



**PERİYODİK DALGALARIN DOĞRUSAL OLMAYAN
MODÜLASYONUNU GÖSTEREN
(3 + 1) BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN GARDNER-
KADOMTSOV-PETVİASHVİLİ (GARDNER-KP)
DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

Duygu TETİK



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**PERİYODİK DALGALARIN DOĞRUSAL OLMAYAN MODÜLASYONUNU
GÖSTEREN (3 + 1) BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN GARDNER-
KADOMTSOV-PETVİASHVİLİ (GARDNER-KP) DENKLEMİNİN
TAM ÇÖZÜMLERİ**

Duygu TETİK
0009-0002-9606-7607

Dr. Öğr. Üye. Nisa ÇELİK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2025
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PERİYODİK DALGALARIN DOĞRUSAL OLMAYAN MODÜLASYONUNU GÖSTEREN (3 + 1) BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN GARDNER– KADOMTSOV–PETVİASHVİLİ (GARDNER-KP) DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Duygu TETİK

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üye. Nisa ÇELİK

Doğrusal olmayan evrim denklemleri (NLEE), birçok fiziksel olgunun incelenmesi sonucunda elde edilen modellerdir. Bu denklemlerin analitik ve bazı durumlarda sayısal çözümleri, somut matematiksel formülasyonları nedeniyle önemli bir yere sahiptir. Bu tür modeller, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği, plazma dalgaları, biyofizik, atmosfer, finans, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, nükleer fizik, sıg su dalgası teorisi vb. gibi birçok doğrusal olmayan bilimde gözlemlenebilir. Yukarıda bahsedilen evrim tipi denklemlerden biri (3+1)-Gardner–Kadomtsov–Petviashvili (Gardner-KP) denklemidir. Bu çalışmada, belirli fiziksel sistemlerde dalgaların hareketini açıklayan doğrusal olmayan (3+1)-Gardner-KP denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilerek dalga dinamiği incelendi. (3+1)- Gardner-KP denklemini derinlemesine analiz etmek için $\left(\frac{G'}{G}\right)$, $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$, genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$, genelleştirilmiş Kudryashov, modifiied Kudryashov yöntemleri uygulandı. Elde edilen çözümlerin özel parametre değerlerinde 3D ve 2D grafiklerinin nümerik simülasyonu yapıldı. Elde edilen çözümlerin uyumluluğunu analiz etmek için örnek olarak alınan bazı çözümlere kararlılık testi uygulandı. Bu çalışma matematik, fizik ve okyanus mühendisliği alanlarında çalışanlar için bir yol gösterici olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Gardner-KP denklemi, G'/G metodu, Kudryashov metodu, Solitonlar, Tam çözüm, kararlılık analizi

2025, xiii + 59 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

EXACT SOLUTIONS OF THE (3 + 1) DIMENSIONAL NONLINEAR GARDNER–KADOMTSOV–PETVIASHVILI (GARDNER-KP) EQUATION REPRESENTING NONLINEAR MODULATION OF PERIODIC WAVES

Duygu TETİK

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Dr. Lecturer Nisa ÇELİK

Nonlinear evolution equations (NLEEs) are models derived from the investigation of various physical phenomena. The analytical—and in some cases numerical—solutions of these equations hold significant importance due to their concrete mathematical formulations. Such models can be observed in many nonlinear sciences, including nonlinear optics, plasma physics, plasma waves, biophysics, atmospheric science, finance, fluid mechanics, quantum mechanics, nuclear physics, and shallow water wave theory. One of the evolution-type equations mentioned above is the (3+1)-dimensional Gardner–Kadomtsev–Petviashvili (Gardner-KP) equation.

In this study, traveling wave solutions of the nonlinear (3+1)-dimensional Gardner-KP equation, which describes wave motion in certain physical systems, are obtained and the wave dynamics are analyzed. To perform an in-depth analysis of the (3+1)-Gardner-KP equation, the $\left(\frac{G'}{G}\right)$, $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$, generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$, generalized Kudryashov, and modified Kudryashov methods are applied. The numerical simulations of the obtained solutions are presented using 2D and 3D plots for specific parameter values. In order to analyze the compatibility of the solutions, stability tests are applied to selected examples. This study is expected to serve as a guide for researchers working in mathematics, physics, and ocean engineering.

Key words: Gardner-KP equation, G'/G method, Kudryashov method, Solitons, Exact solution

2025, xiii + 59 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca danışmanlık eden, bu alanda çalışma imkanı sağlayan, çalışmalarımı titizlikle inceleyip beni yönlendiren ve her koşulda destek olup yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üye. Nisa ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Tanıdığım günden beri daima destek olan ve yol gösteren kıymetli tüm matematik bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında maddi ve manevi her konuda destekleyen, ilgilerini ve sevgilerini üzerimden hiçbir zaman eksik etmeyen ve daima beni motive eden çok kıymetli ailem; annem Sayın Hatice TETİK'e, babam Sayın Salih TETİK'e ve kardeşim Sayın Yusuf TETİK'e minnettarım, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Duygu TETİK
19/06/2025

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
TEŞEKKÜR.....	x
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ii
1.GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	5
2.1. Diferensiyel Denklemler.....	5
2.2. Hareket Eden Dalga Çözümleri.....	8
2.2.1. Soliter Dalgalar ve Solitonlar.....	8
2.2.2. Periyodik Çözümler.....	11
2.2.3. Kink Dalgaları.....	11
2.2.4. Peakonlar.....	12
2.2.5. Kusponlar.....	13
2.3. Dengeleme Prensibi.....	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Yöntemi.....	16
3.2. $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ Yöntemi.....	18
3.3. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Açılım Yöntemi.....	19
3.4. Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi.....	21
3.5. Modifiye Kudryashov Yöntemi.....	22
4.BULGULAR.....	24
4.1.Gardner-KP Denklemini İçin Verilen Yöntemlerin Uygulanması.....	24
4.1.1. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Yöntemi Kullanılarak Tam Çözümlerin Elde Edilmesi.....	24
4.1.2. $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ Yöntemi Kullanılarak Tam Çözümlerin Elde Edilmesi.....	27
4.1.3. Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Genişletme Yöntemi Kullanılarak Tam Çözümlerin Elde Edilmesi.....	30
4.1.4. Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi Kullanılarak Tam Çözümlerin Elde Edilmesi.....	43
4.1.5. Modifiye Kudryashov Yöntemi Kullanılarak Tam Çözümlerin Elde Edilmesi.....	48
4.2. Kararlılık Özelliği.....	49
5.SONUÇ.....	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	59

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

 ξ

$$\frac{d^q u}{d\xi^q}$$

$$u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$$

Açıklama

n . mertebeden bir adi diferensiyel denklem
dalga dönüşümü

en yüksek mertebeli lineer terim

en yüksek dereceli lineer olmayan terim

Kısaltmalar

NLEE

KP

Gardner-KP

KDD

ADD

mKdV-ZK

KdV

Açıklama

Nonlinear evolution equation

Kadomtsev-Petviashvili

Gardner- Kadomtsev-Petviashvili

Kısmi Diferensiyel Denklemler

Adi Diferensiyel Denklemler

modified Korteweg–de Vries Zakharov–Kuznetsov

Korteweg–de Vries

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Soliton çözümün grafiği	10
Şekil 2.2. Periyodik çözümün grafiği	11
Şekil 2.3. Kink çözümünün grafiği	12
Şekil 2.4. peakon çözümün grafiği	13
Şekil 2.5. kuspon çözümünün grafiği	14
Şekil 4.1. (4.4) ile ifade edilen çözümün grafiği	26
Şekil 4.2. (4.5) ile ifade edilen çözümün grafiği	26
Şekil 4.3. (4.9) ile ifade edilen çözümün grafiği	28
Şekil 4.4. (4.14) ile ifade edilen çözümün grafiği	30
Şekil 4.5. (4.23) ile ifade edilen çözümün grafiği	33
Şekil 4.6. (4.25) ile ifade edilen çözümün grafiği	34
Şekil 4.7. (4.32) ile ifade edilen çözümün grafiği	37
Şekil 4.8. (4.47) ile ifade edilen çözümün grafiği	44
Şekil 4.9. (4.51) ile ifade edilen çözümün grafiği	45
Şekil 4.10. (4.55) ile ifade edilen çözümün grafiği	46

1.GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde probleme dayalı matematiksel modellerin oluşturulması, problemin çözümüne ulaşmada ve çözümleri analiz etmede oldukça önemlidir. Doğal bilimlerin ve mühendislik dallarının birçok problemi için yapılan matematiksel modelleme kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine indirgenir. Dalga yayılımı, akışkanlar mekaniği, dinamik sistemler, kimya, görüntü işleme, plazma fiziği, hidrodinamik, biyoloji, optik, finans ve bilimin diğer alanlarındaki birçok fiziksel olay kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla modellenir. Uygulama alanlarının çok geniş olması nedeniyle kısmi diferansiyel denklemler (KDD) teorisi, matematik analizinin önemli inceleme alanlarından biridir. Kısmi diferansiyel denklemlerin analiz edilmesiyle birçok çözüm yöntemi, bilimsel araştırmacılar tarafından elde edildi. Bu çözüm yöntemlerinden biri olan tam çözüm yöntemleri, 19. yüzyılın sonlarında Lie tarafından sunuldu ve 20. yüzyıldan itibaren, bilgisayarların gelişmesiyle birlikte, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yorumlanması, birçok farklı araştırma yönünü açan bağımsız bir alan haline geldi. Gerçek hayat problemlerini temsil eden doğrusal olmama, matematik, fizik, ve mühendislik gibi birçok araştırma alanında önemli bir faktördür. Daha sonra bilim adamları, doğrusal olmayan evrim denklemlerinin yaklaşık ve uygun çözümlerini bulmak için derinlemesine araştırmalar yapmış ve araştırmaları sonucunda, bilim adamlarının farklı görüşleri nedeniyle son zamanlarda doğrusal olmayan evrim denklemlerini çözmek için birçok yöntem geliştirilmiştir (Kudryashov, 2012; Yaşar ve Yıldırım, 2018; Bira vd., 2018; Zeidan vd., 2019; Kudryashov, 2020; Çelik vd., 2021; Çelik, 2021; Patel vd., 2022; Yıldırım vd., 2023; Hashemi ve Mirzazadeh, 2023; Ay ve Yaşar, 2023; Seadawy vd., 2023, Kudryashov, 2023).

Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

$$(u_t + uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0$$

doğrusal olmayan dalga teorisinde iki boyutlu sığ su dalgası problemlerinde kullanılır.

Gardner denklemi

$$u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0$$

KP denkleminin farklı olarak iki doğrusal olmayan terim içeren bu denklem, (1+1) boyutlu katmanlı akışkanlarda doğrusal olmayan dalga yayılımının modeli için kullanılır. Bu denklem iç dalgaların modellenmesi için önemlidir. Gardner denklemi hem ikinci dereceden uu_x hem de kübik $6u^2u_x$ doğrusal olmayan terimleri içerir. Kübik doğrusal olmayan terimin önündeki katsayısının pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak bu denklem sırasıyla odaklanma veya odaklanmama Gardner denklemleri olarak adlandırılır. Bu denklemin birçok alanda uygulaması vardır. Gardner denklemini xy -düzlemine genişleterek (2+1) boyutlu Gardner-Kadomtsev-Petviashvili (Gardner-KP) denklemi elde edilir:

$$(u_t + 6uu_x \pm 6u^2u_x + \varepsilon^2u_{xxx})_x + \lambda u_{yy} = 0$$

Gardner-KP denkleminin literatürde önemli bir yere sahip olması, okyanuslardaki büyük genliklere ve güçlü doğrusal olmayan etkilere sahip iç dalgaları modellenmesinden kaynaklanmaktadır.

Gardner-KP denklemi, akışkanlar dinamiği, plazma fiziği ve optik fiberler dahil olmak üzere doğrusal olmayan bilimdeki çeşitli olayları incelemek için kullanılır. Soliton olarak bilinen soliter dalga çözümleri, ortam içinde ilerlerken şekillerini ve hızlarını koruyabildikleri için özellikle ilgi çekicidir. Araştırmacılar sıklıkla bu solitonların (Yang 1960) özelliklerini ve etkileşimlerini incelemek için ters saçılma dönüşümü gibi sayısal yöntemler ve analitik yaklaşımlar kullanırlar.

Gardner-KP denkleminin okyanus mühendisliğiyle güçlü bir ilişkisi vardır, çünkü bunlar iki boyutlu örneklerde okyanus raflarındaki güçlü doğrusal olmayan iç dalgaları gösterir. Birçok araştırmacı (1+1) ve (2+1) Gardner-KP denklemlerini çeşitli yöntemlerle inlemiştir. Bunlardan bazılarını şu şekilde sıralanabilir: Wazwaz A., Hirota'nın çift doğrusal yöntemini kullanarak pozitif ve negatif (2+1)-Gardner-KP denklemlerini analiz etti. Pozitif (2+1)-Gardner-KP denkleminin ise tekil çoklu soliton çözümler verdiğini gösterdi. Bin ve Qiang, (2+1)-Gardner-KP denkleminin simetrilerini ve grup değişmez çözümlerini, karşılık gelen Lie cebirini, optimal sistemi, sınıflandırmayı ve benzerlik indirgemelerini doğrudan simetri yöntemiyle elde ettiler. Ayrıca denklemin korunum

yasalarını da buldular. Liu ve Yan, pozitif ve negatif (2+1)-Gardner-KP denkleminin çatalanmalarını ve faz portrelerini incelediler. Boateng ve arkadaşları, Jacobi eliptik fonksiyon çözümlerini ve (2+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin ilerleyen dalga çözümünü hesapladılar. Ali ve arkadaşları $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ yöntemini negative (2+1)-Gardner-KP denklemine uyguladılar. Shakeel ve Mohyud-Din, $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ yöntemini pozitif (2+1)-Gardner-KP denklemine uyguladılar. Tarık ve arkadaşları yardımcı denklem yöntemini aynı denkleme uyguladılar (Wazwaz, 2008; Bin ve Qiang, 2009; Liu ve Yan, 2014; Shakeel ve Mohyud-Din, 2014; Tariq vd., 2018; Boateng vd., 2020; Ali vd., 2020).

Bu çalışmanın ana konusu olan (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi, (2+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin bir uzantısı olarak türetilir. (3+1)-Gardner-KP denklemi, belirli fiziksel sistemlerde dalgaların yayılmasını tanımlayan doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemin adındaki (3+1) notasyonu, üç uzaysal ve bir zaman boyutunda kısmi diferansiyel denklem olduğunu ifade etmektedir.

Hussain ve arkadaşları (3+1)-Gardner-KP denklemini Lie grup teorisi tekniğini kullanarak analiz ettiler. Lie değişmezliği koşulunu dikkate alarak simetri üreticilerini buldular. Soliton çözümlerini elde etmek için yeni yardımcı denklem yöntemini kullandılar (Hussain, 2022).

Bu çalışmada (3+1) boyutlu doğrusal olmayan Gardner-Kadomtsov-Petviashvili (Gardner-KP) denklemi

$$(\mathfrak{B}_\tau + 6\mathfrak{B}\mathfrak{B}_\theta - 6\mathfrak{B}^2\mathfrak{B}_\theta + v^2\mathfrak{B}_{\theta\theta\theta})_\theta + \Omega(\mathfrak{B}_{\eta\eta} + \mathfrak{B}_{\zeta\zeta}) = 0 \quad (1.1)$$

periyodik dalgaların doğrusal olmayan modülasyonunu gösteren $\left(\frac{G'}{G}\right), \left(\frac{G'}{G^2}\right)$, genelleştirilmiş geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$, genelleştirilmiş Kudryashov ve modifield Kudryashov yöntemleri ile analiz edilir, burada $\Omega = \pm 1$ ve $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\theta, \eta, \zeta, \tau)$ dir. Çok boyutlu Gardner-KP denklemi, iki boyutlu örneklerde okyanus sığılıklarında ki güçlü doğrusal olmayan iç dalgaları gösterir. Ayrıca kritik derinlik seviyelerine yakın yayılan zayıf, doğrusal olmayan, dağınık yüzey dalgalarının Gardner-KP denklemine tabi olduğu da gösterilmiştir. Farklı alanlarda pek çok uygulaması bulunan bu denklemin yeni kesin

özümleri, araştırmacılara doğrusal olmayan modeller üzerinde çalışma konusunda fikir verecektir.

Çalışma 5 blümnden oluşmaktadır. 2. bölüm kuramsal temeller ve kaynak araştırmasına ayrıldı, ele alınan tam çözüm yöntemleri kullanılırken ihtiyaç duyulan temel tanım ve kavramlar verildi. Hareket eden dalga ve eřitleri hakkında bilgiler verilerek grafik görselleri sunuldu. 3. bölüm tezde kullanılan beş farklı tam çözüm yönteminin teorik algoritmalarına ayrıldı. 4. bölümde, 3. bölümde algoritmaları verilen yöntemler (3+1)-Gardner-KP denklemine uygulandı ve elde edilen bazı çözümlerin kararlılık özelliği test edildi. Tezin 5. bölümde ise ele alınan (3+1)-Gardner-KP denkleminin çeşitli yöntemlerle elde edilen çözümlerinin yapıları ve yöntemler karşılaştırıldı, elde edilen sonuçlar kısaca özetlendi.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRILMASI

Bu kısım, tezde kullanılan temel kavramların tanımlarına ve uygulanan yöntemlerin teorisine ayrılmıştır.

2.1. Diferensiyel Denklemler

Fen bilimlerinde, mühendislikte ve hatta sağlık bilimlerinde birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel formüller veya matematiksel modeller geliştirilir. Bu modeller, bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Böyle bir denkleme diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklemleri incelemek için ortak bir terminolojiye ihtiyaç vardır. Eğer bir diferensiyel denklem, bir değişkenin, bir veya daha çok değişkene göre türevlerini ihtiva ediyorsa, türevi alınan değişkene bağımlı değişken, türevin alındığı değişkene veya değişkenlere bağımsız değişken denir. Diferensiyel denklemler bulundurduğu bağımlı ve bağımsız değişkenlere göre adi diferensiyel denklem (ADD) ve kısmi diferensiyel (KDD) denklem olmak üzere ikiye ayrılır. Adi ve kısmi diferensiyel denklemler mertebe, derece ve lineerliklerine göre sınıflandırılırlar. Mertebe, derece ve lineerlik tanımları her iki denklem tipi için benzerlik gösterir.

2.1.1. Tanım: Bir diferensiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon yalnız bir bağımsız değişkene bağımlı ise, denkleme adi diferensiyel denklem denir.

$$(x^2 + y^2)dx - 2ydy = 0$$

$$2yy' = 3x + x(y')^2$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

$$xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

$$yy'' - 2y'^2 = 0$$

denklemleri adi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.1.2. Tanım: Bir adi diferensiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek mertebeden adi türevin mertebesidir.

$$xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

denklemini ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemdir.

Bağımlı değişeni y , bağımsız değişkeni x olan n . mertebeden bir adi diferensiyel denklemin

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

biçiminde gösterilir.

2.1.3. Tanım Bir adi diferensiyel denklemin var olan tüm türevlere göre bir polinom denklemin biçiminde ise, en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferensiyel denklemin derecesi denir.

$$yy'' - 2y'^2 = 0$$

denklemini ikinci mertebeden, birinci derecedendir.

2.1.4. Tanım Bir diferensiyel denklemin bilinmeyen fonksiyon ve onun var olan bütün türevlerine göre birinci dereceden ise, denklemin lineer diferensiyel denklemdir.

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

denklemini lineer adi diferensiyel denklemin örnek olarak verilebilir.

Adi diferensiyel denklemler bir ve iki boyutlu fiziksel olayların modellenmesinde yeterlidir ancak daha yüksek boyut gerektiren fiziksel problemlerin modellenmesinde kısmi türevli diferensiyel denklemlere ihtiyaç duyulur. Matematik, doğal bilimlerin ve mühendislik dallarının birçok problemi kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerine indirgenir. Örneğin termodinamikte, esneklik teorisinde, elektro dinamikte ve benzeri alanlarda kısmi diferensiyel denklemler yoğun olarak kullanılmaktadır (Çağlayan ve Çelebi, 2013)

2.1.5. Tanım Bir diferensiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon, iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağımlı ise denkleme kısmi diferensiyel denklem denir.

Bağımlı değişkeni u , bağımsız değişkenleri x ve y olan bir kısmi diferensiyel denklem

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

biçiminde gösterilir.

$$u_x + xu_y = 3$$

$$x^2u_x - y^2u_y = (x - y)z$$

$$u_xu_{xx} + u_yu_{yy} + z^2 = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

denklemleri kısmi diferensiyel denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.1.6. Tanım Bir kısmi diferensiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesine, denklemin mertebesi denir.

$$u_x + u_{tt} + u^2 + u_xu_{xx} = 0$$

denklemleri ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemdir.

2.1.7. Tanım Bir kısmi diferensiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre birinci dereceden ise, denkleme lineer kısmi diferensiyel denklem denir. Bir kısmi diferensiyel denklem lineer değilse lineer olmayan denklem denir.

$$u_{xt} = u_t$$

denklemleri lineer denklemdir.

$$(u_x)^3 + u_t = 0$$

denklemini ise lineer olmayan denklemdir (Çağlıyan vd., 2007; Çağlıyan ve Çelebi, 2013).

2.2 Hareket Eden Dalga Çözümleri

Dalga olaylarını modelleyen denklemlerin incelenmesi, hareket eden dalga çözümlerinin incelenmesini gerektirir. Hareket eden dalga çözümü, sabit bir hızla hareket eden kalıcı formdaki bir çözümdür. Hareket eden dalga çözümleri genellikle doğrusal olmayan evrim denklemlerini ilişkili adi diferansiyel denklemlere indirgeyerek elde edilir. Bu çoğunlukla ansatz $u(x, t)$ fonksiyonu için $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ dönüşümü yardımı ile yapılır, burada c dalganın yayılma hızıdır. Bu dönüşüm x, t değişkenlerine bağlı bir kısmi diferansiyel denklemi, ansatz fonksiyon yardımıyla tam çözümlerini daha kolay elde edebileceğimiz, ξ ye bağlı bir adi diferansiyel denkleme dönüştürür. Bu adi diferansiyel denklemin çözümleri yardımıyla kısmi diferansiyel denklemin hareket eden dalga çözümleri elde edilir. Hareket eden dalga çözümleri, sıg su dalgalarından plazma fiziğine kadar birçok alanda karşımıza çıkar ve bu çözümler arasında özellikle sabit şekil ve hızla yayılan soliter dalgalar büyük ilgi görmektedir. Bu türlerden bazıları ele alınacaktır.

2.2.1. Soliter dalgalar ve solitonlar

Soliter dalgalar ilk kez John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlendi (Russell 1844). Russell, Edinburgh Kanalı'nda yaptığı bir gözlem sırasında suyolu üzerinde oldukça büyük, tek bir dalga olduğunu ve bu dalganın suyun içindeki diğer hareketlerden bağımsız olarak, sabit hızla ilerleyerek şekil değiştirmeden bir süre devam ettiğini gözlemledi. Russell, bu dikkate değer keşfi, daha iyi gözlemlemek ve soliter dalgaları incelemek için fiziksel laboratuvar deneyleri yaptı ve elde ettiği sonuçlar ile birlikte soliter dalgalar hakkında birtakım bilgilere ulaştı:

- (i) Soliter dalgalar, sıradan dalgaların aksine, hiçbir zaman birleşmezler. Bu nedenle, farklı genliklere sahip iki soliter dalga çarpıştıktan sonra, yapılarında herhangi bir bozulma olmaksızın yollarına devam eder. Sıradan dalgalar zamanla

ya düzleşerek yayılır ya da dikleşerek sönümlenirken, soliter dalgalar kararlı yapıları sayesinde uzun mesafeler boyunca bozulmadan ilerleyebilir.

- (ii) Soliter dalgalar, $c^2 = g(h + a)$ biçimindedir ve burada c soliter dalganın hızını, a su yüzeyindeki maksimum genliğini, h sonlu derinlik ve g yerçekimi ivmesini belirtir. Bu nedenle soliter dalgalara yerçekimi dalgaları denir.

Bu tür dalgalar, özellikle sıvıların, gazların veya bazı katıların üzerinde görülebilir. Soliter dalgaların keşfi, bilim insanlarına bu olguyu daha derinlemesine inceleme konusunda ilham vermiştir. Bu bağlamda, araştırmacılar farklı türde soliter dalgalar tanımlamış ve bunları solitonlar, kinks, peakons, cuspons ve diğer bazı formlar olarak sınıflandırmıştır. Her bir dalga türü, kendine özgü fiziksel ve matematiksel özelliklere sahiptir.

Fiziksel literatürde, soliter dalgalar ile solitonlar arasındaki ayırım zamanla belirsizleşmiştir. Genellikle "soliter dalga" terimi, tek bir lokalize dalga çözümünü ifade ederken, "soliton" terimi, çarpışmalardan sonra özelliklerini koruyan özel soliter dalgaları tanımlamak için kullanılır. Bir çözüm birden fazla solitondan oluşuyorsa, bu çözümler "çoklu soliton çözümleri" olarak adlandırılır.

Son yıllarda soliton kavramını incelemek amacıyla birçok araştırma yapılmıştır. Solitonlar, çeşitli fiziksel olaylarda gözlemlenmekte olup, fiziksel sistemleri tanımlayan zayıf doğrusal olmayan dağılımlı kısmi diferansiyel denklemlerin yaygın bir sınıfının çözümleri olarak ortaya çıkmaktadır. Akışkanlar dinamiği, astrofizik, plazma fiziği, manyeto-akustik dalgalar ve diğer bilimsel alanlardaki önemli rolleri nedeniyle, solitonlar araştırmacılar için ilgi çekici bir konu olmuştur.

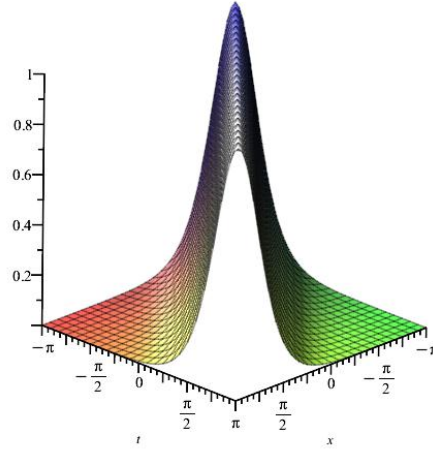
Solitonlar, elastik saçılma özelliklerine sahip tekil dalgalar olup, birbirleriyle çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını korurlar. Bununla birlikte, soliton kavramının kesin bir tanımını yapmak oldukça zordur. Drazin ve Johnson (1989), solitonları aşağıdaki üç temel özelliklerle tanımlamışlardır:

1. Solitonlar kalıcı dalga biçimlerine sahiptir.

2. Belirli bir bölge içinde lokalizedirler.
3. Diğer solitonlarla etkileşime girebilirler ve çarpışmadan sonra, yalnızca bir faz kayması dışında, değişmeden yollarına devam edebilirler.

Soliter dalgalar, sabit hız ve biçimde hareket eden, büyük mesafelerde asimptotik olarak sifıra yaklaşan, lokalize dalgalardır. Ancak her soliter dalga bir soliton değildir. Soliton çözümü uzaysal olarak yerelleştirilmiş bir çözümdür, dolayısıyla $\xi \rightarrow \pm\infty$, $\xi = x - ct$ olarak $u'(\xi), u''(\xi)$ ve $u'''(\xi) \rightarrow 0$ dir. Solitonlar, diğer solitonlarla etkileşime girdiğinde kimliğini koruduğu için önemli bir özelliğine sahiptir.

Solitonlar yalnızca su dalgalarında değil optik fiberlerde, plazma fiziğinde, Bose-Einstein yoğunlaşmalarında, kuantum alan teorisinde ve biyolojik sistemlerde de karşımıza çıkar. Bu geniş uygulama alanları, onları hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde önemli bir araştırma konusu haline getirmiştir.

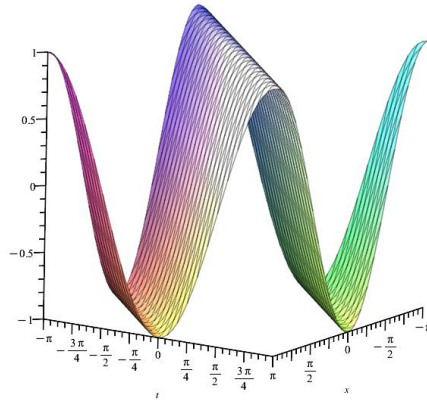


Şekil 2.1 $\text{sech}^2(x - t)$, $-\pi \leq x, t \leq \pi$ soliton çözümünün grafiği.

KdV denklemi analitik çan şeklindeki sech^2 soliter dalga çözümleri için öncü modeldir. Şekil 2.1, sonsuz kanatlar veya sonsuz kuyruklarla karakterize edilen çan şeklindeki bir sech^2 soliton çözümünün grafiğini göstermektedir (Wazwaz, 2010)..

2.2.2. Periyodik çözümler

Periyodik çözümler, belirli aralıklarla kendini tekrar eden hareketli dalga çözümleridir. $u(x, t) = \cos(x - t)$ fonksiyonu bu tür çözümlere örnek teşkil eder. Bu çözümler, özellikle standart dalga denklemi olan $u_{tt} = u_{xx}$ denklemi ile elde edilir. Şekil 2.2 bu tür çözümlere örnek olarak verilmiştir (Wazwaz, 2010).



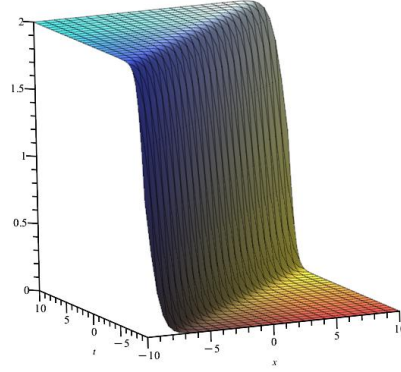
Şekil 2.2 Periyodik çözümün grafiği $u(x, t) = \cos(x - t)$, $-\pi \leq x, t \leq \pi$.

2.2.3. Kink dalgaları

Kink dalgaları, bir asimptotik durumdan diğerine geçiş yapan hareketli dalga çözümleridir. Bu tür çözümler, uzayın uç noktalarında sabit değerlere yaklaşır ve genellikle monoton bir yükselme veya alçalma profili sergiler. Kink çözümleri özellikle doğrusal olmayan evrimsel denklemlerde kararlı yapılar olarak ortaya çıkar. ν , vizkozite katsayısı olmak üzere

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

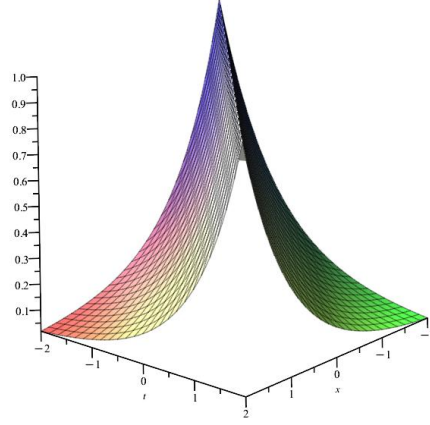
standart dağıtıcı Burgers denklemi kink çözümler veren iyi bilinen bir örnektir. Şekil 2.3 bu tür çözümlere bir örnek olarak verilmiştir (Wazwaz, 2010).



Şekil 2.3 Kink çözümünün grafiği $u(x,t) = 1 - \tanh(x - t)$, $-10 \leq x, t \leq 10$.

2.2.4. Peakonlar

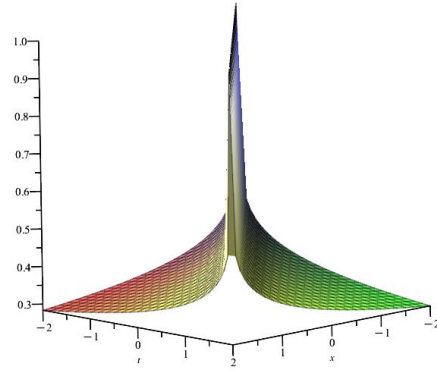
Peakonlar, tepe noktalı (peaked) yalıtılmış dalga çözümleridir. Bu çözümler, dalga formunun genelinde düzgün (smooth) olmakla birlikte, tepe noktalarında keskin bir zirve sergiler. Peakon ifadesi, bu sivri tepe yapısından türemiştir. Peakonlar, soliton kategorisinde değerlendirilir çünkü diğer solitonlar gibi çarpışma (etkileşim) sonrası özgün şekillerini ve hızlarını korurlar. Bu da onları fiziksel sistemlerde istikrarlı ve dayanıklı yapılar haline getirir. $u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$ Camassa-Holm denklemi c dalga hızı olmak üzere $u(x,t) = ce^{-|x-ct|}$ biçiminde çözümlere sahiptir. Şekil 2.4 de $c = 1$ iken CH denklemi için peakon çözümü görülmektedir (Wazwaz, 2010).



Şekil 2.4 Bir peakon çözümünün grafiği $u(x, t) = ce^{-|x-ct|}$, $-2 \leq x, t \leq 2$, burada c dalga hızıdır.

2.2.5. Kusponlar

Cusponlar, solitonların özel bir türünü oluşturur ve karakteristik olarak tepe noktalarında kıvrım (cusp) sergileyen çözümlerle tanımlanırlar. Bu yönüyle, daha çok bilinen peakonlar ile benzerlik gösterirler ancak aralarında önemli bir fark bulunmaktadır. Peakon çözümlerinde, dalganın tepe noktasındaki türevler tanımlıdır ve yalnızca işaret farkı gösterir. Buna karşılık, cusponlarda tepe noktasındaki türevler sonsuza yaklaşır. Bu nedenle, cusponların tepe noktalarında keskin bir kırılma gözlemlenir bu da dalga profilinde ani bir eğim değişimi olarak kendini gösterir. (Wazwaz, 2010)



Şekil 2.5 Bir kuspon çözümünün grafiği $u(x, t) = ce^{-(|x-ct|)^{\frac{1}{6}}}$, $c = 1$, $-2 \leq x, t \leq 2$.

2.3 Dengeleme Prensibi

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD'ler), doğa bilimleri ve mühendisliğin çeşitli alanlarında karşılaşılan önemli matematiksel modellerdir. Bu denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi, sistemin davranışını anlamak açısından büyük önem taşır. Özellikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tam çözüm yöntemleri, çözüme ulaşmak için belirli bir fonksiyonel biçim (ansatz) önerir. Bu yöntemlerde çözümün genel formu, belirli bir temel fonksiyonun kuvvetleri biçiminde ifade edilir. Bu tür çözümlerde karşılaşılan temel problemlerden biri, kullanılacak ansatz fonksiyonun en yüksek derecesi olan sonlu n sayısının nasıl belirleneceğidir. Bu belirlemede başvurulan temel yöntem dengeleme prensibi (balancing principle) olarak adlandırılır.

Dengeleme prensibi, lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli lineer terimin mertebesi ile denklemde görülen en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında kurulan bağıntı ile sabit bir pozitif tam sayının elde edilmesine dayanır. Lineer olmayan adi diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli lineer terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$ olsun. Burada p, q, r ve s birer sabit sayıdır.

Dengeleme prensibi yardımı ile n dengeleme sayısı $n + q = np + s(n + r)$ eşitliği ile hesaplanır. Örneğin,

$$u''c - \alpha u' + \frac{(1+u)^2}{2} - cu = c1,$$

denkleminde $q = 2, p = 2, r = s = 0$ olup dengeleme prensibi yardımı ile elde edilen $n = 2$ dir (Islam vd., 2015).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bilimsel çalışmalarda kullanılan beş farklı çözüm yönteminin algoritmaları kısaca tanıtılacaktır.

$$\psi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

lineer olmayan (3.1) kısmi diferensiyel denklemini ele alalım. (3.1) denklemini $\xi = x - wt$ ve $u(x, t) = U(\xi)$ dönüşümü yardımı ile

$$Q(U, U', U'', U''' \dots) = 0 \quad (3.2)$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür. Burada w dalga hızı, $U = U(\xi), U' = \frac{dU}{d\xi}, U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2}, \dots$ vb. dir.

3.1 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Yöntemi

Bu bölümde, tam çözüm yöntemlerinden biri olan $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yönteminin temel teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır (Bekir, 2008; Wang vd., 2008; Inc vd., 2022; Anıqa ve Ahmad, 2022; Rezazadeh vd., 2023).

(3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için (3.2) deki $U = U(\xi)$ fonksiyonunun

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^n A_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \quad A_n \neq 0 \quad (3.3)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde ifade edilebileceği varsayılır. Burada $A_i, (i = 0, 1 \dots n)$ daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. $G = G(\xi)$,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.4)$$

diferensiyel denklemini sağlayan bir fonksiyon, $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$, $G'' = \frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$ ve λ, μ sabitlerdir. (3.4) denklemi

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{G'}{G} \right) = - \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \lambda \left(\frac{G'}{G} \right) - \mu \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir. (3.3) ansatz fonksiyonundaki pozitif n tamsayısı, dengeleme prensibi kullanılarak belirlenir. (3.3) ansatz fonksiyonu (3.2) denklemine yerine yazılır ve elde edilen ifade, (3.4) denkleminin (3.5) biçimi yardımıyla $\left(\frac{G'}{G} \right)$ terimlerinin polinomlarına dönüştürülür. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Maple™ yardımı ile çözülür ve eğer olası bir çözüm varsa, A_i, λ, μ ve w ($i = 0, 1 \dots n$) değerlerini bulunduran çözüm aileleri elde edilir. Bu çözüm ailelerindeki A_i , ($i = 0, 1 \dots n$) değerleri (3.3) ansatz fonksiyonunda ayrı ayrı yerine yazılır ve elde edilen ifadelerdeki $\left(\frac{G'}{G} \right)$ terimleri yerine (3.4) denkleminin aşağıda verilen çözümleri kullanılır. Böylece (3.2) denkleminin çözümleri elde edilir. Son olarak (3.1) denkleminin çözümlerini elde etmek (3.2) denkleminin elde edilen çözümlerinde $\xi = x - wt$ yazmak yeterlidir.

(3.4) denkleminin genel çözümleri aşağıdaki biçimdedir:

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$, ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{C_1 \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + C_2 \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{C_1 \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + C_2 \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] \quad (3.6)$$

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$, ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \left[\frac{-C_1 \sin \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi + C_2 \cos \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi}{C_1 \cos \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi} \right] \quad (3.7)$$

Eğer $\lambda^2 - 4\mu = 0$, ise bu durumda

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} - \frac{\lambda}{2} \quad (3.8)$$

burada C_1, C_2 sabitlerdir (Wang ve ark. 2008).

3.2 $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ Yöntemi:

Bu bölümde, tam çözüm yöntemlerinden biri olan $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ -açılım yönteminin temel teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır (Bilal vd., 2021; Behera, 2022; Akram ve Gillani, 2021; Arshed ve Sadia, 2018).

(3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için (3.2) deki $U = U(\xi)$ nın

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ A_i \left(\frac{G'}{G^2}\right)^i + B_i \left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-i} \right\} \quad (3.9)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım. Burada $G = G(\xi)$

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right)' = \mu + \lambda \left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 \quad (3.10)$$

denklemini sağlar, $\mu \neq 1$ ve $\lambda \neq 0$ tamsayılarıdır. A_0, A_i ve B_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. (3.9) daki pozitif n tamsayısı dengeleme prensibi kullanılarak belirlenir. (3.9) ansatz fonksiyonu, (3.2) denkleminde yerine yazılır ve (3.10) denklemini yardımıyla $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ terimlerinin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi, MapleTM programı yardımı ile çözülerek A_0, A_i, B_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) katsayılarını bulunduran, sistemin çözüm aileleri

belirlenir. Elde edilen katsayılar (3.9) ansatz fonksiyonunda yerine yazılır. Bu ifadedeki $\frac{G'}{G^2}$ terimleri yerine (3.10) denkleminin aşağıda çeşitli şartlarda verilen, çözümleri yazılır böylece (3.2) denkleminin çözümleri elde edilir. (3.1) denkleminin çözümlerini elde etmek için (3.2) denkleminin çözümlerinde $\xi = x - wt$ yazmak yeterlidir. (3.10) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir:

Eğer $\lambda\mu > 0$, ise

$$\frac{G'}{G^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left\{ \frac{C_1 \cos(\sqrt{\lambda\mu}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda\mu}\xi)}{C_2 \cos(\sqrt{\lambda\mu}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{\lambda\mu}\xi)} \right\} \quad (3.11)$$

Eğer $\lambda\mu < 0$, ise

$$\frac{G'}{G^2} = -\frac{\sqrt{|\mu\lambda|}}{\lambda} \left\{ \frac{C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_2}{C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - C_2} \right\} \quad (3.12)$$

Eğer $\lambda \neq 0, \mu = 0$, ise

$$\frac{G'}{G^2} = -\frac{C_1}{\lambda(C_1 + C_2\xi)} \quad (3.13)$$

burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir (Arshed ve Sadia, 2018).

3.3. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Açılım Yöntemi:

Bu bölümde, tam çözüm yöntemlerinden biri olan geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yönteminin temel teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır (Akbar vd., 2012; Mohanty vd., 2022,).

(3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için (3.2) deki $U = U(\xi)$ nın

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^n \left[A_i \left(d + \frac{G'}{G} \right)^i + B_i \left(d + \frac{G'}{G} \right)^{-i} \right] \quad (3.14)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım. Burada μ ve λ sabit olmak üzere $G = G(\xi)$

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.15)$$

denklemini sağlar. (3.14) de A_0, A_i ve B_i ler daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. n pozitif tamsayısı, homojen denge prensibi kullanılarak belirlenir. Ansatz (3.14), (3.2) denkleminde yerine yazılır ve (3.15) denklemin yardımıyla $\left(d + \frac{G'}{G} \right)$ terimlerine bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem MapleTM programı yardımı ile çözümlenerek $A_0, A_i, B_i, k, \lambda, \mu$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) belirlenir. Elde edilen katsayılar (3.14) de yerine yazılır ve (3.15) denkleminin aşağıda verilen durumlarına bağlı çözümleri yardımıyla (3.2) denkleminin çözümleri elde edilir. (3.1) denkleminin çözümünü elde etmek için (3.2) denkleminin çözümlerinde $\xi = x - wt$ yazmak yeterlidir. (3.15) denkleminin çözümleri, $\Psi = \lambda^2 - 4\mu$ nün işaretine bağlıdır. Aşağıda Ψ nin durumlarına göre çözümler verilmiştir:

Aile-1: $\Psi > 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G} \right) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Psi}}{2} \left[\frac{C_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi + C_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi}{C_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi + C_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi} \right] \quad (3.16)$$

Adım-I $C_1 = 0$ ve $C_2 \neq 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G} \right) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Psi}}{2} \tanh \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi \quad (3.17)$$

Adım-II $C_1 \neq 0$ ve $C_2 = 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G} \right) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\Psi}}{2} \coth \frac{1}{2} \sqrt{\Psi} \xi \quad (3.18)$$

Aile-2: $\Psi < 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\Psi}}{2} \left[\frac{C_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi - C_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi}{C_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi + C_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi} \right] \quad (3.19)$$

Adım-I $C_1 = 0$ ve $C_2 \neq 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{-\Psi}}{2} \tan \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi \quad (3.20)$$

Adım-II $C_1 \neq 0$ ve $C_2 = 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\Psi}}{2} \cot \frac{1}{2} \sqrt{-\Psi} \xi \quad (3.21)$$

Aile-3: $\Psi = 0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} - \frac{\lambda}{2} \quad (3.22)$$

Adım-I $C_1 = 1$ ve $C_2 = 1$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{1}{1+\xi} - \frac{\lambda}{2} \quad (3.23)$$

burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir (Mohanty vd., 2022).

3.4 Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi:

Bu bölümde genelleştirilmiş Kudryashov yönteminin teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır (Akbulut, 2023; Akbar vd., 2021; Akbulut ve Kaplan, 2021).

(3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için (3.2) deki $U = U(\xi)$ nın

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \omega^i(\xi)}{\sum_{j=0}^m b_j \omega^j(\xi)} \quad (3.24)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım. Burada $a_i, b_j, (i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m)$ daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir ve $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ olmak üzere $\omega = \omega(\xi)$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \omega^2(\xi) - \omega(\xi) \quad (3.25)$$

denklemini sağlar. (3.25) adi diferensiyel denkleminin çözümü

$$\omega(\xi) = \frac{1}{1 + \chi e^\xi} \quad (3.26)$$

biçimindedir, burada χ integral sabitidir. Pozitif tam sayı olan n ve m , en yüksek mertebeden türev teriminin mertebesi ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin derecesi kullanılarak dengeleme prensi yardımı ile hesaplanır. (3.24) ansatz fonksiyonu, (3.25) denklemi kullanılarak, (3.2) denklemde yerine yazılır. Elde edilen ifade $\omega(\xi)^{i-j} (i, j = 1, 2, 3, \dots)$ polinomu biçimindedir. $\omega(\xi)$ ya bağlı bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi $a_i, b_j, (i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m)$ ve w katsayılarına göre, Maple™ programı yardımı ile çözülür. Bu katsayıları bulunduran çözüm aileleri elde edilir. Bu çözüm aileleri (3.24) de yerine yazılır ve (3.26) kullanılırsa (3.2) denkleminin çözümleri elde edilir. (3.2) denkleminin elde edilen bu çözümlerinde $\xi = x - wt$ yazılarak (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir (Akbulut, 2023).

3.5 Modifiye Kudryashov Yöntemi:

Bu bölümde Modifiye Kudryashov yönteminin teorisi verilecektir. Bu yöntem bazı araştırmacılar tarafından çeşitli evrim denklemlerine uygulanmıştır (Akbulut 2023, Akbulut ve Kaplan, 2021; Akbulut vd., 2022).

(3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için (3.2) deki $U = U(\xi)$ nın

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i (\omega(\xi))^i \quad (3.27)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım, burada a_i , ($i = 0, 1, \dots, n$) daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir ve $a_n \neq 0$ olmak üzere $\omega = \omega(\xi)$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = (\omega^2(\xi) - \omega(\xi)) \ln \sigma \quad (3.28)$$

denklemini sağlar. (3.28) adi diferensiyel denkleminin çözümü

$$\omega(\xi) = \frac{1}{1 + \chi \sigma^\xi} \quad (3.29)$$

biçimindedir, burada χ integral sabitidir. n pozitif tamsayısı dengeleme prensibi kullanılarak belirlenir. (3.27) ansatz fonksiyonu, (3.28) kullanılarak, (3.2) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade $\omega(\xi)^i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) nın polinomu biçimindedir. $\omega(\xi)$ ya bağlı bu polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi a_i , ($i = 0, 1 \dots n$) ve w katsayılarına göre Maple™ programı yardımı ile çözülür ve sistemin çözüm aileleri elde edilir. Bu çözüm aileleri (3.27) de yerine yazılır ve (3.29) kullanılırsa (3.2) denkleminin çözümleri elde edilir. (3.2) denkleminin elde edilen bu çözümlerinde $\xi = x - wt$ yazılarak (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir (Akbulut, 2023).

4. BULGULAR

4.1. Gardner-KP Denklemi için Verilen Yöntemlerin Uygulanması

Bu bölümde, 3. bölümde algoritmaları verilen yöntemleri (1.1) denkleminde uygulayarak tam çözümleri elde edilecektir. Bunun için (1.1) denkleminde

$$\mathfrak{B}(\theta, \eta, \zeta, \tau) = U(\xi), \quad \xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$$

değişken değişimi yapılır ve böylece (1.1) denklemi

$$v^2 U^w k_1^4 - 6k_1^2 U^2 U'' + 6k_1^2 U U'' + k_1 c U'' + \Omega(k_2^2 + k_3^2) U'' + 6k_1^2 (U')^2 - 12k_1^2 U (U')^2 = 0$$

biçimine dönüşür. İki defa ard arda integral alınarak

$$k_1 c U + 3k_1^2 U^2 - 2k_1^2 U^3 + \Omega k_2^2 U + \Omega k_3^2 U + v^2 k_1^4 U'' = 0 \quad (4.1)$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir.

4.1.1. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi kullanılarak tam çözümlerin elde edilmesi

Kısım 3.1 de teorisi verilen bu yöntemi (4.1) denkleminde uygulamak için öncelikle (3.3) ansatz fonksiyonundaki n dengeleme sayısı belirlenir. En yüksek dereceli doğrusal olmayan terim U^3 ve en yüksek mertebeli türev terimi U'' arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $n = 1$ bulunur. Böylece (3.3) kullanılarak (4.1) denklemin çözümünün

$$U(\xi) = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G}\right), \quad A_1 \neq 0 \quad (4.2)$$

ansatz fonksiyonu biçiminde olduğu varsayılır. Burada $G(\xi)$, (3.4) denklemini sağlar ve A_0, A_1 daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.2), (4.1) de yerine yazılır ve (3.4) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{G'}{G}\right)^i$, ($i = 1, 2, \dots$) nin kuvvetlerini bulunduran bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0, A_1, k_1, k_2, k_3, c$ için

$$k_1 c A_0 + v^2 k_1^4 A_1 \lambda \mu + 3k_1^2 A_0^2 + \Omega k_3^2 A_0 - 2k_1^2 A_0^3 + \Omega k_2^2 A_0 = 0,$$

$$3k_1^2 A_1^2 + 3v^2 k_1^4 A_1 \lambda - 6k_1^2 A_0 A_1^2 = 0,$$

$$-2k_1^2 A_1^3 + 2v^2 k_1^4 A_1 = 0,$$

$$\Omega k_3^2 A_1 - 6k_1^2 A_0^2 A_1 + 6k_1^2 A_0 A_1 + \Omega k_2^2 A_1 + 2v^2 k_1^4 A_1 \mu + v^2 k_1^4 A_1 \lambda^2 + k_1 c A_1 = 0.$$

biçiminde bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu cebirsel denklem sistemi Maple™ yardımı ile çözümlenerek aşağıdaki çözüm aileleri ve bunlar yardımıyla da (4.1) denkleminin çözümleri elde edilir. (4.1) denkleminin bu çözümlerinde $\xi = k_1 \theta + k_2 \eta + k_3 \zeta + c \tau$ yazılarak (1.1) denkleminin tam çözümleri elde edilmiş olur.

Aile 1:

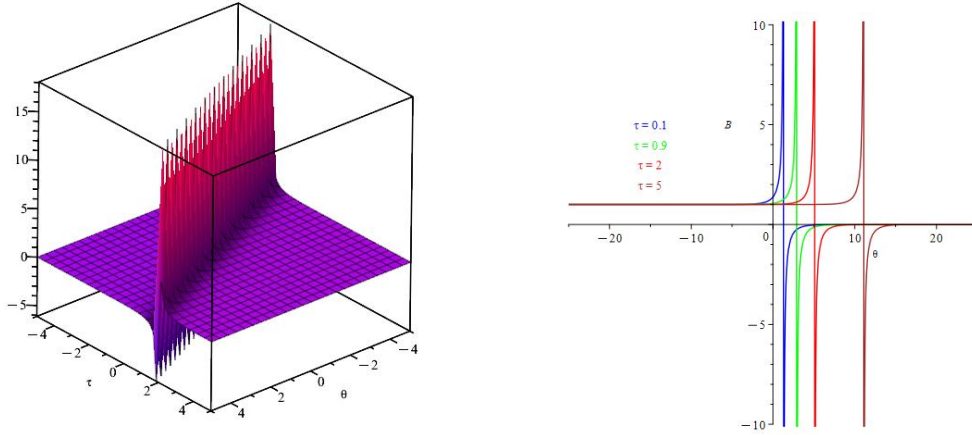
$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4\mu - \lambda^2}} \lambda}{2}, A_1 = \pm \sqrt{-\frac{1}{4\mu - \lambda^2}}, k_1 = \mp \frac{\sqrt{\frac{1}{4\mu - \lambda^2}}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = \pm \frac{4\mu v^2 \Omega k_3^2 + 4\mu v^2 \Omega k_2^2 - \lambda^2 v^2 \Omega k_3^2 - 1 - \lambda^2 v^2 \Omega k_2^2}{v(4\mu - \lambda^2) \sqrt{-\frac{1}{4\mu - \lambda^2}}} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

(4.3) deki katsayılar (4.2) de yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{1,2}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 4\mu}} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{C_1 \sin h\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \cos h\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{C_1 \cos h\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \sin h\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right) \quad (4.4)$$

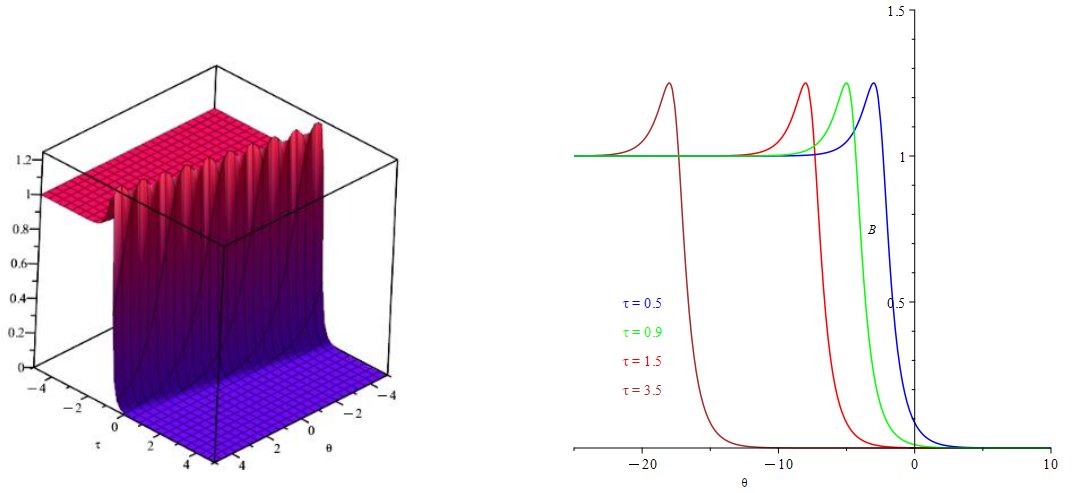
burada $\xi = k_1 \theta + k_2 \eta + k_3 \zeta + c \tau$ dir.



Şekil 4.1. $\{\lambda = 1, \mu = \frac{1}{8}, C_1 = 1, C_2 = 2, c = 2\sqrt{2}, v = 1, \Omega = 1, k_1 = -\sqrt{2}, k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_1(\theta, 0, 0, \tau)$ nin 3D ve 2D grafikleri
Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{3,4}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{-\lambda^2 + 4\mu}} \lambda}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{-\lambda^2 + 4\mu}} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} \xi\right)} \right) \quad (4.5)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.2. $\{\lambda = 1, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, c = \frac{-5}{3}i\sqrt{3}, v = 1, \Omega = 1, k_1 = \frac{-1}{3}i\sqrt{3},$

$k_2 = 1, k_3 = 1$ için $\mathfrak{B}_3(\theta, 0, 0, \tau)$ ün 3D ve 2D grafikleri

4.1.2. $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ yöntemi kullanılarak tam çözümlerin elde edilmesi

Kısım 3.2 de teorisi verilen bu yöntemi (4.1) denkleminde uygulamak için öncelikle (3.9) ansatz fonksiyonundaki n dengeleme sayısı belirlenir. En yüksek dereceli doğrusal olmayan terim U^3 ve en yüksek mertebeli türev terimi U'' arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $n = 1$ bulunur. Böylece (3.9) ansatz fonksiyonu yardımıyla (4.1) denkleminin çözümünün

$$U(\xi) = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G^2}\right) + B_1 \left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1} \quad (4.6)$$

biçiminde olduğu varsayılır. Burada $G(\xi)$, (3.10) denklemini sağlar ve A_0, A_1, B_1 parametreleri daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.6), (4.1) de yerine yazılır ve (3.10) denklemi kullanılırsa $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^i$, ($i = 1, 2, \dots$) nin kuvvetlerini bulunduran bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0, A_1, B_1, k_1, k_2, k_3, c$ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Maple™ yardımı ile çözümlenerek çeşitli çözüm kümeleri elde edilir. Bu çözüm kümelerindeki katsayılar (4.6) da yerine yazılır ve (3.11), (3.12) ve (3.13) kullanılırsa (4.1) denkleminin çözümleri elde edilir. Bu çözümlerde $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ yazılarak (1.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

Aile 1:

$$\left\{ A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = 0, B_1 = \sqrt{-\frac{\mu}{4\lambda}}, k_1 = -\frac{\sqrt{\frac{1}{4\mu\lambda}}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3, c = \frac{1}{4} \frac{4\mu\lambda v^2 \Omega k_2^2 + 4\mu\lambda v^2 \Omega k_3^2 - 1}{\mu\lambda \sqrt{-\frac{1}{4\mu\lambda}}} \right\} \quad (4.7)$$

(4.7) deki katsayılar, (4.6) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda\mu > 0$ ise,

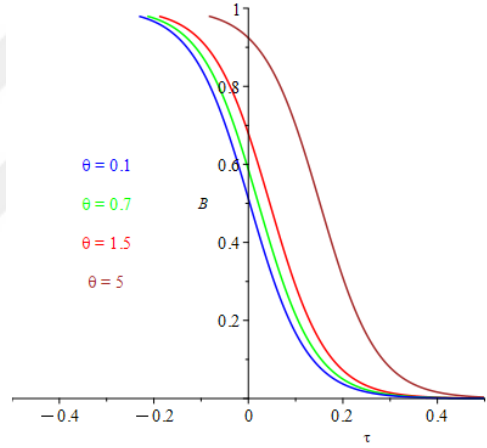
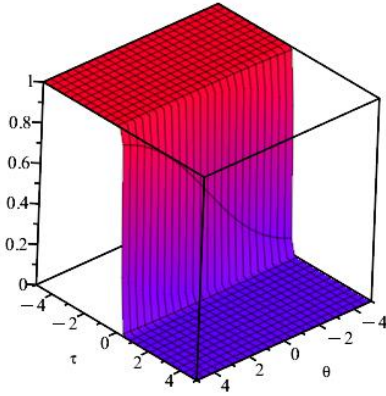
$$\mathfrak{B}_5(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-\frac{\mu}{4\lambda}}(C_2 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi))}{\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(C_1 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi))} \quad (4.8)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda\mu < 0$ ise

$$\mathfrak{B}_6(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-\frac{\mu}{4\lambda}}\lambda(C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda}|\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda}|\xi) - C_2)}{\sqrt{|\mu\lambda|}(C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda}|\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda}|\xi) + C_2)} \quad (4.9)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.3. $\left\{ \lambda = 1, \mu = -1, C_1 = 1, C_2 = 1, c = \frac{33}{8}\sqrt{4}, v = 2, \Omega = 1, k_1 = \frac{-\sqrt{4}}{8}, k_2 = 1, k_3 = 1 \right\}$ için $\mathfrak{B}_6(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Aile 2:

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}, A_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{4\mu}}, B_1 = 0, k_1 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu\lambda}}}{v}, c = -\frac{1}{4} \frac{4\mu\lambda v^2 \Omega k_3^2 + 4\mu\lambda v^2 \Omega k_2^2 - 1}{\mu\lambda v \sqrt{-\frac{1}{4\mu\lambda}}}, k_2 = k_2, \\ k_3 &= k_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

(4.10) daki katsayılar, (4.6) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_7(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-\frac{\lambda}{4\mu}}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(C_1 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi))}{C_2 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi)} \quad (4.11)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_8(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-\frac{\lambda}{4\mu}}\sqrt{|\mu\lambda|}(C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_2)}{\lambda(C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - C_2)} \quad (4.12)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 3:

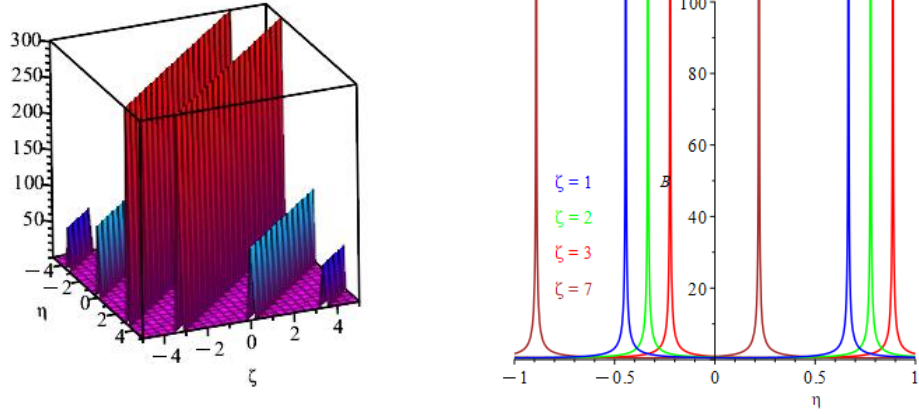
$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \pm \sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}\lambda, B_1 = \pm \frac{1}{16\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}\lambda}, k_1 = \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = \mp \frac{1}{16} \frac{16\mu\lambda v^2 \Omega k_3^2 + 16\mu\lambda v^2 \Omega k_2^2 - 1}{\mu\lambda v \sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}} \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

(4.13)deki katsayılar, (4.6) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{9,10}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(C_1 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi))}{C_2 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi)} \pm \frac{1}{16} \frac{C_2 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) - C_1 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi)}{\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}}\lambda\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(C_1 \cos(\sqrt{\mu\lambda}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{\mu\lambda}\xi))} \quad (4.14)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.4. $\left\{ \lambda = 1, \mu = 2, C_1 = 1, C_2 = 1, c = \frac{255}{64} i\sqrt{32}, v = 2, \Omega = 1, k_1 = \frac{1}{64} i\sqrt{32}, k_2 = 1, k_3 = 1 \right\}$ için $\mathfrak{B}_9(0, \eta, \zeta, 0)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Eğer $\lambda\mu < 0$ ise

$$\mathfrak{B}_{11,12}(\xi) = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}} \sqrt{|\mu\lambda|} (C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_2)}{C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - C_2} \mp \frac{1}{16} \frac{C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - C_2}{\sqrt{-\frac{1}{16\lambda\mu}} \sqrt{|\mu\lambda|} (C_1 \sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_1 \cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C_2)} \quad (4.15)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

4.1.3. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım yöntemi kullanılarak tam çözümlerin elde edilmesi

Kısım 3.3 de teorisi verilen bu yöntemi (4.1) denkleminde uygulamak için öncelikle (3.14) ansatz fonksiyonundaki n dengeleme sayısı belirlenir. En yüksek dereceli doğrusal olmayan terim U^3 ve en yüksek mertebeli türev terimi U'' arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $n = 1$ bulunur. Böylece (3.14) kullanılarak (4.1) denklemin çözümünün

$$U(\xi) = A_0 + A_1 \left(d + \frac{G'}{G} \right) + B_1 \left(d + \frac{G'}{G} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

biçiminde olduğu varsayılır. Burada $G(\xi)$, (3.15) denklemini sağlar ve A_0, A_1, B_1 parametreleri daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.16), (4.1) de yerine yazılır ve (3.15) denklemi kullanılırsa $\left(d + \frac{G'}{G} \right)^i$, ($i = 1, 2, \dots$) nin kuvvetlerini bulunduran bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0, A_1, B_1, k_1, k_2, k_3, c, d$ için cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi MapleTM yardımı ile çözülerek çeşitli çözüm kümeleri elde edilir. Bu çözüm kümelerindeki katsayılar (4.16) da yerine yazılır ve (3.16) - (3.23) kullanılırsa (4.1) denkleminin çözümleri elde edilir. Bu çözümlerde $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ yazılarak (1.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

Aile 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}\lambda}{2} + \frac{1}{2} \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d, \quad A_1 = 0, \\ B_1 = \pm d^2 \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \pm \mu \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \mp d \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \lambda, \quad k_1 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}}{v}, \\ k_2 = k_2, \quad k_3 = k_3, \quad d = d, \quad c = -\frac{4\mu v^2 \Omega k_3^2 + 4\mu v^2 \Omega k_2^2 - \lambda^2 v^2 \Omega k_2^2 - \lambda^2 v^2 \Omega k_3^2 - 1}{v(4\mu-\lambda^2) \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}} \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

(4.17) deki katsayılar (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{13,14}(\xi) = & \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}\lambda}{2} + \frac{1}{2} + \\ & \frac{\pm d^2 \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \pm \mu \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \mp d \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)} \\ & d^{-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}} \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{15,16}(\xi) = \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}\lambda}{2} + \frac{1}{2} \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d + \frac{\pm d^2 \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \pm \mu \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \mp d \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}\lambda}{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) \right)} d \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right)}{\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) \right)} \quad (4.19)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 2:

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 = 1, A_1 = vk_1, B_1 = \frac{1 - k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{4 vk_1}, d = \frac{1 - 1 + vk_1 \lambda}{2 vk_1}, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = \frac{-v^2 k_1^4 \lambda^2 + 4v^2 k_1^4 \mu - \Omega k_3^2 - \Omega k_2^2}{k_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

(4.20) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{17}(\xi) = 1 + vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)}}{\right)} + \frac{1}{4} \frac{-k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)}}{\right)} \right) \quad (4.21)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise

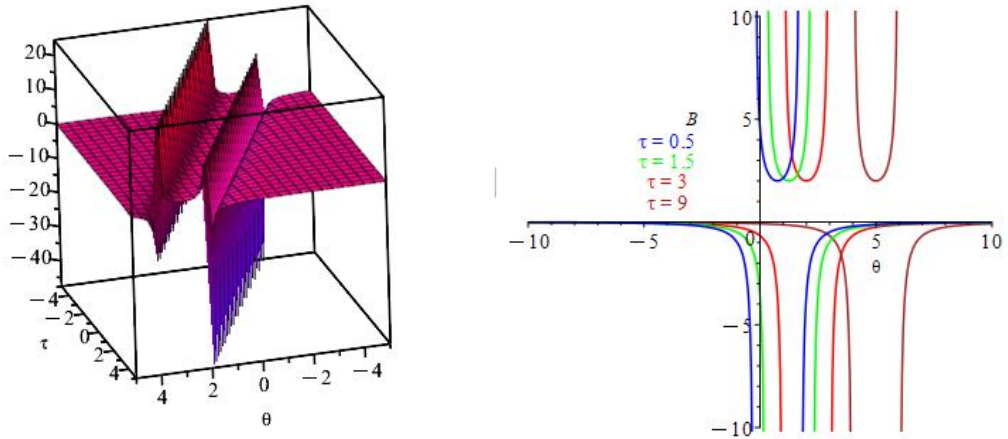
$$\mathfrak{B}_{18}(\xi) = 1 + vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)}}{\right)} \right) + \frac{1}{4} \frac{-k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)} \right)} \right) \quad (4.22)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{19}(\xi) = 1 + vk_1 \left(\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{1}{4} \frac{-k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{vk_1 \left(\frac{1}{2} \frac{vk_1 \lambda - 1}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2 \xi} - \frac{\lambda}{2} \right)} \quad (4.23)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.5. $\left\{ \lambda = 2, \mu = 1, C_1 = 1, C_2 = 1, c = -1, v = 1, \Omega = 1, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1, d = \frac{3}{4} \right\}$ için $\mathfrak{B}_{19}(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Aile 3:

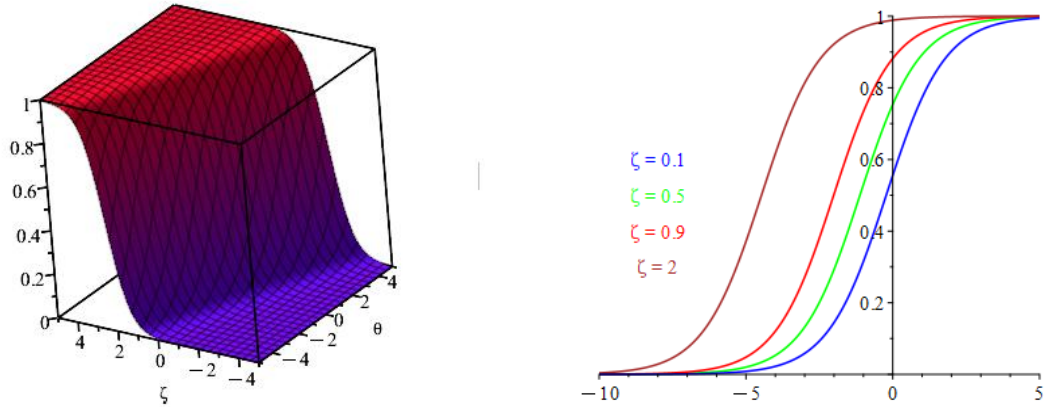
$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \lambda}{2} + \frac{1}{2}, A_1 = \pm \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}, B_1 = 0, \\ k_1 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3, d = d, c = -\frac{4\mu v^2 \Omega k_3^2 + 4\mu v^2 \Omega k_2^2 - \lambda^2 v^2 \Omega k_2^2 - \lambda^2 v^2 \Omega k_3^2 - 1}{v(4\mu-\lambda^2) \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}}} \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

(4.24) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise

$$\mathfrak{B}_{20,21}(\xi) = \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \lambda}{2} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \left(d - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \quad (4.25)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.6. $\left\{ \lambda = 3, \mu = 1, C_1 = 0, c = -\frac{11\sqrt{5}}{5}, v = 1, \Omega = 1, k_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, k_2 = 1, k_3 = 1, d = 1 \right\}$ için $\mathfrak{B}_{20}(\theta, 0, \zeta, 0)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{22,23}(\xi) = & \mp \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} d \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \lambda}{2} + \frac{1}{2} \\ & \pm \sqrt{-\frac{1}{4\mu-\lambda^2}} \left(d - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \xi}{2}\right)} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 4:

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 = 1, A_1 = -vk_1, B_1 = -\frac{1-k_1^2v^2\lambda^2+4v^2k_1^2\mu+1}{4vk_1}, d = \frac{1vk_1\lambda+1}{2vk_1}, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = \frac{-v^2k_1^4\lambda^2+4v^2k_1^4\mu-\Omega k_3^2-\Omega k_2^2}{k_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

(4.27) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{24}(\xi) = & 1 - vk_1 \left(\frac{1vk_1\lambda+1}{2vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \right. \\ & \left. \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \\ & - \frac{1}{4} \frac{-k_1^2v^2\lambda^2+4v^2k_1^2\mu+1}{vk_1 \left(\frac{1vk_1\lambda+1}{2vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right)} \right)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{25}(\xi) = 1 - vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1\lambda+1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)}}{\right)} - \frac{1}{4} \frac{-k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1\lambda+1}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)} \right)} \right) \quad (4.29)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{26}(\xi) = 1 - vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1\lambda+1}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1+C_2\xi} - \frac{\lambda}{2}}{\right) - \frac{1}{4} \frac{-k_1^2 v^2 \lambda^2 + 4v^2 k_1^2 \mu + 1}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} \frac{vk_1\lambda+1}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1+C_2\xi} - \frac{\lambda}{2}}{\right)} \quad (4.30)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 5:

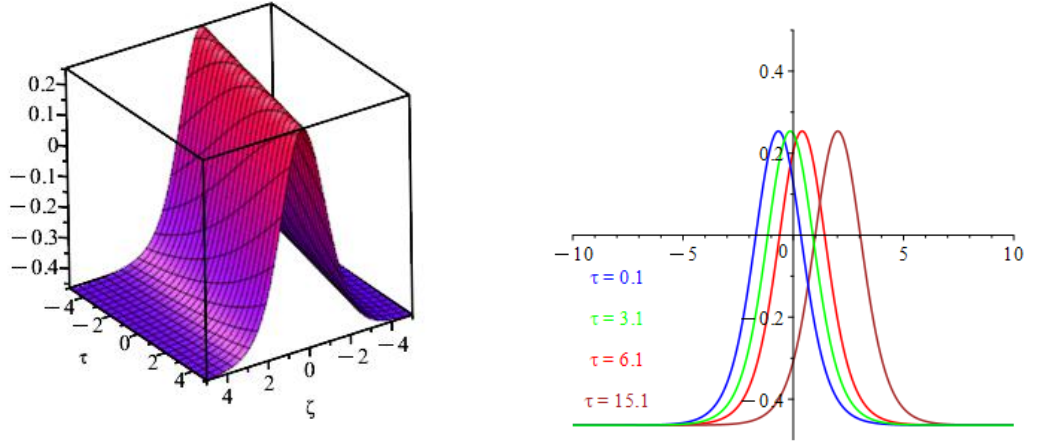
$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}, A_1 = -vk_1, B_1 = -\frac{1}{8} \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1}, \\ d = \frac{\frac{1}{2} vk_1 \lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1}, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = \frac{1}{4} \frac{-3k_1^2 + 2v^2 k_1^4 \lambda^2 - 8v^2 k_1^4 \mu - 4\Omega k_3^2 - 4\Omega k_2^2 + 6k_1^2 \left(\frac{1}{2} vk_1 \lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu} \right) - 3k_1^3 v \lambda}{k_1} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

(4.31) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{27}(\xi) = & \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu} \\ & - vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \right. \\ & \left. \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \\ & - \frac{1}{8} \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)} \right)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.7. $\left\{ \lambda = \frac{5}{2}, \mu = 1, C_1 = 0, c = -\frac{23}{16} + \frac{3\sqrt{45}}{16}, v = 1, \Omega = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, d = \frac{11}{8} + \frac{\sqrt{45}}{8} \right\}$ için $\mathfrak{B}_{27}(0,0,\zeta,\tau)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{28}(\xi) &= \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu} \\
&\quad - vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8} \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)} \right)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{29}(\xi) &= \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu} \\
&\quad - vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi} - \frac{\lambda}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8} \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi} - \frac{\lambda}{2} \right)}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$.

Aile 6:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}, A_1 = vk_1, B_1 = -\frac{1}{8} \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1}, \\ d = \frac{\frac{1}{2} vk_1 \lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1}, k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3, \\ c = -\frac{1}{4} \frac{3k_1^2 - 2v^2 k_1^4 \lambda^2 + 8v^2 k_1^4 \mu + 4\Omega k_3^2 + 4\Omega k_2^2 + 6k_1^2 \left(\frac{1}{2} vk_1 \lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu} \right) - 3k_1^3 v \lambda}{k_1} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

(4.35) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{30}(\xi) &= \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu} \\ &+ vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} vk_1 \lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \right. \\ &\left. \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \\ &- \frac{1}{8} \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2} vk_1 \lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2 k_1^2 \lambda^2 + 9 - 64v^2 k_1^2 \mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{2}\right)} \right)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{31}(\xi) &= \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu} \\
&+ vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \right. \\
&\left. \frac{\frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)} \right) \\
&- \frac{1}{8} \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \xi}{2}\right)} \right)}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ise,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{32}(\xi) &= \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu} \\
&+ vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi} - \frac{\lambda}{2} \right) \\
&- \frac{1}{8} \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1 \left(\frac{\frac{1}{2}vk_1\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{16v^2k_1^2\lambda^2 + 9 - 64v^2k_1^2\mu}}{vk_1} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi} - \frac{\lambda}{2} \right)}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \pm \frac{1}{4\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}(4\mu-\lambda^2)}, B_1 = \pm \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}(4\mu-\lambda^2)}{4}, d = \frac{\lambda}{2}, k_1 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}}{v}, \\ k_2 = k_2, k_3 = k_3, c = -\frac{1}{4} \frac{16\mu v^2 \Omega k_3^2 + 16\mu v^2 \Omega k_2^2 - 4\lambda^2 v^2 \Omega k_2^2 - 4\lambda^2 v^2 \Omega k_3^2 - 1}{v(4\mu-\lambda^2)\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}} \end{array} \right\} \quad (4.39)$$

(4.39) daki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{33,34}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}(4\mu-\lambda^2) \left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)} \\ \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}(4\mu-\lambda^2) \left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)} \quad (4.40)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{35,36}(\xi) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{8} \frac{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)}{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}\sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)} \\ \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\frac{1}{16\mu-4\lambda^2}}\sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)}$$

(4.41)

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 8:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}(4\mu-\lambda^2)}}, B_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}(4\mu-\lambda^2)}}{4}, d = \frac{\lambda}{2}, k_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}}}{v}, \\ k_2 = k_2, k_3 = k_3, c = -\frac{1}{2} \frac{8\mu v^2 \Omega k_3^2 + 8\mu v^2 \Omega k_2^2 - 2\lambda^2 v^2 \Omega k_2^2 - 2\lambda^2 v^2 \Omega k_3^2 + 1}{v(4\mu-\lambda^2)\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}}} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

(4.42) deki katsayılar, (4.16) da yerine yazılır ve aşağıda oluşturulan çözümler elde edilir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{37}(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}(4\mu-\lambda^2)} \left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}(4\mu-\lambda^2)} \left(C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \left(C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \xi}{2}\right) \right)} \quad (4.43)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Eğer $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise,

$$\mathfrak{B}_{38}(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}} \sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{8\mu-2\lambda^2}} \sqrt{4\mu-\lambda^2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) \right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2+4\mu} \xi}{2}\right)} \quad (4.44)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

4.1.4. Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi kullanılarak tam çözümlerin elde edilmesi

Kısım 3.4 de teorisi verilen bu yöntemi (4.1) denkleminde uygulamak için öncelikle (3.24) ansatz fonksiyonundaki n ve m dengeleme sayıları belirlenir. En yüksek dereceli doğrusal olmayan terim U^3 ve en yüksek mertebeli türev terimi U'' arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $m = 1, n = 2$ bulunur. Böylece (3.24) kullanılarak (4.1) denkleminin çözümünün

$$U(\xi) = \frac{A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2}{B_0 + B_1\omega} \quad (4.45)$$

biçiminde olduğu varsayılır. Burada $\omega(\xi)$, (3.25) denklemini sağlar ve A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 parametreleri daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.45), (4.1) de yerine yazılır ve (3.25) denklemi kullanılırsa $\omega(\xi)$ nin kuvvetlerini bulunduran bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, k_1, k_2, k_3, c$ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Maple™ yardımı ile çözümlenerek çeşitli çözüm kümeleri elde edilir. Bu çözüm kümelerindeki katsayılar (4.45) de yerine yazılır ve (3.26) kullanılırsa (4.1) denkleminin çözümleri elde edilir. Bu çözümlerde $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ yazılarak (1.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

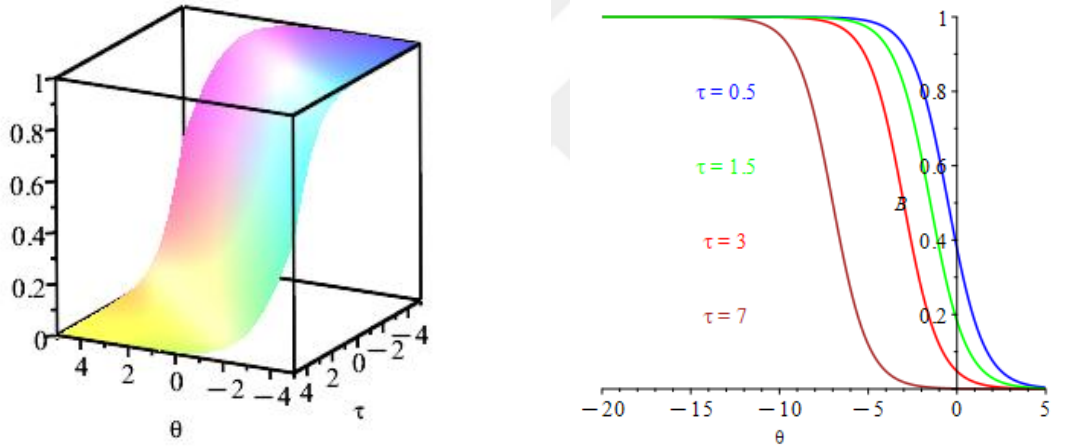
Aile 1:

$$\left\{ c = -\frac{\Omega k_3^2 v^2 + \Omega k_2^2 v^2 + 1}{v}, A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = B_1, B_0 = 0, B_1 = B_1, k_1 = \frac{1}{v}, \right. \\ \left. k_2 = k_2, k_3 = k_3 \right\} \quad (4.46)$$

(4.46) da elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{39}(\xi) = \frac{1}{1 + \chi e^\xi} \quad (4.47)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dır.



Şekil 4.8. $\{A = 1, \Omega = -1, c = 1, v = 1, b_1 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_{39}(\theta, 0, 0, \tau)$ nun 3D ve 2D grafikleri

Aile 2:

$$\left\{ c = -\frac{1 + 4\Omega k_3^2 v^2 + 4\Omega k_2^2 v^2}{2v}, A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{2}B_1, B_0 = -\frac{1}{2}B_1, B_1 = B_1, k_1 = \frac{1}{2v}, \right. \\ \left. k_2 = k_2, k_3 = k_3 \right\} \quad (4.48)$$

(4.48) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{40}(\xi) = -\frac{1}{-1+\chi^2 e^{(2\xi)}} \quad (4.49)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

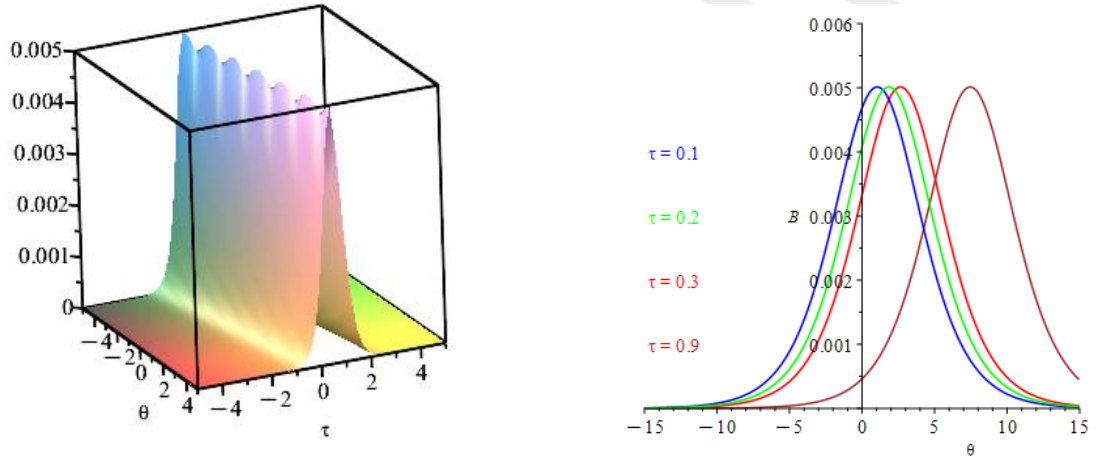
Aile 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = -\frac{\Omega k_3^2 + \Omega k_2^2 + k_1^4 v^2}{k_1}, A_0 = 0, A_1 = A_1, A_2 = -A_1, B_0 = \frac{1}{2} \frac{a_1(1+vk_1)}{v^2 k_1^2}, B_1 = -\frac{a_1}{vk_1}, \\ k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.50)$$

(4.50) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{41}(\xi) = \frac{2k_1^2 v^2 \chi e^\xi}{(1+\chi e^\xi - vk_1 + vk_1 \chi e^\xi)(1+\chi e^\xi)} \quad (4.51)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.9. $\{A = 0.8, \Omega = 1, c = -4.005, v = 0.2, a_1 = 1, k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_{41}(\theta, 0, 0, \tau)$ nin 3D ve 2D grafikleri

Aile 4:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = -\frac{\Omega k_3^2 + \Omega k_2^2 + k_1^4 v^2}{k_1}, A_0 = 0, A_1 = A_1, A_2 = -A_1, B_0 = -\frac{1}{2} \frac{a_1(vk_1-1)}{v^2 k_1^2}, B_1 = \frac{A_1}{vk_1}, \\ k_1 = k_1, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

(4.52) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{42}(\xi) = -\frac{2k_1^2 v^2 \chi e^\xi}{(-vk_1 + vk_1 \chi e^\xi - 1 - \chi e^\xi)(1 + \chi e^\xi)} \quad (4.53)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

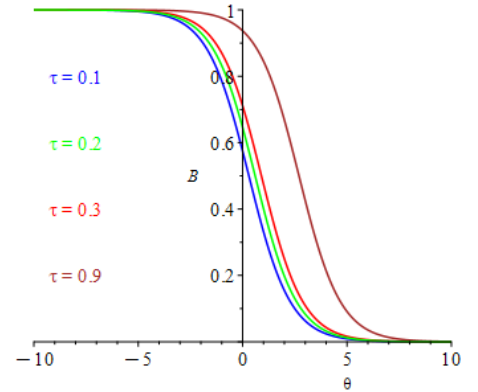
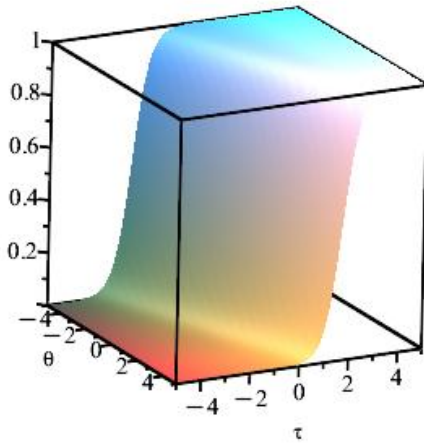
Aile 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1 + \Omega k_3^2 v^2 + \Omega k_2^2 v^2}{v}, A_0 = B_0, A_1 = B_1 - B_0, A_2 = -B_1, B_0 = B_0, B_1 = B_1, \\ k_1 = -\frac{1}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

(4.54) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{43}(\xi) = \frac{\chi e^\xi}{1 + \chi e^\xi} \quad (4.55)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.



Şekil 4.10. $\{A = 1, c = 3, \Omega = 1, v = 1, b_0 = 1, b_1 = 1, k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1\}$ için $\mathfrak{B}_{43}(\theta, 0, 0, \tau)$ nin 3D ve 2D grafikleri

Aile 6:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{2} \frac{1+4\Omega k_3^2 v^2 + 4\Omega k_2^2 v^2}{v}, A_0 = -\frac{1}{2} B_1, A_1 = B_1, A_2 = -\frac{1}{2} B_1, B_0 = -\frac{1}{2} B_1, B_1 = B_1, \\ k_1 = -\frac{1}{2v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.56)$$

(4.56) da elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{44}(\xi) = \frac{\chi^2 e^{(2\xi)}}{-1 + \chi^2 e^{(2\xi)}} \quad (4.57)$$

burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 7:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\frac{1}{2}i(2\Omega k_2^2 v^2 + 2\Omega k_3^2 v^2 - 1)\sqrt{2}}{v}, A_0 = -\frac{1}{4} B_1, A_1 = -\frac{1}{2} B_1(-1 + i\sqrt{2}), A_2 = \frac{B_1}{2} i\sqrt{2}, \\ B_0 = -\frac{1}{2} B_1, B_1 = B_1, k_1 = \frac{1}{2} \frac{i\sqrt{2}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.58)$$

(4.58) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{45}(\xi) = \frac{1 - 1 + \chi^2 e^{(2\xi)} + 2i\sqrt{2}\chi e^\xi}{2(-1 + \chi^2 e^{(2\xi)})} \quad (4.59)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

Aile 8:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\frac{1}{2}i(2\Omega k_2^2 v^2 + 2\Omega k_3^2 v^2 - 1)\sqrt{2}}{v}, A_0 = -\frac{1}{4}B_1, A_1 = \frac{1}{2}B_1(1 + i\sqrt{2}), A_2 = \frac{-b_1}{2}i\sqrt{2}, \\ B_0 = -\frac{1}{2}B_1, B_1 = B_1, k_1 = \frac{\frac{1}{2}i\sqrt{2}}{v}, k_2 = k_2, k_3 = k_3 \end{array} \right\} \quad (4.60)$$

(4.60) de elde edilen değerler (4.45) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{46}(\xi) = \frac{1}{2} \frac{-1 + \chi^2 e^{(2\xi)} - 2i\sqrt{2}\chi e^\xi}{-1 + \chi^2 e^{(2\xi)}} \quad (4.61)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ dir.

4.1.5. Modifield kudryashov yöntemi kullanılarak tam çözümlerin elde edilmesi

Kısım 3.5 de teorisi verilen bu yöntemi (4.1) denklemine uygulamak için öncelikle (3.27) ansatz fonksiyonundaki n dengeleme sayısı belirlenir. En yüksek dereceli doğrusal olmayan terim U^3 ve en yüksek mertebeli türev terimi U'' arasında dengeleme prensibi uygulanırsa $n = 1$ bulunur. Böylece (3.27) kullanılarak (4.1)'in çözümünün

$$U(\xi) = A_0 + A_1\omega \quad (4.62)$$

biçiminde olduğu varsayılır. Burada $\omega(\xi)$, (3.28) denklemini sağlar ve A_0, A_1 parametreleri daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.62), (4.1) de yerine yazılır ve (3.28) denklemi kullanılırsa $\omega(\xi)$ nin kuvvetlerini bulunduran bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek $A_0, A_1, k_1, k_2, k_3, c$ için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi MapleTM yardımı ile çözülerek çeşitli çözüm kümeleri elde edilir. Bu çözüm kümelerindeki katsayılar (4.62) de yerine yazılır ve (3.29) kullanılırsa (4.1) denkleminin çözümleri elde edilir. Bu çözümlerde $\xi = k_1\theta + k_2\eta + k_3\zeta + c\tau$ yazılarak (1.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

Aile 1:

$$\left\{ c = \mp \frac{\Omega k_2^2 v^2 \ln(\sigma)^2 + \Omega k_3^2 v^2 \ln(\sigma)^2 + 1}{v \ln(\sigma)}, A_0 = 0, A_1 = 1, k_1 = \pm \frac{1}{v \ln(\sigma)}, \right. \\ \left. k_2 = k_2, k_3 = k_3 \right\} \quad (4.63)$$

(4.63) da elde edilen değerler (4.62) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{47}(\xi) = \frac{1}{1 + \chi \sigma^\xi} \quad (4.64)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1 \theta + k_2 \eta + k_3 \zeta + c \tau$ dır.

Aile 2:

$$\left\{ c = \pm \frac{\Omega k_2^2 v^2 \ln(\sigma)^2 + \Omega k_3^2 v^2 \ln(\sigma)^2 + 1}{v \ln(\sigma)}, A_0 = 1, A_1 = -1, k_1 = \mp \frac{1}{v \ln(\sigma)}, \right. \\ \left. k_2 = k_2, k_3 = k_3 \right\} \quad (4.65)$$

(4.65) da elde edilen değerler (4.62) de yerine yazılarak (1.1) denkleminin

$$\mathfrak{B}_{48}(\xi) = -\frac{1}{1 + \chi \sigma^\xi} + 1 \quad (4.66)$$

çözümü elde edilir, burada $\xi = k_1 \theta + k_2 \eta + k_3 \zeta + c \tau$ dır.

4.2. Kararlılık Özelliği

Bu bölümde, önceki kısımlarda çeşitli analitik yöntemler kullanılarak elde edilen bazı çözümlerin kararlılık analizleri gerçekleştirilecektir. Elde edilen çözümlerin zamanla biçimlerini koruyup korumadıkları, yani kararlı olup olmadıkları, farklı yöntemlerle test edilebilir. Bu analizlerden biri, Hamilton sisteminin özelliklerinden yararlanılarak yapılan kararlılık incelemesidir. Bu bağlamda, modelin uygulamalardaki geçerliliğini ve fiziksel anlamlılığını değerlendirmek amacıyla, elde edilen bazı çözümler üzerinde Hamilton tipi kararlılık testleri uygulanmıştır. Bu tür analizler, kullanılan yöntemlerin doğrusal

olmayan evrim denklemlerine uygulanabilirliğini, etkinliğini ve çözüm kalitesini ortaya koymaktadır. Literatürde, bu yaklaşımlara ilişkin çok sayıda çalışma yer almakta olup, önerilen yöntemlerin geçerliliğini desteklemektedir.

Literatürdeki çalışmalardan bazıları: Quian ve arkadaşları, sığ su çıkışlarının dinamik davranışını tanımlamak için kullanılan genel Degasperis-Proces (DP) denklemine, değiştirilmiş Khater yöntemi ve geliştirilmiş Kudryashov yöntemini uyguladılar ve çözümlerin bazılarını kararlılık analizi yaparak ile test ettiler (Qian vd., 2019). Seadawy, genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntemi ve kesirli doğrudan cebirsel yöntemi uygulayarak doğrusal olmayan üç boyutlu mKdV–ZK denklemi için soliter dalga çözümleri elde ederek elektrik alan potansiyelleri ve elektrik alanlar için kararlılık testi uyguladı (Seadawy, 2016a). Ayrıca, doğrusal olmayan KdV denkleminin geliştirilmiş birleşik bir sisteme genişletilmiş cebirsel denklem yöntemi uygulayıp elde edilen sonuçları kararlılık özelliği ile test etti (Seadawy, 2016b). Park ve arkadaşları, Zakharov-Kuznetsov denklemi ile temsil edilen iki boyutlu ayrık bir elektrik kafesinin analitik ve sayısal çözümlerini incelediler ve elde edilen analitik çözümlerin kararlılık özelliklerini Hamilton sistemi temelinde test ettiler (Park vd., 2020).

Bu kısımda, önceki kısımlarda elde edilen çözümlerin bazıları için kararlılık özelliği, Hamilton sisteminin özellikleri yardımıyla incelenmiştir. Hamilton sistemindeki momentum

$$M_H = \frac{1}{2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} F^2(\xi) d\xi,$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $F(\xi)$ modelin çözümünü ifade etmekte ve kararlılık için gerekli koşul

$$\left. \frac{\partial M}{\partial \theta} \right|_{\theta=\beta} > 0,$$

biçiminde formüle edilmektedir. Burada θ ve β sabitlerdir.

(4.4) çözümünde

$$\left\{ C_1 = 1, C_2 = 2, \lambda = 1, \mu = \frac{1}{8}, k_1 = -\sqrt{2}, k_2 = 1, k_3 = 1, \theta = 0, \zeta = 0, \right\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\frac{\partial M}{\partial c} \Big|_{c=2\sqrt{2}} = 0.8389811102 + 0.5553604514i > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

(4.9) çözümünde

$$\left\{ \lambda = 1, \mu = -1, C_1 = 1, C_2 = 1, k_1 = -\frac{\sqrt{4}}{8}, k_2 = 1, k_3 = 1, c = \frac{33\sqrt{4}}{8}, \eta = 1, \zeta = 1 \right\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2} = 0.03030303033 > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

(4.26) çözümünde

$$\left\{ \lambda = 3, \mu = 1, C_1 = 0, k_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, k_2 = 1, k_3 = 1, c = -\frac{11\sqrt{5}}{5}, \eta = 1, \zeta = 1 \right\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2} = 0.09090909582 > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

(4.55) çözümünde

$$\{A = 1, v = 1, \Omega = 1, k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1, \eta = 0, \theta = 0\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\left. \frac{\partial M}{\partial c} \right|_{c=3} = 0.06528575373 > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

(4.64) çözümünde

$$\{A = 1, v = 1, \Omega = 1, \sigma = 2, k_1 = -1.442695041, k_2 = 1, k_3 = 1, \eta = 0, \zeta = 0\}$$

özel parametre değerleri kullanılarak

$$\left. \frac{\partial M}{\partial c} \right|_{c=2.828989402} = 0.05056364468 > 0$$

elde edilir. Bu çözümün kararlı olduğunu gösterir.

Bu çalışmada elde edilen çözümlerin her birine kararlılık özellikleri aynı adımlar uygulanarak incelenebilir.

5. SONUÇ:

Bu çalışmada, doğrusal olmayan (3+1)-boyutlu Gardner-KP denkleminin odaklanılarak, dalga dinamikleri kapsamlı bir şekilde analiz edildi. Denklem üzerinde sırasıyla $\left(\frac{G'}{G}\right)$, $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$, genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$, genelleştirilmiş Kudryashov ve modifiye Kudryashov yöntemleri uygulanarak hareketli dalga çözümleri elde edildi. Uygulanan bu analitik yöntemler sonucunda trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel fonksiyonlar cinsinden ifade edilen çeşitli çözüm türlerine ulaşıldı. Elde edilen tüm çözümler, MapleTM yardımı ile (1) denkleminde yerine yazılarak doğrulandı. Çözümlerin farklı uygun parametre değerleri için davranışını görmek amacıyla, çözümler MapleTM kullanılarak 2-boyutlu ve 3-boyutlu olarak görselleştirildi ve dalga davranışları detaylı bir biçimde analiz edildi. Kink, anti kink, parlak soliton, karanlık soliton, çoklu parlak soliton yapılar gözlemlendi. Ayrıca, seçilen bazı çözümler üzerinde Hamilton sistemine dayanan kararlılık analizleri gerçekleştirildi. Bu analizler, çözümlerin fiziksel anlamlılığı ve uygulanabilirliği hakkında önemli bulgular sunmaktadır.

Yöntemlerin uygulanması sonucunda, her bir yöntemin (3+1)-boyutlu Gardner-KP denklemini için farklı sayıda çözüm ürettiği gözlemlendi. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi 4, $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ yöntemi 8, genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi 26, genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi 8 ve modifiye Kudryashov yönteminin 2 adet analitik çözüm ürettiği görüldü. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi ile elde edilen çözümler, ansatz fonksiyonda $d = 0$ alındığında $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi ile elde edilen çözümlerle örtüşmektedir. Bu nedenle genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi kullanırken $d = 0$ durumu dikkate alınmadı. Yöntemler arasında karşılaştırma yapıldığında, (3+1) Gardner-KP denklemini için, genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yönteminin çözüm üretme kapasitesinin diğer yöntemlere göre daha yüksek olduğu sonucuna varıldı. Bu durum, yöntemin parametrik esnekliği ve geniş çözüm ailesi sunma potansiyeli açısından avantajlı olduğunu göstermektedir. Elde edilen bu sonuç, analitik yöntemlerin karşılaştırmalı etkinliğini ortaya koymakta ve benzer denklemler üzerinde yapılacak gelecekteki çalışmalar için yol gösterici nitelik taşımaktadır. Ayrıca bu çalışma, doğrusal

olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik yöntemlerle çözümlenmesinin, özellikle dalga fenomenlerini açıklamada etkili bir araç olduğunu da gösterdi. Elde edilen sonuçların, matematik, fizik ve özellikle okyanus mühendisliği gibi uygulamalı alanlarda yürütülecek ileri çalışmalar için bir temel oluşturması beklenmektedir. Bu tür çözümlerin kullanımı fizikçilerin ve mühendislerin, dalgaların gelgit kuvvetlerinin ve diğer fenomenlerin davranışlarını daha iyi anlamalarına ve tahmin etmelerine yardımcı olur. Böylece daha güvenli, verimli yapıların ve sistemlerin tasarlanmasına olanak tanır. Bu çalışmada sistematik olarak üretilen tam çözümler, dalga etkileşimindeki karmaşık doğrusal olmayan fiziksel fenomenlerin doğasını değerlendirmek için de uygun olabilir.

Bu çalışmada sunulan tüm sonuçların, doğrusal olmayan fizik bilimlerinden ve diğer ilgili alanlardan kaynaklanan doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin dinamik davranışlarını zenginleştirmek için faydalı olacağına inanıyorum.

KAYNAKLAR

Akbar, M.A., Akinyemi, L., Yao, S.W., Jhangeer, A., Rezazadeh, H., Khater, M.M.A., Ahmad, H., Inc, M. 2021. Soliton solutions to the Boussinesq equation through sine-Gordon method and Kudryashov method. Results in Physics. 25,104228 (2021)

Akbulut, A., Kaplan, M. 2021. The analysis of the soliton-type solutions of conformable equations by using generalized Kudryashov method. Optical and Quantum Electronics. 53:498 (2021) <https://doi.org/10.1007/s11082-021-03144-y>

Akbulut, A., Arnous, A.H., Hashemi, M.S., Mirzazadeh, M. 2022. Solitary waves for the generalized nonlinear wave equation in (3+1) dimensions with gas bubbles using the Nucci's reduction, enhanced and modified Kudryashov algorithms. Journal of Ocean Engineering and Science. (2022)

Akbulut, A. 2023. Obtaining the Soliton Type Solutions of the Conformable Time-Fractional Complex Ginzburg–Landau Equation with Kerr Law Non linearity by Using Two Kinds of Kudryashov Methods. Journal of Mathematics. (2023). <https://doi.org/10.1155/2023/4741219>

Akbar M.A., Ali N.H.M., Zayed E.M.E. 2012. A Generalized and Improved (G'/G) -Expansion Method for Nonlinear Evolution Equations. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume, Article 2012;ID 459879, 22 pages doi:10.1155/2012/459879.

Akram G., Gillani S.R. Sub pico-second Soliton with Triki–Biswas equation by the extended (G'/G^2) -expansion method and the modified auxiliary equation method. Optik, International Journal for Light and Electron Optics. 2021;229 166227.

Ali, H.M.S., Akher, C.M., Miah, M.M., Akbar, M.A. 2020. Abundant closed form wave solutions to the Burgers equation, Bogoyavlenskii equation and negative Gardner-KP equation. BSKA, New Trends in Mathematical Science. 2020;8, No:1, 26-41.

Aniqa A., Ahmad J. 2022. Soliton solution of fractional Sharma-Tasso-Oleiver equation via an efficient (G'/G) -expansion method. Ain Shams Engineering Journal. 2022;13, 101528.

Arshed S., Sadia M. 2018. (G'/G^2) -Expansion method: new traveling wave solutions for some nonlinear fractional partial differential equations. Opt Quant Electron. 2018;50:123.

Ay, N.G., Yaşar, E. 2023. Multi wave, kink, breather, interaction solutions and modulation instability to a conformable third order nonlinear Schrödinger equation. Optical and Quantum Electronics. 2023;55:360.

Behera S., Aljahdaly N.H., Viridi J.P.S. 2022. On the modified (G'/G^2) -expansion method for finding some analytical solutions of the traveling waves. Journal of Ocean Engineering and Science. 2022;7, 313-320.

Bekir A. 2008. Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations. *Physics Letters A*. 2008;372 3400-3406.

Bilal M., Younis M., Rezazadeh H., Sulaiman T.A., Yusuf A., Rehman S.U., Younas U. 2021. On the Exact Traveling Wave Solutions to the van der Waals p-System. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2021;7:88.

Bin, X., Xi-Qiang, L. 2009. Classification, reduction, group invariant solutions and conservation laws of the Gardner-KP equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2009;215, 1244-1250.

Bira, B., Sekhar, T.R., Zeidan, D. 2018. Exact solutions for some time-fractional evolution equations using Lie group theory. *Math Meth Appl Sci*. 2018;41:6717–6725. DOI: 10.1002/mma.5186.

Boateng, K., Yang, W., Yaro, D., Otoo, M.E. 2020. Jacobi Elliptic Function Solutions and travelling wave solutions of the (2+1)-dimensional Gardner-KP equation. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2020;43 3457–3472.

Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S. 2007. *Adi diferensiyel denklemler*. Nobel Yayın Dağıtım.

Çağlıyan, M., Çelebi, O. 2013. *Kısmi diferensiyel denklemler*. Dora Yayınları. Bursa,276 s.

Çelik, N., Seadawy, A.R., Sağlam, Y., Yaşar, E. 2021. A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws, *Chaos, Solitons and Fractals*. 2021;143 110486, 1-19. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110486>

Çelik, N. 2021. Exact Solutions of Magneto-Electro-Elastic Rod Model with F Expansion Method. *BEU Journal of Science*. 2021;10(2), 375-392.

Drazin, P.G., Johnson, R.S. 1989. *Solitons: an introduction* (Vol. 2). Cambridge university press.

Hashemi, M.S., Mirzazadeh, M. 2023. Optical solitons of the perturbed nonlinear Schrödinger equation using Lie symmetry method. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. 2023;281 170816.

Hussain, A., Anjum, A., Rehman, M.J.U., Khan, İ., Sameh, M.A., Al-Johani, A.S. 2022. Symmetries, optimal system, exact and soliton solutions of (3 + 1)-dimensional Gardner-KP equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*. [m5G; June 27, 2022;23:31].

Inc M., Ic Ü., Inan I.E., Francisco J., Aguilar G. 2022. Generalized (G'/G) -expansion method for some soliton wave solutions of Burgers-like and potential KdV equations. *Numer Methods Partial Differential Eq.* 2022;38:422–433.

Islam, S. R., Khan, K., & Akbar, M. A. 2015. Exact solutions of unsteady Korteweg-de Vries and time regularized long wave equations. *SpringerPlus*, 4, 1-11.

Jawad, A. J. A. M., Moussa, A., & Alhakim, L. 2021. Bifurcation and exact traveling wave solutions for Kodomtsev-Petviashvili equation. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 44(5), 177-187.

Kudryashov, N.A. 2012. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 17 (2012) 2248-2253.

Kudryashov, N.A. 2020. First integrals and general solution of the complex Ginzburg-Landau equation. *Applied Mathematics and Computation.* 386 (2020) 125407.

Kudryashov, N.A. 2023. Optical solitons of the perturbation Fokas–Lenells equation by two different integration procedures. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 273 (2023) 170382.

Liu, H., Yan, F. 2014. Bifurcation and exact travelling wave solutions for Gardner–KP equation. *Applied Mathematics and Computation.* 2014;228, 384-394.

Mohanty S.K., Kravchenko O.V., Dev A.N. 2022. Exact traveling wave solutions of the Schamel Burgers' equation by using generalized-improved and generalized (G'/G) -expansion methods. *Results in Physics.* 2022;33 105124.

Park, C., Khater, M.M.A., Aty, A.H.A., Attia, R.A.M., Lu, D. 2020. On new computational and numerical solutions of the modified Zakharov–Kuznetsov equation arising in electrical engineering. *Alexandria Engineering Journal.* 59, 1099–1105.

Patel, Y.F., Dhodiya, J.M., Pandit, D. 2022. Exact solution of nonlinear Newell–Whitehead–Segel equation using semi-analytical approach. *Math Meth Appl Sci.* 2022;1–17. DOI: 10.1002/mma.8843.

Qian, L., Attia, R.A.M., Qiu, Y., Lu, D., and Khater, M.M.A. 2019. The shock peakon wave solutions of the general Degasperis–Procesi equation. *International Journal of Modern Physics B.* Vol.33, No.29, 1950351.

Rezazadeh H., Davodi A.G., Gholami D. 2023. Combined formal periodic wave-like and soliton-like solutions of the conformable Schrödinger-KdV equation using the (G'/G) -expansion technique, *Result in Physics* 47, 2023, 106352.

Russell, J.S. 1844. 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science. *Report on Waves.* London: BAAS.

Seadawy, A.R. (2016a). Stability analysis solutions for nonlinear three-dimensional modified Korteweg–de Vries–Zakharov–Kuznetsov equation in a magnetized electron–positron plasma. *Physica A*. 455 44–51.

Seadawy A. (2016b). Stability Analysis of Traveling Wave Solutions for Generalized Coupled Nonlinear KdV Equations. *Appl. Math. Inf. Sci.* 2016;10, No. 1, 209-214.

Seadawy, A.R., Rizvi, S.T.R., Ahmed, S. 2023. Solitons collision and multi-peak solutions for a new $(3 + 1)$ -dimensional NLSE describing pulse propagation in optical fibers. *Optical and Quantum Electronics*. 2023;55:467.

Shakeel, M., Mohyud-Din, S.T. 2014. Soliton solutions for the positive Gardner-KP equation by $(G'/G, 1/G)$ – Expansion method. *Ain Shams Engineering Journal*. 2014;5, 951-958.

Tariq, K.U., Seadawy, A.R. and Alamri, S.Z. 2018. Computational soliton solutions to $(3 + 1)$ -dimensional generalised Kadomtsev–Petviashvili and $(2 + 1)$ -dimensional Gardner–Kadomtsev–Petviashvili models and their applications. *Pramana-J. Phys.* 2018;91:68.

Wang M, Li X, Zhang J. 2008. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*. 2008;372 417–423.

Wazwaz, A.M. 2008. Solitons and singular solitons for the Gardner–KP equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2008;204, 162-169.

Wazwaz, A.M. 2010. *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer Science & Business Media.

Yang, C. H. 1960. New york univ ny courant inst of mathematical sciences. (1960). *On an Integral Equation Arising in Inverse Scattering* (p. 0001). Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Yaşar, E., Yıldırım, Y. 2018. On the Lie symmetry analysis and travelling wave of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*. 2018;8(2):411-416. DOI: 10.7212/2Fzkufbd.v8i2.625.

Yıldırım, Y., Biswas, A., Moraru, L., Alghamdi, A.A. 2023. Quiescent Optical Solitons for the Concatenation Model with Nonlinear Chromatic Dispersion. *Mathematics*. 2023;11, 1709.

Zeidan, D., Chau, C.K., Lu, T.T., Zheng, W.Q. 2019. Mathematical studies of the solution of Burgers' equations by Adomian decomposition method. *Math Meth Appl Sci*. 2019;43:2171–2188. DOI: 10.1002/mma.5982.