N$  bilinmeyen katsayılar türünden bulunur.

O zaman  $[y(x)]^2$ 'nin matris formu [7]

$$[y(x)]^2 = \sum_{i=0}^{2N} b_i T_i(x) = EB \quad (3.6)$$

$$E = [T_0(x) \quad T_1(x) \quad \dots \quad T_{2N}(x)]$$

$$B = \left[ \frac{1}{2} b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{2N} \right]^t$$

olarak yazılır. Burada  $a_{-r} = a_r$  olmak üzere

$$b_i = \begin{cases} \frac{\left( \frac{a_i}{2} \right)^2}{2} + \sum_{r=1}^{N-\frac{i}{2}} \left( \frac{a_{i-2r}}{2} \right) \left( \frac{a_{i+2r}}{2} \right) & ; \quad i \text{ çift için} \\ \sum_{r=1}^{N-\frac{i-1}{2}} \left( \frac{a_{i+1-2r}}{2} \right) \left( \frac{a_{i-1+2r}}{2} \right) & ; \quad i \text{ tek için} \end{cases}$$

şeklindedir.

**Tablo 1.**  $b_i = (a_r, a_s)$  katsayılarının hesabı

$N = 0$	$b_0 = \frac{1}{2} a_0^2$
$N = 1$	$b_0 = \frac{1}{2} a_0^2 + a_1^2$ $b_1 = a_0 a_1$ $b_2 = \frac{1}{2} a_1^2$
$N = 2$	$b_0 = \frac{1}{2} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2$ $b_1 = a_0 a_1 + a_1 a_2$ $b_2 = \frac{1}{2} a_1^2 + a_0 a_2$ $b_3 = a_1 a_2$ $b_4 = \frac{1}{2} a_2^2$

### 3.2.4. $x^p y^{(s)}$ Türev Fonksiyonunun Matris Gösterimi

$x^p y^{(s)}$  terimlerinin Chebyshev açılımı

$$x^p y^{(s)} = \sum_{r=0}^N \sum_{j=0}^p 2^{-p} \binom{p}{j} a_{|r-p+2j|}^{(s)} T_r(x) \quad (3.7)$$

Clenshaw tarafından verilmiştir [6]. (3.7)'nin matris gösterimi

$$x^p y^{(s)} = T_x M_p A^{(s)}$$

(2.20) bağıntısından  $A^{(s)} = 2^s M^s A$  yerine yazarsak

$$x^p y^{(s)} = T_x M_p 2^s M^s A \quad s=0,1,2 \quad p=0,1,2,\dots,N \quad (3.8)$$

elde edilir.

Lineer olmayan kısım için (3.7) bağıntısını düzenlersek

$$x^p [y(x)]^2 = \sum_{r=0}^{2N} \sum_{j=0}^p 2^{-p} \binom{p}{j} b_{|r-p+2j|} T_r(x) = T_x M_p B \quad (3.9)$$

elde edilir.

Burada  $M_p = [m_{i,j}]$  ( $i=0,1,2,\dots,N+1$  ve  $j=0,1,2,\dots,N+1$ ) matrisi  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde bir matristir.  $M_p$ 'nin elemanları  $p$  tek ise

$$m_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2^p} \left[ \binom{p}{\frac{p-|i+j|}{2}} + \binom{p}{\frac{p+|i-j|}{2}} \right] & ; i+j \text{ tek için} \\ 0 & ; i+j \text{ çift için} \end{cases}$$

$p$  çift ise

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & ; i+j \text{ tek için} \\ \frac{1}{2^p} \left[ \binom{p}{\frac{p-|i+j|}{2}} + \binom{p}{\frac{p+|i-j|}{2}} \right] & ; i+j \text{ çift için} \end{cases}$$

burada  $i+j > p$  için  $\binom{p}{\frac{p-|i+j|}{2}} = 0$  ve  $|i-j| > p$  için  $\binom{p}{\frac{p+|i-j|}{2}} = 0$  kabul edeceğiz.

Buna göre ilk birkaç  $M_p$  matrisi şu şekildedir.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (\text{Birim Matris})$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

### 3.2.5. Koşulların Matris Formunda Gösterimi

$y(a) = \lambda$  ve  $y'(a) = \mu$  başlangıç koşulları verildiğinde (3.2) ve (2.22) bağıntılarından

$$UA = [\lambda] \quad \text{ve} \quad VA = [\mu] \quad (3.10)$$

Burada

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix}^t$$

$$U = T_x(a) = [T_0(a) \quad T_1(a) \quad \dots \quad T_N(a)]$$

$$V = 2T_x(a)M$$

şeklinde yazılabilir.

### 3.3. LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMİN MATRİS DENKLEMİ

(3.1) Denkleminde  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  ve  $S(x)$  polinomlarının  $x=0$  civarında  $N$  . dereceden Taylor polinomları cinsinden yazarsak

$$P(x) = \sum_{i=0}^N p_i x^i \quad Q(x) = \sum_{i=0}^N q_i x^i \quad R(x) = \sum_{i=0}^N r_i x^i \quad S(x) = \sum_{i=0}^N s_i x^i \quad (3.11)$$

şeklinde dir. Bu durumda (3.1) denklemi

$$\sum_{r=0}^N [p_r x^r y^{(r)} + q_r x^r y' + r_r x^r y] A + s_r x^r y^2 B = f(x) \quad (3.12)$$

eşitliğine döndürür.

(3.3), (3.6) ve (3.8) bağıntılarını (3.12)'de yerine yazdığımızda lineer olmayan diferansiyel denklem,

$$\sum_{i=0}^N (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = F \quad (3.13)$$

matris denkleme dönmüş olur. Böylece  $\alpha_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, N$ ) aranan Chebyshev katsayıları için  $(N+1)$  bilinmeyenli  $(N+1)$  denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

(3.1) denkleme karşılık gelen (3.13) matris denklemini

$$W = [w_{m,n}] = \sum_{i=0}^N (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) \quad \text{ve} \quad Z = [z_{i,j}] = \sum_{i=0}^N s_i M_i$$

olmak üzere

$$WA + ZB = F \quad (3.14)$$

formunda yazabiliriz. Böylece (3.14)'ün arttırılmış matrisi

$$[W : Z; F] \quad (3.15)$$

olur. Verilen koşul (3.15)'in son satırıyla yer değiştirilirse

$$[\bar{W} : \bar{Z}; \bar{F}]$$

arttırılmış matrisi veya

$$\bar{W}A + \bar{Z}B = \bar{F} \quad (3.16)$$

matris denklemini elde ederiz. Buradan bilinmeyen Chebyshev katsayıları bulunur. Elde edilen Chebyshev katsayıları (3.2)'de yerine konularak (3.1)'in çözümüne  $N$ . dereceden bir Chebyshev polinomu ile yaklaşmış oluruz.

Benzer şekilde (3.1) diferansiyel denklemi  $0 \leq x \leq 1$  aralığında da matris denklemine dönüştürülebilir.



## BÖLÜM 4

### LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN CHEBYSHEV MATRİS METODU

#### 4.1. LİNEER FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ

Bu bölümde amacımız (1.3) ile tanımlanan bağıntıda  $\lambda_2 = 0$   $p = 1$  ise

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^1 K_F^*(x, t) y(t) dt \quad (4.1)$$

ikinci tür lineer Fredholm integral denkleminin

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n^*(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad N \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümünü bulmaktır. (4.2) bağıntısının matris formu

$$y(x) = T_x^* A \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada

$$T_x^* = [T_0^*(x) \quad T_1^*(x) \quad \dots \quad T_N^*(x)]$$

$$A = \left[ \frac{1}{2} a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N \right]^t$$

(4.1) denkleminde bilinen  $f(x)$  ve  $K_F^*(x, t)$  fonksiyonlarını da Chebyshev serilerine açabiliriz. Bunların matris formları da şu şekildedir.

$$f(x) = T_x^* F \quad (4.4)$$

ve

$$K_F^*(x, t) = T_x^* K^* T_i^{*t} \quad (4.5)$$

(4.1) integralinde  $y(t)$  fonksiyonunun matris formu

$$y(t) = T_i^* A \quad (4.6)$$

şeklindedir. (4.1) integral denkleminde (4.3), (4.4), (4.5) ve (4.6) bağıntılarını yerine yazarsak

$$T_x^* A = T_x^* F + \lambda_1 \int_0^1 T_x^* K^* T_i^{*t} T_i^* A dt$$

$$A = F + \lambda_1 K^* \left[ \int_0^1 T_i^{*t} T_i^* dt \right] A$$

kısaca

$$A = F + \lambda_1 K^* Q^* A \quad (4.7)$$

olur. Burada

$$Q^* = \int_0^1 T_i^{*t} T_i^* dt = [q_{i,j}^*] \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$q_{i,j}^* = \int_0^1 T_i^*(t) T_j^*(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-(i+j)^2} + \frac{1}{1-(i-j)^2} \right] & ; i+j \text{ çift ise} \\ 0 & ; i+j \text{ tek ise} \end{cases}$$

$Q^*$  matrisi Fox ve Parker tarafından tanımlanmıştır [10]. Böylece (4.1) Fredholm integral denklemi (4.7) matris denklemine dönüşmüş olur ki bu  $a_r$  bilinmeyen katsayılı  $N+1$  denklemlili lineer cebirsel bir sisteme karşılık gelir ve bilinen sayısal yöntemlerle çözülebilir.

#### 4.2. LİNEER OLMAYAN FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ

(1.3) bağıntısında  $\lambda_2 = 0$   $p = 2$  ise

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^1 K_F^*(x, t) [y(t)]^2 dt \quad (4.8)$$

ikinci tür lineer olmayan Fredholm integral denkleminin (4.2) formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümünün olduğunu kabul edelim. Burada

$$[y(t)]^2 = \sum_{i=0}^{2N} b_i T_i^*(t) = E^* B \quad (4.9)$$

$$E^* = [T_0^*(x) \quad T_1^*(x) \quad \dots \quad T_{2N}^*(x)]$$

$$B = \left[ \frac{1}{2} b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{2N} \right]^t$$

Burada B matrisinin elemanları Tablo 1 ile verilmişti.

(4.3), (4.4), (4.5) ve (4.9) bağıntılarındaki matris formlarını (4.8) de yerine yazarsak

$$T_x^* A = T_x^* F + \lambda_1 \int_0^1 T_x^* K^* T_t^{*t} E^* B dt$$

$$A = F + \lambda_1 K^* \left[ \int_0^1 T_t^{*t} E^* dt \right] B$$

kısaca

$$A = F + \lambda_1 K^* T^* B \quad (4.10)$$

olur. Burada

$$T^* = \int_0^1 T_i^* E^* dt = \left[ \int_0^1 T_i^*(t) T_j^*(t) dt \right] \quad i=0,1,2,\dots,N \quad j=0,1,2,\dots,2N$$

$$\int_0^1 T_i^*(t) T_j^*(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1-(i+j)^2} + \frac{1}{1-(i-j)^2} \right] & ; \quad i+j \text{ çift ise} \\ 0 & ; \quad i+j \text{ tek ise} \end{cases}$$

bu durumda  $T^*$  matrisi

$$T^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 & -1/15 & \dots \\ 0 & 1/3 & 0 & -1/5 & 0 & \dots \\ -1/3 & 0 & 7/15 & 0 & -19/105 & \dots \\ 0 & -1/5 & 0 & 17/35 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

şeklinde sabit bir matristir. Böylece (4.8) lineer olmayan Fredholm integral denklemi (4.10) matris denklemine dönüşmüş olur ki bu  $a_r$  bilinmeyen katsayılı  $N+1$  denklemlilik lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelir ve nümerik olarak çözülebilir.

### 4.3. LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ

(1.3) bağıntısında  $\lambda_1 = 0$   $q = 1$  ise

$$y(x) = f(x) + \lambda_2 \int_0^x K_V^*(x,t) y(t) dt \quad (4.11)$$

ikinci tür lineer Volterra integral denkleminin (4.2) formunda kesilmiş bir seri çözümünün olduğunu kabul edelim.

$K_V^*(x,t)$  çekirdek fonksiyonunu (2.15) bağıntısına göre

$$K_V^*(x,t) = \left( T_0^*(x)K_0^* + T_1^*(x)K_1^* + \dots + T_N^*(x)K_N^* \right) T_i^{*t}$$

$$K_V^*(x,t) = \left( \sum_{i=0}^N T_i^*(x)K_i^* \right) T_i^{*t} \quad (4.12)$$

şeklinde yazabiliriz.  $K_i^*$  matrisleri  $K_V^*$  matrisinin satır matrisleridir.

(4.11) integral denkleminde integral kısmını  $I(x)$  ile gösterelim. (4.12) ve (4.6) matris formlarını  $I(x)$ 'te yerine yazalım.

$$I(x) = \int_0^x K_V^*(x,t)y(t)dt = \int_0^x \left( \sum_{i=0}^N T_i^*(x)K_i^* \right) T_i^{*t} T_i^* A dt = \left( \sum_{i=0}^N T_i^*(x)K_i^* \right) T^* A \quad (4.13)$$

elde edilir. Burada

$$T^* = \int_0^x T_i^{*t} T_i^* dt = \left[ \int_0^x T_n^*(t) T_m^*(t) dt \right] = [T_{n,m}^*] \quad n,m=0,1,2,\dots,N$$

olur.  $T_i^*(x)T^* = H_i^* \quad i=0,1,2,\dots,N$

$$H_i^* = \left[ T_i^*(x) \int_0^x T_i^{*t} T_i^* dt \right] = [T_i^*(x)T_{n,m}^*]$$

$$I(x) = \left( \sum_{i=0}^N K_i^* H_i^* \right) A = \sum_{j=0}^N I_j(a_i) T_j^*(x) = T_x^* I(a_i) \quad (4.14)$$

olur. Burada  $j > N$  için  $T_j^*(x) = 0$  kabul edilir ve

$$I(a_i) = \left[ \frac{1}{2} I_0(a_i) \quad I_1(a_i) \quad . \quad . \quad . \quad I_N(a_i) \right]^t \text{ dir.}$$

Elde edilen (4.3), (4.4) ve (4.14) matris formları (4.11) denkleminde yazılırsa

$$T_x^* A = T_x^* F + \lambda_2 T_x^* I(a_i)$$

kısaca

$$A = F + \lambda_2 I(a_i) \quad (4.15)$$

matris denklemi elde edilir. Böylece (4.11) Volterra integral denklemi (4.15) matris denkleminde dönüşmüş olur ki bu ar bilinmeyen katsayılı N+1 denklemlilik lineer cebirsel bir sisteme karşılık gelir.

#### 4.4. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİ

(1.3) bağıntısında  $\lambda_1 = 0$   $q = 2$  ise

$$y(x) = f(x) + \lambda_2 \int_0^x K_V^*(x,t) [y(t)]^2 dt \quad (4.16)$$

ikinci tür lineer olmayan Volterra integral denkleminin (4.2) formunda kesilmiş bir Chebyshev seri çözümünün olduğunu kabul edelim. (4.16) denkleminin integral kısmı için (4.9) ve (4.12) bağıntılarını yazalım. B matrisinin elemanları Tablo 1 'de verilmiştir.

$$I(x) = \int_0^x K_V^*(x,t) [y(t)]^2 dt = \int_0^x \left( \sum_{i=0}^N T_i^*(x) K_i^* \right) T_i^{*t} E^* B dt$$

$$I(x) = \left( \sum_{i=0}^N T_i^*(x) K_i^* \right) \bar{T}^* B \quad (4.17)$$

olur. Burada  $\bar{T}^* = \int_0^x T_i^{*t} E^* dt = \left[ \int_0^x T_n^*(t) T_m^*(t) dt \right] = [T_{n,m}^*]$   $n=0,1,\dots,N$   $m=0,1,\dots,2N$

$T_i^*(x)\bar{T}^* = \bar{H}_i^*$  olsun.  $i=0,1,2,\dots,N$

$$I(x) = \left( \sum_{i=0}^N K_i^* \bar{H}_i^* \right) B = \sum_{n=0}^N I_n(b_i) T_n^*(x) = T_x^* I(b_i) \quad (4.18)$$

$$I(b_i) = \left[ \frac{1}{2} I_0(b_i) \quad I_1(b_i) \quad \dots \quad I_{2N}(b_i) \right]^T$$

sonuç olarak elde edilen (4.3), (4.4) ve (4.18) matris formlarını (4.16)'da yerine yazarsak

$$T_x^* A = T_x^* F + \lambda_2 T_x^* I(b_i)$$

kısaca

$$A = F + \lambda_2 I(b_i) \quad (4.19)$$

matris denklemi elde edilir. Böylece (4.16) lineer olmayan Volterra integral denklemi (4.19) matris denkleme dönüşmüş olur ki bu  $a_r$  bilinmeyen katsayılı  $N+1$  denklemlilik lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelir ve nümerik olarak çözülebilir.

#### 4.5. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMİ

(1.3) bağıntısında  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  sıfırdan farklı ve  $p,q=1,2$  değerlerine göre oluşan Volterra-Fredholm integral denklemini matris denkleme şu şekilde dönüştürebiliriz: 4.1 ,4.2 ,4.3 ve 4.4 başlıkları altında elde ettiğimiz matris denklemlerinde integral kısımlarının bir lineer kombinasyonları bize lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denkleminin matris denklemini verir. Bu matris denklemi  $a_r$  bilinmeyen katsayılarına göre  $N+1$  bilinmeyenli  $N+1$  denklemlilik lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelir ve nümerik olarak çözülebilir.

## BÖLÜM 5

### UYGULAMALAR

Bu çalışmada sunulan Chebyshev matris yöntemi lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmakta kullanılır. Bu bölümde yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı örnekler verilmiştir.

**Örnek 5.1.**  $y' = x^2 + y^2$  ,  $-1 \leq x \leq 1$  (5.1)

Lineer olmayan diferansiyel denklemini  $y(0)=1$  koşuluna göre ve  $N=2$  olacak şekilde ikinci dereceden Chebyshev polinomları cinsinden bir çözümünü araştıralım. (3.11) bağıntısından (5.1) denkleminde

$P(x)=0$   $Q(x)=1$   $R(x)=0$   $S(x)=-1$  şeklindedir. Böylece  
 $p_0 = p_1 = p_2 = 0$   $q_0 = 1$   $q_1 = q_2 = 0$   $r_0 = r_1 = r_2 = 0$   $s_0 = -1$   $s_1 = s_2 = 0$  olur.

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{2}T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x) \quad F = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(5.1) denklemini (3.13) matris denklemine göre

$$\sum_{i=0}^2 (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = 2M_0 M A - M_0 B = F \text{ yazabiliriz.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & 1/2 \end{bmatrix}$$

$y(0)=1$  koşuluna göre matris denklemini (3.10) bağıntısından

$$[1 \ 0 \ -1]A = [1]$$

ve arttırılmış matris formunu

$$[1 \ 0 \ -1 : 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 ; 1]$$

olarak elde ederiz.

Sonuç olarak (5.1) problemi için yeni arttırılmış matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1/2 \\ 0 & 0 & 4 & : & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Buna karşı gelen lineer olmayan denklem sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
a_1 - \frac{1}{2}b_0 &= \frac{1}{2} & a_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + a_2^2\right) &= \frac{1}{2} \\
4a_2 - b_1 &= 0 & \text{veya} & & 4a_2 - (a_0a_1 + a_1a_2) &= 0 \\
\frac{1}{2}a_0 - a_2 &= 1 & & & \frac{1}{2}a_0 - a_2 &= 1
\end{aligned}$$

Bu denklem sistemi Newton yöntemiyle çözümlürse

$a_0 = 3,0134$  ,  $a_1 = 0,9998$  ve  $a_2 = 0,5067$  olarak bulunur. (5.1) Diferansiyel denkleminin çözümlü

$$y(x) = \frac{1}{2}3,0134T_0(x) + 0,9998T_1(x) + 0,5067T_2(x)$$

veya

$$y(x) = 1 + 0,9998x + 1,0134x^2 \quad \text{olur.}$$

Bu çözümlü Taylor Matris çözümlüyle karşılaştırılması aşğıdaki Tablo 2 ile verilmiştir.

**Tablo 2.** Örnek 5.1'in sayısal çözümleri

x	Taylor Matris Yöntemi	Şimdiki Chebyshev Matris Yöntemi
1	3	3,0132
0,5	1,75	1,75325
0,25	1,3125	1,3132
0	1	1
-0,25	0,8125	0,8133
-0,5	0,75	0,7534
-1	1	1,0136

**Örnek 5.2.**  $y' - 2(x-1)y + y^2 = -x^2 + 2x + 1$  ,  $-1 \leq x \leq 1$  (5.2)

Lineer olmayan diferansiyel denkleminin N=1 için çözümlünlü araştırılm. (5.2) denkleminde

$P(x)=0$      $Q(x)=1$      $R(x)=-2x+2$      $S(x)=1$     şeklindedir. Böylece  
 $p_0 = p_1 = 0$      $q_0 = 1$      $q_1 = 0$      $r_0 = 2$      $r_1 = -2$      $s_0 = 1$      $s_1 = 0$     olur.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 = \frac{T_0(x)}{2} + 2T_1(x) - \frac{T_2(x)}{2} \quad F = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(5.2) denklemi için (3.13) matris denklemi yazılırsa

$$\sum_{i=0}^1 (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = (2M_0 M - 2M_1 + 2M_0) A + M_0 B = F$$

şeklinde olur.

$$\left( 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Buna karşı gelen lineer olmayan denklem sistemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$2a_0 + \frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 = 1$$

$$-a_0 + 2a_1 + a_0 a_1 = 2$$

Bu denklem sisteminin iki çözümü

$$I = \{a_0 = 0, \quad a_1 = 1\}$$

$$II = \{a_0 = -4, \quad a_1 = 1\}$$

şeklindedir.

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = -2 + x$$

olarak elde edilirler. Bu iki çözüm (5.2) lineer olmayan diferansiyel denkleminin özel çözümleridir. Genel çözümü bilinen yöntemlerle [1,15]

$$\frac{y(x) - x}{y(x) - x + 2} = ce^{2x} \quad \text{veya} \quad \frac{1}{y(x) - x} = \frac{1}{2}ce^{-2x} - \frac{1}{2} \quad \text{olarak bulunur.}$$

**Örnek 5.3.**  $y' - y + xy^2 = x - 1$  ,  $-1 \leq x \leq 1$  (5.3)

Lineer olmayan diferansiyel denkleminin  $N=2$  için çözümünü araştıralım. (5.3) denkleminde

$P(x) = 0$   $Q(x) = 1$   $R(x) = -1$   $S(x) = x$  olduğu açıkça görülmektedir. Buna göre

$$p_0 = p_1 = p_2 = 0 \quad q_0 = 1 \quad q_1 = q_2 = 0 \quad r_0 = -1 \quad r_1 = r_2 = 0 \quad s_1 = 1 \quad s_0 = s_2 = 0$$

$$f(x) = x - 1 = -T_0(x) + T_1(x) \Rightarrow F \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(5.3) denklemini için (3.13) matris denklemini yazarsak

$$\sum_{i=1}^2 (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = (2M_0 M - M_0) A + M_1 B = F$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşı gelen lineer olmayan denklem sistemi şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}a_0 + a_1 + \frac{a_0a_1 + a_1a_2}{2} &= -1 \\
-a_1 + 4a_2 + \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_0a_2}{2} + \frac{a_1^2}{4} &= 1 \\
-a_1 + \frac{a_0a_1}{2} + a_1a_2 &= 0
\end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden  $a_0 = 2$   $a_1 = 0$   $a_2 = 0$  bulunur. Buradan (5.3) denkleminin çözümü

$$y(x) = 1$$

bulunur. Bu çözüm (5.3) denkleminin bir özel çözümüdür. Bir özel çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümü bulmak için bilinen yöntemler kullanılırsa [1,15]

$$\frac{e^{x^2-x}}{y(x)-1} = \int -xe^{x^2-x} dx$$

bulunur. İlk birkaç terime göre integrali alırsak

$$\frac{e^{x^2-x}}{y(x)-1} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c \text{ olarak bulunur.}$$

**Örnek 5.4**  $y'' - 3y' + 2y = 1$  ,  $-1 \leq x \leq 1$  (5.4)

İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini  $N=2$  olacak şekilde Chebyshev polinomları cinsinden çözümünü araştıralım. (5.4) denkleminde

$$P(x) = 1 \quad Q(x) = -3 \quad R(x) = 2 \quad S(x) = 1 \text{ şeklindedir. Böylece}$$

$$p_0 = 1 \quad p_1 = p_2 = 0 \quad q_0 = -3 \quad q_1 = q_2 = 0 \quad r_0 = 2 \quad r_1 = r_2 = 0 \quad s_0 = 1 \quad s_1 = s_2 = 0$$

olur.

$$f(x) = 1 = T_0(x) \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(5.4) denklemini (3.13) matris denklemine göre

$$\sum_{i=0}^2 (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = F$$

$(4M_0 M^2 - 6M_0 M + 2M_0) A + M_0 B = F$  yazılabilir.

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen lineer olmayan denklem sistemi şu şekildedir.

$$\begin{aligned} a_0 - 3a_1 + 4a_2 + \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 &= 1 \\ 2a_1 - 12a_2 + a_0a_1 + a_1a_2 &= 0 \\ 2a_2 + a_0a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin iki çözümü

$$I = \left\{ a_0 = 2\sqrt{2} - 2, \quad a_1 = a_2 = 0 \right\}$$

$$II = \left\{ a_0 = -2\sqrt{2} - 2, \quad a_1 = a_2 = 0 \right\}$$

şeklindedir.

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{2}$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{2}$$

olarak elde edilirler. Bu iki çözüm (5.4) lineer olmayan diferansiyel denkleminin özel çözümleridir.

**Örnek 5.5.**  $y'' - \frac{3}{2}y^2 = 0$  ,  $-1 \leq x \leq 1$  (5.5)

İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini  $N=2$  için çözümünü araştıralım.

$P(x) = 1$   $Q(x) = 0$   $R(x) = 0$   $S(x) = -\frac{3}{2}$  şeklindedir. Buna göre

$p_0 = 1$   $p_1 = p_2 = 0$   $q_0 = q_1 = q_2 = 0$   $r_0 = r_1 = r_2 = 0$   $s_0 = -\frac{3}{2}$   $s_1 = s_2 = 0$  olur.

$f(x) = 0$   $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(5.5) denklemini (3.13) matris denklemine göre yazarsak

$$\sum_{i=0}^2 (4p_i M_i M^2 + 2q_i M_i M + r_i M_i) A + s_i M_i B = F$$

$4M_0 M^2 A - \frac{3}{2} M_0 B = F$  yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen lineer olmayan denklem sistemi şu şekildedir.

$$\begin{aligned} 4a_2 - \frac{3}{8}a_0^2 - \frac{3}{4}a_1^2 - \frac{3}{4}a_2^2 &= 0 \\ -\frac{3}{2}a_0a_1 - \frac{3}{2}a_1a_2 &= 0 \\ -\frac{3}{2}a_0a_2 - \frac{3}{4}a_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklem sisteminin çözümü

$$y(x) = 0$$

şeklindedir. Bu (5.5) denkleminin bir özel çözümüdür.

**Örnek 5.6**  $y(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{4} + \int_0^x (x-t)[y(t)]^2 dt + \int_0^1 (x+t)y(t)dt$  (5.6)

Volterra-Fredholm integral denklemini  $0 \leq x, t \leq 1$  aralığında  $N=1$  için çözümünü araştıralım.

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{4} \quad \text{ise} \quad F = \begin{bmatrix} -1,0452 \\ 0,1902 \end{bmatrix}$$

(5.6) integral denkleminin matris denkleminde yazılışı şu şekildedir.

$$A = F + \lambda_2 I(b_i) + \lambda_1 K^* Q^* A$$

İlk önce Volterra kısmını hesaplayalım.

$$K_v^* = x-t = \frac{1}{2}T_{1,0}^*(x,t) - \frac{1}{2}T_{0,1}^*(x,t) \quad K^* = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ bu matrise göre}$$

$$K_1^* = [0 \quad -1/2] \quad K_2^* = [1/2 \quad 0] \text{ şeklindedir.}$$

$$[y(t)]^2 = E^* B \quad E^* = [T_0^*(t) \quad T_1^*(t) \quad \dots \quad T_{2N}^*(t)]$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 \\ a_0a_1 \\ \frac{1}{2}a_1^2 \end{bmatrix}$$

$$I(x) = \int_0^x K_v^*(x,t)[y(t)]^2 dt = \int_0^x \sum_{i=0}^1 (T_i^*(x)K_i^*) T_i^{*t} E^* B dt = \left( \sum_{i=0}^1 (T_i^*(x)K_i^*) \right) \left( \int_0^x T_i^{*t} E^* dt \right) B$$

$$I(x) = \left( \sum_{i=0}^1 (T_i^*(x)K_i^*) \right) \bar{T}^* B$$

$$\bar{T}^* = \int_0^x T_i^{*t} E^* dt = \left[ \int_0^x T_n^*(t) T_m^*(t) dt \right] \quad (n=0,1 ; m=0,1,2)$$

$$\bar{T}^* = \begin{bmatrix} \int_0^x T_0^*(t) T_0^*(t) dt & \int_0^x T_0^*(t) T_1^*(t) dt & \int_0^x T_0^*(t) T_2^*(t) dt \\ \int_0^x T_1^*(t) T_0^*(t) dt & \int_0^x T_1^*(t) T_1^*(t) dt & \int_0^x T_1^*(t) T_2^*(t) dt \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}^* = \begin{bmatrix} \frac{T_1^*(x) + T_0^*(x)}{2} & \frac{T_2^*(x) - T_0^*(x)}{8} & \frac{T_3^*(x)}{12} - \frac{T_1^*(x)}{4} - \frac{T_0^*(x)}{6} \\ \frac{T_2^*(x) - T_0^*(x)}{8} & \frac{T_3^*(x)}{24} + \frac{T_1^*(x)}{8} + \frac{T_0^*(x)}{6} & \frac{T_4^*(x) - T_0^*(x)}{32} \end{bmatrix}$$

$$T_i^*(x)\bar{T}^* = \bar{H}_i \quad (i=0,1)$$

$$\sum_{i=0}^1 K_i^* \bar{H}_i \Rightarrow K_0^* \bar{H}_0 = T_0^*(x)K_0^* \bar{T}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{T_0^*(x)}{2} \end{bmatrix} \bar{T}^* = \begin{bmatrix} \frac{T_0^*(x)}{16} & -\frac{T_1^*(x)}{16} & -\frac{T_0^*(x)}{12} & \frac{T_0^*(x)}{64} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1^* \bar{H}_1 &= T_1^*(x)K_1^* \bar{T}^* = \begin{bmatrix} \frac{T_1^*(x)}{2} & 0 \end{bmatrix} \bar{T}^* \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4T_1^*(x) + 3KT_0^*(x)}{16} & \frac{-T_1^*(x) - 2T_0^*(x)}{64} & \frac{-10T_1^*(x) - 7T_0^*(x)}{96} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$I(x) = \left( K_0^* \bar{H}_0 + K_1^* \bar{H}_1 \right) B$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \frac{T_1^*(x) + T_0^*(x)}{4} & \frac{-5T_1^*(x)}{64} & \frac{11T_0^*(x)}{96} & \frac{-5T_1^*(x)}{48} & \frac{11T_0^*(x)}{192} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 \\ a_0a_1 \\ \frac{1}{2}a_1^2 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \left( \frac{a_0^2}{16} - \frac{11a_0a_1}{96} + \frac{37a_1^2}{384} \right) T_0^*(x) + \left( \frac{a_0^2}{16} - \frac{5a_0a_1}{64} + \frac{7a_1^2}{96} \right) T_1^*(x) \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fredholm kısmı için

$$K_F^*(x,t) = x+t = T_{0,0}^*(x,t) + \frac{1}{2}T_{0,1}^*(x,t) + \frac{1}{2}T_{1,0}^*(x,t) \quad K^* = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$K^* Q^* A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \\ \frac{1}{4}a_0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Bulduğumuz matrisleri  $A = F + \lambda_2 I(b_i) + \lambda_1 K^* Q^* A$  matris denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0452 \\ 0,1902 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a_0^2}{16} - \frac{11a_0a_1}{96} + \frac{37a_1^2}{384} \\ \frac{a_0^2}{16} - \frac{5a_0a_1}{64} + \frac{7a_1^2}{96} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 \\ \frac{1}{4}a_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,0452 \\ -0,1902 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0^2}{16} - \frac{11a_0a_1}{96} + \frac{37a_1^2}{384} + \frac{a_1}{6} \\ \frac{a_0^2}{16} - \frac{5a_0a_1}{64} + \frac{7a_1^2}{96} + \frac{a_0}{4} - a_1 \end{bmatrix}$$

olur. Linear olmayan bu denklem sistemini Newton yöntemine göre çözdüğümüzde  $a_0 = -3,3271$   $a_1 = 0,4629$  olarak bulunur. (5.6) integral denkleminin çözümü

$$y(x) = \frac{-3,3271}{2}T_0^*(x) + 0,4629T_1^*(x)$$

veya

$$y(x) = -2,12645 + 0,9258x \quad \text{olur.}$$

Bu çözümü tam çözümle karşılaştırılması aşağıdaki Tablo 3 ile verilmiştir.

**Tablo 3.** Örnek 5.6'nın sayısal çözümleri

x	Tam Çözümü	Şimdiki Chebyshev Matris Yöntemi
0	-2,125	-2,12645
0,25	-1,875	-1,895
0,5	-1,625	-1,66355
0,75	-1,375	-1,4321
1	-1,125	-1,20065

## SONUÇLAR

Lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin analitik çözümlerini bulmak oldukça güçtür. Analitik çözümün bulunamadığı yerde yaklaşık çözümlerle yetinilir. Bu çalışmada, lineer olmayan diferansiyel denklemler ile  $0 \leq x \leq 1$  aralığında lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için bir Chebyshev matris yöntemi sunulmuştur. Yöntem, çözüm fonksiyonunun Chebyshev seri açılımının var olduğu kabul edilip bu açılımdaki bilinmeyen Chebyshev katsayılarının hesaplanmasına yardımcı olur.

Chebyshev matris yöntemi hem özel hem de genel çözümlerin bulunmasında kullanılabilen bir yöntemdir. İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili pek fazla çalışma yoktur. Sadece bazı özel denklemler için, geliştirilmiş yöntemlerle genel çözümleri bulunabilmektedir. Çalışmamda her tür lineer olmayan diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinin bulunabileceği ortaya konulmuştur.

İntegral denklemlerde, verilen  $f(x)$  fonksiyonu  $0 \leq x \leq 1$  aralığında tanımlı ve  $K^*(x,t)$  çekirdek fonksiyonu bu aralıkta Chebyshev serisine açılabilirse o zaman  $y(x)$  çözümü vardır. Aksi takdirde yöntem geçerli değildir. Ayrıca çekirdek fonksiyonunun hızlı yakınsaması durumunda iyi sonuç verir.

Burada  $y(x)$  çözümüne yaklaşım polinomunun derecesi  $N$ 'nin tahmini önemlidir. Çünkü  $N$ 'in seçimi  $y(x)$  çözümünün hassaslığını belirler. Eğer  $N$  yeterince küçük alınırsa çözüm istenilen yaklaşıklıkta olmayabilir. Bu yüzden uygun bir yaklaşımı elde etmek için  $N$  yeterince büyük seçilmelidir.

Beşinci bölümdeki Örnek 5.1'de görüleceği gibi, Taylor matris yöntemiyle  $N=4$  için elde edilen sonuca, Chebyshev matris yöntemiyle  $N=2$  alınarak ulaşılabilmektedir. Bu

yöntemimizin avantajıdır. Ancak Örnek 5.6 için aynı sonuca varamadık.  $N=1$  aldığımızda tam çözüme yeterince yaklaşamadık.

Herhangi bir sonlu aralıkta tanımlanan problem Chebyshev matris yöntemiyle çözülebilir. Eğer problem  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlanırsa o zaman

$$x = \frac{1}{2}(b-a)X + \frac{1}{2}(b+a)$$

veya

$$x = (b-a)X + a$$

lineer dönüşümü ile bu aralık  $T_r(x)$  Chebyshev polinomlarının tanım aralığı olan  $-1 \leq x \leq 1$  aralığına dönüştürülebilir. Aralığın  $0 \leq x \leq 1$  olma durumunda ise çözüm  $T_r^*(x)$  fonksiyonları yardımıyla bulunabilir.

Yöntem integrodiferansiyel denklemler de uygulanabilir. Ayrıca daha yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlere de genişletilebilir. Özel çözümleri bulunan ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlere de genel çözümü bulmak için bir yöntem geliştirilebilir.

## KAYNAKÇA

- [1] Aydın, M., Gökmen, G., Kuryel, B. & Gündüz, G. (1990) Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. İzmir: Barış Yayınları.
- [2] Basu, N.K. (1970) A Chebyshev Series Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations with Associated Eigenvalue Problem. SIAM J.Numer. Anal., 10, 1, 57-68.
- [3] Basu, N.K. (1973) On Double Chebyshev Series Approximation . SIAM J. Numer. Anal., 10, 3, 496-505.
- [4] Branders, M. and Piessens, R. (1976) Numerical Solution of Integral Equations of Mathematical Physics, Using Chebyshev Polynomials. Journal of Computational Physics, 21, 178-196.
- [5] Clenshaw, C.W. (1956) The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series. Proc. Camb. Phil. Soc., 53, 134-149.
- [6] Clenshaw, C.W. (1962) Chebyshev Series for Mathematical Functions. National Physical Laboratory (Mathematical Tables), 5, 1-15.
- [7] Doğan, S. (1994) Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Chebyshev Yöntemiyle çözümleri. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [8] El-gendi, S.E. (1969) Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integrodifferential Equations. Computer Journal, 12, 282-287.
- [9] Elliot, D. (1963) A Chebyshev Series Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations. Computer Journal, 6, 102-111.
- [10] Fox, L. & Parker, I.B. (1968) Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis. London Oxford Uni. Pres.

- [11] Kanwall, R.P. & Liu, K.C. (1989) A Taylor Expansion Approach for Solving Integral Equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* , 20, 3, 411-414.
- [12] Kanwall, R.P. (1971) *Linear Integral Equations*. Academic Press, Newyork.
- [13] Koroğlu, H. (1998) Chebyshev Series Solution of Linear Fredholm Integrodifferential Equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 29, 4, 484-500.
- [14] Mason, J.C. (1967) Chebyshev Polynomial Approximations for the L-membrane Eigenvalue Problem. *SIAM J. Appl. Math.* 15, 1, 172-186.
- [15] Ross, S.L. (1974) *Differantial Equations*, John Wiley Sons. Inc., Newyork.
- [16] Sezer, M. & Doğan, S. (1993) A Taylor Polynomial Approximation for Solving Linear Fredholm Integral Equations. *Dokuz Eylül Üni. Eğitim Bilimleri Dergisi* Yıl 2, Sayı 2 , 39-49.
- [17] Sezer, M. & Kaynak, M. (1996) Chebyshev Polynomial Solutions of Linear Differential Equations. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 27, 4, 607-618.
- [18] Shimasaki, M. & Kiyono, T. (1973) Numerical Solution of Integral Equations in Chebyshev Series. *Numer. Math.* 21. By Springer-Verlag, 373-380.
- [19] Synder, M.A. (1966) *Chebyshev Methods in Numerical Approximation*. Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, Inc.
- [20] Wolfe, M.A. (1969) The Numerical Solution of Nonsingular Integral and Integrodifferential Equations by Iteration with Chebyshev Series. *Computer Journal*, 12, 193-196.
- [21] Yalçınbaş, S. (2001) Taylor Polynomial Solutions of Non-linear Volterra-Fredholm Integral Equations. *Applied Mathmatics and Computation Article*. No:6799.