T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

RIEMANN LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVLİ BİR BORU MODELİNİN TİTREŞİM ANALİZİ

Yaren ÜNEY

Danışman
Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

MANİSA–2025

YAREN ÜNEY

RIEMANN LIOUVILLE KESİRLİ TÜREVLİ BİR BORU MODELİNİN TİTREŞİM ANALİZİ

2025

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, tezin yazımında akademik ve etik kurallara aykırı herhangi bir yapay zeka ve program kullanmadığımı beyan ederim.

Yaren ÜNEY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Yaren ÜNEY
Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

Bu çalışma, mühendislik ve matematik arasındaki ilişkiyi güçlendiren teorik ve uygulamalı bir referans niteliği taşımaktadır. Özellikle üçüncü bölümde sunulan kesirli türevlerle modellenen akışkan taşıyan boru sistemi ve analizler, boru sistemlerinin dinamik davranışlarını daha doğru bir şekilde anlamak ve modellemek için önemli bir katkı sağlamaktadır.

Birinci bölümde, boru sistemleriyle ilgili temel kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Boruların tarihçesi, geometrik özellikleri ve dinamik analiz açısından önemi açıklanmıştır. Ayrıca, kesirli türevlerin matematiksel altyapısı, tarihsel gelişimi ve uygulama alanları değerlendirilmiştir. Bu bölümde ayrıca titreşim hareketi, rezonans ve viskoelastik davranış gibi mühendislikte kritik kavramlar açıklanmış ve boru sistemlerinin farklı mesnet şartları altındaki davranışlarına yer verilmiştir. Matematiksel modelleme teknikleri ve pertürbasyon yöntemi gibi yöntemler de bu bölümde detaylandırılmıştır.

İkinci bölümde, kesirli türevlere sahip bir boru modeli göz önüne alınmış ve bu modelin titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Modelin hareket denklemleri türetilmiş ve pertürbasyon yöntemi kullanılarak çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar, kesirli türevlerin boru sistemlerinin doğal frekansları üzerindeki etkilerini açıkça ortaya koymaktadır. Bu bulgular, mühendislik uygulamalarında daha hassas analizler yapılabilmesi için yenilikçi bir yaklaşım sunmaktadır.

Tezin son bölümünde ise, çalışmanın genel bir değerlendirmesi yapılarak, elde edilen bulgular özetlenmiştir. Ayrıca, kesirli türevlerin sağladığı avantajlar vurgulanarak, gelecekte yapılacak çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Akışkan taşıyan borular, Titreşim Analizi, Kesirli Türev, Pertürbasyon Yöntemi, Viskoelastik Davranış, Rezonans, Sönümleme, Doğal Frekans, Serbest Titreşim, Zorlanmış Titreşim, Dinamik Sistemler

2025, 62 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Yaren ÜNEY

Manisa Celal Bayar University
Graduate School of Education
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

This study is a theoretical and practical reference that strengthens the relationship between engineering and mathematics. Particularly, the fluid carrying pipe system modelled with fractional derivatives and analysis presented in the second section provide an important contribution to understanding and modelling the dynamic behavior of pipe systems more accurately.

In the first section, basic concepts related to pipe systems are discussed in detail. The history of pipes, their geometric properties and importance in terms of dynamic analysis are explained. In addition, the mathematical background, historical development and application areas of fractional derivatives are evaluated. In this section, critical concepts in engineering such as vibration motion, resonance and viscoelastic behaviour are explained and the behaviour of pipe systems under different support conditions is given. Mathematical modelling techniques and methods, such as the perturbation method, are also detailed in this section.

In the second part, a pipe model with Rieamann Liouville fractional derivatives is considered and vibration analysis of this model is performed. The equations of motion of the model are derived and solutions are obtained using the perturbation method. The numerical results clearly reveal the effects of fractional derivatives on the natural frequencies of pipe systems. These findings provide an innovative approach for more accurate analysis in engineering applications.

In the last section of the thesis, a general evaluation of the study is made and the findings are summarized. Additionally, the advantages of fractional derivatives are emphasized and suggestions for future studies are presented.

Keywords: Pipes conveying fluid, Pipe Systems, Vibration Analysis, Fractional Derivative, Perturbation Method, Viscoelastic Behaviour, Resonance, Damping, Natural Frequency, Free Vibration, Forced Vibration, Dynamic Systems

2025, 62 pages

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması, kesirli türevli sistemlerin mühendislik uygulamalarındaki önemine dikkat çekmek ve bu alandaki analiz yöntemlerine katkı sağlamak amacıyla hazırlanmıştır. Tezin birinci bölümünde, çalışmanın temelini oluşturan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde, kesirli türevlere sahip bir boru modelinin dinamik analizi göz önüne alınmıştır. Tezin son bölümünde ise, çalışma süresince elde edilen bulgular ışığında genel bir değerlendirme yapılmış ve tartışmalar sunulmuştur.

Tez sürecim boyunca tecrübelerinden, akademik bilgilerinden, yardımlarından ve desteklerinden her zaman faydalandığım ve destek gördüğüm saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR’e bu yolda bana ışık tuttuğu için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında çok büyük yardım ve desteklerini gördüğüm, akademik anlamda bana büyük destekleri olan Prof. Dr. B. Gültekin SINIR’a ayrıca teşekkürlerimi sunmak isterim.

Bugüne kadar eğitim hayatımda ve üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime; desteklerini her zaman hissettiğim anneme, babama, kız kardeşime, dostlarıma ve yakınlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yaren ÜNEY

Manisa, 2025

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Genlik
A_n	Kompleks Genlik
A_f	Akışkanın Kesit Alanı
A_p	Akışkan Taşıyan Borunun Kesit Alanı
B_1, B_2	Sınır Şartlarını Belirleyen Lineer Operatörler
c	Sönüm Katsayısı
ς	Sönüm Oranı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
${}^{RL}D_{a^+}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Sağdan Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^{RL}D_{b^-}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Soldan Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^{C}D_{a^+}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Sağdan Caputo Kesirli Türev Operatörü
${}^{C}D_{b^-}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Soldan Caputo Kesirli Türev Operatörü
E	Elastisite Modülü
F	Periyodik Zorlama Kuvveti
F_0	Dış Kuvvet Genliği
f	Frekans
g	Yerçekimi İvmesi (m/s^2)
h	Yükseklik (m)
I	Atalet Momenti
$I_{a^+}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Sağdan Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$I_{b^-}^{\alpha}$	α'ıncı Mertebeden Soldan Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
k	Viskozite İle Alakalı Boyutsuz Yay Sabiti

$\hat{k}$	Viskozite ile Alakalı Boyutlu Yay Sabiti
L	Kiriş Uzunluğu
m	Kütle
M	Eğilme Momenti
ΔP	Basınç Değişimi (Pa)
ρ_f	Akışkanın Yoğunluğu
ρ_p	Akışkan Taşıyan Borunun Yoğunluğu
$\hat{P}$	Boyutlu Eksenel Yük
$\hat{P}_0, \hat{P}_1$	Boyutlu Eksenel Çekme-Gerilme Kuvveti
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\Re(\alpha)$	α Sayısının Reel Kısmı
Re	Reynolds Sayısı
T	Periyot
T_0	Hızlı Zaman Ölçeği
T_1	Yavaş Zaman Ölçeği
t	Boyutsuz Bağımsız Zaman Değişkeni
$\hat{t}$	Boyutlu Bağımsız Zaman Değişkeni
u	Yer Değiştirme Vektörü
V	Kesme Kuvveti
X	Zorlanmış Titreşim için Genlik
X_n	Şekil Fonksiyonu
x	Boyutsuz Bağımsız Konum Değişkeni
$\hat{x}$	Boyutlu Bağımsız Konum Değişkeni
$W(x, T_0, T_1)$	Fonksiyonun Seküler Olmayan Terimleri
$w(x,t)$	Sürekli Ortam Deplasmanı
$\hat{w}$	Boyutlu Kiriş Deplasmanı
ω	Açısal Frekans (rad/s)
ω_0	Doğal Frekans (rad/s)
ω_d	Sönümlü Frekans
ϕ	Faz açısı

$\dot{( )}$	Zamana Göre Türev
$( )'$	Konuma Göre Türev
δ	Kiriş Deformasyonu
α	Kompleks Bir Sayı
β	Boyutsuz Doluluk Oranı
λ	Homojen Olmayan Çözümden Gelen Keyfi Katsayı
ρ	Yoğunluk
σ	Gerilme Dağılımı
η	Boyutsuz Dinamik Viskozite
$\hat{\eta}$	Boyutlu Dinamik Viskozite

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

İKİNCİ BÖLÜM

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP BİR BORU MODELİNİN TİTREŞİM ANALİZİ

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

GİRİŞ

Borular, inşaat ve altyapıdan endüstriye, tarımdan ulaşıma kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Şehirlerde su, atık su, doğal gaz ve yangın söndürme sistemlerinin taşınmasında, ısıtma ve soğutma tesisatlarında önemli bir role sahiptir. Endüstriyel alanlarda petrol ve doğal gazın çıkarılması, taşınması ve kimyasal maddelerin taşınması gibi işlemlerde yaygın olarak kullanılırken, enerji santrallerinde buhar ve basınçlı gaz sistemlerinde yer alır. Tarım ve sulamada, damla sulama ve yağmurlama sistemlerinde tercih edilirken seracılıkta ısıtma ve su dağıtımında kullanılır. Ulaştırma sektöründe havacılık ve otomotivde yakıt, hidrolik sıvılar ve hava akışı için kullanımı önemlidir. Denizcilikte ise gemilerde sıvı transferi ve hidrolik sistemlerde görev alır. Sağlık sektöründe hastanelerde medikal gazların taşınmasında ve diş ile cerrahi ekipmanlarda, evlerde ise su ve doğal gaz tesisatlarında kullanılır. Ayrıca dekoratif amaçlarla mobilya ve aksesuar tasarımlarında da yer bulur. Enerji üretiminde jeotermal ve nükleer santrallerde özel borular kullanılırken, gıda ve içecek endüstrisinde sıvıların taşınması ve işlenmesi için hijyenik borular tercih edilir. Madencilikte cevher taşıma, yer altı drenaj ve havalandırma sistemlerinde, spor alanlarında ise yüzme havuzları ve kayak merkezlerindeki yapay kar makinelerinde kullanımı dikkat çeker. Borular, malzeme türüne göre farklı sektörlerin ihtiyaçlarına uygun olarak tasarlanır ve dayanıklılığı ile geniş bir kullanım alanı sunar.

Boru hatlarının güvenli ve verimli bir şekilde çalışabilmesi için, bu yapıların dinamik davranışlarının anlaşılması son derece önemlidir. Özellikle boruların titreşimleri, sistemdeki yer değiştirme, gerilme ve hızların doğru bir şekilde hesaplanabilmesi amacıyla titiz analizler gerektirmektedir. Boru sistemlerinde meydana gelen titreşimler, dış etkenler nedeniyle genellikle farklı frekanslarda ortaya çıkmakta ve bu titreşimlerin analizi, mühendislik uygulamalarının güvenliği ve verimliliği açısından kritik bir rol oynamaktadır. Titreşim analizi, boru hatlarının tasarımından operasyonel izlemeye kadar birçok aşamada önem arz etmektedir. Geleneksel olarak, boru sistemlerinin titreşim davranışı klasik diferansiyel denklemlerle açıklanmakta olup, bu denklemler genellikle borunun elastik özellikleri ve çevresel faktörleri göz önünde bulundurarak sistemin hareketini modellemeye çalışmaktadır. Ancak, bu yaklaşım sistemin karmaşık davranışlarını tam anlamıyla açıklamada yetersiz kalabilmektedir. Özellikle boru sistemlerinde, malzeme özellikleri ve çevresel etkenlerden kaynaklanan viskoelastik ve nonlineer davranışlar, klasik yöntemlerle modellenmesi güç fiziksel olgular olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda son yıllarda kesirli türevlerin kullanımı, bu tür karmaşık sistemlerin modellemesinde yeni bir bakış açısı sunmuştur. Kesirli türevler, klasik türevlerin genelleştirilmiş bir versiyonu olup özellikle sistemlerin viskoz, elastik ve anormal dinamik davranışlarını modellemede etkin bir yaklaşım sunmaktadır.

Boru modellerinde kesirli türev kullanımı, özellikle akışkan dinamiği, ısı transferi ve titreşim analizi gibi karmaşık mühendislik uygulamalarında büyük önem taşır. Kesirli türevler, klasik türevlerin yetersiz kaldığı durumlarda sistemin geçmiş davranışlarını ve hafıza etkilerini daha iyi modelleyerek, daha gerçekçi ve hassas sonuçlar elde edilmesini sağlar. Özellikle, borular içerisindeki akışkanların viskoelastik davranışlarının veya boru malzemelerinin zamana bağlı deformasyonlarının modellenmesinde kesirli türevler kullanılarak sistemin zamanla nasıl değiştiği daha doğru bir şekilde analiz edilebilir. Bunun yanı sıra, borularda oluşan titreşimlerin sönüm mekanizmalarının belirlenmesi, boru sistemlerinin dayanıklılık ve verimliliğini artırmak için kritik bir rol oynar. Kesirli türevler, bu tür dinamik problemlerde daha kapsamlı bir perspektif sunarak, mühendislik tasarım süreçlerine önemli bir katkı sağlar.

Bu bağlamda, kesirli türevlerin bu alandaki uygulamaları, boru sistemlerinin elastik olmayan özelliklerinin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Ayrıca, bu türevler, sistem içerisindeki güç kayıplarının ve enerji sızıntılarının daha gerçekçi ve doğrusal olmayan bir biçimde temsil edilmesine olanak sağlamaktadır. Kesirli türevlerin kullanımı, ayrıca boru hatlarındaki rezonans frekanslarının daha doğru bir şekilde tespit edilmesine yardımcı olmakta ve aşırı titreşimlerin neden olabileceği potansiyel hasarların önceden tahmin edilmesine imkan sunmaktadır [1].

Kesirli türevlerin bu alanda uygulanması, daha hassas titreşim modları ve doğal frekansların elde edilmesine olanak tanır. Bu, özellikle boru sistemlerinde oluşabilecek rezonans, aşırı titreşim veya yapısal hasar gibi istenmeyen durumların önceden tespit edilmesini kolaylaştırır. Kesirli türevlerin kullanımı, boru hatlarının elastik olmayan özelliklerini ve zamanla değişen viskoelastik tepkilerini dikkate alarak daha gerçekçi bir modelleme sunar. Boru sistemlerinin viskoelastik özellikleri, özellikle enerji taşıma ve iletim hatlarında kritik bir parametre olarak öne çıkmaktadır. Bu nedenle, kesirli türevlerin boru sistemlerinin dinamik davranışları üzerindeki etkilerini incelemek, mühendislik alanında önemli bir araştırma konusu haline gelmiştir [2,3].

Kesirli türevler, mühendislik alanında sistemlerin daha esnek ve karmaşık dinamiklerini modellemek amacıyla geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Boru sistemlerinin titreşim analizi, bu tür sistemlerin daha doğru ve kapsamlı bir şekilde modellenmesine imkan tanımaktadır. Kesirli türevlerin uygulandığı titreşim analizi, son yıllarda mekanik sistemlerin dinamik davranışlarını anlamada önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. Kesirli türevler, klasik diferansiyel kavramının genişletilmesiyle ortaya çıkarak, sürekli zamana sahip dinamik sistemlerin daha hassas bir şekilde modellenmesine olanak tanımıştır. Boru sistemleri söz konusu olduğunda, bu tür türevler, karmaşık yapılar ve malzeme özelliklerinin etkilerini daha doğru bir biçimde incelemek için önemli bir araç olarak ön plana çıkmaktadır. Bu alanda gerçekleştirilen bazı çalışmalara göz attığımızda, Podlubny kesirli diferansiyelin matematiksel temellerini geliştirmiş ve bu yaklaşımın mekanik sistemlerdeki sınır koşullarına olan etkilerini araştırmıştır [4]. Daha sonra, Mainardi benzer bir şekilde, kesirli türevlerin viskoelastik sistemlerdeki dinamik davranışlarını incelemiş ve bu tür türevlerin mühendislik problemlerine uygulanabilirliğini göstermiştir [5]. Sprott ve Miller ise kesirli türevlerin mühendislikteki uygulamalarını ele alarak, özellikle hafif dinamik özelliklerin modellenmesinde faydalı olduklarını ortaya koymuşlardır [6,7]. Yıldırım ve Sevik, kesirli türevli modelleri boru sistemlerinin titreşim analizine entegre ederek, bu yaklaşımın titreşim modlarının doğruluğunu artırdığını belirtmişlerdir [8]. Son olarak, Şahin ve Ertan boru modellerinin titreşim analizi üzerindeki kesirli türevli yaklaşımın doğruluğunu klasik diferansiyelle karşılaştırmış ve daha fazla esneklik ile doğruluk sağladığını göstermişlerdir [9]. Bu çalışmalar, boru sistemlerinin titreşim analizinde kesirli türevlerin kullanılmasının, klasik modellemelere göre daha yüksek çözüm hassasiyeti sunduğunu ve sistemin gerçek dinamik özelliklerini daha iyi yansıttığını ortaya koymaktadır. Kesirli türevlerin, viskoelastik davranışlar, heterojen malzemeler ve non-lineer özellikler içeren boru sistemlerinde sağladığı avantajlar, pek çok çalışma ile ortaya koyulmuştur. Örneğin, Atangana ve Baleanu, kesirli türevlerin diferansiyel ve integral hesaplamalarındaki uygulamalarını incelemiş ve bu yaklaşımların mühendislik ile fiziksel sistemlerde daha doğru sonuçlar ortaya koyduğunu vurgulamışlardır [10]. Zuo ve Guo, kesirli türevlerin bu tür sistemlerin titreşim analizi için daha esnek ve kapsamlı bir model sunduğunu göstermişlerdir [11].

Ayrıca, bu yaklaşım, boru hatlarının uzun vadeli titreşim davranışlarını tahmin etmede de faydalıdır, zira kesirli türevler, fiziksel sistemlerin zamanla değişen özelliklerini daha iyi simüle edebilme yeteneğine sahiptir. Li ve He, boru sistemlerinde akışkanın titreşim üzerindeki etkilerini kesirli türevlerle inceleyerek sıvıların taşıma sırasında karşılaştığı enerji kayıplarını daha doğru bir şekilde modellemeyi başarmışlardır [12]. Kesirli türevler, boru hatlarındaki titreşim frekanslarını ve mod şekillerini daha kesin bir şekilde hesaplayarak, sistemdeki enerji kayıplarını da daha hassas bir biçimde modelleme imkânı tanımaktadır. Ayrıca, bu türevler, boru sistemlerinde meydana gelen elastik olmayan özellikleri incelemek için etkili bir araç olarak ortaya çıkmaktadır [13]. Bu alandaki ilerlemeler, mühendislik uygulamalarında sistemlerin daha verimli ve güvenli bir şekilde analiz edilmesine olanak sağlamaktadır. Kesirli türevler, klasik türevlerden farklı olarak, özellikle viskoelastik malzemelerin modellenmesinde belirgin avantajlar sunmaktadır. Boru sistemlerinin titreşim analizinde kesirli türevlerin kullanımı, bu tür yapıların davranışlarının daha hassas bir şekilde temsil edilmesine olanak tanımaktadır. Bu alanda yapılan çalışmalar, kesirli türevlerin sistemin doğal frekansları, mod şekilleri ve titreşimleri üzerinde önemli etkiler yarattığını ortaya koymuştur. Kesirli türevler, özellikle viskoelastik boru hatlarının dinamik özelliklerini daha iyi yansıtmasıyla mühendislik uygulamalarında giderek daha fazla tercih edilmektedir [14]. Diğer yandan, kesirli türevlerin akışkan taşıyan sistemlerdeki boru hatlarındaki titreşim analizlerine uygulaması, akışkanın etkilerini de dikkate alarak daha karmaşık ve doğru bir modelleme imkanı sunmaktadır. Ayrıca, Borhani ve Rahmani, kesirli türevlerin boru sistemlerinde iç akışkan ile etkileşim dinamiklerini anlamada nasıl faydalı olduğunu tartışmış ve bu tür analizlerin, özellikle sıvı ve gaz akışkanlarının etkileşime girdiği sistemlerde anlamlı avantajlar sağladığını belirtmiştir [15]. Bu sistemler, akışkanın ve boru hatlarının mekanik özelliklerinin birleşiminden kaynaklanan karmaşık sistemler sergilemektedir. Kesirli türevlerin boru sistemlerinin titreşim analizine uygulaması, özellikle geleneksel türev modellerinin yetersiz kaldığı durumlarda faydalı bir çözüm sunmaktadır [16]. Hammad, Zhang ve Liu, kesirli türevlerin boru hatlarının titreşim analizi üzerindeki etkilerini incelemiş ve bu yaklaşımın geleneksel türevlerle gerçekleştirilen modellere kıyasla daha doğru sonuçlar verdiğini göstermiştir [17]. Sonuç olarak, kesirli türevlerin boru sistemlerinin titreşim analizindeki kullanımı, geleneksel mühendislik yaklaşımlarını aşarak daha hassas ve güvenilir sonuçlar sunmaktadır. Bu alanda ortaya koyulan çalışmalar, kesirli türevlerin boru hatlarındaki enerji kayıpları, sönüm ve viskoelastik etkileri daha doğru bir biçimde modelleme kapasitesine sahip olduğunu göstermektedir. Yapılan araştırmalar ise, bu türevlerin mühendislik uygulamalarında daha geniş bir kullanım alanına sahip olacağını ortaya koymaktadır.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Boru Kavramı

1.1.1. Boru Kavramının Tarihçesi

Boru kavramının tarihçesi, mühendislik, matematik ve fizik alanlarındaki önemli teorik ve pratik gelişmelerle paralel bir seyir izlemiştir. Borular, özellikle sıvıların ve gazların taşınması amacıyla kullanılan temel mühendislik bileşenleri olarak ortaya çıkmış ve zamanla akışkan dinamiği, yapısal analiz ve malzeme bilimi gibi daha karmaşık mühendislik disiplinleriyle bütünleşmiştir.

1.1.2. Boru Tanımı

Boru, mühendislik uygulamalarında sıvı, gaz ve katı maddelerin taşınması amacıyla kullanılan, genellikle silindirik bir yapıya sahip olan bir bileşendir. Boru sistemleri, taşınan akışkanın türüne ve taşıma gereksinimlerine bağlı olarak çeşitli malzemelerden üretilmektedir. Seçilen malzemeler, borunun taşıma kapasitesini, dayanıklılığını ve kullanım ömrünü etkileyen önemli unsurlar arasında yer almaktadır. Borular genellikle, içinden geçen maddelerin özelliklerine ve çevresel etkilere göre tasarlanmaktadır; dolayısıyla, boyutları ve malzeme seçimleri mühendislik hesaplamalarına dayanarak belirlenmektedir [18,19].

Boru sistemleri yalnızca sıvı veya gaz taşımakla sınırlı olmayıp, aynı zamanda enerji iletiminden ısı transferine kadar pek çok farklı mühendislik uygulamasında hayati bir rol oynamaktadır. Borular, petrol ve doğal gaz endüstrisi, su temini, kimya sanayi, ısıtma ve soğutma sistemleri gibi çeşitli endüstrilerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu sistemlerin güvenliği ve verimliliği, borunun geometrisi, malzeme özellikleri ve çevresel etkenler gibi faktörlerle doğrudan ilişkilidir [4,20].

1.1.3. Boru Tipleri ve Kullanım Alanları

Boru tipleri, taşıdıkları maddelere ve sistemin çalışma koşullarına bağlı olarak farklılık göstermektedir. Çelik borular, genellikle yüksek basınca dayanıklılıkları ve mekanik mukavemetleri nedeniyle sıklıkla tercih edilmektedir. Bu tür borular, özellikle petrol ve doğalgaz endüstrisinde, derin deniz ve kara boru hatları gibi uygulamalarda kullanılmaktadır [21]. Plastik borular ise, hafiflikleri, korozyona karşı dirençleri ve düşük maliyetleri dolayısıyla su temini ve atık su sistemlerinde yaygın olarak tercih edilmektedir [22].

Alüminyum ve bakır gibi metaller, genellikle daha hafif borular gerektiğinde, örneğin otomotiv endüstrisinde ve havacılıkta kullanılmaktadır. Kimya sanayisinde ise, kimyasal maddelerin taşınması amacıyla korozyona dayanıklı ve genellikle özel formülasyonlara sahip borular kullanılmaktadır [23].

1.1.4. Boru Geometrisi ve Malzeme Seçimi

Boru sistemlerinin tasarımında, borunun geometrik özellikleri büyük önem taşımaktadır. Borunun iç çapı, taşıdığı akışkanın miktarını ve hızını belirlerken, dış çapı borunun dışarıya uyguladığı kuvvetleri, yerçekimi ve çevresel etkileşimleri dikkate alır. Duvar kalınlığı, borunun dayanıklılığını ve taşıma kapasitesini belirleyen en önemli faktörlerden biri olarak öne çıkmaktadır. Borunun geometrik yapısı ve malzeme seçimi, özellikle dinamik analizler açısından, borunun titreşim modlarını, rezonans frekanslarını ve yapısal dayanımını etkileyen unsurlar olarak karşımıza çıkmaktadır [24].

Zhang ve Cao, boru sistemlerinin geometrik tasarımının taşıma kapasitesini doğrudan etkileyen bir parametre olduğunu vurgulamış ve boru hatlarındaki akışkanın özelliklerine göre çap ve duvar kalınlığının optimize edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir [19]. Borunun geometrisi, aynı zamanda dışsal yüklerden, örneğin rüzgar etkisi veya yer hareketlerinden (depremler gibi) ne ölçüde etkileneceğini de belirlemektedir [25].

1.2. Kesirli Türevler

1.2.1. Kesirli Türev Tanımı

Kesirli türev kavramı, türev işleminin tam sayı olmayan mertebelere genelleştirilmesi ihtiyacından doğmuş ve 17. yüzyıldan itibaren matematiksel analizde önemli bir araştırma alanı haline gelmiştir. İlk olarak 1695 yılında Leibniz'in L'Hôpital'a yazdığı bir mektupta dile getirdiği bu fikir, Euler, Fourier ve Dirichlet gibi matematikçilerin çalışmalarıyla gelişmiştir. 19. yüzyılda Riemann ve Liouville, kesirli türevleri integral operatörleri aracılığıyla tanımlayarak Riemann-Liouville kesirli türevini geliştirmiştir. Daha sonra Grünwald ve Letnikov, farklar yöntemiyle kesirli türevlerin alternatif bir tanımını sunmuş, 20. yüzyılda ise Michele Caputo, fiziksel uygulamalarda daha kullanışlı olan Caputo kesirli türevini önermiştir. Kesirli türevlerin ortaya çıkışı, klasik türevlerin yetersiz kaldığı bellek etkisi gösteren sistemler, fraktal yapılar ve anomaliler içeren fiziksel süreçlerin modellenmesi ihtiyacından kaynaklanmıştır. Günümüzde kesirli türevler, kesirli diferansiyel denklemler aracılığıyla mühendislik, fizik, biyomedikal bilimler ve finans gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmakta ve araştırmaların merkezinde yer almaktadır [3,4].

Kesirli türevlerin uygulama alanları oldukça geniştir. Fizik ve Mühendislik alanlarında kesirli türev, difüzyon, ısı iletimi, akışkanlar dinamiği ve viskozite gibi mühendislik sorunlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, fraktal geometrilerdeki kesirli türev kullanımı, klasik türevlerin ötesine geçerek fiziksel süreçlerin daha doğru bir şekilde modellenmesine olanak tanır [26]. Finans ve ekonomi alanlarında kesirli türevler, finansal modellere de entegre edilen önemli bir araçtır. Özellikle opsiyon fiyatlaması ve risk analizi alanlarında, kesirli türevlerin sunduğu esneklik, piyasa hareketlerini daha doğru bir şekilde tahmin etme imkanı sağlar [27]. Biyoloji ve Ekoloji alanlarında, biyolojik sistemlerin dinamiklerini modellemek için kesirli türevlerin kullanımı yaygındır. Örneğin, ekosistemlerdeki biyolojik süreçler veya virüs yayılımı üzerine yürütülen araştırmalar, kesirli türevlerin sağladığı genelleştirilmiş matematiksel yapılar sayesinde daha isabetli tahminler yapabilmektedir [28].

Pertürbasyon serileri açılımında belirli avantajları bulunduğundan genellikle Riemann-Liouville (R-L) kesirli türev tanımı tercih edilmektedir. Öncelikle, R-L tanımı, integral formülasyonuyla daha genel ve analitik çözümler üretmeye daha uygun bir yapı sunar. Özellikle, diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace ve Fourier dönüşümleriyle kolayca ifade edilebilir olması, onu mühendislik ve fizik uygulamalarında tercih edilen bir seçenek haline getirmiştir.

Caputo tanımı ile kıyaslandığında, R-L kesirli türevi, başlangıç koşullarının saf diferansiyel denklemler yerine integral denklemler üzerinden ele alınmasına olanak tanır. Bu, özellikle karmaşık sistemlerde başlangıç koşullarını doğrudan belirlemek yerine integral ifadeleri kullanarak daha geniş kapsamlı analizler yapmayı mümkün kılmaktadır. Bu çalışmada kullanılan çok zaman ölçekli metot, küçük parametreler çerçevesinde türetilmiş denklemlerle çalıştığı için, R-L tanımı uygun bir seçenek olmuştur.

Ayrıca, çok zaman ölçekli metot, R-L türev tanımını içeren operatörleri doğal bir şekilde işlemesine olanak tanımaktadır. Bunun nedeni, bu tanımın kesirli türevlerin zaman türevleri olarak ele alınmasını kolaylaştırması ve zaman ölçekleri üzerindeki pertürbasyon analizlerine daha uyumlu hale getirmesidir. Bu sebeplerle, kesirli mertebeden pertürbasyon seri açılımı yapılırken Riemann-Liouville kesirli türev tanımı tercih edilmektedir [29].

1.2.2. Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$\mathbb{R}$ reel eksen üzerinde tanımlı sonlu bir aralık $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(\Re(\alpha) > 0)$ mertebeden sağ ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri, Γ fonksiyonu

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \; (\Re(\alpha) > 0)$$

olmak üzere,

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \; (x > a; \Re(\alpha) > 0)$$

$$\left(I_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)\, dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \; (x > b; \Re(\alpha) > 0)$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre, $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri

$$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \, (n = [\Re(\alpha)] + 1; x > a)$$

$$\left({}^{RL}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} (n = [\Re(\alpha)]+1; x < b)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $[\Re(\alpha)]$, $\Re(\alpha)$ değerinin tam kısmını ifade eder. Özel olarak, $0 < [\Re(\alpha)] < 1$ ise, bu takdirde

$$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-\Re(\alpha)}} \; (0 < [\Re(\alpha)] < 1; x > a)$$

$$\left({}^{RL}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-\Re(\alpha)}} \; (0 < \Re(\alpha) < 1; x > b)$$

bulunur [3].

1.2.3. Caputo Kesirli Türevi

$\mathbb{R}$ reel eksen üzerinde tanımlı sonlu bir aralık $[a, b]$ ve

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} (n = [\Re(\alpha)]+1; x > a)$$

$$\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} (n = [\Re(\alpha)]+1; x < b)$$

ile tanımlı $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(\Re(\alpha) \geq 0)$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri

$$D_{a^+}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv \left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)$$

$$D_{b^-}^{\alpha}[f(t)](x) \equiv (D_{b^-}^{\alpha} f)(x)$$

olsun. Bu takdirde,

$$\alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ için } n = [\Re(\alpha)] + 1;\; \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ için } n = \alpha$$

olmak üzere, $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \geq 0)$ mertebeden sağ ve sol taraflı Caputo kesirli türevleri yukarıdaki Riemann-Liouville kesirli türevleri kullanılarak,

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f\right) = \left(D_{a^+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x)$$

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f\right) = \left(D_{b^-}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(b)}{j!} (b-a)^j \right] \right)(x)$$

biçiminde tanımlanır. Şimdi $\Re(\alpha) > 0$ ve n de $D_{b^-}^{a}[f(t)](x) \equiv (D_{b^-}^{a} f)(x)$ gibi olsun. Buna göre, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı Caputo kesirli türevleri aşağıdaki gibi tanımlıdır;

i) $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise $D = d\,/\,dx$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olmak üzere,

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

biçimindedir. Burada, özel olarak $0 < [\Re(\alpha)] < 1$ alındığında

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}$$

bulunur.

ii) $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ ise, bu takdirde

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{n} f\right)(x) = f^{(n)}(x)(n \in \mathbb{N})$$

$$\left({}^{C}D_{b^-}^{n} f\right)(x) = (-1)\, f^{(n)}(x)(n \in \mathbb{N})$$

olarak verilir [3].

1.3. Titreşim Hareketi

1.3.1. Titreşim Hareketinin Tanımı

Titreşim, bir sistemin denge konumu etrafında belirli bir düzen veya rastgelelik içinde periyodik veya sönümlü hareket etmesi olarak tanımlanır. Matematiksel olarak, titreşimler genellikle diferansiyel denklemler ve harmonik analiz çerçevesinde incelenir. Lineer sistemlerde basit harmonik hareket ile modellenirken, lineer olmayan sistemlerde kaotik ve kompleks davranışlar sergileyebilir. Titreşim analizi, mühendislikten fiziğe, biyomekanikten finansal modellere kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir ve sistemlerin dinamik özelliklerini anlamak için temel bir araçtır. Kesirli türevler ve integral operatörleri gibi gelişmiş matematiksel araçlar, özellikle sönümlü ve viskoelastik ortamlar içeren sistemlerde titreşimlerin daha hassas bir şekilde modellenmesine olanak tanımaktadır. Titreşim hareketinin temel özellikleri ise şunlardır:

i) **Periyot (T)**: Titreşimin bir tam döngüsünü tamamlaması için geçen süredir. Birimi saniyedir (s).

ii) **Frekans (f)**: Birim zamanda gerçekleşen titreşim sayısıdır. Birimi Hertz (Hz) olup, $f=1/T$ bağıntısı ile bulunur.

iii) **Genlik (A)**: Cismin denge noktasından en uzak konuma kadar olan maksimum yer değiştirme miktarıdır.

iv) **Faz (φ)**: Titreşim hareketinin belirli bir anda hangi durumda olduğunu belirten büyüklüktür. Genellikle radyan cinsinden ifade edilir.

v) **Harmonik Titreşim**: Eğer bir cismin hareketi sinüs ya da kosinüs fonksiyonuyla ifade edilebiliyorsa, bu hareket basit harmonik hareket olarak adlandırılır.

vi) **Sönümlü ve Sönümsüz Titreşim**: Eğer titreşim hareketi zamanla azalıyorsa sönümlü, enerjisini koruyarak devam ediyorsa sönümsüz titreşim olarak adlandırılır.

vii) **Zorlanmış Titreşim**: Sisteme dışarıdan periyodik bir kuvvet uygulanarak devam ettirilen titreşim hareketidir.

viii) **Rezonans**: Zorlayıcı frekansın sistemin doğal frekansına eşit olması durumunda meydana gelen büyük genlikli titreşimdir [30].

1.3.2. Titreşim Hareketinin Tarihsel Gelişimi

Titreşim hareketi, mekanikte bir cisim veya sistemin denge konumundan saparak gerçekleştirdiği salınım hareketini ifade eder. Bu tür hareketler, fiziksel sistemlerin analizi açısından önemli bir yere sahip olup, genellikle "harmonik hareket" olarak adlandırılır. Titreşim hareketi, mühendislik, fizik ve biyoloji gibi birçok farklı alanda karşımıza çıkan bir olgudur.

Antik Yunan döneminden itibaren insanlar, hareket ve kuvvetler üzerine çeşitli gözlemler yapmışlardır. Örneğin, Aristoteles (M. Ö. 384-322) hareketin doğası hakkında düşünceler geliştirmiş, ancak bu teoriler modern fiziğin bazı prensipleriyle çelişmiştir. Bu erken çalışmalar, titreşim hareketlerinin temel prensiplerinin anlaşılması açısından dolaylı bir etki yaratmış olabilir.

Isaac Newton (1643-1727), "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" adlı eserinde hareket yasalarını kapsamlı bir şekilde formüle etmiştir. Newton'un hareket yasaları, özellikle ikinci yasası (F=ma), titreşim hareketleri için kritik bir temel oluşturmuştur [31]. Newton'un çalışmaları, klasik mekanikte titreşim hareketlerinin bir cismin denge noktasından sapmalarla meydana geleceğini açıklamıştır.

Christiaan Huygens (1629-1695), sarkaç teorisini geliştirerek titreşim hareketlerinin sürekliliği üzerine önemli katkılarda bulunmuştur. Huygens, salınım hareketi ve periyodik hareketlerin analizi için matematiksel modeller geliştiren ilk bilim insanlarından biri olarak tanınmakta olup, çalışmaları titreşim hareketlerinin belirli ve düzenli frekansta olabileceğini ortaya koymaktadır [32].

Leonhard Euler (1707-1783), titreşim hareketlerinin analizi konusunda önemli bir matematikçidir. Euler, mekanik sistemlerdeki hareketlerin denklemlerini çözme konusundaki katkılarıyla tanınır ve geliştirdiği denklemler, titreşim hareketlerinin fiziksel yasalarını modellemede hayati bir rol oynamıştır [33].

Joseph Fourier (1768-1830), Fourier serileri aracılığıyla karmaşık dalgaların sinüzoidal bileşenlere ayrılabileceğini göstermiştir. Bu, titreşim hareketlerinin matematiksel çözümünde devrim niteliği taşıyan bir adımdır [34]. Fourier'in teorileri, sinüzoidal dalgaların titreşimlerle ilişkisini açıklayarak mühendislik ve fizik alanlarında geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Pierre-Simon Laplace (1749-1827), fiziksel sistemlerin hareketlerini modelleyen diferansiyel denklemler üzerine önemli çalışmalara imza atmış ve dinamik sistemlerin titreşimlerinin analizine katkıda bulunmuştur [35]. Laplace'ın çalışmaları ise, titreşim hareketlerinin evrimini anlamada temel bir rehber olarak kabul edilmiştir.

20. yüzyılda gerçekleştirilen mühendislik araştırmaları, özellikle titreşimlerin yapılar üzerindeki etkilerini derinlemesine incelemiş ve bu alanda önemli gelişmelere imza atmıştır. Bu çalışmalar, yapı mühendisliği, otomotiv mühendisliği ve havacılık endüstrisi gibi disiplinlerde geniş uygulama alanları bulmuştur [36].

Günümüzde ise titreşim hareketleri, teknolojinin her alanında dikkate değer bir yer tutmaktadır. Akustik mühendislik, titreşim kontrolü ve sismoloji gibi alanlar, modern araştırmalarda geniş çapta uygulanmakta ve bu alanlardaki temel teoriler, yukarıda bahsedilen klasik çalışmalar üzerine inşa edilmektedir.

1.3.3. Titreşim Çeşitleri

Titreşim hareketleri ve zorlanmış titreşim olarak ikiye ayrılmaktadır. Her iki titreşim de kendine özgü dinamikler ve matematiksel modeller gerektirmektedir. Serbest ve zorlanmış titreşim, mekanik sistemlerde farklı dinamikler ve enerji etkileşimleri ile meydana gelen, temel titreşim türleridir. Bu iki tür, sistemin hareketine etki eden kuvvetlerin varlığı ve sistemin bu kuvvetlere verdiği tepkiye bağlı olarak değişiklik göstermektedir.

1.3.3.1. Serbest Titreşim

Serbest titreşimler, bir sistemi başlangıçta verilmiş olan enerji ile dış hiçbir kuvvet olmaksızın doğal frekansında titreştiren hareketlerdir. Bu tür titreşimlerin temeli, Newton'un Hareket Yasaları ve Hooke Yasası (1716) ile atılmıştır. Yaylı sistemler ve kütleler üzerinde yapılan analizlerde, serbest titreşimler genellikle sinüzoidal hareket olarak modellenir.

Goldstein (1980) [37], serbest titreşimleri klasik mekanik sistemlerin en temel hareket türlerinden biri olarak tanımlamaktadır. Bu çalışmada, serbest titreşimlerin, başlangıçta bir kuvvetle yerinden edilen bir sistemin, dış bir kuvvet olmaksızın doğal frekansları etrafında gerçekleştirdiği hareketler olduğu vurgulanmıştır.

Arnold (1989) [38], serbest titreşimler üzerine gerçekleştirdiği çalışmalarda, sistemdeki sönümleme etkisini de ele almıştır. Sönümleme, titreşimin genliğinin zamanla azalmasına yol açarak sistemin enerji kaybını temsil eder. Bu durum genellikle lineer sönümleme denklemleri ile modellenir ve klasik fizik sistemlerinde sıkça gözlemlenir.

Serbest titreşimlerin matematiksel modellemesinin erken örnekleri arasında Galileo (1638) ve Hooke (1678) [39] gibi isimler öne çıkmaktadır. Hooke'un yay kanunu, serbest titreşimlerin temelini oluşturan elastik kuvvetin matematiksel ifadesidir.

Tek serbestlik dereceli bir sistem için serbest titreşimi matematiksel modeli, m kütle (kg), k yay sabiti (N/m), x sistemin yer değiştirmesi (deplasman), $\ddot{x}$ zamana göre ikinci türevini (ivme) temsil etmek üzere,

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

hareket denklemi ile verilir [37]. Bu denklem çözümü genellikle

$$x(t) = A.\cos(\omega_0 t + \phi)$$

biçiminde bir sinüzodial hareketi temsil eder.Burada, A genlik (başlangıçta verilen enerjinin büyüklüğü), ω_0 doğal frekans (rad/s), ϕ faz açısı, t ise zamandır. Elde edilen hareket denklemine göre sistem, serbest titreşimde belirli bir frekansta ve genlikte hareket eder. Sistemin genliği, başlangıç koşullarına ve enerji kayıplarına (sönüm) bağlı olarak zamanla azalır.

1.3.3.2. Zorlanmış Titreşim

Zorlanmış titreşimler, bir dış kuvvetin etkisi altında meydana gelen titreşimlerdir. Bu tür titreşimlerde, dış kuvvetin frekansı ve büyüklüğü, sistemin genlik değerini önemli ölçüde etkileyebilir. Zorlanmış titreşimlerin temel özelliklerinden biri, rezonans olayıdır. Rezonans, dış kuvvetin frekansı sistemin doğal frekansına yaklaştığında ortaya çıkar ve genliğin büyük bir artış göstermesine yol açar.

William Thomson, diğer adıyla Lord Rayleigh, 1877 yılında zorlanmış titreşimler ve rezonans konularında önemli araştırmalar gerçekleştirmiştir. Rayleigh, dış kuvvetin sistem üzerindeki etkilerini inceleyerek, zorlanmış titreşimlerde rezonansın genliği artıran kritik bir etken olduğunu göstermiştir. Onun bu alandaki çalışmaları, zorlanmış titreşimlerin ve rezonansın mühendislik uygulamalarındaki önemini büyük ölçüde öne çıkarmıştır.

Rayleigh, 1877'de zorlanmış titreşimler üzerine yaptığı çalışmalarda, dış kuvvetin frekansının doğal frekansa yakın olduğu durumlarda genliğin nasıl önemli ölçüde arttığını açıklamıştır [40]. Bu olay, özellikle mekanik sistemlerde büyük enerji birikimine neden olabilir ve dolayısıyla sistemin aşırı titreşmesine yani rezonansa yol açabilir. Rayleigh, rezonansın yapısal hasarlara yol açabileceği konusunda da önemli uyarılarda bulunmuştur [41].

1911 yılında, Lamb ise zorlanmış titreşimler üzerine gerçekleştirdiği analizlerde, dış kuvvetin periyodik etkisi ile sistemin tepkisini araştırmıştır [42]. Bu çalışmada, sistemin genliğinin dış kuvvetin frekansı ile nasıl ilişkili olduğu ve rezonans durumunun nasıl meydana geldiği detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Zorlanmış titreşimlerin matematiksel modeli, F_0 dış kuvvetin genliğini, ω dış kuvvetin açısal frekansını, m sistemin kütlesini, k yay sabitini ve x sistemin yer değiştirmesini temsil etmek üzere [37],

$$m\ddot{x} + kx = F_0 cos(\omega t)$$

biçiminde ifade edilir. Elde edilen hareket denkleminin çözümü,

$$x(t) = X.\cos(\omega t - \phi)$$

biçimindedir. Burada X, zorlanmış titreşimin genliğini temsil eder ve bu genlik, dış kuvvetin frekansı, büyüklüğü ve sistemin doğal frekansı ile doğrudan ilişkilidir. Eğer dış kuvvetin frekansı, sistemin doğal frekansına yakınsa, genlik oldukça büyük bir değere ulaşabilir, bu ise rezonans olarak adlandırılır.

Rezonans Durumu: Zorlanmış titreşimlerde rezonans genellikle şu şekilde açıklanır: Sistemin doğal frekansı, dış kuvvetin frekansına eşit hale geldiğinde, sistemin genliği önemli ölçüde artar. Bu şartlar altında, sistem aşırı titreşime geçebilir ve büyük miktarda enerji birikimi oluşabilir; bu durum ise potansiyel olarak yapısal hasara yol açabilir.

Örneğin; bir salıncağın bir kişi tarafından dış kuvvetle (örneğin itme) zorlandığı durum, eğer dış kuvvet, salıncağın doğal frekansına yakın bir frekansta uygulanıyorsa, rezonans ortaya çıkarır. Eğer bu kişi sürekli olarak doğru zamanlamayla itiş yaparsa, salıncağın genliği giderek artacak ve çok büyük salınımlar gerçekleşecektir.

Serbest ve zorlanmış titreşimler, titreşim hareketlerinin farklı dinamik özelliklerini ve kuvvet etkileşimlerini tanımlar. Serbest titreşimler, bir sistemin kendi doğal frekansında hareket etmesiyle karakterize edilirken, zorlanmış titreşimler bir dış kuvvetin etkisiyle gerçekleşir ve sıklıkla rezonans ile tanımlanır. Bu iki titreşim, mühendislik, akustik ve yapı dinamiği gibi önemli alanlarda kritik bir öneme sahiptir.

1.3.3.3 Sönümsüz Titreşimler

Sönümsüz titreşim, bir sistemin dış etkenlerden bağımsız olarak, enerjisini kaybetmeden sürekli olarak yaptığı titreşim hareketidir. Bu tür titreşimlerde sürtünme veya hava direnci gibi enerji kaybına neden olan faktörler göz ardı edilir, dolayısıyla sistemin genliği zamanla değişmez ve titreşim hareketi sonsuza kadar devam eder. Ancak gerçekte, tüm fiziksel sistemlerde az da olsa bir sönümleme etkisi bulunduğundan, tamamen sönümsüz titreşim pratikte mümkün değildir. Sönümsüz titreşime en iyi örnek, ideal koşullarda salınan bir yay-sarkaç sistemidir. Eğer yay ve kütlenin hareketine etki eden herhangi bir direnç veya sürtünme olmasaydı, sistem sonsuza kadar aynı genlikte salınım yapmaya devam ederdi. Ancak gerçek sistemlerde az da olsa bir sönümleme olduğu için, zamanla enerji kaybı yaşanır ve sistem durma noktasına gelir.

Galilei ve Hooke gibi erken dönem bilim insanlarının çalışmaları, bu tür titreşimlerin temel özelliklerini anlamak açısından önemli ilk adımları atmıştır [39].

Sönümsüz titreşimler genellikle matematiksel olarak m kütle, k yay sabiti, $\ddot{x}$ konumun zamana göre ikinci mertebeden türevi olmak üzere

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

diferansiyel denklemi ile modellenmektedir. Buna göre, A genlik, ω_0 doğal frekans, ϕ faz açısı olmak üzere, denklemin çözümü

$$x(t) = A\, cos(\omega_0 t + \phi)$$

olarak elde edilir.

1.3.3.4. Sönümlü Titreşimler

Sönümlü titreşim, bir sistemin genliği zamanla azalarak gerçekleştirdiği titreşim hareketidir. Bu tür titreşimlerde, sistemin enerjisi sürtünme, hava direnci veya iç direnç gibi sönümleyici etkiler nedeniyle kaybolur ve sonunda hareket durur veya belirli bir denge konumuna ulaşır. Sönümlü titreşimler hafif sönümlü, kritik sönümlü ve aşırı sönümlü olmak üzere üç farklı şekilde sınıflandırılabilir. Hafif sönümlü titreşimde genlik zamanla azalır ancak sistem bir süre daha salınım yapmaya devam eder. Kritik sönümlü titreşimde ise sistem en kısa sürede denge konumuna döner ve salınım yapmaz. Aşırı sönümlü titreşimde ise sistem çok yavaş bir şekilde dengeye gelir ve yine salınım gerçekleşmez. Günlük hayatta araba amortisörleri, bina sönümleyicileri ve mekanik sistemlerdeki yaylı mekanizmalar sönümlü titreşim örneklerindendir. Bu tür sistemler, dış etkilere karşı daha kararlı ve dengeli bir hareket sağlamak için tasarlanmıştır.

Sönümlü titreşimlerin temel özelliği, genliğin zamanla eksponansiyel bir hızla azalmasıdır. 1877 yılında Rayleigh [40], sönümlemenin fiziksel temellerini atmış ve ses dalgalarındaki rezonansı incelemiştir. Sönümlü titreşimler, m kütle, c sönümleme katsayısı, k yay sabiti olmak üzere,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

biçiminde modellenir. Sonuç denklem, genellikle zayıf sönümleme, kritik sönümleme ve aşırı sönümlenme çözümleri olmak üzere, üç farklı çözüme sahiptir. Buna göre, $\varsigma =$

$\frac{c}{2\sqrt{mk}}$ sönümleme oranı, $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\varsigma^2}$ sönümlü frekans, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ doğal frekans olmak üzere, kritik sönümleme çözümü

$$x(t) = Ae^{-\varsigma\omega_0 t}cos(\omega_d t + \phi)$$

biçiminde olup, çözümde, genlik $e^{-\varsigma\omega_0 t}$ faktörü ile azalır. Zayıf sönümleme durumunda, genlik azalırken sistem uzun süre titreşim yapmaya devam eder. Kritik sönümleme durumu ise, sistemin titreşimi en hızlı şekilde durdurduğu durumdur ve

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\varsigma\omega_0 t}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca, aşırı sönümleme durumu, genliğin çok hızlı bir şekilde sıfıra yaklaşmasını sağlar ki sistem yavaş bir şekilde dengeye ulaşır. Bu takdirde, r_1 ve r_2 reel sayılar olmak üzere, çözüm

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

ile verilir. Burada r_1 ve r_2 negatif reel sayılardır. Elde edilen çözüm, sistemin titreşimlerinin, özellikle yapıların ve makinelerin titreşim analizlerinde dikkate alınan kritik bir durum olduğunu göstermektedir. Tacoma Narrows Köprüsü'nün çöküşü, sönümlemenin etkilerini açıkça gözler önüne sermiştir [43].

Sönümlü ve sönümsüz titreşimler günlük hayatta birçok farklı alanda karşımıza çıkar. Sönümlü titreşim, sistemin enerjisini zamanla kaybederek durma noktasına gelmesiyle gerçekleşir. Örneğin, araba amortisörleri yol yüzeyinden gelen titreşimleri sönümleyerek daha konforlu bir sürüş sağlar. Yüksek binalarda ve köprülerde kullanılan deprem sönümleyicileri, yapının aşırı salınım yapmasını önleyerek güvenliği artırır. Salıncakta sallanan bir çocuk, hava direnci ve sürtünme nedeniyle zamanla yavaşlayarak durur. Benzer şekilde, makinelerde ve motorlarda oluşan sarsıntılar, sönümleyici sistemlerle azaltılarak daha verimli bir çalışma sağlanır. Diğer taraftan, sönümsüz titreşimde sistem enerjisini kaybetmeden sürekli olarak titreşmeye devam eder. Fizik derslerinde ideal koşullarda ele alınan yay ve sarkaç sistemleri, sürtünme ihmal edildiğinde sönümsüz titreşim örneği olarak kabul edilir. Gerçek hayatta tamamen sönümsüz titreşim mümkün olmasa da, bazı sistemler düşük sönümle uzun süre titreşmeye devam edebilir.

1.4. Rezonans

1.4.1. Rezonans Tanımı

Rezonans, bir sistemin kendine özgü doğal frekansına eşit veya çok yakın bir frekansta dışarıdan bir kuvvet uygulandığında, titreşim genliğinin önemli ölçüde artması olayıdır. Bu durumda sistem, normalden çok daha büyük genlikte salınım yaparak maksimum enerji transferine ulaşır [44].

Rezonansın günlük hayatta birçok örneği vardır. Örneğin, bir salıncağı küçük itişlerle düzenli aralıklarla ittirdiğinizde, belirli bir frekansta sallanarak daha büyük genliklere ulaşması rezonans etkisidir. Bir diğer örnek, sesle bardak kırma deneyidir; şarkıcı, bardağın doğal frekansında bir nota söylediğinde, bardaktaki titreşimler artarak onu çatlatabilir. Mühendislikte ise köprüler ve binalar tasarlanırken rezonans tehlikesi göz önünde bulundurulur. Örneğin, 1940'ta Tacoma Narrows Köprüsü, rüzgârın neden olduğu rezonans etkisi nedeniyle büyük genlikte titreşmiş ve yıkılmıştır [43].

Rezonans, mekanik sistemlerin yanı sıra elektrik devrelerinde de görülür. Örneğin, radyo alıcılarında belirli bir frekanstaki radyo dalgalarını seçmek için rezonans prensibinden faydalanılır. Rezonans etkisi kontrollü bir şekilde kullanıldığında faydalı olabilir, ancak kontrolsüz olduğunda yapılar ve makineler için tehlikeli sonuçlar doğurabilir.

Sonuç olarak, rezonans, sistemlerin doğal frekansları ile dış kuvvetlerin frekansları arasındaki uyumdan kaynaklanan önemli bir fenomendir. Büyük genlikli titreşimlere yol açarak yapısal bozulmalara neden olabilir. Rezonansın matematiksel modellemesi, zorlanmış osilatörler ve titreşim sistemleri aracılığıyla gerçekleştirilir. Rezonansın etkilerini kontrol altına almak için sönümleme faktörlerinin dikkate alınması önemlidir. Mühendislik alanlarında rezonans, yapısal güvenliği etkileyen ve tasarım süreçlerinde göz önünde bulundurulması gereken önemli bir faktördür.

1.5. Viskoelastik Davranış ve Mesnet Şartları

1.5.1. Elastik ve Viskoz Davranışların Birleşimi

Viskoelastik davranış, malzemelerin hem viskoz (akışkan gibi) hem de elastik (yay gibi) özellikler göstermesidir. Bu tür malzemeler, uygulanan yüke hem anında elastik bir tepki verir hem de zamanla viskoz bir deformasyon sergiler. Yani, bir kuvvet uygulandığında kısmen yay gibi geri dönerken, aynı zamanda zamana bağlı bir şekilde şekil değiştirir.

Örneğin, polimerler, kauçuk ve biyolojik dokular viskoelastik malzemelerdir. Viskoelastik davranışın en belirgin etkilerinden biri sünme ve gevşeme olaylarıdır. Sünmede, sabit bir yük altında malzeme zamanla daha fazla şekil değiştirir. Gerilme gevşemesinde ise sabit bir deformasyon altında zamanla gerilme azalır. Bu özellik, titreşim ve darbe sönümleme uygulamalarında önemli bir rol oynar. Örneğin, otomobil süspansiyon sistemlerinde ve sönümleyici malzemelerde viskoelastik malzemeler kullanılır.

Viskoelastik malzemelerin elastik davranışları, Hooke Yasası'na dayanır. Bu yasa, malzemenin deformasyonunun uygulanan gerilme ile doğrusal bir ilişki içinde olduğunu belirtir [45]. Elastik malzemeler, gerilme uygulandıktan hemen sonra eski hallerine dönerken, viskoz malzemeler deformasyon sırasında zamanla akışkanlık gösterir. Newton'un viskozite yasası, bu tür malzemelerin deformasyon oranının uygulanan gerilmeye orantılı olduğunu ifade eder [46].

Ferry [47] viskoelastik malzemelerin davranışını açıklarken, bu malzemelerin her iki özelliği de barındırdığını ve elastisite ile viskoziteyi birlikte göz önüne alarak, malzemenin tepkisini belirlediğini vurgulamıştır.

1.5.2. Viskoelastik Modeller

Viskoelastik model, hem elastik hem de viskoz davranış sergileyen malzemelerin mekanik özelliklerini matematiksel olarak temsil eden bir yaklaşımdır. Bu modeller, malzemelerin zamana bağlı yükleme ve boşaltma süreçlerinde nasıl tepki verdiğini anlamak için geliştirilmiştir ve genellikle yay (elastik eleman) ile sönümleyici (viskoz eleman) kombinasyonlarından oluşur. En yaygın viskoelastik modellerden biri olan Maxwell modeli, bir yay ve bir sönümleyicinin seri bağlanmasıyla elde edilir ve özellikle sünme davranışını açıklar [47]. Kelvin-Voigt modeli ise aynı elemanların paralel bağlanmasıyla oluşturulur ve malzemenin zamanla şekil değiştirmesini tanımlamada kullanılır [46]. Burgers modeli, Maxwell ve Kelvin-Voigt modellerinin birleşimi olup hem sünme hem de gerilme gevşemesini daha kapsamlı bir şekilde açıklar. Standard Linear Solid (SLS) modeli ise hem ani hem de zamana bağlı elastik deformasyonu açıklayarak birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır. Viskoelastik modeller, polimerler, kauçuk, biyomalzemeler ve deprem yalıtım sistemleri gibi birçok malzemenin analizinde kritik bir rol oynar ve özellikle sönümleyici özelliklerin belirlenmesi gereken mühendislik çalışmalarında önemli bir yere sahiptir.

1.5.3. Mesnet Şartları

Mesnet şartları, bir yapı elemanının desteklenme ve sınırlandırılma koşullarını ifade eder. Yapıya uygulanan yüklerin nasıl taşınacağını ve elemanın nasıl hareket edebileceğini belirler. Bir yapının statik dengeyi sağlaması ve güvenli çalışması için uygun mesnetleme şartlarının seçilmesi önemlidir. Mesnet şartları, yapıların stabilitesini ve yük taşıma kapasitesini doğrudan etkiler. Yanlış mesnetleme, beklenmeyen deformasyonlara veya yapısal hasarlara yol açabilir. Bu nedenle mühendislik tasarımlarında, malzeme özellikleri, yükleme durumları ve çevresel koşullar dikkate alınarak en uygun mesnet tipi belirlenmelidir. Temel mesnet türleri genellikle, hareketli, sabit ve ankastre mesnet olarak sınıflandırılır.

1.5.3.1. Sabit Mesnet

Sabit mesnet, bir yapı elemanının hem düşey hem de yatay doğrultuda hareket etmesini engelleyen, ancak dönmesine izin veren bir destek türüdür. Bu tür mesnetler, yapı elemanına gelen yükleri zemine veya başka bir taşıyıcı sisteme aktarırken, elemanın serbestçe yer değiştirmesini önler ancak serbestçe dönmesine olanak tanır.

Sabit mesnetler, genellikle menteşe şeklinde modellenir ve iki bilinmeyenli bir mesnet olarak kabul edilir. Bu nedenle, mühendislik hesaplamalarında bir düşey ve bir yatay tepki kuvveti oluşturur, ancak moment taşımaz. Köprülerde, makas sistemlerinde ve çerçeve yapılarında yaygın olarak kullanılan sabit mesnetler, hareketli mesnetlerle birlikte çalışarak sistemin termal genleşmelerden veya farklı yüklemelerden etkilenmesini minimize eder. Bir Euler Bernoulli kirişi için sabit mesnet şartları w deplasman yani yer değiştirme, L kiriş uzunluğu olmak üzere,

$$w(0) = w(L) = 0 \text{ ve } EI\frac{d^2w(0)}{dx^2} = EI\frac{d^2w(L)}{dx^2} = 0$$

biçiminde verilir.

1.5.3.2. Makaralı Mesnet

Makaralı mesnetler, yalnızca bir yönü, genellikle dikey hareketi kısıtlar, böylece yapının yatay hareketi serbest kalır. Bu, yapının daha esnek olmasına neden olur ve eğrilik daha geniş bir alan üzerinde yayılır [48].

1.5.3.3. Hareketli Mesnet

Hareketli mesnet, bir yapı elemanının yalnızca düşey kuvvetleri taşımasına izin veren, ancak yatay yönde serbest hareket etmesini sağlayan bir mesnet türüdür. Bu mesnet, yapının termal genleşme veya dış kuvvetler nedeniyle yatay yönde serbestçe hareket etmesini sağlarken, düşey yönde sabit kalmasını garanti eder. Matematiksel olarak hareketli mesnet, yalnızca düşey tepki kuvveti oluşturur ancak yatay kuvvetleri ve momenti taşımaz. Bu özelliği sayesinde, köprülerin bir ucunda kullanılarak sıcaklık değişimleri nedeniyle oluşan genleşme ve büzülmelerin yapıya zarar vermesi önlenir. Aynı zamanda çelik ve betonarme çerçeve sistemlerinde, büyük açıklıklarda aşırı gerilmeleri engellemek için tercih edilir. Tren raylarının bağlantı noktalarında da benzer prensiple çalışan hareketli mesnetler kullanılarak rayların genleşme ve büzülmesi dengelenir. Endüstriyel yapılardaki çatı makaslarında da hareketli mesnetler bulunarak yük değişimlerine uyum sağlanır. Yapıların esnek ve güvenli olmasını sağlayan hareketli mesnetler, aşırı gerilmeleri ve deformasyonları önlemek açısından kritik bir rol oynar. Hareketli mesnet $x = a$ konumunda bulunuyorsa, w düşey yer değiştirme olmak üzere, sınır koşulları

$$w(a) = 0 \text{ ve } \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=a} = 0$$

biçimindedir.

1.5.3.4. Ankastre Mesnet

Ankastre mesnet, bir yapısal elemanın belirli bir noktada tamamen sabitlenerek hareketinin ve dönmesinin engellendiği mesnet türüdür. Bu tür mesnetler, üç temel serbestlik derecesini kısıtlar: yatay ve düşey doğrultuda yer değiştirmeye izin vermez ve dönme hareketini engeller. Yapıya gelen moment ve kesme kuvvetleri doğrudan bu mesnet tarafından karşılanır. Örneğin, bir çelik kirişin duvara gömülü olarak sabitlenmesi veya bir binanın kolonunun temele rijit bir şekilde bağlanması, ankastre mesnete örnek olarak verilebilir. Yapı mühendisliğinde sıkça kullanılan bu mesnet türü, stabiliteyi sağlamak ve yapısal dayanımı artırmak için kritik bir rol oynar. Ankastre mesnetler, günlük hayatta birçok yapısal ve mekanik sistemde karşımıza çıkar. Binalarda kolonlar genellikle temele ankastre olarak bağlanarak stabilite sağlanırken, bazı kirişler de duvarlara sabitlenerek moment taşıyıcı sistemler oluşturulur. Köprülerde, özellikle konsol köprülerde, tek taraftan ankastre mesnetli kirişler kullanılarak dayanıklılık artırılır. Yol kenarındaki aydınlatma direkleri ve trafik sinyal direkleri, zemine ankastre olarak bağlanarak rüzgar ve dış kuvvetlere karşı direnç kazanır. Büyük reklam panoları ve bayrak direkleri de güçlü rüzgar yüklerine dayanabilmesi için temele sabitlenir. Deniz kenarındaki bazı rıhtımlar ve iskeleler, suyun dalga etkilerine dayanıklı olması için ankastre sistemlerle güçlendirilir. Yüksek yapı inşaatlarında kullanılan kule vinçler, zemine ankastre edilerek güvenli çalışma sağlarken, fabrikalardaki ağır makineler de titreşimleri ve dengesizlikleri önlemek amacıyla ankastre olarak monte edilir. Bu tür uygulamalar, ankastre mesnetlerin mühendislikte ve günlük hayatta ne kadar önemli bir rol oynadığını gösterir.

Eğer kirişin $x = 0$ noktasında ankastre mesnet varsa, w düşey yer değiştirme olmak üzere, sınır koşulları

$$w(0) = 0 \ \text{ve} \ \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

ile verilir.

1.5.3.5. Basit-Basit Mesnet

Bir kiriş, her iki ucunun basit mesnetlerle desteklenmesi durumunda, her iki uç da serbest hareket edebilmesine rağmen, yer değiştirme yalnızca dikey yönde sınırlıdır. Bu tür kirişlerin uçlarındaki eğilme momenti sıfırdır. Basit-basit mesnetler, pratikte çoğunlukla köprüler ve yatay kirişlerin desteklenmesinde tercih edilmektedir [49]. Basit-basit mesnet şartları Euler-Bernoulli kirişi için

$$w(0) = w(L) = 0 \text{ ve } EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = 0,\ EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$$

biçimindedir.

1.5.3.6. Ankastre-Basit Mesnet

Bu durumda bir uç sabitlenmiş (ankastre) olup, diğer uç ise basit bir mesnetle desteklenmektedir. Ankastre uç, hem yer değiştirmeye hem de dönme hareketine engel olurken, basit uç yalnızca yer değiştirmeye izin vermektedir. Bu tür mesnet koşulları, özellikle çerçeve ve köprü gibi yapılarda yaygın olarak gözlemlenir [50]. Özel olarak örnek verilecek olursa, köprü kirişleri, konsol, çıkıntılı kirişler, çelik çerçeve sistemleri örnek verilebilir. Buna göre, sınır şartları

$$w(0) = 0,\ \ w'(0) = 0 \text{ ve } w(L) = 0, -EI\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$$

biçiminde verilir.

1.5.3.7. Ankastre-Ankastre Mesnet

Bu durumda, kirişin her iki ucu ankastre ile desteklenmiş olup, her iki uç da hem yer değiştirme hem de dönme hareketine karşı kısıtlanmıştır. Ankastre-ankastre kirişler, sabit uçları sayesinde çok daha dayanıklı yapılar sunar ve bu özellikleriyle büyük yapılar için ideal bir seçenek oluşturur [51]. Örnek verilecek olursa, bu tip mesnetler betonarme köprü kirişleri, sabit bağlantılı çelik kirişler (endüstriyel yapılar), tüneller ve yeraltı geçitleri, betonarme perdeli binalarda kat döşemeleri, viyadük gibi yapılarda yer almaktadır. Sınır şartlarının ise,

$$w(0) = w(L) = 0,\ w'(0) = w'(L) = 0$$

biçiminde olduğu görülür. Sonuç olarak, kiriş mesnet koşullarının doğru bir şekilde analizi, inşaat mühendisliği ve yapı mühendisliği gibi alanlarda son derece önemlidir.

Her bir mesnet türü, kirişin elastik davranışını, yük taşıma kapasitesini ve genel stabilitesini doğrudan etkileyerek, yapının güvenliği ve dayanıklılığı üzerinde belirleyici bir rol oynar. Bu nedenle, her mesnet koşulunun anlaşılması ve doğru bir şekilde uygulanması gerekmektedir.

1.6. Pertürbasyon Yöntemi

Pertürbasyon metodu, matematiksel ve fiziksel problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan güçlü bir tekniktir. Özellikle analitik çözümün zor veya imkânsız olduğu durumlarda, problemin küçük bir parametre etrafında genişletilerek çözüme ulaşılması amaçlanır. Metot, matematiksel ve fiziksel sistemlerde doğrusal olmayan veya karmaşık denklemlerin çözümünde oldukça etkilidir. Pertürbasyon yani bozulma, bir sistemin başlangıç veya basit haline eklenen küçük bir değişikliktir. Bu değişiklik, sistemin davranışında da küçük sapmalara yol açar. Pertürbasyon metodunda genellikle $\varepsilon \ll 1$ olacak şekilde tanımlanan çok küçük bir parametre olan pertürbasyon parametresi kullanılır. Bu parametre, sistemdeki bozulmanın büyüklüğünü kontrol eder. Çözüm, ε parametresi cinsinden

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

şeklinde ifade edilir. Bu çözüm aynı zamanda yaya açılımı olarak adlandırılır. Burada, x_0 temel çözümü, $x_1, x_2, \ldots$ ise sırasıyla birinci, ikinci mertebe düzeltme terimlerini temsil eder [52]. Böylece, orijinal problemin yaklaşık çözümü adım adım oluşturulabilir. Bu metodun uygulama alanı oldukça geniştir ve birçok bilim dalında etkili şekilde kullanılmaktadır.

Matematik alanında pertürbasyon metodu, özellikle diferansiyel denklemlerin (hem adi hem de kısmi) yaklaşık çözümlerinde sıkça kullanılmaktadır. Ayrıca lineer cebir problemleri, özdeğer analizleri ve asimptotik analizlerde de pertürbasyon yöntemleri önemli rol oynamaktadır. Küçük parametrelerin etkisini hesaplamak, matematiksel modellerin hassasiyet analizlerini yapmak açısından da oldukça faydalıdır.

Fizikte, özellikle kuantum mekaniği uygulamalarında, atom altı parçacıkların enerji seviyelerinin yaklaşık olarak hesaplanmasında pertürbasyon yöntemi yoğun olarak kullanılır. Klasik mekaniğin bozulmuş sistemlerinde, örneğin ideal harmonik hareketten sapmaların analizi gibi durumlarda da bu yöntemden yararlanılır. Ayrıca akışkanlar mekaniğinde, sınır katmanı problemleri ve düşük Reynolds sayısındaki akışların incelenmesinde de pertürbasyon metodu etkin bir araçtır.

Mühendislik alanında da pertürbasyon metodu çok sayıda uygulama bulur. Yapı mühendisliğinde, yükleme koşullarında ya da malzeme özelliklerinde meydana gelen küçük değişimlerin yapının davranışı üzerindeki etkisi bu yöntemle analiz edilebilir. Titreşim analizi, sistem dinamiği, kontrol sistemleri ve termal analiz gibi birçok alt disiplinde de pertürbasyon metodu başarıyla uygulanmaktadır.

Ekonomi ve finans alanlarında ise denge durumlarının analizinde pertürbasyon yöntemi kullanılır. Özellikle ekonomik sistemlerdeki küçük parametre değişikliklerinin piyasa dengesi üzerindeki etkisi bu yöntemle incelenebilir. Oyun teorisinde, stratejilerdeki küçük değişimlerin sonuçlara olan etkisi yine pertürbasyon yaklaşımıyla analiz edilebilir.

Bilgisayar bilimleri ve optimizasyon alanında da pertürbasyon metodu önemli bir yere sahiptir. Sayısal analizde yaklaşık çözümlerin doğruluğunu ve hata sınırlarını değerlendirmek için kullanılır. Özellikle konveks optimizasyon problemlerinde, kısıtlar veya amaç fonksiyonundaki küçük değişimlerin optimum çözüm üzerindeki etkisini incelemek amacıyla tercih edilmektedir. Duyarlılık analizi gibi konularla da yakından ilişkilidir.

Son olarak, biyoloji ve ekoloji gibi alanlarda da pertürbasyon metodunun uygulamaları bulunmaktadır. Popülasyon modellerinde çevresel faktörlerdeki küçük değişimlerin popülasyon dengesi üzerindeki etkisi bu yöntemle analiz edilebilir. Hücresel düzeydeki sinyal iletim sistemlerinde de, sistemin küçük bozulmalara verdiği yanıtın modellenmesinde pertürbasyon yaklaşımına başvurulur [52].

Sonuç olarak, pertürbasyon metodu; matematik, fizik, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimleri, biyoloji gibi birçok disiplinde kullanılan, sistemlerin küçük değişimlere verdiği tepkileri incelemeye yarayan çok yönlü ve etkili bir yöntemdir.

Pertürbasyon metodunun çeşitli teknikleri, farklı fiziksel ve matematiksel sistemlerde önemli birer araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Yaya açılımı, Lindstedt-Poincaré tekniği, renormalizasyon ve çok zaman ölçekli teknikler, bu alandaki temel yaklaşımları simgelemektedir. Söz konusu yöntemler, doğrusal olmayan sistemlerin analizi açısından büyük bir öneme sahip olup, karmaşık problemlerin çözümlenmesinde etkili birer araç olarak kullanılabilmektedir.

1.6.1. Yaya Açılımı Metodu

Yaya açılımı tekniği, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir pertürbasyon metodu olarak öne çıkmaktadır. Bu tip bir açılım, herhangi bir problem olmayan direkt açılımdır. Bağımlı değişken pertürbasyon parametresi cinsinden polinom olarak seriye açılır, denklemler ayrıştırılır ve her bir mertebedeki denklemler çözülerek bilinmeyen fonksiyonlar belirlenir [52]. Bu yöntem, zamanla değişen sistemlerin çözümlerini adım adım iyileştirmek için kullanılmaktadır [53] Başlangıçta doğru kabul edilen bir çözüm üzerinde küçük düzeltmeler yaparak, elde edilen çözümün hassasiyetini artırmak mümkündür.

Bu tekniğin en önemli avantajı, doğrusal olmayan sistemlerin her bir bileşenini zaman içinde çözümle ilişkilendirerek analitik düzeltmeler elde edebilmesidir. Mekanik sistemler, elektromanyetik dalgalar ve akışkanlar mekaniği gibi alanlarda sıklıkla başvurulan bu yöntem, özellikle doğrusal olmayan etkileşimlerin önem kazandığı durumlarda büyük bir avantaj sunar.

Yaya açılımı tekniği, zamana bağlı problemler için doğru çözüme ulaşmada adım adım ilerleyen bir yapı sergilemekte ve her adımda çözümdeki doğruluğun artırılmasına olanak sağlamaktadır.

1.6.2. Lindstedt-Poincaré Metodu

Lindstedt-Poincaré tekniği, zaman içerisindeki fiziksel olmayan büyümeleri engellemek için kullanılan bir tekniktir. Çözümün periyodik olduğu varsayımı ile hareket edilir. Önce zaman değişkeninde dönüşüm yapılır ve bu dönüşüm sayesinde pertürbasyon açılımı bu dönüşümdeki keyfi parametreye de uygulanarak çözümlerdeki patlamalar giderilir [52]. Özellikle periyodik hareketler veya periyodik çözümler içeren sistemler söz konusu olduğunda son derece etkili bir pertürbasyon metodudur. Bu yöntem, doğrusal olmayan osilatör problemlerinin çözümünde kullanılmakta olup, çözümün zamanla periyodik yapısını koruyarak doğrusal olmayan etkileri düzeltme amacı gütmektedir [54].

Söz konusu teknik, başlangıç çözümünü daha doğru bir hale getirmek için küçük düzeltmeler yapılmasına imkân tanımakta olup, periyodik hareketlerin analizi açısından güçlü bir araç niteliği taşımaktadır. Periyodik çözümler içeren fiziksel sistemlerde, zamanın doğrusal olmayan etkileri göz önünde bulundurularak aşamalı düzeltmeler gerçekleştirilir. Lindstedt-Poincaré tekniği, sistemin periyodik doğasının korunmasını sağlarken, fiziksel sistemlerin daha hassas bir şekilde modellenmesine olanak tanımaktadır.

1.6.3. Renormalizasyon Metodu

Renormalizasyon metodunda önce problem yaya açılımı ile çözülür. Ortaya çıkan seküler yani patlamaya yol açan terimler ise zaman dönüşümüyle yok edilir. Lindstedt-Poincaré tekniğinden farkı zaman dönüşümlerinin en başta değil de en sonda uygulanmasıdır [52]. Bu teknik, özellikle kuantum alan teorisi ve istatistiksel fizik gibi disiplinlerde karşılaşılan sonsuzlukları ortadan kaldırmak amacıyla kullanılan bir tekniktir. Özellikle, teorik hesaplamalarda ortaya çıkan sonsuzlukların düzenlenmesine yardımcı olmakta ve fiziksel anlam taşıyan sonuçların elde edilmesini sağlamaktadır [53]. Renormalizasyonun temel hedefi, fiziksel anlam ifade eden hesaplamalar gerçekleştirmek için teorik modeldeki sonsuzlukları ele almaktır.

Kuantum elektrodinamiği gibi alanlarda, hesaplamalar sırasında sonsuz terimlerin ortaya çıkması söz konusu olabilmektedir. Bu durumda, renormalizasyon teknikleri, bu sonsuzlukları ortadan kaldırarak doğru sonuçlara ulaşılmasına imkan tanımaktadır. Renormalizasyon, fiziksel sistemlerde gerçekçi ve fiziksel anlamlı sonuçlar elde etmek için kritik bir aşamadır ve bu nedenle parçacık fiziği ile kuantum alan teorisinin temellerinde önemli bir yere sahiptir [55].

1.6.4. Çok Zaman Ölçekli Metot

Çok zaman ölçekli metotta, çözümün zaman bağımlılığı hızlı ve yavaş zaman ölçekleri ile yeniden tanımlanır.Böylece, orijinal denklem türevler hızlı ve yavaş zaman değişimleri cinsinden ifade edilir, türevlerle birlikte bağımlı değişkene yaya açılımı uygulanarak mertebe ayrıştırması yapılır ve elde edilen sonuç denklemler çözülerek bilinmeyen fonksiyonlar bulunur [52]. Yöntemin amacı, küçük ölçekli etkileşimlerin büyük ölçekli davranışlarla nasıl ilişkilendirilebileceğini incelemektedir. Fiziksel sistemler içerisinde, farklı ölçeklerdeki süreçlerin birbirini etkilemesi, sistemin daha derin bir anlayışla ele alınmasına olanak tanımaktadır. Çok ölçekli analizler, bu farklı ölçeklerin entegrasyonu sayesinde daha doğru ve güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlamaktadır.

Özellikle karmaşık sistemlerde, çok ölçekli metot, her bir ölçek düzeyinin etkilerini dikkate alarak daha kapsamlı çözümler sunmaktadır. Bu yaklaşım, akışkanlar dinamiği, biyolojik sistemler ve kimyasal mühendislik gibi alanlarda yaygın bir şekilde uygulanmaktadır. Sistemlerin mikroskobik ve makroskobik düzeydeki etkileşimlerinin birlikte analiz edilmesi, çözümün doğruluğunu artırmakta ve karmaşık etkileşimlerin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamaktadır [53].

Sonuç olarak, pertürbasyon metodunun farklı teknikleri, çeşitli disiplinlerdeki karmaşık problemlerin çözümüne önemli katkılar sağlamaktadır. Bu yöntemler, daha doğru çözümler elde edilmesi ve sistemlerin daha iyi anlaşılmasına yönelik büyük bir potansiyel sunmaktadır.

II. BÖLÜM

KESİRLİ TÜREVLERE SAHİP BİR BORU MODELİNİN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu bölümde, akışkan taşıyan viskoelastik bir borunun lineer olmayan dinamik analizi incelenecektir. Burada göz önüne alınan boru malzemesi viskoelastik olup, Kelvin-Voight modeli ile modellenmiştir. Bu modelde boru, eğilme momenti taşımaz ve denklemde, yer değiştirmenin konuma göre dördüncü mertebeden türev terimi mevcut değildir. Nonlineerlik ise, dinamik hareket boyunca boru ekseninin genişlemesinden kaynaklanır. Hareket denklemi tek boyutludur ve doğrusal olmayan bir integro diferansiyel denklemdir. Akışkan taşıyan bir boru için, doğrusal olmayan hareket denklemindeki sönüm terimi, kesirli türev ile modellenmiştir. Borunun uçları sabit destekler üzerindedir. Akışkan taşıyan boru bir tel gibi düşünülebilir. Akışkan hızı ise sabit kabul edilir. Malzeme ve şekil bağımlılığından kurtulmak için boyutsuzlaştırma yapılır. Elde edilen boyutsuz nonlineer hareket denklemini çözmek için çok zaman ölçekli metot kullanılmıştır. Sayısal sonuçlar grafiklerle verilmiştir.

Akışkan taşıyan boruların dinamik analizi son yıllarda çok sayıda bilimsel araştırmanın konusu olmuştur. Bu araştırma sonuçlarının, nükleer santral, havacılık, kozmonotik, petrol taşımacılığı, belediye su temini ve ısı eşanjör cihazları gibi mühendislik alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak uygulanabileceğini göstermektedir.

Bununla birlikte, akışkan ve yapı arasındaki çift etki genellikle titreşime, hatta borunun yırtılmasına neden olur. Bu nedenle, birçok bilim adamı, akışkan taşıyan bir borunun doğal frekansının nasıl elde edileceğiyle ilgilenmektedir.

Son zamanlarda, kesirli hesap viskoelastisiteyi tanımlamada oldukça başarılı olmuştur [56,57]. Viskoelastisiteyi tanımlamak için, kesirli hesap yaklaşımı çok önemlidir [58,59]. Kesirli viskoelastik model tamsayı mertebeden türev yerine kesirli türev alınarak elde edilir. Bundan dolayı kesirli türevli modeller kolayca elde edilir.

2.1. Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Hareket denklemini elde ederken enerji metodu kullanılmıştır [60]. Buna göre, non-lineer birim şekil değiştirme fonksiyonu

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\hat{w}'^2 \tag{1}$$

biçiminde göz önüne alınmıştır. Burada $\hat{w}$, enine deplasmanı göstermektedir. Bu çalışmada $(\ )'$, konuma göre türevi, $(\dot{})$ ise zamana göre türevi temsil etmektedir. Sistemin kinetik enerjisi yazılırsa,

$$T = \frac{1}{2}\rho_f A_f \int_0^L \left(\dot{\hat{w}} + \hat{w}'\hat{v}\right)^2 d\hat{x} + \frac{1}{2}\rho_p A_p \int_0^L \dot{\hat{w}}^2 d\hat{x} \tag{2}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde ρ_f, A_f ve $\hat{v}$ ifadeleri sırasıyla akışkanın yoğunluğunu, kesit alanını ve hızını göstermektedir. ρ_p, A_p, terimleri ise akışkan taşıyan borunun yoğunluğunu ve kesit alanını temsil eder. L ise, borunun $\hat{x}$ ekseni boyunca olan uzunluğunu temsil eder. Sistemin eğilme momenti taşımayan bir sistem olduğu kabul edildiğinden, potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2}A\int_0^L \sigma'\hat{e}'d\hat{x} + \int_0^L \hat{P}_0\hat{e}\, d\hat{x} \tag{3}$$

biçimindedir. Burada σ, akışkan taşıyan sistemin (boru/hortum) gerilme dağılımını, P_0 ise sisteme etki eden sabit çekme kuvvetini göstermektedir. Buna göre, Hamilton prensibi uygulanırsa, aşağıdaki hareket denklemi elde edilir:

$$\rho_f A_f\left(\ddot{\hat{w}} + 2\hat{v}\dot{\hat{w}}' + \hat{v}^2\hat{w}''\right) + \rho_p A_p\ddot{\hat{w}} - P_0\hat{w}'' - \frac{\hat{w}''}{L}\int_0^L A_p\sigma\, d\hat{x} = 0 \tag{4}$$

Burada viskoelastik malzeme,

$$\sigma = E\hat{e} + \hat{\eta}\frac{\partial^\alpha \hat{e}}{\partial\hat{t}^\alpha} \tag{5}$$

biçiminde Kelvin-Voight modeli ile modellenmiştir. Bu gerilme ifadesini hareket denkleminde yerine yazılırsa,

$$\rho_f A_f(\ddot{\hat{w}} + 2\hat{v}\dot{\hat{w}}' + \hat{v}^2\hat{w}'') + \rho_p A_p\ddot{\hat{w}} - P_0\hat{w}'' - \frac{EA_p}{2L}\hat{w}''\int_0^L \hat{w}'^2 d\hat{x} - \frac{\hat{\eta}A_p}{2L}\hat{w}''\int_0^L D^\alpha(\hat{w}'^2)d\hat{x} = 0 \tag{6}$$

denklemi bulunur. Elde edilen denklem non-lineer integro-diferansiyel denklemdir. Malzeme ve şekil bağımlılığından kurtulmak için hareket denklemi, aşağıdaki boyutsuz bağımlı ve bağımsız değişkenler sayesinde boyutsuz hale getirebilir. Buna göre,

$$w=\frac{\hat{w}}{L},\ x=\frac{\hat{x}}{L}\ \text{ ve }\ t=\hat{t}\sqrt{\frac{P_0}{(\rho_f A_f+\rho_p A_p)L^2}} \tag{7}$$

olmak üzere, boyutsuz hareket denklemi

$$\ddot{w}+(v^2-1)w''+2\sqrt{\beta}v\dot{w}'-\frac{w''}{2}\left(v_l^2\int_0^1 w'^2dx+\eta\int_0^1 D^{\alpha}(\hat{w}'^2)dx\right)=0 \tag{8}$$

$$w(0,t)=w(1,t)=0 \tag{9}$$

olarak elde edilir. Karşımıza çıkan yeni boyutsuz terimler ise, v boyutsuz hız, β doluluk oranı olmak üzere,

$$v=\hat{v}\sqrt{\frac{\rho_f A_f}{P_0}},\beta=\frac{\rho_f A_f}{\rho_p A_p+\rho_f A_f},v_l=\frac{EA_p}{P_0},\eta=\hat{\eta}P_0^{\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)}L^{-\alpha}A_p(\rho_f A_f+\rho_p A_p)^{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{10}$$

biçimindedir. Burada ε küçük boyutsuz bir parametredir. Sınırlı parametre değerleri için farklı durumlar tartışılacaktır. $\beta=1$ olması durumunda, hareketli bir tel için hareket denklemi ikinci mertebeden bir akışkan-boru sisteminin özel bir hali olarak elde edilir. Sabit (değişmeyen) bir sıvı için, $\beta=1$ ve $v=0$ olduğunda, lineer olmayan tel için hareket denklemi elde edilir.

2.2. Çok Zaman Ölçekli Metot ile Çözüm

Bu bölümde, akışkan taşıyan viskoelastik borunun enine titreşimi çok zaman ölçekli metot ile analiz edilecektir. Bu takdirde, w_0 ve w_1 birinci ve ε mertebeden yer değiştirme fonksiyonları ve $T_n=\varepsilon^n t$ olmak üzere, pertürbatif seri açılımını

$$w(x,t;\varepsilon)=w_0(x,T_0,T_1)+\varepsilon\, w_1(x,T_0,T_1)+... \tag{11}$$

biçiminde kabul edelim. Burada, $t=T_0$ pertürbe edilmemiş sisteme karşılık gelen doğal frekanslarından biri olan ω_n de meydana gelen hareketi karakterize eden hızlı zaman ölçeğini, $\varepsilon t=T_1$ ise olası rezonanstan kaynaklı genlik ve faz modülasyonunu karakterize eden daha yavaş zaman ölçeğini temsil etmektedir. Zamana göre türevlerle ilgili bağıntıları, $D_n = \partial / \partial T_n$ ve $D_+^{\alpha}, D_+^{\alpha-1}, D_+^{\alpha-2}, ...$ türev operatörleri Riemann-Liouville kesirli türevi temsil etmek üzere,

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + ... \ , \qquad \frac{d^2}{dt^2} = D_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 + ... \tag{12}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + ...)^{\alpha} = D_+^{\alpha} + \varepsilon \alpha D_+^{\alpha-1} D_1 + ... \tag{13}$$

olarak göz önüne alınır. Bir fonksiyonun α kesirli mertebeden Riemann Liouville türevi

$$^{RL}D_+^{\alpha} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha}} \tag{14}$$

formunda tanımlanmak üzere, üstel fonksiyonun kesirli türevini hesaplamak için aşağıdaki formül verilir:

$$^{RL}D_+^{\alpha} e^{i\omega t} = (i\omega)^{\alpha} e^{i\omega t} + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha}}{u + i\omega} e^{-ut} du \tag{15}$$

Burada, α çok küçük olduğundan ikinci terim ihmal edilmiştir ve $\sqrt{-1}$, i karmaşık (kompleks) sayısını ifade etmektedir. Buna göre, denklemin pertürbatif çözümü için (11)-(13) denklemleri, (8)-(9) denklemlerinde yerine yazılır ve ε 'nun ilk iki mertebesine göre ayrıştırılırsa,

$$\varepsilon^0 : D_0^2 w_0 + (v^2 - 1) w_0'' + 2v\sqrt{\beta} D_0 w_0' = 0 \tag{16}$$

$$w_0(0,t) = w_0(1,t) = 0 \tag{17}$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 w_1 + (v^2 - 1) w_1'' + 2v\sqrt{\beta} D_0 w_1' = -2 D_0 D_1 w_0 - 2v\sqrt{\beta} D_1 w_0' + \frac{1}{2} w_0'' \left[v_1^2 \int_0^1 \left(w_0'\right) dx + \eta \int_0^1 D_0^{\alpha} \left(w_0'\right)^2 \right] \tag{18}$$

$$w_1(0,t) = w_1(1,t) = 0 \tag{19}$$

elde edilir. n . modun direkt uyarıldığı ve iç rezonansın etkin olmadığı kabul edilirse, (16) denkleminin çözümü

$$w_0(x, T_0, T_1) = A_n(T_1) X_n(x) e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1) \bar{X}_n(x) e^{-i\omega_n T_0} \tag{20}$$

formunda yazılabilir. Bu takdirde, X_n şekil fonksiyonu aşağıdaki denklemi sağlar:

$$(1-v^2)X_n'' - 2iv\omega_n\sqrt{\beta}X_n' + \omega_n^2 X_n = 0 \tag{21}$$

$$X_n(0) = X_n(1) = 0 \tag{22}$$

Böylece, uçları sabitlenmiş akışkan taşıyan boru için doğal frekans denklemi

$$\omega_n = \frac{n\pi(1-v^2)}{\sqrt{v^2(\beta-1)+1}}; \; n = 1,2,... \tag{23}$$

biçiminde elde edilir. Bu takdirde, X_n

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{in\pi v\sqrt{\beta}}{\sqrt{v^2(\beta-1)+1}}x} \sin \pi nx; \;\; n = 1,2,... \tag{24}$$

bulunur. ε mertebesindeki çözüm için, (20) denklemi ε mertebesindeki denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D_0^2 w_1 + (v^2-1)w_1'' + 2v\sqrt{\beta}D_0 w_1' &= -2D_1 A_n(i\omega_n X_n + v\sqrt{\beta}X_n')e^{i\omega_n T_0} \\ &+ \frac{1}{2}v_l^2 A_n^2 \bar{A}_n \left(2X_n'' \int_0^1 X_n' \bar{X}_n' dx + \bar{X}_n'' \int_0^1 X_n'^2 dx \right) e^{i\omega_n T_0} \\ &+ \frac{1}{2}\eta(2i\omega_n)^\alpha A_n^2 \bar{A}_n \bar{X}_n'' e^{i\omega_n T_0} \int_0^1 X_n'^2 dx + cc + NST \end{aligned} \tag{25}$$

elde edilir. Burada cc kompleks eşlenikleri, NST ise seküler olmayan terimleri temsil eder. Buna göre, (25) denkleminin çözümü, İlk terim seküler terimlerle, ikinci terim ise seküler olmayan terimlerle ilgili olmak üzere,

$$w_1(x,T_0,T_1) = \varphi_n(x,T_1)e^{i\omega_n T_0} + W(x,T_0,T_1) + cc \tag{26}$$

biçimindedir. Böylece, denklemi (25) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (1-v^2)\varphi_n'' - 2iv\omega_n\sqrt{\beta}\varphi_n' + \omega_n^2\varphi_n &= -2D_1 A_n(i\omega_n X_n + v\sqrt{\beta}X_n') \\ &+ \frac{1}{2}v_l^2 A_n^2 \bar{A}_n \left(2X_n'' \int_0^1 X_n' \bar{X}_n' dx + \bar{X}_n'' \int_0^1 X_n'^2 dx \right) \\ &+ \frac{1}{2}\eta(2i\omega_n)^\alpha A_n^2 \bar{A}_n \bar{X}_n'' \int_0^1 X_n'^2 dx \end{aligned} \tag{27}$$

$$\varphi_n(0) = 0 \;,\; \varphi_n(1) = 0 \tag{28}$$

elde edilir. (27) denklemi, ancak çözülebilirlik şartını [61] sağlarsa, sınırlı bir çözüme sahiptir. Buna göre, $[0,1]$ aralığı üzerinde kompleks fonksiyonlar için, iç çarpım

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\bar{g}\,dx \tag{29}$$

biçiminde tanımlanmak üzere, çözülebilirlik şartı [61]

$$\begin{aligned}&\left\langle -2D_1A_n\left(i\omega_n X_n + v\sqrt{\beta}X_n{}'\right) + \frac{1}{2}v_l^2A_n^2\bar{A}_n\left(2X_n{}''\int_0^1 X_n{}'\bar{X}_n{}'dx + \bar{X}_n{}''\int_0^1 X_n{}'^2dx\right)\right.\\ &\left. +\frac{1}{2}\eta(2i\omega_n)^\alpha A_n^2\bar{A}_n\bar{X}_n{}''\int_0^1 X_n{}'^2dx, X_n\right\rangle = 0\end{aligned} \tag{30}$$

biçimindedir. Buna göre, (27) denklemi uygulanırsa,

$$b_n = \frac{\frac{1}{2}\left(v_l^2 + \eta(2i\omega_n)^\alpha\right)\int_0^1 \bar{X}_n\bar{X}_n{}''\int_0^1 X_n{}'^2\,dx\,dx + v_l^2\int_0^1 \bar{X}_nX_n{}''\int_0^1 \bar{X}_n{}'X_n{}'\,dx\,dx}{-2i\omega_n\int_0^1 X_n\bar{X}_n\,dx - 2v\sqrt{\beta}\int_0^1 X_n{}'\bar{X}_n\,dx} \tag{31}$$

olmak üzere,

$$D_1A_n + b_nA_n^2\bar{A}_n = 0 \tag{32}$$

haline indirgenir. Burada b_n, $b_n = b_n^R + ib_n^I$ formunda bir kompleks sayıdır. Buna göre,

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2}a_n(T_1)e^{i\beta_n(T_1)} \tag{33}$$

ifadesi (32) denkleminde yerine yazılır, sonuç denklem reel ve imajiner kısımlara ayrılırsa,

$$\mathrm{Re}: a_n' + \frac{1}{4}b_n^Ra_n^3 = 0 \tag{34}$$

$$\mathrm{Im}: \beta_n' + \frac{1}{4}b_n^Ia_n^2 = 0 \tag{35}$$

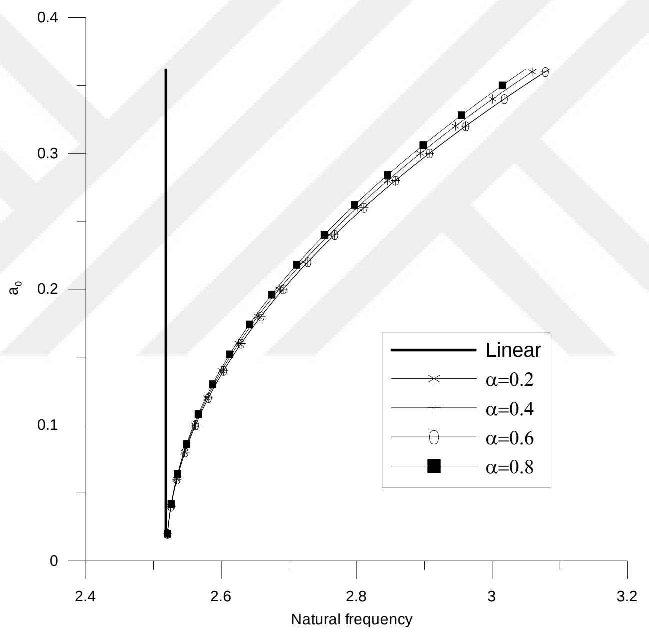
bulunur. (34) ve (35) denklemlerinin çözülmesi ile, A_n genliği, k_0 ve k_1 herhangi bir sabit olmak üzere,

$$A_n(T_1) = \frac{1}{\sqrt{2(b_n^RT_1 + k_0)}}\exp\left(-i\frac{b_n^I}{2b_n^R}\ln\left|b_n^RT_1 + k_0\right| + k_1\right) \tag{36}$$

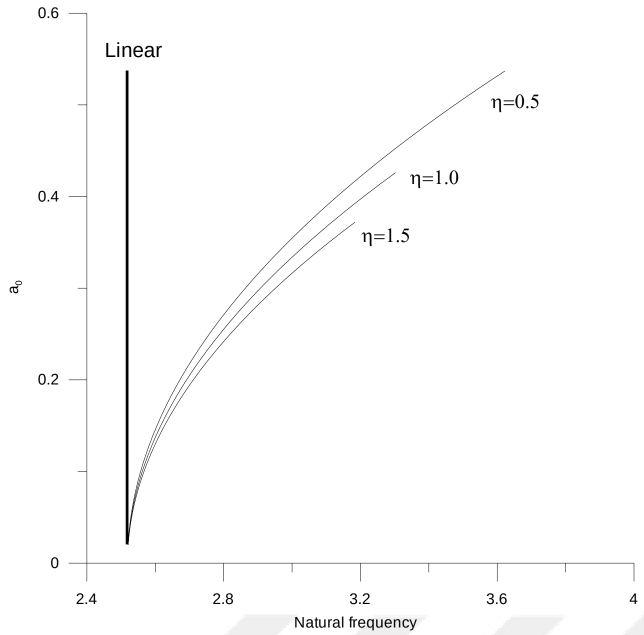
biçiminde elde edilir.

2.3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde temel titreşim genliği, nonlineerite ve viskozite katsayısının kararlı hal üzerindeki etkileri tartışılmıştır. Şekil 1'de görüldüğü gibi, kesirli sönüm, doğal frekans üzerinde önemsiz bir etkiye sahiptir. Ancak klasik sönüm durumunda doğal frekans değişmez. Burada, bu etki biraz zor fark edilir. Bu etki, α'nın küçük ve büyük değerlerinde neredeyse kaybolur. α'nın orta değerlerinde doğal frekanstaki değişim daha büyüktür.

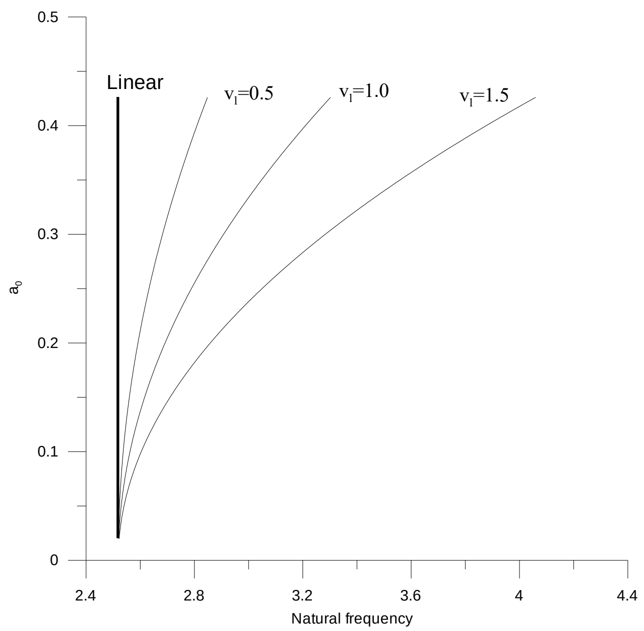


Şekil 1. $\beta = 0.5$, $\nu = 0.5$, $\nu_l = 1.0$, $\eta = 1.5$ için α değişiminin doğal frekans üzerindeki etkileri



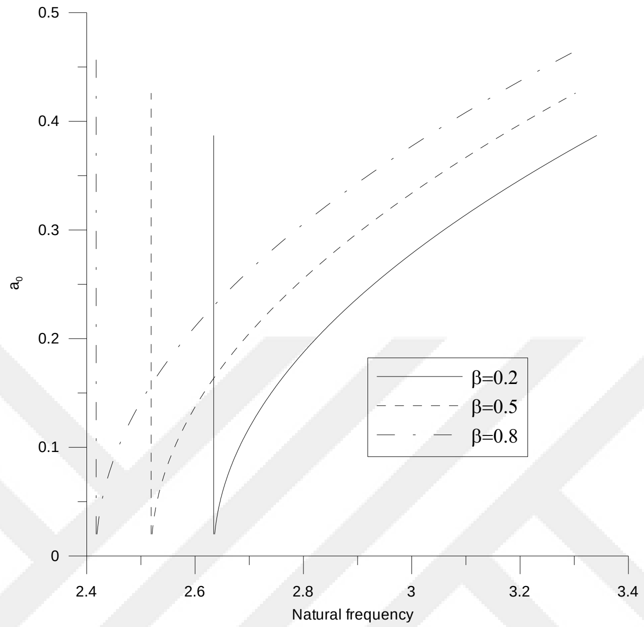
Şekil 2. $\beta = 0.5$, $v = 0.5$, $v_l = 1.0$, $\alpha = 0.6$ için η değişiminin doğal frekans üzerindeki etkileri

Kesirli mertebe için söylediklerimiz sönüm katsayısı için de geçerlidir. Sönüm katsayısı daha büyük değerler alabileceğinden, doğal frekans üzerindeki etkileri Şekil 2'de net bir şekilde gözlemlenebilir.



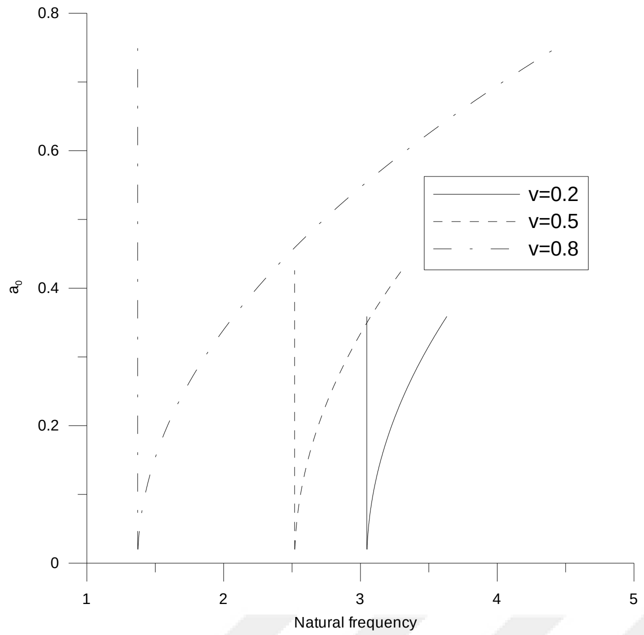
Şekil 3. $\beta = 0.5$, $v = 0.5$, $\eta = 1.0$, $\alpha = 0.6$ için v_l değişiminin doğal frekans üzerindeki etkileri

Şekil 3'te, v_l lineer olmayan terimlerin bir katsayısı olduğundan, v_l nin artan değerleri lineer olmayan terimlerin sistem üzerindeki etkinliğini arttırır. Bu ise, doğal frekans v_l değeri ile değiştiğinde kolayca görülebilir.



Şekil 4. $v_l = 0.5$, $v = 0.5$, $\eta = 1.0$, $\alpha = 0.6$ için β değişiminin doğal frekans üzerindeki etkileri

Problem tel-boru tipi olduğundan, doluluk kütle oranı doğal frekans üzerinde anlamlı bir etkiye sahiptir. Şekil 4, β değerlerinin lineer frekansa benzer lineer olmayan frekans eğrileri üzerinde anlamlı bir etkiye sahip olduğunu gösterir.



Şekil 5. $v_l = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\eta = 1.0$, $\alpha = 0.6$ için v değişiminin doğal frekans üzerindeki etkileri

Doluluk kütle oranı için ifade edilenler akışkan hızı için de söylenebilir. Akışkan hızının değişmesi sistemin doğal frekansı üzerinde çok önemli bir etkiye sahiptir. Doğrusal olmayan frekans üzerindeki benzer etki Şekil 5'de gözlemlenmektedir.

III. BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez çalışması, akışkan taşıyan boru sistemlerinin dinamik davranışlarını kesirli türev temelli matematiksel modeller aracılığıyla inceleyen teorik ve uygulamalı bir araştırmadır. Çalışmanın temel amacı, klasik modellemelerin ötesine geçerek kesirli türev kavramının boru sistemlerinin titreşim karakteristikleri üzerindeki etkilerini ortaya koymak ve bu sayede mühendislik alanına katkı sağlamaktır.

Birinci bölümde, boruların tarihçesi, geometrik ve fiziksel özellikleri, dinamik davranışları ile birlikte viskoelastik ortamlar, rezonans, serbest ve zorlanmış titreşimler gibi kavramlar ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ayrıca kesirli türevlerin tarihsel gelişimi, matematiksel temelleri ve uygulama alanları literatür desteğiyle açıklanmış, bu kapsamda pertürbasyon yöntemine özel olarak odaklanılmıştır.

İkinci bölümde ise, kesirli türevli sönüm terimi içeren bir boru modelinin doğrusal olmayan hareket denklemleri türetilmiş ve çok zaman ölçekli metot ile çözülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlar, kesirli mertebenin, sönüm katsayısının, doğrusal olmayan terimlerin katsayısının ve akışkan hızının sistemin doğal frekansı üzerindeki etkilerini ortaya koymuştur. Özellikle orta mertebedeki kesirli türev değerlerinde doğal frekansta belirgin değişimler gözlemlenmiş, bu durum, sistemin titreşim karakteristiklerinin kesirli parametrelerle hassas biçimde ayarlanabileceğini göstermiştir.

Bu analizler, klasik sönüm modellerine kıyasla kesirli türev yaklaşımlarının daha gerçekçi ve esnek çözümler sunduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca, kesirli modeller sayesinde viskoelastik davranışların zamana bağlı karmaşık etkileri daha etkili bir şekilde temsil edebilmiştir.

Sonuç olarak bu tez, mühendislik ve matematik disiplinlerinin kesişiminde yer alan akışkan taşıyan boru sistemlerine yönelik kesirli türevli modelleme yaklaşımını detaylı şekilde sunarak literatüre hem teorik hem de sayısal bir katkı sağlamaktadır. Tez kapsamında elde edilen bulgular, mühendislik uygulamalarında sistem dinamiklerinin daha hassas analizine olanak tanımaktadır.

Gelecekte yapılacak çalışmalarda, farklı sınır koşullarına sahip boru sistemlerinin kesirli türevlerle modellenmesi, çeşitli viskoelastik malzeme modellerinin karşılaştırmalı olarak incelenmesi ve elde edilen sonuçların deneysel verilerle doğrulanması önem arz etmektedir. Ayrıca, sistem üzerindeki zamana bağlı dış zorlamaların etkisinin değerlendirilmesi ve parametrik optimizasyon yöntemlerinin uygulanması, daha kapsamlı ve gerçekçi modellemeler geliştirilmesi açısından faydalı olacaktır. Bu öneriler doğrultusunda yapılacak çalışmalar, boru sistemlerinin dinamik analizinde kesirli türevlerin sunduğu avantajları daha da görünür kılacak ve bu yöntemin mühendislik uygulamalarındaki yerini güçlendirecektir.

KAYNAKÇA

[1] Hussein, M., et al. (2018). Fractional calculus in structural engineering applications. *Structural Engineering and Mechanics, 65*(6), 711–724.

[2] Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. (2004). *Nonlinear oscillations*. Wiley-Interscience.

[3] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier.

[4] Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic Press.

[5] Mainardi, F. (2000). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. Springer.

[6] Sprott, J. C. (2003). *Introduction to fractional calculus and its applications*. World Scientific Publishing Company.

[7] Miller, K. A. (2007). *Fractional calculus: An introduction for engineers and scientists*. Wiley.

[8] Yildirim, I., & Sevik, A. (2010). Fractional order modeling of vibrations in pipe systems. *International Journal of Mechanical Sciences, 52*(5), 650–658.

[9] Şahin, B., & Ertan, R. (2013). Application of fractional derivatives to the vibration analysis of pipe systems. *Journal of Sound and Vibration, 332*(5), 1109–1119.

[10] Atangana, A., & Baleanu, D. (2016). *Fractional derivatives with nonlocal and nonsingular kernels: Theory and applications*. World Scientific Publishing Co.

[11] Zuo, S. K., & Guo, J. L. (2016). Application of fractional derivative models in vibration analysis of flexible structures. *Journal of Vibration and Acoustics, 138*(4), 041013.

[12] Li, Y., & He, S. (2017). Vibration analysis of fluid-filled pipes using fractional calculus. *Mechanical Systems and Signal Processing, 93*, 257–276.

[13] Zeng, X., Liu, Z., & Zhang, L. (2018). Fractional order vibration analysis of pipes with internal flow. *Journal of Sound and Vibration, 422,* 199–213.

[14] Agarwal, A., Kumar, P., & Jain, P. (2018). Fractional calculus-based approach for vibration analysis of viscoelastic pipe systems. *Journal of Vibration and Control, 24*(8), 1825–1838.

[15] Borhani, F., & Rahmani, M. (2019). Dynamic analysis of fluid-structure interaction in pipes using fractional derivatives. *Journal of Engineering Mechanics, 145*(2), 04018104.

[16] Mubeen, S., Iqbal, M., & Hussain, S. (2020). Application of fractional calculus in vibration analysis of engineering structures. *Applied Mathematical Modelling, 75*, 489–506.

[17] Hammad, A., Zhang, L., & Liu, X. (2020). Fractional-order vibration analysis of pipes with internal flow under dynamic loads. *Journal of Sound and Vibration*, *455*, 32–47.

[18] Huang, Z., & Xia, Y. (2017). Dynamic characteristics and vibration analysis of flexible pipes. *Applied Mathematical Modelling*, *41*(10), 4934–4951.

[19] Zhang, X., & Cao, J. (2015). Finite element analysis of vibration characteristics of viscoelastic pipes. *Applied Mechanics and Materials*, *765*, 313–318.

[20] Berman, D. R., Garimella, R. V., & Faghri, A. (2011). *Thermal-fluid systems for energy applications*. Springer Science & Business Media.

[21] Berg, M. (2014). Steel pipes for deep-sea pipelines. *Journal of Pipeline Engineering*, *33*(2), 112–118.

[22] Xie, J., Cheng, X., & Liu, Q. (2017). Application of plastic pipes in urban water distribution systems. *Journal of Environmental Engineering*, *143*(3), 04016087.

[23] Schweitzer, P. A., & Dore, E. (2013). Corrosion of Alloy 600 in chemical environments. *Corrosion Science and Technology*, *55*, 2061–2075.

[24] Zhou, Z., & Zeng, X. (2018). Effect of pipe geometry on dynamic behavior of fluid-filled pipes. *Journal of Sound and Vibration*, *421*, 281–296.

[25] Chien, C., Li, H., & Zeng, X. (2019). Numerical analysis of vibration suppression for flexible pipes under dynamic loading. *Journal of Vibration and Control*, *25*(7), 1222–1233.

[26] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.

[27] Mainardi, F. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. Springer.

[28] Atangana, A., & Al, I. (2017). *Fractional calculus and its applications*. CRC Press.

[29] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2010). Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews, 63*, 010801-1–52.

[30] Rao, S. S. (2011). Mechanical Vibrations, prentice Hall. *Indianapolis, IN*.

[31] Newton, I. (1979). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater. Prostat Venales apud Sam. Smith ad insigna Principis Walliae in Coemiterio D. Pauli, aliosq, nonnullos Bibliopolas.

[32] Huygens, C. (1966). *Horologium oscillatorium*.

[33] Euler, L. (1980). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788: introduction to Vol. X and XI*. Springer Science & Business Media.

[34] Baron de Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot.

[35] De Laplace, P. S. (1820). *Théorie analytique des probabilités* (Vol. 7). Courcier.

[36] Hansen, C. H., Snyder, S. D., Qiu, X., Brooks, L. A., & Moreau, D. J. (1997). *Active control of noise and vibration* (p. 1267). London: E & Fn Spon.

[37] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (1980). 1., Classical Mechanics.

[38] Arnold, V. (1978). 1., Mathematical methods of classical Mechanics. *Sl~ ringer-Verlag, New York*.

[39] Hooke, R. 1678, De Potentia Restitutiva, or Of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies. *J. Martin, London*.

[40] Strutt, J. W., & Rayleigh, J. W. S. (1877). *The theory of sound* (Vol. 1). Macmillan.

[41] Lamb, H. (1945). Hydrodynamics dover publications. *New York*, (260-261), 445.

[42] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., & Sanders, J. V. (2000). Fundamentals of Acoustics. Wiley.

[43] Fenton, J. D., & Chiew, Y. M. (1997). The collapse of the Tacoma Narrows Bridge: A resonance phenomenon. *Engineering Failure Analysis*. Elsevier.

[44] Inman, D. J. (2007). Engineering Vibration (4th ed.). Pearson Education.

[45] Coleman, B. D., & Noll, W. (1963). Viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics, 35*(4), 668–723.

[46] Lakes, R. (2009). Viscoelastic Materials. Cambridge University Press.

[47] Ferry, J.D. (1980). Viscoelastic Properties of Polymers. Wiley-Interscience.

[48] Hibbeler, R. C. (2017). Structural Analysis. Pearson Education.

[49] Leet, K., Uang, C. M., & Gilbert, A. M. (2008). *Fundamentals of structural analysis*. New York, NY, USA:: McGraw-Hill Higher Education.

[50] Timoshenko, S. (1983). *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. Courier Corporation.

[51] Den Hartog, J. P. (2012). *Strength of materials*. Courier Corporation.

[52] Nayfeh, A. H. (1981). *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-Interscience.

[53] Bender, C. M., & Orszag, S. A. (1999). *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Springer.

[54] Poincaré, H. (1893). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin* (Vol. 2). Gauthier-Villars.

[55] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics* (Course of Theoretical Physics, Volume 1). Pergamon Press.

[56] Dao, Y. S., & Ti, Q. J. (1998). Study on the constitutive equation with fractional derivative for the viscoelastic fluids-modified Jeffrey's model and its application. *Rheologica Acta, 37*, 512–517.

[57] Palade, L. I., Attane, P., Huilgol, R. R., & Mena, B. (1999). Anomalous stability behavior of a properly invariant constitutive equation which generalises fractional derivative models. *International Journal of Engineering Science, 37*, 315–329.

[58] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2001). A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity. *International Journal of Engineering Science, 39*, 149–176.

[59] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2004). Analysis of the viscoelastic rod dynamics via model involving fractional derivatives or operators of two different orders. *Shock and Vibration Digest, 36*, 3–26.

[60] Dönmez Demir, D., & Sınır, B. G. (2016). Singülerite fonksiyonları ile modellenen yapı elemanlarının dinamik analizine yeni bir yaklaşım. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi BAP Projesi* (Proje No: 2016-113).

[61] Nayfeh, A. H. (1981). *Introduction to perturbation techniques*. New York: John Wiley & Sons.

[62] Krantz, S. G. (1999). *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag.

[63] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2012). On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator. *Mechanics Research Communications, 45*, 22–27.

[64] Yi-min, H., Seng, G., Wei, W., & Jie, H. (2012). A direct method of natural frequency analysis on pipeline conveying fluid with both ends supported. *Nuclear Engineering and Design, 253*, 12–22.

[65] Sınır, B. G., & Dönmez Demir, D. (2015). The analysis of nonlinear vibrations of a pipe conveying an ideal fluid. *European Journal of Mechanics B/Fluids, 52*, 38–44.

[66] Tang, Y., Zhen, Y., & Fang, B. (2018). Nonlinear vibration analysis of a fractional dynamic model for the viscoelastic pipe conveying fluid. *Applied Mathematical Modelling, 56*, 123–136.