

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR REAKSİYON-DİFÜZYON SIR MODELİN  
KESİN ÇÖZÜMLERİ

Sevda ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Programı

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Nisan, 2025

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR REAKSİYON-DİFÜZYON SIR MODELİN KESİN**  
**ÇÖZÜMLERİ**

Sevda ÖZTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması 09.04.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Dr. Öğr. Üyesi Günay ASLAN, Üye  
İstanbul Kültür Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM sorumluluğunda tarafımda hazırlanan “Bir Reaksiyon-Difüzyon SIR Modelin Kesin Çözümleri” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sevda ÖZTÜRK

İmza



Bu çalışma, “2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)” tarafından desteklenmiştir.

*Aileme*



## TEŞEKKÜR

---

Tez sürecimde bana rehberlik eden, disiplinli, sabırlı ve dikkatli yaklaşımıyla her detaya özen gösteren, aynı zamanda bilgiyi cömertçe paylaşarak gelişimime büyük katkı sağlayan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM'e gönülden teşekkür ederim.

Ayrıca, ders sürecinde bilgi birikimlerini paylaşarak bana yol gösteren ve akademik gelişimime katkı sağlayan tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu süreçte, manevi destekleriyle yanımda olan ve beni her zaman motive eden sevgili aileme ve özellikle annem Ayşe ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

Sevda ÖZTÜRK

# İÇİNDEKİLER

---

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>viii</b>
<b>KISALTMA LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>x</b>
<b>ÖZET</b>	<b>xi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiii</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Salgın (Epidemik) Hastalık . . . . .	1
1.1.1 Epidemiyolojik Modelleme . . . . .	2
<b>2 BAZI EPİDEMİYOLOJİK MODELLER</b>	<b>4</b>
2.1 Temel SIR Model . . . . .	4
2.1.1 Temel SIR Modelinde Maksimum Enfeksiyon Sayısı . . . . .	7
2.1.2 İnsidans Oranı . . . . .	9
2.1.3 Demografiyi İçeren SIR Modeli . . . . .	11
2.2 SI Model . . . . .	12
2.3 SIS Model . . . . .	13
2.4 SIRS Model . . . . .	14
2.5 SEIR Model . . . . .	15
2.5.1 Reaksiyon-Difüzyon SIR Modeli . . . . .	16
2.6 Ele Alınan Model . . . . .	16
<b>3 YÖNTEM</b>	<b>20</b>
3.1 Giriş . . . . .	20
3.1.1 $(G'/G)$ -Açılım Yöntemi . . . . .	22
3.1.2 Gerginlik Engelleyici Durumun Kesin Çözümü . . . . .	24
3.1.3 Gerginlik Artıran Durumun Kesin Çözümü . . . . .	31
<b>4 SONUÇ</b>	<b>39</b>

**KAYNAKÇA**

**40**

**TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR**

**44**



## SİMGE LİSTESİ

---

$m_1, m_2$	Difüzyon katsayıları
$d$	Doğum-ölüm oranı
$\beta$	Enfeksiyon oranı
$I$	Enfekte olmuş birey sayısı
$R$	Hastalığa karşı bağışıklık kazanan birey sayısı
$S$	Hastalığa maruz kalan (duyarlı) birey sayısı
$\gamma$	İyileşme oranı
$\sigma, \rho$	Reaksiyon terimleri
$\mathcal{R}_0$	Temel üreme sayısı

## KISALTMA LİSTESİ

---

DSÖ	Dünya Sağlık Örgütü
SEIR	Susceptible-Exposed-Infected-Recovered
SI	Susceptible-Infected
SIR	Susceptible-Infected-Recovered
SIRS	Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible
SIS	Susceptible-Infected-Susceptible

## ŞEKİL LİSTESİ

---

<b>Şekil 1.1</b>	Epidemiyolojik model geliştirme süreci . . . . .	3
<b>Şekil 2.1</b>	SIR model geçiş diyagramı . . . . .	5
<b>Şekil 2.2</b>	$\beta = 0.6$ $\gamma = 0.2$ iken SIR salgını . . . . .	6
<b>Şekil 2.3</b>	$\beta = 0.1$ $\gamma = 0.4$ iken SIR salgını . . . . .	7
<b>Şekil 2.4</b>	Doğum-ölüm oranı içeren SIR modeli geçiş diyagramı . . . . .	11
<b>Şekil 2.5</b>	SI Model geçiş diyagramı . . . . .	12
<b>Şekil 2.6</b>	SIS model geçiş diyagramı . . . . .	13
<b>Şekil 2.7</b>	SIRS model geçiş diyagramı . . . . .	14
<b>Şekil 2.8</b>	SEIR model geçiş diyagramı . . . . .	15
<b>Şekil 3.1</b>	(3.21) kesin çözümünün $t = 0$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	29
<b>Şekil 3.2</b>	(3.21) kesin çözümünün $t = 20$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	29
<b>Şekil 3.3</b>	(3.21) kesin çözümünün $t = 60$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	30
<b>Şekil 3.4</b>	(3.21) kesin çözümünün $t = 120$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	30
<b>Şekil 3.5</b>	(3.46) kesin çözümünün $t = 0$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	37
<b>Şekil 3.6</b>	(3.46) kesin çözümünün $t = 20$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	37
<b>Şekil 3.7</b>	(3.46) kesin çözümünün $t = 60$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	38
<b>Şekil 3.8</b>	(3.46) kesin çözümünün $t = 120$ anındaki grafiksel gösterimi . . . .	38

## Bir Reaksiyon-Difüzyon SIR Modelin Kesin Çözümleri

Sevda ÖZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Sağlık teknolojisindeki dikkate değer gelişmelere rağmen salgın hastalıklar insan toplumuna önemli ölçüde zarar verebilmektedir. Bulaşıcı hastalıkların insan popülasyonları içinde yayılması, matematiksel modellemede son zamanlarda yaygın olarak incelenen önemli bir araştırma konusudur. Salgın hastalıkların yayılma dinamiklerini anlamak, etkili müdahale stratejileri geliştirmek, salgın yönetiminin bilimsel temel zeminini oluşturmak ve insan sağlığını korumak amacıyla geliştirilen matematiksel modeller birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. SIR (Susceptible-Infected-Recovered) modeli de bu çalışmalara öncülük ederek farklı modellerin gelişmesine zemin hazırlamıştır. Genellikle SIR modeli, epidemiyolojik süreçleri modellemek için kullanılsa da sosyal olayların dinamiklerini anlamak için de uygun hale getirilebilir. Bunun için reaksiyon-difüzyon sistemlerine ihtiyaç duyulur. SIR model, salgın hastalığın bir popülasyonda zamanla nasıl değiştiğini ele alırken reaksiyon-difüzyon sistemiyle birlikte ele alındığında aynı zamanda hastalığın başka alanlarda nasıl yayıldığını da inceler. Bu çalışmada bir reaksiyon-difüzyon SIR modeli ele alınmıştır. Giriş bölümünde salgın hastalık ve epidemiyolojik modellemeden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, temel salgın hastalık modelleri olan SI, SIS, SIR, SIRS, SEIR modelleri tanıtılmıştır. Hastalık yayılmasında önemli olan insidans oranı ve temel üreme sayısından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde yöntemin uygulama adımları verilmiştir. Ele alınan bu modelin,  $(G'/G)$ -açılım yöntemi kullanılarak kesin çözümleri elde edilmiştir. Yöntemin uygulama aşaması sırasında oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü kendi ürettiğimiz MATLAB kodları

yardımıyla bulunmuştur. Son olarak da, farklı parametre değerleri için kesin çözümlerin grafik gösterimleri verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Reaksiyon-difüzyon SIR modeli,  $(G'/G)$ -açılım yöntemi, Kesin çözümler.



## ABSTRACT

---

### Exact Solutions of a Reaction-Diffusion SIR Model

Sevda ÖZTÜRK

Department of Mathematics  
Master of Science Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Selmahan SELİM

Despite remarkable advances in health technology, pandemic diseases continue to pose a significant threat to human societies. The spread of infectious diseases within human populations is a critical area of research that has been extensively explored in recent years through mathematical modelling. Mathematical models developed to understand the dynamics of disease transmission, devise effective intervention strategies, provide a scientific basis for epidemic management and protect public health have attracted considerable attention from researchers. SIR (Susceptible-Infected-Recovered) model has played a pioneering role in these studies, paving the way for the development of various modelling frameworks. Traditionally used to simulate epidemiological processes, the SIR model can be adapted to analyze the dynamics of social phenomena. This adaptation requires the integration of reaction-diffusion systems. The SIR model typically examines how a disease evolves over time within a population; however, when combined with a reaction-diffusion framework, it additionally examines the spatial spread of the disease across different regions. This study investigates a reaction-diffusion SIR model. The introduction section discusses pandemic diseases and epidemiological modeling. Chapter two introduces fundamental epidemic models, including the SI, SIS, SIR, SIRS, and SEIR frameworks. Key concepts in disease transmission, such as the incidence rate and the basic reproduction number are mentioned. Chapter three outlines the methodological steps applied in this study. Exact solutions for this considered model were obtained using the  $(G'/G)$ -expansion method. The system of nonlinear algebraic equations generated during the implementation of this method is solved using own developed MATLAB codes. Finally, graphical

representations of the exact solutions for different parameter values are also presented.

**Keywords:** Reaction-diffusion SIR model, The  $(G'/G)$ -expansion method, Exact solutions.



## 1.1 Salgın (Epidemik) Hastalık

Edinilmiş immün yetmezlik sendromu, şiddetli akut solunum sendromu, H7N9, H5N1, Ebola, Zika, pandemik H1N1, Orta Doğu solunum sendromu ve son zamanlarda COVID-19 gibi hastalık salgınları son yarım yüzyılda kamuoyunun dikkatini çekmiştir. Çin'in Wuhan şehrinde 31 Aralık 2019'da tespit edilen bir virüs insan hayatının dinamiklerini ciddi ölçüde etkilemiştir. Bu virüsün belirli bir bölgede aniden ortaya çıkması ve beklenenden fazla hastalık vakasının olması bir **salgın (epidemik)** oluşmasına zemin hazırlamıştır [1]. COVID-19, şiddetli akut solunum sendromu koronavirüs 2 (SARS-CoV-2) denilen virüsün neden olduğu küresel bir salgındır [2]. 30 Ocak 2020'de Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ), COVID-19'u Uluslararası Kamu Sağlığı Acil Durumu ilan etmiştir [3]. Salgının dünya genelinde yayılmasıyla 11 Mart 2020'de DSÖ, COVID-19'u pandemi olarak ilan etmiştir. Pandemi, dünya genelinde bir hastalığın yayılması ve birden fazla ülkede aynı anda etkili olması durumunu tanımlar. Salgın kavramlarını ele alırken endemik kavramı ile de karşılaşıyoruz. Hastalık uzun süre boyunca belirli bir popülasyonda veya bölgede sürekli varlığını gösteriyorsa endemik kabul edilir. Örneğin; Kolera, güvenli suya ulaşımın eksikliği, yetersiz sağlık hizmetleri ve artan nüfus hareketleri nedeniyle, çevresel altyapının zayıf olduğu bölgelerde düzenli olarak büyük salgınlara yol açmakta ve ciddi bir halk sağlığı riski oluşturmaktadır [4]. Bu nedenle, özellikle gelişmekte olan ülkelerde endemik bir hastalık olarak kabul edilir.

Salgın hastalıklar sağlık sistemleri üzerinde ağır bir etki oluşturabilir. Pandemi olayları sırasında, hükümetin hızlı müdahaleleri hastalık durumunun kontrol altına alınmasında vazgeçilmez bir rol oynamaktadır. Hükümet kontrolünü destekleyip desteklememe konusunda bireysel karar verme, politikaların eksiksiz ve etkili bir şekilde uygulanması için çok önemlidir. COVID-19 salgınında, virüsün belirsiz doğası nedeniyle hastalığın bulaşmasını anlamak zordu. Birçok ülke, hastalığın görülme sıklığını kontrol altına almak için temizlik, maske ve mesafe kurallarının

yanı sıra sosyal mesafe politikaları uyguladı ve enfekte bireyleri izole ederek halka açık alanlardan uzak tuttular [5]. Salgınla mücadelede birçok aşı çalışması yapılmasına rağmen, halk sağlığı için hala büyük bir tehdit oluşturmaktadır. Aynı zamanda virüsün dinamikleri ve tıbbi tedaviler hikayenin önemli bir parçası olsa da, COVID-19 birçok ülkede toplumsal düzeni de altüst etti. Salgınlarla birlikte değişen dünyada var olabilmek için matematikçilerde bu alanda etkin rol oynamıştır. Geçmişten günümüze kadar gelen bulaşıcı hastalıkların neden olduğu salgınların yayılımı, analizi, kontrolü için birçok araştırmacı tarafından matematiksel modellemeden yararlanılmıştır.

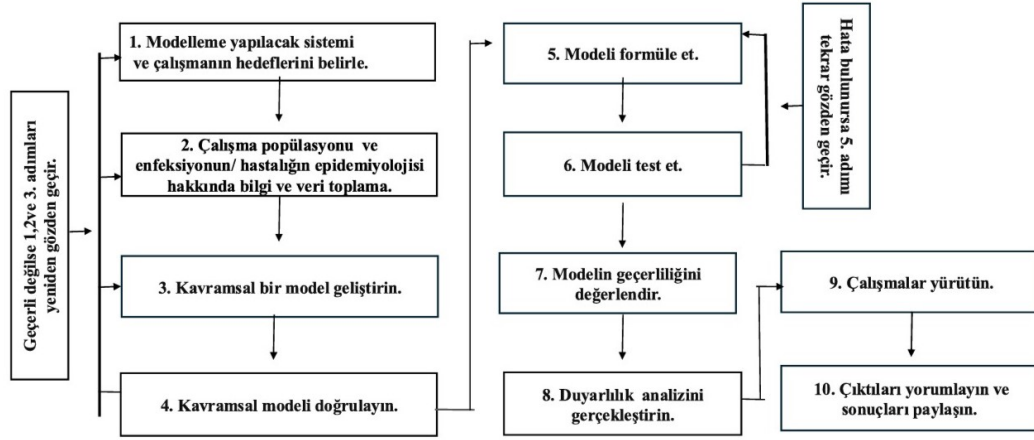
### 1.1.1 Epidemiyolojik Modelleme

Epidemiyoloji, belirli bir popülasyonda (nüfusta) sağlıkla ilgili olayların veya durumların dağılımını ve nedenlerini inceleyen, bu bilgiyi sağlık sorunlarını iyileştirmek için uygulayan bir bilim dalı olarak tanımlanmaktadır [1]. Epidemiyologlar hem hastalığın oluşumu hem de kontrolü ile ilgilenirler [6]. Bu nedenle epidemiyoloji, hastalıkların nedenlerini belirlemeyi, ilgili nüfusun sağlığını iyileştirmek için müdahaleler önermek ve bunları değerlendirmek için nüfusların sağlık durumunu ölçmeyi amaçladığından halk sağlığının en önemli alanlarından birini oluşturur.

Epidemiyolojik olayların matematikle tanımlanması, 1760 yılında Daniel Bernoulli'nin çiçek hastalığı aşılmasının etkinliğini değerlendiren modeliyle başlamıştır [7]. 1772'de Lambert, modele yaşa bağlı parametreler ekleyerek Bernoulli'nin çalışmasını genişletmiştir [8]. 1906 yılında Hamer, kızamık salgınlarının tekrarlayan doğasını anlamaya yönelik bir ayrık zaman modelini formüle etmiş ve analiz etmiştir. Bu model, insidansın duyarlı ve enfekte bireylerin yoğunluklarının çarpımına bağlı olduğunu varsayan ilk model olabilir [9]. 1911'de Ross, sıtma insidansı ve kontrolü ile ilgilenmiş ve sıtma için bir diferansiyel denklem modeli geliştirmiştir [10]. Kermack ve McKendrick, deterministik bölmeli salgın modellemesinin temelini atan önemli çalışmalar yayınlamıştır [11–13]. Bu çalışmalarda, salgının oluşması için duyarlıların yoğunluğunun kritik bir değeri aşması gerektiği şeklindeki salgın eşiği sonucunu elde ettiler.

Epidemiyolojik olayların matematiksel modeller kullanılarak modellenmesi, bu olayların dinamik davranışlarının tanımlanmasında, analizinde ve özellikle bulaşıcı hastalıkların yayılmasının kontrolünde önemli bir rol oynamaktadır [14]. COVID-19'un mekansal yayılımını anlamaya yardımcı olmak için de bazı matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu çalışmalar etkili kontrol stratejilerinin uygulanmasına yardımcı olmuştur [15].

Geçerli epidemiyolojik hastalık modelleri geliştirmek için önerilen on aşamalı bir model geliştirme süreci aşağıdaki Şekil 1.1’de verilmiştir.



Şekil 1.1 Epidemiyolojik model geliştirme süreci

Epidemiyolojik modelleme için standart bir sınıflandırma sistemi mevcut değildir [16]. Ancak araştırmacılar ve uygulamacılar modelleri birbirinden farklı yönlerini ele almışlardır. Son birkaç on yılda, diferansiyel ve fark denklemleriyle tanımlanan bulaşıcı hastalıkların dinamik modelleri hızla gelişmiş ve birçok klasik sonuç, hastalıkların kontrolü ve önlenmesinde önemli bir yer edinmiştir. O zamandan bu yana SIR, SEIR modelleri ve bunların çeşitli uzantıları gibi birçok bulaşıcı hastalık modelleme ve analizinde önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Epidemiyoloji modelleri için kullanılan bu kısaltmalar genellikle kompartımanlar arasındaki geçiş modellerine dayanır. Bunlar arasında MSEIR, MSEIRS, SEIR, SEIRS, SIR, SIRS, SEI, SEIS, SI ve SIS modelleri bulunmaktadır [9]. İnsan toplumunun ve ekonominin hızlı yükselişiyle birlikte, insan davranışlarının alanı genişleyerek daha yaygın hale gelmesiyle reaksiyon-difüzyon denklemleri salgın hastalık modellemesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Mekansal ve zamansal tanımlama için güçlü bir araç olarak, reaksiyon-difüzyon sistemleri yaygın olarak epidemiyolojide uygulanmaktadır [17–19]. Reaksiyon-difüzyon denklemleri epidemiyolojik modellerde, hastalığın ortadan kalkması, temel üreme katsayısının hesaplanması, hareketli dalga çözümünün varlığı, endemik denge varlığı gibi temel konuların odak noktası olmuştur [20–23]. Ayrıca sosyal çerçevede de epidemiyoloji modelleri ele alınmıştır [24].

### 2.1 Temel SIR Model

Kompartıman (bölmeli) modeller, Kermack ve McKendrick'in 1927'de geliştirdiği epidemik modellerle başlamıştır [11]. SIR modelinin bilinen en temel şekli olarak kullanılmaya devam etmektedir. Deterministik bir model, bir dizi diferansiyel denklemlerle tek bir sistemde tanımlanabilir ve homojen bir popülasyon varsayar. Burada sistem, dikkate alınan popülasyondaki tüm bireyleri, ve bu bireylerin belirli bölmeler arasındaki geçişlerini tanımlar. Bu bireylerin birbirleriyle eşit ve rastgele şekilde etkileşime girdiği bir popülasyon olarak kabul edilebilir. Popülasyon kavramı ise sistemin dinamiklerini etkileyen bireylerin toplam sayısını gösterir. Bu sayı, belirli bir ülke veya bölgeyi de kapsayabilir [25]. SIR modeli üç kompartımandan oluşan üç ayrı popülasyonu ele alır ve her bir kompartıman bir harf ile adlandırılır.

$t$  zaman diliminde;

- $S(t)$  (duyarlı): hastalığı taşıma riski olan ancak henüz enfekte olmamış bireyler.
- $I(t)$  ( enfekte): hastalığı atlatmış ve bu hastalığı başkalarına bulaştırabilen bireyler.
- $R(t)$  (iyileşen): hastalığı geçirmiş ve iyileşmiş ve kalıcı olarak bağışıklık kazanmış veya iyileşme ve kalıcı bağışıklık oluşana kadar izole edilmiş bireyleri temsil eder.

SIR model dört temel varsayım üzerinden ele alınmaktadır:

- Sisteme hiçbir doğum ve ölüm dahil edilmemiştir.

- Popülasyon büyüklüğü bir sabit  $N(t)$  olup;

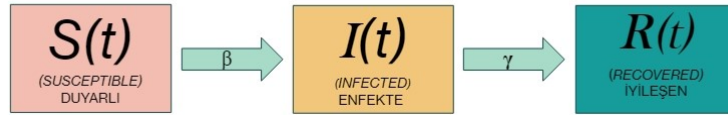
$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (N : [0, T] \rightarrow \mathbf{N}),$$

ifadesi sistemdeki toplam birey sayısının, her bir  $t \in [0, T]$  anında kompartımanların (duyarlı, enfekte, iyileşen) boyutlarının toplamına eşit olduğunu belirtir. Sistemin iyi tanımlanabilmesi için  $S(0)$ ,  $I(0)$  ve  $R(0)$  başlangıç koşulları ile birlikte verilmesi gerekir [26]. Popülasyon büyüklüğünün sabitliği,  $N(t)$ 'nin türevine bakılarak sağlanır. Eğer türev sıfırsa, popülasyon büyüklüğü sabittir:

$$N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad N(t) = N = \text{sabit.}$$

- İyileşen insanlar tamamen bağışıklık kazanırlar, öyle ki bir daha hastalığa yakalanamazlar.
- Enfekte olmuş bireyler de bulaşıcıdır.

SIR modeli için geçiş diyagramı Şekil 2.1'deki gibidir.



Şekil 2.1 SIR model geçiş diyagramı

$S(t)$ ,  $I(t)$  ve  $R(t)$  dinamikleri geçiş diyagramına göre aşağıdaki diferansiyel denklem sistemiyle gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada  $\beta$  enfeksiyon oranı,  $\gamma$  iyileşme oranıdır;  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ .

Araştırmacılar, salgının ne zaman biteceğine dair matematiksel çözüm yolu aradılar. Popülasyondaki duyarlı bireylerin sayısı birçok parametreye göre bir eşik değerinin alt sınırını aştığında salgının sona erdiğini gözlemlediler [27]. Toplam nüfus sabit olduğu için, üçüncü denklem ilk iki denklemden türetilebilir. İlk iki denklemi ele aldığımızda, salgının gerçekleşmesi için şu koşul sağlanmalıdır:

- $\frac{dI}{dt} > 0$  olmalıdır. Eğer  $\frac{dI}{dt} < 0$  ise salgın meydana gelmez.

Salgının başlaması için gerekli koşulda  $I$ 'nin dinamiğini yerine yazarsak,

$$\beta S > \gamma \Rightarrow S > \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.2)$$

dır.

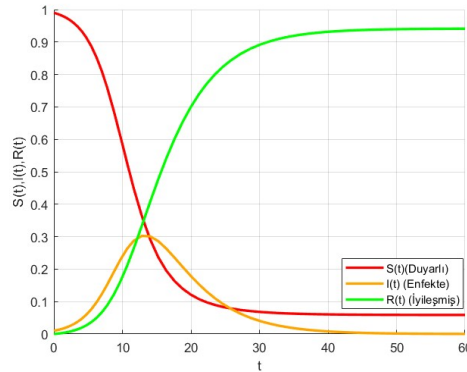
Salgının sona ermesi için enfekte bireylerin değişim oranının negatif olması gerekir:

$$S < \frac{\gamma}{\beta}. \quad (2.3)$$

**Temel Üreme Sayısı ( $\mathcal{R}_0$ ):** Temel üreme sayısı, bulaşıcı hastalığın var olduğu tamamen duyarlı bir popülasyonda, enfeksiyonu kontrol etmeye yönelik herhangi bir müdahale olmadan, bir kişinin enfekte ettiği kişi sayısının ortalamasıdır:

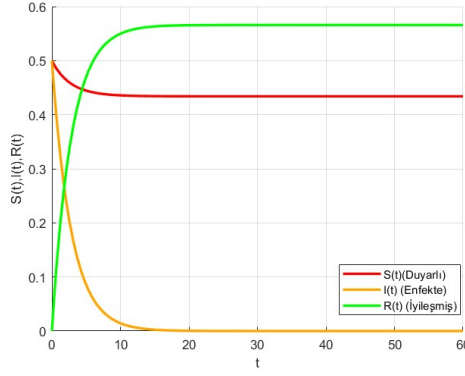
- Başlangıçta  $S = N$  olduğundan, oran  $\frac{\beta S}{\gamma} = \frac{\beta N}{\gamma} = \mathcal{R}_0$ .

SIR modellemesinde önemli bir parametre olan ( $\mathcal{R}_0$ ), özellikle salgının ne zaman başlayacağını anlamada önemlidir. Yani, ( $\mathcal{R}_0$ )  $> 1$  ise bir salgın meydana gelir. Eğer ( $\mathcal{R}_0$ )  $< 1$  ise salgın olmayacaktır.



**Şekil 2.2**  $\beta = 0.6$   $\gamma = 0.2$  iken SIR salgını

Şekil 2.2 grafiğine baktığımızda  $I(t)$ 'nin belli bir zaman artıp sonra azalıp sönümlendiği,  $S(t)$ 'nin zamanla azaldığı ve  $R(t)$ 'nin de zamanla arttığı görülmektedir. Bu durumda salgının gerçekleştiği görülür.



**Şekil 2.3**  $\beta = 0.1$   $\gamma = 0.4$  iken SIR salgını

Şekil 2.3 grafiğinde ise  $I(t)$ 'nin zamanla azalıp sönümlendiği,  $S(t)$ 'nin, Şekil 2.2 grafiğine göre daha az azalırken  $R(t)$ 'de artış olduğu görülür ve salgın gerçekleşmez.

Bulaşıcı hastalıkların epidemiyolojik dinamikleri, biyolojik organizasyonun farklı seviyelerinde meydana gelen doğrusal olmayan ve rastgele olayların bir kombinasyonundan kaynaklanmaktadır [28]. En dikkate değer olanı SIR tipi modeller ailesi [11, 19] olan çeşitli teorik yaklaşımlar, bulaşıcı hastalık salgınlarının farklı yönlerini incelemek için yararlı olmuştur.

### 2.1.1 Temel SIR Modelinde Maksimum Enfeksiyon Sayısı

Zaman içinde enfekte olan bireylerin maksimum sayısının ne olduğu ve bu sayıya ne zaman ulaşıldığı cevaplanması gereken önemli bir sorudur. Temel SIR modelinde prevalansın (enfekte bireylerin toplam popülasyona oranı) artmaya başladığı durumun, şu şekilde olduğu açıktır [25]:

$$I'(0) = \beta I(0)S(0) - \gamma I(0) = (\beta S(0) - \gamma)I(0) > 0. \quad (2.4)$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre ve  $I(0) = 0$  varsayımının yanı sıra  $I(0) \neq 0$  dikkate alındığında, prevalansın (enfekte bireylerin toplam popülasyona oranı) başlangıçta artışı için yeterli bir koşul aşağıdaki eşitsizlikle verilmektedir:

$$\beta S(0) - \gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta S(0)}{\gamma} > 1. \quad (2.5)$$

(2.1)'deki birinci ve ikinci denklemler  $R$ 'ye bağılı olmadığından üçüncü denklem sonraki adımlarda ihmal edilmiştir. (2.1)'de ikinci denklemi birinci denkleme bölerek  $I$  için  $I$ 'dan bağımsız bir denklem elde edilir.

$$\frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} \Leftrightarrow dI = \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta S}\right) dS. \quad (2.6)$$

(2.6) denklemi  $S \in [0, \infty)$  aralığında integrallenirse

$$I_\infty - I_0 = -(S_\infty - S_0) + \frac{\gamma}{\beta} \ln\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada  $S_0 = S(0)$ ,  $I_0 = I(0)$  ve  $S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$  olup,  $S_\infty$  **salgının nihai boyutu** olarak adlandırılır.

Eğer (2.6) sonlu bir  $S$  değerine kadar integrallenirse aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$I(S) = S_0 + I_0 - S + \frac{\gamma}{\beta} \ln(S). \quad (2.8)$$

Ayrıca (2.1)'deki birinci denklemi üçüncü denkleme bölersek

$$\frac{S'(t)}{R'(t)} = \frac{dS}{dR} = -\frac{\beta S}{\gamma} \quad (2.9)$$

elde edilir. Denklem (2.9) integrallenirse

$$S(R) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} N} > 0. \quad (2.10)$$

$S_\infty$ 'un her zaman pozitif olduğu ve dolayısıyla popülasyonda her zaman duyarlı kişilerin bulunacağı söylenebilir.

(2.1)'deki birinci denkleminin integralini aldığımızda

$$S_0 - S_\infty = \beta \int_0^\infty I(t) S(t) dt \quad (2.11)$$

ve eğer  $I(t)$ ,  $[0, \infty)$  aralığında integrallenebilirse,

$$S_0 - S_\infty \geq \beta S_\infty \int_0^\infty I(t) dt \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir. Denklem (2.12) kullanılarak denklem (2.7)'den

$$I_0 = S_\infty - S_0 + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left( \frac{S_0}{S_\infty} \right) \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\ln \left( \frac{S_0}{S_\infty} \right)}{S_0 + I_0 - S_\infty} \quad (2.13)$$

elde edilir.

$S = \frac{\gamma}{\beta}$  olduğunda, enfekte bireylerin maksimum sayısına ulaşılır. Bu gerçeği kullanarak, salgında (veya pandemide) meydana gelen enfekte kompartımanın maksimum büyüklüğü  $I_{\max}$  şu şekilde verilir:

$$I_{\max} = \frac{-\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left( \frac{\gamma}{\beta} \right) + S_0 + I_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln (S_0). \quad (2.14)$$

### 2.1.2 İnsidans Oranı

Belirli bir zaman aralığında meydana gelen yeni enfeksiyonların sayısına insidans denilmektedir. Yani SIR modelinde, duyarlı bireylerden enfekte bireylere geçen kişi sayısı olarak temsil edilir [25].

İnsidans oranı ise bu yeni vakaların, aynı dönemde hastalık riski taşıyan toplam kişi-zaman birimine oranıdır. Halk sağlığı uygulamalarında yaygın olarak kullanılan bu oran, genellikle yeni vaka sayısının, risk altındaki bireylerin ortalama sayısına bölünüp belirli bir çarpanla ifade edilmesiyle hesaplanır. İnsidans, hastalığın yayılma hızını anlamak için önemli bir parametre olup, hem oransal hem de sıklık olarak ele alınabilir [1].

Farklı insidans oranlarının uygulanması, temel modelin davranışlarını etkileyebilir. Dört farklı insidans oranı tanımlanmıştır [29]:

- **Bilineer insidans oranı** ( $\beta SI$ ): Kimyasal kinetik modellerinden, kimyasalların birbirine rastgele çarparak reaksiyona girmesi şeklinde tanımlanan **kütle hareketi yasasından** elde edilmiştir. Kütle hareketi yasası insidans, nüfus büyüklüğü ve yoğunluğu arttıkça temas oranının arttığı grip (influenza) ve SARS gibi hastalıklarda yaygın olarak kullanılır [26].
- **Standart insidans oranı** ( $\beta \frac{S}{N} I$ ): Her bir temas başına enfeksiyon olasılığı, enfekte bireylerin sayısına bağlı olarak değişebilir.

Bilineer insidansından farklı olarak, temas oranı toplam popülasyon büyüklüğüne bölünerek normalize edilir. Sabit popülasyon durumunda iki model aynı sonucu verir.

- **Enfekte birey sayısına bağlı doyunluk insidansı:**

$$\beta \frac{SI}{1 + \alpha_1 S}, \quad \alpha_1 \text{ pozitif bir sabit.} \quad (2.15)$$

$S$  popülasyonundaki bireylerin davranış değişiklikleri ve popülasyon artışıyla ilişkilidir.

- **Duyarlı birey sayısına bağlı doyunluk insidansı:**

Enfekte bireylerin sayısının artmasıyla meydana gelir.  $S$  bölmesinden  $I$  bölmesine geçiş oranının  $I$  popülasyon büyüklüğü ile ters orantılı olduğunu ifade eder.

$$\beta \frac{SI}{1 + \alpha_2 I}, \quad \alpha_2 \text{ pozitif bir sabit.} \quad (2.16)$$

Doyunluk insidansları (2.15) ve (2.16) etkinliğinin azalması  $\alpha_1$  veya  $\alpha_2$  parametrelerine bağlı olarak  $S$  bölmesinden  $I$ 'ya geçiş oranını her birim zamanda azaltır [29].

Eğer (2.15) ve (2.16) limitleri sırasıyla  $S$  veya  $I$ 'nin sonsuza gitme eğilimi olarak kabul edilirse, aşağıdaki insidans limitleri elde edilir. Bu da (2.15) için  $S$ 'den veya (2.16) için  $I$ 'dan bağımsız bir limit olduğu anlamına gelmektedir:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S} &= \frac{\beta I}{\alpha_1}, \\ \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{\beta SI}{1 + \alpha_2 I} &= \frac{\beta S}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

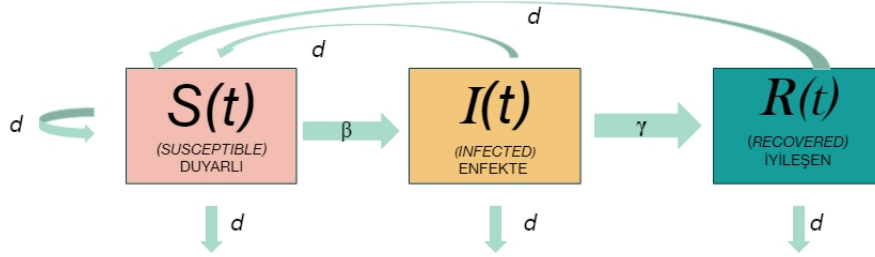
Sonuç olarak, enfekte seviyeleri yüksek olduğunda enfektif ve duyarlı kişiler arasındaki etkili temas sayısı doyunluğa ulaşır.

Ayrıca, her iki doyunluk etkisini birleştiren bir model de mümkündür:

$$\beta \frac{SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I}, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0. \quad (2.18)$$

### 2.1.3 Demografiyi İçeren SIR Modeli

Klasik SIR modele, doğum-ölüm oranlarının eklenmesiyle oluşan modeldir. SIR modelinde incelenen popülasyonun sabit bir  $N$  olduğu varsayımını belirtmiştik. Burada popülasyonun sabit tutulması için demografik bir modelde doğum-ölüm oranlarının birbirine eşit kabul edilmesiyle sağlanır. Doğum-ölüm oranı içeren SIR model geçiş diyagramı Şekil 2.4 gibidir.



Şekil 2.4 Doğum-ölüm oranı içeren SIR modeli geçiş diyagramı

Geçiş diyagramı göre doğum-ölüm içeren SIR modeli aşağıdaki diferansiyel denklem sistemiyle gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta SI}{N} + d(I + R), \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + d)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - dR.\end{aligned}\tag{2.19}$$

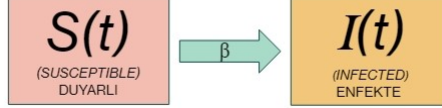
Burada  $\beta$  bulaşma oranı,  $\gamma$  iyileşme oranı ve  $d$  doğum-ölüm oranıdır.

Demografi faktörlerini SIR salgın modeline dahil etmek için, tüm bireylerin duyarlı olarak doğduğu varsayılmaktadır. Temel SIR modeli, sadece hastalığın yayılmasını incelerken, demografiyi içeren versiyonu nüfus değişimlerini de göz önünde bulundurur. Yani, doğum ve ölüm gibi faktörler modele eklenerek, uzun vadeli hastalık dinamikleri daha gerçekçi bir Şekilde analiz edilir.

## 2.2 SI Model

En basit kompartıman (bölmeli) tipi modellerden olan, temel SIR modelin yalnızca iki popülasyonu dikkate alan bir salgın matematiksel modelidir [11]. Bildiğimiz gibi  $S$  (duyarlı) ve  $I$  (enfekte) bölmelerine karşılık gelmektedir. Popülasyon burda da sabittir.

SI modeli için geçiş diyagramı Şekil 2.5'deki gibidir.



Şekil 2.5 SI Model geçiş diyagramı

$\beta > 0$  olup, hastalığa karşı duyarlı bireylerin enfeksiyon oranıdır.

Geçiş diyagramına göre SI için diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

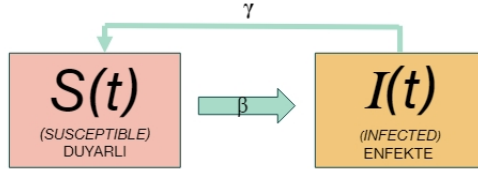
Başlangıç koşulları olarak  $S(0) > 0$ ,  $I(0) > 0$  ve  $S(0) + I(0) = N$  olduğu bilindiğinden, toplam nüfus sabit kalmakta ve her zaman  $S(t) + I(t) = N$  eşitliği sağlanmaktadır. Bu eşitliği kullanarak,  $I$  için yazılan diferansiyel denklemde  $S$  yerine  $(N - I)$  ifadesi yazarsak;

$$\frac{dI}{dt} = \beta I \left(1 - \frac{I}{N}\right) \quad (2.21)$$

olur. (2.21) 'deki denklem, taşıma kapasitesi ( $N$ ) olan **lojistik büyüme denklemi** ile aynıdır. (2.21) salgının daima yayılacağı ve duyarlı tüm bireylerin enfekte olacağını gösterir [30]. Bu tür modeller, grip (influenza) gibi yüksek bulaşıcılığa sahip hastalıklar için uygulanabilir. Bu modelde bireyler yalnızca duyarlı ( $S$ ) ve enfekte ( $I$ ) bölmeleri arasında hareket eder. Enfekte olanlar iyileşmez ve sürekli olarak hastalığı yaymaya devam eder. Bu tür hastalıklarda, popülasyonun tamamına yakını enfekte olur ve salgının süresi yalnız enfeksiyonun yayılmasıyla ilgili olup, iyileşme süreci dikkate alınmaz [31].

### 2.3 SIS Model

İki kompartımanı olan SIS modeli bir enfeksiyonun bağışıklık oluşturmadığı, yani duyarlı kişiler enfekte olup, iyileştikten sonrada tekrar duyarlı hale geldiği hastalıklar için uygun bir modeldir [32]. SIS tipi modeller, frengi ve gonore (bel soğukluğu) gibi cinsel yolla bulaşan hastalıklara uygulanmıştır. Söz konusu hastalıklarda enfekte bireyler tedavi edilmekte ancak hemen tekrar duyarlı hale gelmektedir [31]. SIS modeli için geçiş diyagramı Şekil 2.6'daki gibidir.



Şekil 2.6 SIS model geçiş diyagramı

Temel SIR model varsayımlarına ek olarak doğum ve ölümlerin olmadığı varsayımını da göz önüne alarak basit bir SIS modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta SI}{N} + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Burada  $\beta$  enfeksiyon oranı,  $\gamma$  iyileşme oranıdır;  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ .

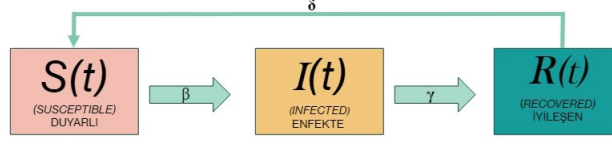
Başlangıç koşulları olarak  $S(0) > 0$ ,  $I(0) > 0$  ve  $S(0) + I(0) = N$  olduğu bilindiğinden, toplam nüfus sabit kalmakta ve her zaman  $S(t) + I(t) = N$  eşitliği sağlanmaktadır. Bu eşitliği kullanarak,  $I$  için yazılan diferansiyel denklemde  $S$  yerine  $(N - I)$  ifadesi yazılırsa:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I \left( 1 - \frac{\beta}{(\beta - \gamma)N} I \right), \quad \beta \neq \gamma.\tag{2.23}$$

- $\beta > \gamma$  ise, enfekte nüfus  $\frac{(\beta - \gamma)N}{\beta}$  değerine yaklaşır ve duyarlı nüfus  $\frac{\gamma N}{\beta}$  değerine yaklaşır. Hastalık salgın olmaya devam eder.
- $\beta \leq \gamma$  ise, enfekte nüfus sıfıra yaklaşır ve salgın devam etmez.

## 2.4 SIRS Model

Bu modelde de doğum ve ölümü ihmal edebileceğimizi varsayıyoruz.



Şekil 2.7 SIRS model geçiş diyagramı

Şekil 2.7 SIRS salgın modeli diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I = I \left( \frac{\beta S}{N} - \gamma \right), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \delta R.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Enfeksiyon oranı  $\beta$ , iyileşme oranı  $\gamma$  ve iyileşmiş bireylerin tekrar duyarlı bireylere dönüşme oranı  $\delta$  olup, tümü pozitif değerlerdir ( $\beta, \gamma, \delta > 0$ ).

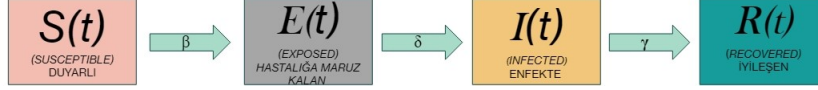
Burada da  $S(0) > 0$ ,  $I(0) > 0$ ,  $R(0) \geq 0$  ve  $S(0) + I(0) + R(0) = N$  olduğu varsayılmaktadır. Bu nedenle,  $S(t) + I(t) + R(t) = N$  korunur.  $R(t)$  değişkeni,  $S(t)$  ve  $I(t)$  değişkenleri cinsinden ifade edilebildiği için, yalnızca  $S$  ve  $I$  değişkenlerini incelemek yeterlidir. Bu durumda,  $S$  ve  $I$  için diferansiyel denklemler şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} + \delta(N - S - I), \\ \frac{dI}{dt} &= I \left( \frac{\beta S}{N} - \gamma \right).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Bu modelin dinamikleri, SIR modelinden farklıdır. Hastalığın her zaman yok olması gerekmez. Bağışıklığını kaybeden bireyler nedeniyle hastalık endemik hale gelebilir.

## 2.5 SEIR Model

Temel epidemiyolojik modellerden biri olan SEIR modeli, dört kompartımana ayrılmıştır [26].  $S(t), E(t), I(t), R(t)$  şeklinde olup, önceki modellerden bildiğimiz tanımlar dışında bu modele, enfekte olmuş ancak bulaşıcı olmayan yani hastalığa maruz kalan (exposed) birey özelliklerini taşıyan  $E(t)$  kompartımanı eklenmiştir. SEIR model geçiş diyagramı Şekil 2.8 gibidir.



Şekil 2.8 SEIR model geçiş diyagramı

Geçiş diyagramında bulunan parametreleri incelediğimizde;

- Enfeksiyon oranı ( $\beta > 0$ ), hastalığın yayılma hızını gösterir ve duyarlı ( $S$ ) ve enfekte ( $I$ ) bireyler arasındaki bulaşma olasılığını ifade eder.
- Kuluçka oranı ( $\delta$ ), gizli (latent) dönemdeki bireylerin bulaşıcı hale gelme hızıdır.
- İyileşme oranı ( $\gamma > 0$ ), enfekte bireylerin hastalıktan iyileşme hızını gösterir.

SEIR modelin dinamikleri aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi formundadır.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \delta E, \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Duyarlı bireyler, enfekte bireylerle temas sonucu enfekte olur. Ancak doğrudan  $S$  bölmesinden  $I$  bölmesine geçmezler. İlk olarak gizli (latent) enfeksiyon durumu olan  $E$  bölmesine girilir. Bu modelde de doğum ve ölüm oranları ihmal edilir ve toplam nüfus sabit kabul edilir:

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N = \text{sabit} \quad \forall t \in \mathbf{N}.$$

### 2.5.1 Reaksiyon-Difüzyon SIR Modeli

1981’de Anderson ve arkadaşları tilki popülasyonları ve kuduz arasındaki etkileşimin genel dinamikleri için üç kompartımanlı bir matematiksel model sunmuştur [33]. 1986’da Murray ve arkadaşları yalnızca zamana bağlı durumu ele alan bu matematiksel modele difüzyon terimleri ekleyerek hastalığın mekanda nasıl yayıldığını da analiz etmiştir [34]. SIR modelde, mekansal yayılımı hesaba kattığımızda, difüzyon terimlerini ekleyerek basit bir reaksiyon-difüzyon SIR modeli şu hale gelir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} - m_2 \Delta S &= -\beta IS, \\ \frac{\partial I}{\partial t} - m_1 \Delta I &= \beta IS - \gamma I, \\ \frac{\partial R}{\partial t} - m_3 \Delta R &= \gamma I.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Burada  $m_1, m_2, m_3$  difüzyon katsayılarıdır. Bu model, hem teori açısından hem de uygulamalar açısından epidemiyoloji için önemlidir. Mevcut matematiksel yaklaşımların çoğu bu modele oldukça özgüdür ve daha geniş bir sistem sınıfına genelleştirilemez [24].

### 2.6 Ele Alınan Model

Çalışmamızda ele aldığımız model, sosyal huzursuzluk seviyesi ve sosyal gerilimin bağlantılı dinamiklerini hesaba katmak için epidemiyoloji modellerini kullanmaktan oluşmaktadır [24]. Belirli durumların  $S$  ve  $I$  (duyarlı-enfekte) epidemiyoloji modeli ile iyi bir şekilde yakalandığı belirtilmektedir. Burada  $R$ ,  $I$ ’dan türetildiği için ihmal edilebilir. (2.27)’de ilk iki kompartımanı kullanılarak aşağıdaki reaksiyon-difüzyon sistemlerinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - m_1 \Delta u &= \rho(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - m_2 \Delta v &= \sigma(u, v), \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Belirli bir  $x$  konumunda ve  $t$  zamanında  $u(x, t)$  toplumsal huzursuzluk seviyesini ( $I$ ),  $v(x, t)$  ifadesi ise sosyal gerilim seviyesini ( $S$ ) temsil etmektedir.

Burada,  $m_1\Delta u(x, t)$  ve  $m_2\Delta v(x, t)$  difüzyon terimleridir.  $\rho$  ve  $\sigma$  reaksiyon terimleri,  $u$  ve  $v$ 'nin içsel büyümelerini ve geri çekilmelerini modellemektedir. Sosyal huzursuzluğun olmadığı sakin bir dönemde  $u = 0$  dır.  $v_b$  ise sosyal gerilimin bu dönemdeki temel değerini ifade eder. Sistem durağan (sabit) durumda, yani  $(u = 0, v = v_b)$  için, bir denge durumu oluşturur.  $(0, v_b)$  (2.28) sisteminin bir sabit (durağan) bir çözüm noktasıdır. Yani  $\rho(0, v_b) = \sigma(0, v_b) = 0$  dır. Ayrıca  $u = 0$  iken  $v_b$  (2.28)'in ikinci denklemi için zayıf kararlı bir durumdur, yani

- $v \leq v_b$  ise  $\sigma(0, v) \geq 0$
- $v \geq v_b$  ise  $\sigma(0, v) \leq 0$

olur.

Reaksiyon terimleri, modelin sosyal huzursuzluğun seviyesini ( $u$ ) ve sosyal gerilimin seviyesini ( $v$ ) temsil eder.

$\rho$  terimi:

$$\rho(u, v) = u [r(v)g(u) - \omega] \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanır.

$g(u)$  terimi, endojen faktörü (veya öz pekiştirme/doygunluk mekanizmasını) temsil eder. Doygunluk etkisini hesaba katmak için  $g(u)$  fonksiyonu artmayan ve  $u = 0$  için pozitif alırız. Yani başlangıçta büyüme hızla artabilirken, belli bir noktadan sonra artış hızı yavaşlar ve sonunda sabitlenir. Örneğin  $g(u) = 1 - u$  veya  $g(u) = 1$  alınabilir.  $\omega$  parametresi, öz pekiştirme (toplumsal huzursuzluğun kendi kendini besleyip artırması) olmadığı durumda toplumsal huzursuzluğun doğal yatışma (sakinleşme) hızıdır. Yani eğer dışarıdan bir etki yada olay olmazsa, huzursuzluk zamanla yatışır ve yatışmanın ne kadar hızlı olduğunu  $\omega$  belirler.

$r(v)$ , sosyal gerilimin oluşturduğu uyarıcı rolü modellemektedir. Endojen faktör,  $r(v)$  fonksiyonu tarafından düzenlenmektedir.  $r(v)$  fonksiyonu negatif olmayan ve artan bir fonksiyon olarak seçilir. Bu terimi, endojen (içsel) büyümeyi açıp-kapan bir anahtar gibi düşünebiliriz.

Örneğin,  $r(v)$  lineer olabilir ( $r(v) = v$  gibi) veya bir sigmoid fonksiyon olarak alınabilir:

$$\frac{1}{1 + e^{(\alpha-v)\beta}} \quad (2.30)$$

burada  $\alpha \geq 0$  ifadesi geçişin gerçekleştiği eşik değerini belirlerken,  $\beta > 0$  parametresi sakin (relaxed) durum ile hareketli (excited) durum arasındaki geçişin ne kadar keskin (sert) olacağını ölçer (kontrol eder).  $\beta$  değeri ne kadar büyükse geçiş o kadar ani (sert);  $\beta$  küçükse geçiş daha yumuşaktır.

$\sigma$  terimi : (2.28)'in ikinci denkleminde reaksiyon terimi olarak tanımlanmıştır. Netlik açısından,  $v$ 'yi  $(0, 1)$  aralığında normalize etmek istiyoruz. Bu nedenle  $v_0$ 'ın  $(0, 1)$  aralığında olduğunu ve  $\sigma(u, 0) \geq 0$ ,  $\sigma(u, 1) \leq 0$  olduğunu varsayacağız. Böylece  $\sigma$  terimi ile ilgili olarak aşağıdaki iki model sınıfına özel olarak odaklanıyoruz ve her bir durum, sistemin tipik niteliksel davranışını yansıtır.

**1. Gerginlik engelleyici (Tension inhibiting) durum:** Bu durum geçici bir sosyal huzursuzluk hareketi (isyan v.b) temsil eder.  $u > 0$ ,  $v \in (0, 1)$  için  $\sigma(u, v) < 0$  olur. Bu durumda  $u$ 'nun aniden artması  $v$ 'nin yani gerilimin azalmasına neden olur. Tepkime terimi  $\sigma(u, v)$ 'nin negatif değer olması sistemdeki sosyal gerilimin  $v$ 'nin zamanla azalacağı anlamına gelir.  $v$  belirli bir eşik değer altına düştüğünde,  $u$  kaybolur ve sonunda durur. Bu durum,  $u$ 'nun yüksek değerleriyle birlikte sistemin içsel olarak kendini yatıştırması şeklinde yorumlanabilir.

Bu model,  $\sigma(u, v) = -\beta uv$ ,  $\beta > 0$  olan SI epidemiyoloji modeline benzer bir davranış sergiler.

**2. Gerginlik artıran (Tension enhancing) durum:** Bu durum, sosyal huzursuzluğun hem sosyal gerilim arttıkça hem de bir doygunluk etkisi ile sınırlı olduğu bir durumu temsil eder.  $u > 0$ ,  $v \in (0, 1)$  için  $\sigma(u, v) > 0$  olur. Bu durumda,  $u$ 'nun aniden artışı  $v$ 'nin artmasına neden olur. Bu durum, kalıcı bir karışıklığa neden olduğunu gösterir ve işbirlikçi bir sisteme (yani bir değişken artınca diğerini de artırır- $u$  artarsa  $v$  artar,  $v$  artarsa  $u$  artar) benzer davranış sergiler. Örnek olarak  $\sigma(u, v) = uv(1 - v)$  alınabilir.

Modelimizi reaksiyon terimlerinin açılımıyla tekrardan yazarsak;

$$\begin{cases} \partial_t u - m_1 \Delta u = \rho(u, v) := u(r(v)g(u) - \omega) \\ \partial_t v - m_2 \Delta v = \sigma(u, v) \end{cases} \quad (2.31)$$

**Ele aldığımız modelde, aşağıdaki varsayımlar geçerli olacaktır:**

- $m_1 > 0, m_2 \geq 0$  ve  $\omega > 0$ .
- $g(u)$ ,  $[0, +\infty)$  aralığında düzgün ve artmayan bir fonksiyondur;  $g(0) > 0$ , örneğin  $g(u) = 1 - u$  veya  $g(u) = 1$ .
- $r(v)$ ,  $(0, 1)$  aralığında düzgün, negatif olmayan ve artan bir fonksiyondur. Örneğin  $r(v) = v$ .
- $r(0) < \frac{\omega}{g(0)} < r(1)$  ve şu şekilde tanımlanır:

$$v^* = r^{-1} \left( \frac{\omega}{g(0)} \right) \in (0, 1). \quad (2.32)$$

- $\sigma(0, \cdot)$ , fonksiyonun (zayıf) kararlı bir sıfırı vardır:  $v_b \in (0, 1)$ . Yani,
 
$$\forall v \in (0, v_b) \quad \text{için} \quad \sigma(0, v) \geq 0,$$

$$\forall v \in (v_b, 1) \quad \text{için} \quad \sigma(0, v) \leq 0.$$
- $\sigma(u, v)$  düzgün bir fonksiyondur ve  $v = 0$  ve  $v = 1$  noktalarında doyumluk koşullarını sağlar:
 
$$\forall u \geq 0 \quad \text{için} \quad \sigma(u, 0) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sigma(u, 1) \leq 0.$$
- $u_0(x) > 0$  sınırlıdır ve  $v_0 = v_b$ 'dir, burada  $v_b$  yukarıda bahsedilen sabittir.

## 3.1 Giriş

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, karmaşık ve zamana bağlı sistemlerin davranışlarını tahmin etme ve açıklama yetenekleri nedeniyle hem teorik hem de uygulamalı bilimler için çok önemlidir. Lineer olmayan popülasyon dinamikleri ve soliton teorisi gibi çeşitli bilimsel alanlardaki fiziksel modeller, fizik, kimya, biyoloji, matematiksel fizik ve plazma gibi disiplinler için önemlidir [35]. Soliton kavramını detaylandırmak faydalıdır çünkü gözlemlenen fenomenlerin açıklanmasında önemli bir rol oynar. Zabusky ve Kruskal, 1965'te soliter dalgaların özel bir hali için soliton terimini kullanarak, bu dalgaların etkileşimleri sonrasında bile şekil ve boyutlarını koruyarak birbirlerine çarpmadan geçebildiklerini keşfetmişlerdir [36]. Yani solitonlar, lineer olmayan dalga denklemlerinde ortaya çıkan ve kendini koruyan dalgalar diyebiliriz. Soliton çözümünü bulmak için dalga dönüşümü yöntemi uygulanabilir. Bu bağlamda,

$$u(x, t) = f(\varphi), \quad \varphi = x - ct \quad (3.1)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılır. Burada  $c$  parametresi dalganın uzayda hangi yöne hareket ettiğini gösterir. Pozitif  $c$  değerleri dalganın sağa negatif değerleri için ise sola hareketidir. Lineer olmayan evrim denklemleri teorik açıdan, varolan durumla orantısız değişim gösteren karmaşık sistemlerin zamanla değişen yapısını inceler [37]. Lineer olmayan evrim denklemlerinin analizinden elde edilen kesin çözümler, sistemin davranışının kesin matematiksel tanımlarını sağlayarak fiziksel olaylara ilişkin anlayışımızı derinleştirmektedir. Bu çözümler, karmaşık sistemlerin nasıl geliştiğini, etkileşime girdiğini ve çeşitli dış etkilere nasıl yanıt verdiğini açıklamaya yardımcı olarak fizik, biyoloji ve mühendislik gibi alanlarda ilerlemelere katkıda bulunur. Özellikle, ilerleyen dalga çözümleri, problemin fiziksel yönlerine dair daha derinlemesine bilgi sağlar. Bu çözümler, sistemin dinamiğini daha iyi anlamamıza yardımcı olur ve böylece fiziksel mekanizmaların

işleyişine dair daha kapsamlı bir anlayış geliştirir, bu da çeşitli uygulamalara olanak tanır [38]. Tanh yöntemi [39], tanh-coth yöntemi [40], simetri yöntemi [41], exp-fonksiyon yöntemi [42], homojen denge [43],  $(G'/G)$ -açılım yöntemi [44] gibi yöntemler lineer olmayan evrim denklemlerinin kesin çözümünü oluşturmak için kullanılır.  $(G'/G)$ -açılım yönteminin diğer yöntemlere göre temel avantajları, uygun bir parametre seçimi ile mevcut yöntemlerle elde edilen bazı bilinen çözümlere dönüşen bazı serbest parametrelerle daha genel çözümler vermesidir [45]. Günümüzde, karmaşık lineer olmayan denklemlerin kesin çözümlerinin, özellikle de soliter dalga çözümlerini araştırılması, gerçek dünyada, örneğin matematiksel ve fiziksel olayların farklı yönlerinde beklenen etki nedeniyle önemli bir rol oynamaktadır. Öncü çalışma Wang ve arkadaşları [44], çeşitli fiziksel sistemleri modelleyen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri ilerleyen dalga çözümlerini  $(G'/G)$ -açılım yöntemiyle elde etmişlerdir. Bu yöntem, birçok denklem sistemine uygulanmıştır [46–48]. İlerleyen dalga çözümleri, biyolojik popülasyon, akışkanlar mekaniği, kimyasal reaksiyonlar matematiksel ekoloji gibi çok çeşitli alanları kapsamaktadır [49–51].  $(G'/G)$ -açılım yöntemi, diğer yöntemlere kıyasla bazı serbest parametrelerle daha genel çözümler sunar ve başlangıç sınır koşulu veya başlangıç deneme fonksiyonu gerektirmeden doğrudan ele alınabilir. Bu yöntem, daha geniş bir uygulama alanı sağlayarak önemli avantajlar sunar. Son zamanlarda, birçok araştırmacı bazı lineer olmayan evrim denklemlerini bu yöntemle çalışmıştır. Mingliang Wang,  $(G'/G)$ -açılım yöntemi adı verilen bir yöntem önermiştir [44]. Bu makalenin amacı, bilinen iki lineer olmayan evrim denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini bu  $(G'/G)$ -açılım yöntemi kullanarak bulmaktır. Literatürde, reaksiyon-difüzyon SIR modellerinin analitik çözümüne odaklanan çalışmalar sınırlı olup, çoğu çalışma sayısal yöntemlere dayanmakta ve analitik yaklaşımlar genellikle ihmal edilmektedir. Bu tezde, reaksiyon-difüzyon SIR modelinin bir örneğinin analitik çözümünü inceleyerek, literatürdeki bu boşluğu doldurmayı amaçlamaktayız. Ayrıca, modelin mekansal ve zamansal özellikleri, epidemiyolojik süreçlerin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunacaktır. Bu tezde, ilerleyen (travelling) dalga çözümlerini bulmak için  $(G'/G)$ -açılım yöntemi kullanılmıştır [52]. Salgın modellemesinde, ilerleyen dalga çözümleri, başlangıçtaki hastalısız dengeden başka bir hastalısız duruma geçişin hareketli bir bölgesini temsil eder. İlerleyen dalgalara ilişkin sonuçlar, bir hastalığın coğrafi olarak ne kadar hızlı yayıldığını tahmin etmeye ve hastalığı önlemek için ilgili önlemleri almaya yardımcı olabilir. İlerleyen dalga çözümleri, her iki popülasyon da reaksiyona girdiğinde ortaya çıkan difüzyon fenomenine ışık tutmakta ve hız ile yayılma zamanı arasındaki ilişkinin tahmin edilmesine olanak sağlamaktadır [53].

### 3.1.1 $(G'/G)$ -Açılım Yöntemi

Lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım:

$$Q(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (3.2)$$

$Q$ ,  $u = u(x, t)$  ve  $u$ 'nun kısmi türevleri cinsinden bir polinom olup, en yüksek mertebeden türevler ve lineer olmayan terimler içermektedir. (3.2) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini bulmak için bağımsız  $x$  ve  $t$  değişkenleri tek bir değişken olan  $\varphi$ , dalga değişkeni ile  $\varphi = x - ct$  şeklinde birleştirilir. Burada  $c$  dalganın hızını göstermektedir.  $u(x, t) = U(\varphi)$  olarak kabul ettiğimizde (3.2) kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki adi diferansiyel denkleme indirgenir:

$$R(U, cU', U', c^2U'', U'', \dots) = 0. \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) integrallenebiliyorsa denklemin mertebesi düşürülür.

$G = G(\varphi)$  fonksiyonu ikinci mertebeden lineer

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.4)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olmak üzere (3.3) denkleminin çözümleri

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i \left( \frac{G'}{G} \right)^i \quad (3.5)$$

şeklinde  $\left( \frac{G'}{G} \right)$  nin bir polinomu olduğu varsayılır.

Burada  $\lambda, \mu$  ve  $a_i$ 'ler ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir.  $N$  pozitif tam sayısı (3.3) denklemindeki en yüksek dereceli lineer olmayan terim ile en yüksek mertebeden türevli terimin arasında oluşacak homojen dengeleme prensibinden bulunur.

Dengeleme prensibi;

$U(\varphi)$ 'nin derecesi  $D[U(\varphi)] = N$  olarak tanımlarsak (3.3) denklemindeki diğer oluşacak ifadelerin dereceleri:

- $D\left[\frac{d^k U}{d\varphi^k}\right] = N + k, \quad D[U^l] = Nl$
- $D\left[U^l \left(\frac{d^k U}{d\varphi^k}\right)^m\right] = m(N + k) + Nl$

şeklinde yazılabilir.

(3.4) denkleminin çözümleri aşağıda verilmektedir:

- $\lambda^2 - 4\mu > 0$  ise

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\varphi}{2}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\varphi}{2}\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\varphi}{2}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\varphi}{2}\right)} \right) \quad (3.6)$$

- $\lambda^2 - 4\mu < 0$  ise

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( \frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\varphi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\varphi}{2}\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\varphi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\varphi}{2}\right)} \right) \quad (3.7)$$

- $\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise

$$\frac{G'}{G} = \frac{-\lambda}{2} + \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right) \quad (3.8)$$

$U(\varphi)$  ifadesi, (3.5) ve (3.4) yardımıyla  $U(\varphi)$ 'nin  $\varphi$ 'ye bağlı türevleri bulunarak (3.3) denkleminde yerine konulur. Elde edilen ifade  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin aynı dereceden terimleri bir araya getirilerek ve katsayıları sıfıra eşitlenerek lineer olmayan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi bir yazılım programı yardımıyla çözümlenerek  $a_i, c, \lambda, \mu$  değerleri bulunur. Bulunan  $a_i, c, \lambda, \mu$  değerleri (3.4) denkleminin çözümleri yardımıyla (3.6)-(3.8) çözümleri (3.5)'de yerine yazılarak (3.2) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin çözümleri elde edilir.

### 3.1.2 Gerginlik Engelleyici Durumun Kesin Çözümü

$$g(u) = 1, \quad r(v) = v, \quad \sigma(u, v) = -\beta uv, \quad \rho(u, v) = u(r(v)g(u) - \omega)$$

şeklindeki fonksiyonları (2.28)'de yerine yazdığımızda gerginlik engelleyici duruma karşılık gelen model:

$$u_t - m_1 u_{xx} = u(v - \omega) \quad (3.9)$$

$$v_t - m_2 v_{xx} = -\beta uv \quad (3.10)$$

şeklinde olur.

$(\frac{G'}{G})$ -açılım yöntemini (3.9)- (3.10) denklem sistemine uygulayalım;

**1. Adım:** (3.9)-(3.10) denklem sisteminde  $\varphi = x - ct$  dalga dönüşümü kullanılırsa,

$u(x, t) = U(\varphi)$  ve  $v(x, t) = V(\varphi)$  olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -cU',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} U' = \frac{\partial U'}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U''$$

olur. Böylece (3.9) ve (3.10) denklemleri

$$-cU' - m_1 U'' - UV + U\omega = 0 \quad (3.11)$$

$$-cV' - m_2 V'' + \beta UV = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemlere dönüşmüş olur.

**2. Adım:** (3.11)-(3.12) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i \left( \frac{G'}{G} \right)^i \quad (3.13)$$

$$V(\varphi) = \sum_{i=1}^M b_i \left( \frac{G'}{G} \right)^i \quad (3.14)$$

şeklinde olduğu varsayılır.

Burada  $a_i$  ve  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) keyfi sabitlerdir.  $G = G(\varphi)$ ,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.15)$$

ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemini sağlar. Burada  $\lambda, \mu$  sabitlerdir.

$N$  ve  $M$  tamsayıları ise (3.11)'de  $U''$  ve  $UV$ , (3.12)'de  $V''$  ve  $UV$  arasındaki dengeleme prensibinden  $N + 2 = N + M$ ,  $M + 2 = N + M$  ifadelerinden  $N = 2$ ,  $M = 2$  olarak bulunur.

Böylece  $U(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$  çözümleri

$$U(\varphi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'}{G} \right) + a_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \quad (3.16)$$

$$V(\varphi) = b_0 + b_1 \left( \frac{G'}{G} \right) + b_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \quad (3.17)$$

formunda olur.

**3. Adım:** (3.16) ve (3.17) denklemleri, (3.11)-(3.12) adi diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılır. Elde edilen ifadede,  $\frac{G'}{G}$  ifadesinin aynı kuvvetine sahip tüm terimleri bir araya getirilerek ve her bir katsayıyı sıfıra eşitlenerek, aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : a_0\omega - a_0b_0 + a_1c\mu - 2a_2\mu^2m_1 - a_1\mu\lambda m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -a_0b_1 - a_1b_0 + a_1\omega + 2a_2c\mu + a_1c\lambda - 2a_1\mu m_1 - a_1\lambda^2m_1 - 6a_2\mu\lambda m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : -a_0b_2 - a_1b_1 - a_2b_0 + a_1c + a_2\omega + 2a_2c\lambda - 8a_2\mu m_1 - 3a_1\lambda m_1 - 4a_2\lambda^2m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : -a_1b_2 - a_2b_1 + 2a_2c - 2a_1m_1 - 10a_2\lambda m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -a_2b_2 - 6a_2m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : a_0b_0\beta + b_1c\mu - 2b_2\mu^2m_2 - b_1\mu\lambda m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : a_0b_1\beta + a_1b_0\beta + 2b_2c\mu + b_1c\lambda - 2b_1\mu m_2 - b_1\lambda^2m_2 - 6b_2\mu\lambda m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : b_1c + a_0b_2\beta + a_1b_1\beta + a_2b_0\beta + 2b_2c\lambda - 8b_2\mu m_2 - 3b_1\lambda m_2 - 4b_2\lambda^2m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : 2b_2c - 2b_1m_2 + a_1b_2\beta + a_2b_1\beta - 10b_2\lambda m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -6b_2m_2 + a_2b_2\beta = 0$$

Bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemi MATLAB programı kullanılarak çözülmüş ve aşağıdaki çözüm grubu elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{9\mu m_1}{\beta}, & a_1 &= \frac{9\lambda m_1}{\beta}, & a_2 &= \frac{9m_1}{\beta}, \\ b_0 &= \omega - 2\mu m_1 - \lambda^2 m_1 \mp \frac{3\sqrt{2}\lambda\sqrt{(-m_1\omega)}}{2}, \\ b_1 &= -6\lambda m_1 \mp 3\sqrt{2}\sqrt{(-m_1\omega)}, \\ b_2 &= -6m_1, & m_2 &= \frac{3m_1}{2}, & c &= \mp \frac{3\sqrt{2}\sqrt{(-m_1\omega)}}{2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18)'deki değerleri (3.16) ve (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında (3.11) (3.12) denklemlerinin aşağıda verilen cözümüleri elde edilir.

$$U(\varphi) = \frac{9\mu m_1}{\beta} + \frac{9\lambda m_1}{\beta} \left(\frac{G'}{G}\right) + \frac{9m_1}{\beta} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (3.19)$$

$$V(\varphi) = \left(\omega - 2\mu m_1 - \lambda^2 m_1 \mp \frac{3\sqrt{2}\lambda\sqrt{(-m_1\omega)}}{2}\right) + \left(-6\lambda m_1 \mp 3\sqrt{2}\sqrt{(-m_1\omega)}\right) \left(\frac{G'}{G}\right) - 6m_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (3.20)$$

(3.4) ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin genel cözümlelerini (3.19) ve (3.20) denklemlerinde yerine yazarak, (3.9)-(3.10) denklem sisteminin üç tür kesin cözümü elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$  durumunda,

$$u_{1,2}(x, t) = \frac{9m_1}{\beta} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{A\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2B}\right)^2 + \frac{9\mu m_1}{\beta} - \frac{9\lambda m_1}{\beta} \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{A\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2B}\right)$$

$$v_{1,2}(x, t) = \omega - 2\mu m_1 - \lambda^2 m_1 - 6m_1 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{A\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2B}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{A\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2B}\right) \left(6\lambda m_1 \mp 3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega}\right) \pm \frac{3\sqrt{2}\lambda\sqrt{-m_1\omega}}{2} \quad (3.21)$$

dir. Burada

$$A = c_2 \cosh\left(\frac{\varphi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\varphi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)$$

$$B = c_1 \cosh\left(\frac{\varphi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\varphi\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\right)$$

$$\varphi = x \mp \frac{3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega}}{2}t \quad \text{dir.}$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$  olduğunda,

$$\begin{aligned}
u_{3,4}(x, t) &= \frac{9m_1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{A}{2B} \right)^2 + \frac{9\mu m_1}{\beta} - \frac{9\lambda m_1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{A}{2B} \right) \\
v_{3,4}(x, t) &= \omega - 2\mu m_1 - \lambda^2 m_1 - 6m_1 \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{A}{2B} \right)^2 \\
&\quad + \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{A}{2B} \right) \left( 6\lambda m_1 \mp 3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega} \right) \pm \frac{3\sqrt{2}\lambda\sqrt{-m_1\omega}}{2}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left( c_2 \cos \left( \frac{\varphi\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \right) - c_1 \sin \left( \frac{\varphi\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \right) \right) \\
B &= c_1 \cos \left( \frac{\varphi\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \right) + c_2 \sin \left( \frac{\varphi\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \right) \\
\varphi &= x \pm \frac{3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega}}{2} t \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

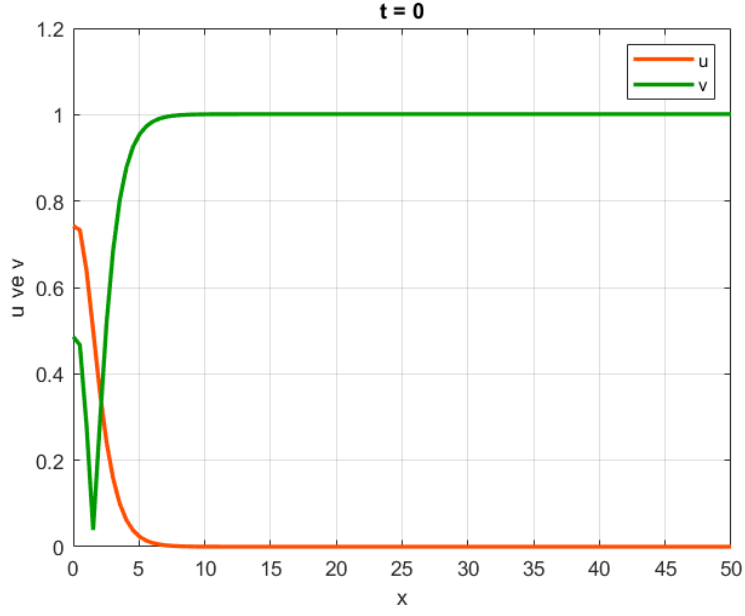
$\lambda^2 - 4\mu = 0$  olduğunda,

$$\begin{aligned}
u_{5,6}(x, t) &= \frac{9m_1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right)^2 + \frac{9\mu m_1}{\beta} - \frac{9\lambda m_1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right) \\
v_{5,6}(x, t) &= \omega - 2\mu m_1 - 6m_1 \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right)^2 - \lambda^2 m_1 + \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right) \\
&\quad \left( 6\lambda m_1 \pm 3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega} \right) \mp \frac{3\sqrt{2}\lambda\sqrt{-m_1\omega}}{2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

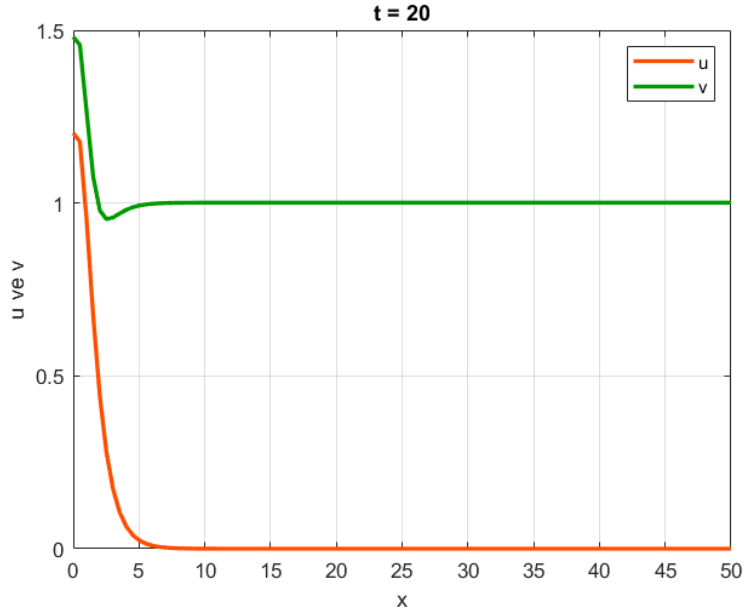
dir. Burada  $\varphi = x \pm \frac{3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega}}{2} t$  dir.

## Gerginlik Engelleyen Durumun Grafiksel Yorumu

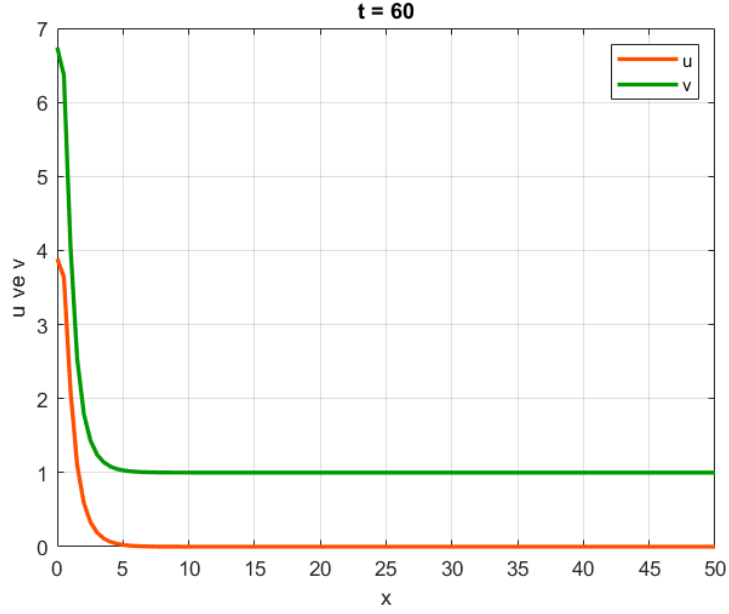
Gerginlik engelleyici duruma karşılık gelen modelin (3.21) kesin çözümüne ait grafiksel gösterimler,  $m_1 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -0.1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $c = -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{-m_1\omega}}{2}$ ,  $\beta = 3$  ve  $\omega = 0.001$  değerleri için sırasıyla  $t = 0$ ,  $t = 20$ ,  $t = 60$  ve  $t = 120$  anlarındaki grafiksel gösterimler aşağıda verilmiştir.



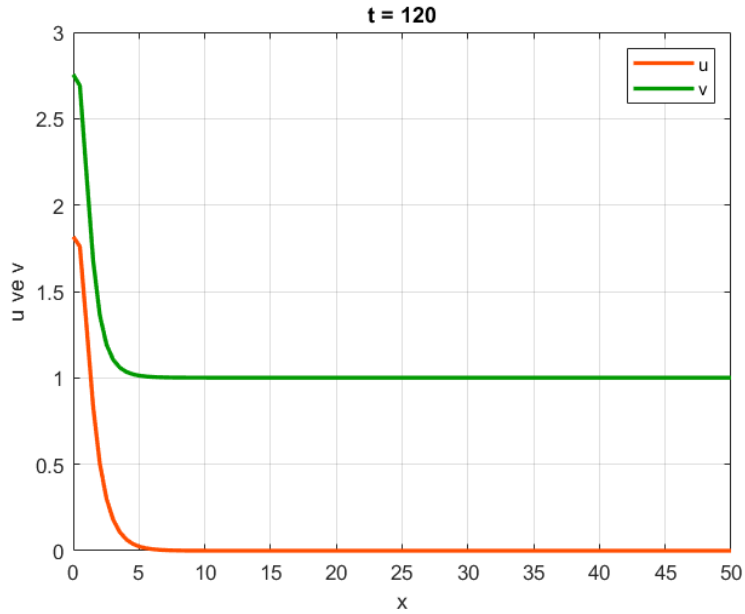
Şekil 3.1 (3.21) kesin çözümünün  $t = 0$  anındaki grafiksel gösterimi



Şekil 3.2 (3.21) kesin çözümünün  $t = 20$  anındaki grafiksel gösterimi



**Şekil 3.3** (3.21) kesin çözümünün  $t = 60$  anındaki grafiksel gösterimi



**Şekil 3.4** (3.21) kesin çözümünün  $t = 120$  anındaki grafiksel gösterimi

Grafiksel gösterimlerde;  $u$  değişkeni  $I$ 'yi,  $v$  değişkeni ise  $S$ 'yi temsil etmektedir. Popülasyonda  $u$ 'nun (enfekte bireylerin) ani artışı,  $v$ 'nin (duyarlı bireylerin) hızla azalmasına yol açar. Bu durum, salgının yayılma hızının düşmesine ve sistemin zamanla yeniden dengeye ulaşmasına neden olur. Bu süreç, gerilimi engelleyen doğal bir mekanizma olarak değerlendirilebilir.

### 3.1.3 Gerginlik Artıran Durumun Kesin Çözümü

$$g(u) = a - u, \quad r(v) = v, \quad \sigma(u, v) = uv(b - v), \quad \rho(u, v) = u(r(v)g(u) - \omega)$$

şeklindeki fonksiyonları (2.28)'de yerine yazdığımızda gerginlik artıran duruma karşılık gelen model:

$$u_t - m_1 u_{xx} = u(v(a - u) - \omega) \quad (3.24)$$

$$v_t - m_2 v_{xx} = uv(b - v) \quad (3.25)$$

şeklinde olur.

$\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemini (3.24)- (3.25) denklem sistemine uygulayalım;

**1. Adım:** (3.24)-(3.25) denklem sisteminde  $\varphi = x - ct$  dönüşümü kullanılırsa,  $u(x, t) = U(\varphi)$  ve  $v(x, t) = V(\varphi)$  olmak üzere

$$-cU' - m_1 U'' - U(V(a - U) - \omega) = 0 \quad (3.26)$$

$$-cV' - m_2 V'' - UV(b - V) = 0 \quad (3.27)$$

şeklinde adi diferansiyel denklemlere dönüşmüş olur.

**2. Adım:** (3.26)-(3.27) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü

$$U(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (3.28)$$

$$V(\varphi) = \sum_{i=1}^M b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (3.29)$$

şeklinde olduğu varsayılır.

Burada  $a_i$  ve  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) keyfi sabitlerdir.  $G = G(\varphi)$ ,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.30)$$

ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemini sağlar. Burada  $\lambda, \mu$  sabitlerdir.  $N$  ve  $M$  tamsayıları ise (3.26)'da  $U'''$  ve  $U^2V$ , (3.27)'de  $V'''$  ve  $UV^2$  arasındaki dengeleme prensibinden  $N + 2 = 2N + M$ ,  $M + 2 = N + 2M$  ifadelerinden  $N = 1$ ,  $M = 1$  olarak bulunur.

Böylece  $U(\varphi)$  ve  $V(\varphi)$  çözümleri

$$U(\varphi) = a_0 + a_1 \frac{G'}{G} \quad (3.31)$$

$$V(\varphi) = b_0 + b_1 \frac{G'}{G} \quad (3.32)$$

formunda olur.

**3. Adım:** (3.31) ve (3.32) denklemleri, (3.26)-(3.27) adi diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılır. Elde edilen ifade  $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 'nin aynı kuvvetine sahip tüm terimleri bir araya getirilerek ve her bir katsayıyı sıfıra eşitlenerek, aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -aa_0b_0 + a_1c\mu - a_1\mu\lambda m_1 + a_0^2b_0 + a_0w = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : a_1w + a_0^2b_1 - aa_0b_1 - aa_1b_0 + 2a_0a_1b_0 + a_1c\lambda - 2a_1\mu m_1 - a_1\lambda^2 m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : a_1c + a_1^2b_0 - aa_1b_1 + 2a_0a_1b_1 - 3a_1\lambda m_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : b_1a_1^2 - 2m_1a_1 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -a_0bb_0 + b_1c\mu - b_1\mu\lambda m_2 + a_0b_0^2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -a_0bb_1 + a_1b_0^2 + 2a_0b_0b_1 - a_1bb_0 + b_1c\lambda - 2b_1\mu m_2 - b_1\lambda^2 m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : b_1c + a_0b_1^2 - a_1bb_1 + 2a_1b_0b_1 - 3b_1\lambda m_2 = 0$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : a_1b_1^2 - 2m_2b_1 = 0$$

Elde edilen bu lineer olmayan cebirsel denklem sistemi MATLAB programı kullanılarak çözülmüş ve aşağıdaki çözüm grupları elde edilmiştir:

### 1. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{b}, & b_0 &= 0, & b_1 &= \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \pm \sqrt{2abm_2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= 0, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 2. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= -a, & a_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{b}, & b_0 &= 0, & b_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \mp \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= \frac{\sqrt{2abm_2}}{b}, & b_0 &= b/2, & b_1 &= \frac{\sqrt{abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \mp \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 4. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= -\frac{\sqrt{2abm_2}}{b}, & b_0 &= b/2, & b_1 &= -\frac{\sqrt{abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \pm \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 5. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & a_1 &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{b}, & b_0 &= b, & b_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \pm \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

## 6. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{b}, & b_0 &= -b, & b_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \mp \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

## 7. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= a/2, & a_1 &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{b}, & b_0 &= 0, & b_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

## 8. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= a/2, & a_1 &= \pm \frac{\sqrt{abm_2}}{b}, & b_0 &= 0, & b_1 &= \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= -\frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= -\frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

## 9. Grup

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & a_1 &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{b}, & b_0 &= b, & b_1 &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a}, \\ w &= 0, & c &= \pm \frac{3\sqrt{abm_2}}{2}, & m_1 &= m_2, \\ \lambda &= \mp \frac{\sqrt{abm_2}}{2m_2}, & \mu &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

(3.33)'de verilen 1. grup çözümünde  $\lambda^2 - 4\mu$  değeri sıfır olduğu görülmektedir. 1. grup çözümündeki parametre değerleriyle birlikte (3.4) ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin (3.8) çözümü (3.31)-(3.32) denklemlerinde yerine yazılarak kesin çözümler elde edilir.

$$U(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{b} \left( \frac{G'}{G} \right) \quad (3.42)$$

$$V(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{a} \left( \frac{G'}{G} \right) \quad (3.43)$$

Böylece (3.4) ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin (3.8) çözümünü (3.42) ve (3.43) denklemlerinde yerine yazarsak

$$U(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{b} \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right) \quad (3.44)$$

$$V(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{a} \left( \frac{-\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\varphi} \right) \quad (3.45)$$

olur ve burada  $\varphi = x \pm \sqrt{2abm_2}t$  'dir.

Böylece (3.24)-(3.25) denklem sisteminin kesin çözümü

$$\begin{aligned} u_{1,2}(x, t) &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{b} \frac{c_2}{c_1 + c_2(x \pm \sqrt{2abm_2}t)}, \\ v_{1,2}(x, t) &= \mp \frac{\sqrt{2abm_2}}{a} \frac{c_2}{c_1 + c_2(x \pm \sqrt{2abm_2}t)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

şeklinde olur.

Diğer çözüm gruplarına baktığımızda  $\lambda^2 - 4\mu$  değerinin daima pozitif olduğu görülür. Her çözüm grubu için (3.31)-(3.32) denklemlerinde, (3.4) ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin (3.6) çözümü yazılarak kesin çözümler elde edilir. Örneğin 2. grup çözümleri için ele aldığımız modelin kesin çözümlerini elde edelim:

$$U(\varphi) = -a \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{b} \left( \frac{G'}{G} \right) \quad (3.47)$$

$$V(\varphi) = \pm \frac{\sqrt{2abm_2}}{a} \left( \frac{G'}{G} \right) \quad (3.48)$$

Bu denklemlerde (3.4) ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin (3.6) çözümünü yerine yazılırsa (3.24)-(3.25) denklem sisteminin kesin çözümü,

$$\begin{aligned} u_{3,4}(x, t) &= -a + \frac{2\sqrt{abm_2}}{b} \left( \frac{\sqrt{abm_2}}{4m_2} \mp \frac{A}{2B} \right), \\ v_{3,4}(x, t) &= \frac{\sqrt{abm_2}}{a} \left( \frac{\sqrt{abm_2}}{4m_2} \mp \frac{A}{2B} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$A = \sqrt{\frac{ab}{4m_2}} \left( c_2 \cosh\left(\frac{\varphi\sqrt{\frac{ab}{4m_2}}}{2}\right) + c_1 \sinh\left(\frac{\varphi\sqrt{\frac{ab}{4m_2}}}{2}\right) \right)$$

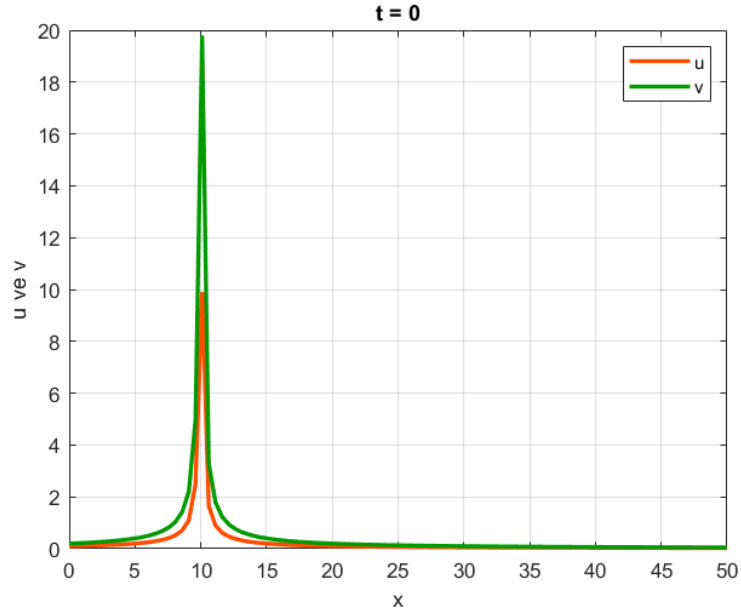
$$B = c_1 \cosh\left(\frac{\varphi\sqrt{\frac{ab}{4m_2}}}{2}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\varphi\sqrt{\frac{ab}{4m_2}}}{2}\right)$$

$$\varphi = x \mp \sqrt{2abm_2}t \text{ 'dir.}$$

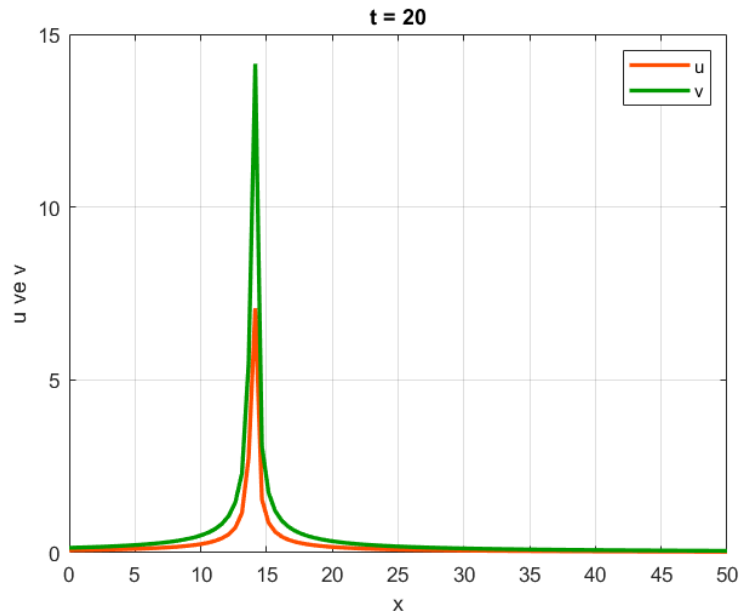
Benzer şekilde diğer grup çözümleri için de (3.24)-(3.25) denklem sisteminin kesin çözümleri elde edilebilir.

## Gerginlik Artıran Durumun Grafiksel Yorumu

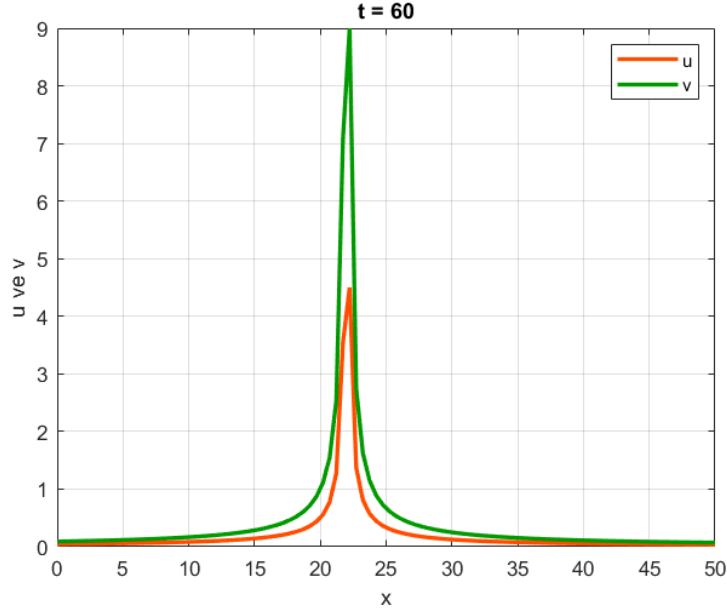
(3.24)-(3.25) denklem sisteminin (3.46) kesin çözümüne karşılık gelen grafiksel gösterimler,  $a = 0.1$ ,  $b = 0.2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -0.1$ ,  $c = \sqrt{2abm_2}$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$  değerleri için  $t = 0$ ,  $t = 20$ ,  $t = 60$  ve  $t = 120$  zamanlarında verilmiştir.



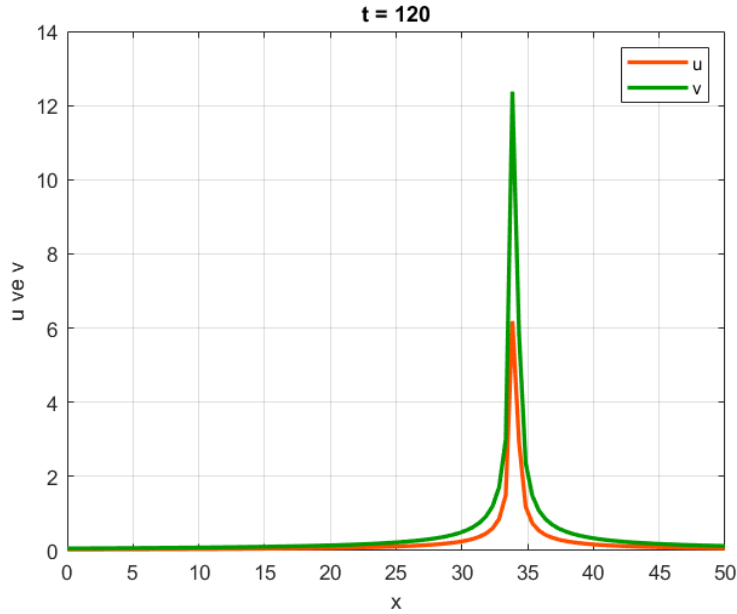
Şekil 3.5 (3.46) kesin çözümünün  $t = 0$  anındaki grafiksel gösterimi



Şekil 3.6 (3.46) kesin çözümünün  $t = 20$  anındaki grafiksel gösterimi



**Şekil 3.7** (3.46) kesin çözümünün  $t = 60$  anındaki grafiksel gösterimi



**Şekil 3.8** (3.46) kesin çözümünün  $t = 120$  anındaki grafiksel gösterimi

Grafiksel gösterimlerde;  $u$  değişkeni ( $I$ )'yi,  $v$  değişkeni de ( $S$ )'yi temsil etmektedir. Başlangıçta ( $t = 0$ )  $u$ 'nun ani artışı, sistemdeki dinamiği harekete geçirerek  $v$ 'nin de artmasına yol açmıştır. Zamanla bulaşma (huzursuzluk artışı) ve hastalık (gerilim) daha geniş bir alana yayılır, ancak bu etkiler zaman zaman yüksek, zaman zaman düşük seviyelerde kalır. Bu süreç, sistemdeki toplumsal dinamiklerin uzun vadeli etkilerini ve genişleyen gerilim alanını yansıtarak, görünürde sakinleşse de bir yapısal gerilimin varlığını gösterir. Bu durum, bulaşın yeniden hızlanabileceğini ve salgının yayılma eğiliminin artabileceğini göstermektedir.

# 4

## SONUÇ

---

Bu tezde, salgın hastalıkların yayılımını incelemek amacıyla epidemiyolojik modelleme ve bir reaksiyon-difüzyon SIR modelinin analitik çözümü ele alınmıştır. Çalışmanın başında, salgın hastalıkların dinamikleri ve bu dinamikleri modellemek için kullanılan temel epidemiyolojik modeller tanıtılmıştır. Daha sonra, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için uygun çözüm sunan  $(G'/G)$ -açılım yöntemi tanıtılıp yöntem uygulama adımları gösterilmiştir. Ele aldığımız model dinamiklerine uygun özel iki durumu için kesin çözümleri  $(G'/G)$ -açılım yöntemiyle elde edilmiştir. Son olarak elde ettiğimiz kesin çözümlerde uygun parametre değerleri alınarak grafiksel gösterimlere yer verilmiştir. Grafiksel gösterimlerden bu iki durumun SI epidemiyolojik modeldeki gibi bir rol oynadığı görülmüştür.

## KAYNAKÇA

---

- [1] M. Porta, *A dictionary of epidemiology*. Oxford University Press, 2014.
- [2] World Health Organization, *Coronavirus disease (COVID-19) pandemic*, <https://www.who.int/europe/emergencies/situations/covid-19>.
- [3] World Health Organization, *COVID-19 public health emergency of international concern (PHEIC) global research and innovation forum*, 2020.
- [4] World Health Organization, *Cholera*, 2024. erişim adresi: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cholera>.
- [5] T.C. İçişleri Bakanlığı, *Koronavirüs ile mücadele kapsamında - yeni kısıtlama ve tedbirler genelgesi*, 2020.
- [6] U.S. Department of Health And Human Services, Centers for Disease Control and Prevention (CDC), *Principles of epidemiology in public health practice*, 3. bs. 2006.
- [7] D. Bernoulli, “Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole,” *Mémoires Mathématiques et Physiques de l’Académie Royale des Sciences de Paris*, c. 1, ss. 1–45, 1766.
- [8] J. H. Lambert, “Die toedlichkeit der kinderblattern,” *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, c. 3, s. 568, 1772.
- [9] H. W. Hethcote, “The mathematics of infectious diseases,” *SIAM Review*, c. 42, no. 4, ss. 599–653, 2000.
- [10] R. Ross, *The prevention of malaria*. London: John Murray, 1911.
- [11] W. O. Kermack A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, c. 115, no. 772, ss. 700–721, 1927.
- [12] W. O. Kermack A. G. McKendrick, “Contributions to the mathematical theory of epidemics, part II,” *Proceedings of the Royal Society of London*, c. 138, ss. 55–83, 1932.
- [13] W. O. Kermack A. G. McKendrick, “Contributions to the mathematical theory of epidemics, part III,” *Proceedings of the Royal Society of London*, c. 141, ss. 94–112, 1933.
- [14] N. T. J. Bailey, *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*, 2. bs. 1975.
- [15] Y. Lou R. B. Salako, “Mathematical analysis of the dynamics of some reaction-diffusion models for infectious diseases,” *Journal of Differential Equations*, c. 370, ss. 424–469, 2023.

- [16] M. Garner S. Hamilton, “Principles of epidemiological modelling,” *Revue scientifique et technique (International Office of Epizootics)*, c. 30, ss. 407–416, 2011.
- [17] L. Zhao, “Spreading speed and traveling wave solutions of a reaction–diffusion Zika model with constant recruitment,” *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, c. 74, s. 103 942, 2023.
- [18] H.-M. Yin J. Zou, “Asymptotic analysis for a nonlinear reaction–diffusion system modeling an infectious disease,” *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, c. 75, s. 103 984, 2024.
- [19] F. Brauer C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, 2. bs. Springer, 2012.
- [20] H. Huang M. Wang, “The reaction-diffusion system for an SIR epidemic model with a free boundary,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, c. 20, no. 7, ss. 2039–2050, 2015.
- [21] G. Chowell H. Nishiura, “Quantifying the transmission potential of pandemic influenza,” *Physics of Life Reviews*, c. 5, no. 1, ss. 50–77, 2008.
- [22] W. Wu Z. Teng, “The periodic traveling waves in a diffusive periodic SIR epidemic model with nonlinear incidence,” *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 144, s. 110 683, 2021.
- [23] C. Liu R. Cui, “Qualitative analysis on an SIRS reaction–diffusion epidemic model with saturation infection mechanism,” *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, c. 62, s. 103 364, 2021.
- [24] H. Berestycki, S. Nordmann L. Rossi, “Modeling the propagation of riots, collective behaviors and epidemics,” *Mathematics in Engineering*, c. 4, no. 1, ss. 1–53, 2022.
- [25] S. M. Treibert, *Mathematical modelling and nonstandard schemes for the corona virus pandemic*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2021.
- [26] M. Martcheva, *An introduction to mathematical epidemiology*. New York: Springer, 2015.
- [27] G. Bhatt, “Modeling epidemics with differential equations,” *Proceedings of the Joint Mathematics Meetings (JMM)*, 2023.
- [28] J. Giral-Barajas, C. I. Herrera-Nolasco, M. A. Herrera-Valdez S. I. López, “A probabilistic approach for the study of epidemiological dynamics of infectious diseases: Basic model and properties,” *Journal of Theoretical Biology*, c. 572, s. 111 576, 2023.
- [29] M. Li X. Liu, “An SIR epidemic model with time delay and general nonlinear incidence rate,” *Abstract and Applied Analysis*, c. 2014, 2014.
- [30] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*. Springer, 2011.
- [31] L. J. Allen, *An introduction to mathematical biology*. 2007.
- [32] S. Ma Y. Xia, *Mathematical understanding of infectious disease dynamics*. World Scientific, 2009.

- [33] R. Anderson, H. Jackson, R. May ve diğ., “Population dynamics of fox rabies in Europe,” *Nature*, c. 289, ss. 765–771, 1981.
- [34] J. Murray, *Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications*, 3rd. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [35] R. Hirota, *The direct method in soliton theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [36] N. Zabusky M. Kruskal, “Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states,” *Physical Review Letters*, c. 15, 1965.
- [37] A. Mumtaz, M. Shakeel, M. Alshehri N. A. Shah, “New analytical technique for prototype closed-form solutions of certain nonlinear partial differential equations,” *Results in Physics*, c. 60, s. 107 640, 2024.
- [38] Z. Qin, G. Mu H. Ma, “ $(G'/G)$ -expansion method for the fifth-order forms of KdV–Sawada–Kotera equation,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 222, ss. 29–33, 2013.
- [39] W. Malfliet W. Hereman, “The tanh method: II. perturbation technique for conservative systems,” *Physica Scripta*, c. 54, no. 6, s. 569, 1996.
- [40] E. Parkes, “Observations on the tanh–coth expansion method for finding solutions to nonlinear evolution equations,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 217, no. 4, 2010.
- [41] G. W. Bluman S. Kumei, *Symmetries and differential equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [42] C. Koroğlu T. Öziş, “A novel traveling wave solution for Ostrovsky equation using exp-function method,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 58, no. 11-12, ss. 2142–2146, 2009.
- [43] M. Wang, “Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations,” *Physics letters A*, c. 199, no. 3-4, ss. 169–172, 1995.
- [44] M. Wang, X. Li J. Zhang, “The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics,” *Physics Letters A*, c. 372, no. 4, ss. 417–423, 2008.
- [45] A. Jabbari, H. Kheiri A. Bekir, “Exact solutions of the coupled Higgs equation and the Maccari system using He’s semi-inverse method and  $(G'/G)$ -expansion method,” *Computers & Mathematics with Applications*, c. 62, no. 5, ss. 2177–2186, 2011.
- [46] J.-M. Zuo Y.-M. Zhang, “Application of the  $(G'/G)$ -expansion method to solve coupled MKdV equations and coupled Hirota–Satsuma coupled KdV equations,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 217, no. 12, ss. 5936–5941, 2011.
- [47] H. Rezazadeh, A. G. Davodi D. Gholami, “Combined formal periodic wave-like and soliton-like solutions of the conformable Schrödinger-KdV equation using the  $(G'/G)$ -expansion technique,” *Results in Physics*, c. 47, s. 106 352, 2023.
- [48] A. Hussain, H. Ali, F. Zaman N. Abbas, “Diverse variety of exact solutions for some nonlinear models via the  $(G'/G)$ -expansion method,” *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, c. 11, s. 100 868, 2024.

- [49] Z.-C. Wang, J. Wu R. Liu, “Traveling waves of the spread of avian influenza,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 140, no. 11, ss. 3931–3946, 2012.
- [50] C. Cao, D. Holm E. Titi, “Traveling wave solutions for a class of one-dimensional nonlinear shallow water wave models,” *Journal of Dynamics and Differential Equations*, c. 16, ss. 167–178, 2004.
- [51] X.-Q. Zhao, *Dynamical systems in population biology*. Springer, 2003.
- [52] B. Zheng, “Travelling wave solutions of two nonlinear evolution equations by using the  $(G'/G)$ -expansion method,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 217, no. 12, ss. 5743–5753, 2011.
- [53] S.-L. Wu, L. Chen C.-H. Hsu, “Traveling wave solutions for a diffusive age-structured SIR epidemic model,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, c. 98, s. 105 769, 2021.



# TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

## Konferans Bildirisi

1. S. Öztürk, S. Selim, "Traveling Wave Solution for a Reaction-Diffusion SIR Epidemic Model", 7th International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2024), Istanbul, Türkiye, 08 - 11 May 2024.

