

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN KIRINIMINA İLİŞKİN FARKLI
ÇEKİRDEK FONKSİYONLARINA SAHİP 3. TÜRDEKİ MODİFİYE
WIENER-HOPF DENKLEMLERİ İÇİN YENİ BİR ÇÖZÜM YÖNTEMİ

KADİR DURGUT

DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. ALİ ALKUMRU

MART 2025

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN KIRINIMINA İLİŞKİN FARKLI
ÇEKİRDEK FONKSİYONLARINA SAHİP 3. TÜRDEKİ MODİFİYE
WIENER-HOPF DENKLEMLERİ İÇİN YENİ BİR ÇÖZÜM YÖNTEMİ**

KADİR DURGUT

DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. ALİ ALKUMRU
2. DANIŞMAN: PROF. DR. GÖKHAN ÇINAR

MART 2025

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL

**A NOVEL APPROACH FOR THE MODIFIED WIENER-HOPF
EQUATIONS OF THE 3. KIND HAVING DIFFERENT KERNEL
FUNCTIONS REGARDING DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC
WAVES**

KADİR DURGUT

A THESIS OF DOCTORATE
DEPARTMENT OF ELECTRONICS ENGINEERING

ADVISOR: PROF. DR. ALİ ALKUMRU
Co-ADVISOR: PROF. DR. GÖKHAN ÇINAR

MARCH 2025

DOKTORA JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 26/ 02 /2025 tarih ve 2025/16 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/ 03 /2025 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Kadir DURGUT'ın tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Ali ALKUMRU

ÜYE

: Prof. Dr. İbrahim AKDUMAN

ÜYE

: Prof. Dr. İsmail Hakkı TAYYAR

ÜYE

: Doç. Dr. Kamil KARAÇUHA

ÜYE

: Doç. Dr. Fatih DİKMEN

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

*Bu tez çalışması aileme
ve biricik eşime ithaf edilmiştir.*

ÖZET

Bu tez çalışmasında, elektromanyetik dalgaların ardışık basamak süreksizliklerinden kırınımı analitik olarak incelenmiş ve üçüncü türden Modifiye Wiener-Hopf (MWH) denklemlerinin çözümü için yeni bir yöntem önerilmiştir. Wiener-Hopf tekniği, elektromanyetik saçılma problemlerinin analitik çözümüne olanak tanıyan güçlü bir yöntemdir. Ancak, üçüncü türden MWH denklemlerinin çözümünde karşılaşılan kesim çizgisi integralleri genellikle yalnızca sayısal olarak değerlendirilebilmektedir. Bu çalışmada, konvansiyonel olmayan bir faktörizasyon yaklaşımı benimsenerek bu tür integrallerden kaçınılmış ve daha kararlı bir analitik çözüm elde edilmiştir.

Önerilen yöntem ile klasik yaklaşımlar karşılaştırılmış ve sayısal analizler, yeni yöntemin hem hesaplama süresini azalttığını hem de daha istikrarlı sonuçlar sağladığını göstermiştir. Çalışma kapsamında, basamak süreksizliği parametrelerinin (basamak genişliği ve yüksekliği) kırınım üzerindeki etkileri de incelenmiş ve elde edilen sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur.

Bu çalışma, elektromanyetik kırınım analizlerinde daha etkin ve hesaplaması kolay bir yöntem sunarak, radar kesit alanı (RKA) analizi, anten tasarımı ve mikrodalga mühendisliği gibi birçok alanda uygulanabilir potansiyel taşımaktadır.

Anahtar Kelimeler: Basamak süreksizliği, Modifiye Wiener-Hopf Denklemi

ABSTRACT

In this dissertation, the diffraction of electromagnetic waves from successive step discontinuities is analyzed analytically, and a novel approach is proposed for solving third-kind Modified Wiener-Hopf (MWH) equations. The Wiener-Hopf technique is a powerful method that enables the analytical solution of electromagnetic scattering problems. However, the solution of third-kind MWH equations often involves branch-cut integrals that can only be evaluated numerically. In this study, a non-conventional factorization approach is adopted to eliminate the need for such integrals, leading to a more stable analytical solution.

The proposed method is compared with conventional approaches, and numerical analyses demonstrate that it not only reduces computation time but also provides more stable results. Additionally, the effects of step discontinuity parameters, such as step width and height, on diffraction are examined, and the obtained results are presented graphically.

This study offers a more efficient and computationally feasible method for electromagnetic diffraction analysis, with potential applications in radar cross-section (RCS) analysis, antenna design, and microwave engineering.

Keywords: Step discontinuity, Modified Wiener-Hopf Equation.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında değerli katkıları ve rehberliğiyle beni yönlendiren danışmanım Prof. Dr. Ali ALKUMRU'ya, bilgi ve tecrübeleriyle çalışmama önemli katkılarda bulunan Prof. Dr. Gökhan ÇINAR'a ve çalışmanın her anında bana destek olan sevgili eşim Hilal DURGUT'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmam sırasında bana sağladıkları akademik destek ve bilimsel tartışmalarıyla gelişimime katkıda bulunan Gebze Teknik Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölümü'ndeki değerli hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak, akademik hayatım boyunca bana her zaman destek olan ve sabırla yanımda olan aileme ve sevdiklerime teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	6
2.1. Konvansiyonel Olmayan Yaklaşım ile WHD Çözümü	10
2.2. Alanın Analizi	35
3. SAYISAL SONUÇLAR	37
4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	42
TEZ METNİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR	43

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

GKT	: Geometrik Kırınım Teorisi
MWH	: Modifiye Wiener-Hopf
PEC	: Mükemmen İletken Yüzey (<i>Perfect Electrical Conductor</i>)
PEMC	: Mükemmel İletken Basamak
RKA	: Radar Kesit Alanı
WHD	: Wiener-Hopf Denklemi



ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Problemin geometrisi.	6
Şekil 2.2: Kompleks α -düzlemi.	8
Şekil 4.1: Bu çalışmada sunulan yaklaşım ile Doğan vd. yaklaşımının [5] karşılaştırması.	38
Şekil 4.2: Kırınan alanın genliğinin basamak genişliği l ile değişimi.	38
Şekil 4.3: Kırınan alanın genliğinin d/c oranı ile değişimi.	39
Şekil 4.4: Kırınan alanın genliğinin d ile değişimi.	39



1. GİRİŞ

Elektromanyetik ve akustik dalgaların saçılması problemlerinin analizinde bilinen etkili matematiksel yöntemlerin başında Wiener-Hopf Tekniği gelmektedir [1]. Bu teknik genel itibariyle karma sınır değer problemlerinde belirli koşullar altında kesin çözüm sunan bir yaklaşımdır. Yaklaşım temelde Helmholtz denklemi gibi, probleme ilişkin kısmi türevli diferansiyel denkleme ve çözülmesi istenen büyüklüğün sağladığı sınır ve süreklilik koşullarına bir integral dönüşüm uygulanmasına dayanır. Dönüşüm sonucunda kompleks düzlemin bir şeridinde geçerli olan Wiener-Hopf denklemi elde edilir ve denklem bilinen klasik Wiener-Hopf prosedürünün uygulanmasıyla çözülür. Bu prosedür faktörizasyon ve dekompozisyonu takiben analitik devam ilkesi ve Liouville teoreminin uygulanmasından müteşekkildir. Sonunda Wiener-Hopf denkleminin çözümünden elde edilen fonksiyona ters integral dönüşüm uygulanmasıyla saçılan alanlar bulunmuş olur.

Bazı özel geometrilerden kırınım incelenirken, bilinmeyen ve sırasıyla alt ve üst yarı düzlemlerde regüler olan $\Phi_-(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$ fonksiyonları, $M(\alpha)$ çekirdek fonksiyonu ve dalganın kaynağının katkısı olan $h(\alpha)$ sağ yanından müteşekkil klasik Wiener-Hopf denklemi yapısı olan

$$M(\alpha)\Phi_-(\alpha) + \Phi_+(\alpha) = h(\alpha) \quad (1.1)$$

yapısından farklı olarak, Wiener-Hopf denklemlerinin bazı özel halleri ile karşılaşılır. Bunlara genel olarak Modifiye Wiener-Hopf denklemi adı verilir. Bunlardan birincisi bir şeritten kırınımın analizinde karşılaşılan birinci türden Modifiye Wiener-Hopf denklemdir [2]. Burada, $\Phi_1(\alpha)$ sonsuz hariç tüm düzlemde regüler olan bir tam fonksiyon olmak üzere,

$$M(\alpha)\Phi_1(\alpha) + \Phi_-(\alpha) + \Phi_+(\alpha) = h(\alpha) \quad (1.2)$$

denklem formu ile karşılaşılır. Yukarıdaki Wiener-Hopf denkleminin çözümünde klasik Wiener-Hopf prosedürü iki farklı adım halinde uygulanır. İlkini faktörizasyon aşamasında,

$$M(\alpha) = M_-(\alpha)M_+(\alpha) \quad (1.3)$$

olmak üzere, tüm denklem $1/M_-(\alpha)$ ile çarpılır ve diğer aşamaların uygulanması sonucunda bir integral denklem elde edilir. İkinci adımın faktörizasyonunda ise tüm denklem $1/M_+(\alpha)$ ile çarpılır ve buradan da bir başka integral denklem elde edilir. Elde edilen birbirine kuple iki integral denklem, ikinci türden Fredholm tipinde bir integral denklem teşkil eder. İntegrandların yapısına göre bu integral denklem iterasyon vb. yöntemlerle çözülerek sonuç elde edilmiş olur. Problemin geometrisinde şerit yapısı yerine, basamak süreksizliği bulunursa, bu kez de

$$M(\alpha)\Phi_-(\alpha) + \Phi_+(\alpha) = h(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\alpha) \quad (1.4)$$

formunda bir denkleme ulaşılır [3]. Bu denklem yapısına ikinci türden Modifiye Wiener-Hopf denklemi adı verilir. Burada klasik Wiener-Hopf prosedürünün uygulanmasıyla tek adımda çözüme ulaşılır. Son olarak, hem şerit hem de basamak süreksizliği yapısı olması halinde elde edilen

$$M(\alpha)\Phi_1(\alpha) + \Phi_-(\alpha) + \Phi_+(\alpha) = h(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\alpha) \quad (1.4)$$

yapısındaki denklemlere üçüncü türden Modifiye Wiener-Hopf denklemi denir [4]. Burada da Wiener-Hopf prosedürünün iki adımda uygulanması gerekir. Konvansiyonel yaklaşım denklemin, birinci tipten Modifiye Wiener-Hopf denkleminde olduğu gibi bir kez alt yarı-düzlemde regüler olan $1/M_-(\alpha)$ ile daha sonraki adımda ise üst yarı-düzlemde regüler olan $1/M_+(\alpha)$ ile çarpılmasıyla, ikinci türden bir Fredholm integral denklemi elde etmektir.

Üçüncü türden Modifiye Wiener-Hopf denklemine ulaşılan problemlerden biri de düzlemsel elektromanyetik dalgaların ya da bir çizgisel kaynaktan gelen dalgaların ardışık basamak süreksizliğine sahip bir geometriden kırınımı problemidir. Bir çizgisel kaynaktan gelen dalgaların dikkate alındığı problem, Doğan vd. tarafından 2017 yılında çalışılmış ve elde edilen Modifiye Wiener-Hopf denklemine konvansiyonel yaklaşımla Wiener-Hopf prosedürü uygulanmıştır [5]. Bu prosedür sonucunda

Fredholm integral denklemi elde edilirken, aynı zamanda, çözümünü ancak sayısal yöntemlerle mümkün olan bir kesim çizgisi integrali ile de karşılaşılmıştır. Söz konusu çalışmada bu integral sayısal olarak hesaplanarak işlemlere devam edilebilmiştir.

Bu tez çalışmasında ise yukarıda bahsi geçen üçüncü türden Wiener-Hopf denkleminin çözümünde konvansiyonel olmayan ve literatürde bir benzerine rastlanmayan bir yaklaşım ile, iki adımın faktörizasyonunda da tüm denklem alt yarı-düzlemde regüler olan bir fonksiyon ile çarpılmış ve bunun neticesinde sayısal olarak hesaplanmak zorunda kalınan kesim çizgisi integraline rastlanmadan çözüm elde edilmiştir. Bu integrasyondan kaçınabilmek elbette çözümün hem daha hızlı hem de daha doğru olarak elde edilmesi anlamına gelmektedir.

Elektromanyetik dalgaların çeşitli zemin yüzeylerindeki dikdörtgensel basamak benzeri süreksizliklerden kırınımının incelenmesi, radar kesit alanı (RKA) analizi ve birçok mikrodalga mühendisliği uygulamaları için kritik bir araştırma alanıdır. Bu tür basamak süreksizliği problemlerine örnek olarak, Sommer ve Pathak'ın geometrik kırınım teorisini (GKT) kullanarak panel kaplı kompakt menzil reflektörlerindeki metalik bantların kırınımı problemini analiz ettikleri çalışmaları gösterilebilir [6].

Benzer bir basamak süreksizliği problemi, Johansen [7] tarafından iki reaktif yarı düzlemin birleşmesiyle oluşan reaktif bir basamağın yüzey dalgasıyla aydınlatılması bağlamında ele alınmıştır. Sonraki araştırmaların çoğu, aynı empedans türüne sahip iki yarı düzlemin, farklı empedans ve reaktif özelliklere sahip basamaklarla birleştiği süreksizlik geometrilerinin düzlemsel dalga aydınlatması altındaki kırınımına odaklanmıştır. Bu konuda önemli katkılar, Büyükaksoy ve Birbir [8-9] ile Volakis ve Ricoy [10] tarafından sağlanmıştır. Çalışmalarında, bu tür süreksizliklerin kırınım problemleri, genellikle ikinci türden Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenmiş ve farklı yüzey empedansları ve basamak yükseklikleri için sayısal olarak çözülmüştür.

Sonlu uzaklıklardaki çizgisel kaynakların saçıcılar üzerindeki etkilerini incelemek, düzlemsel dalgalara kıyasla daha gerçekçi bir yaklaşım sunmaktadır. Bu alandaki son çalışmalar arasında, Ayub vd. [11] ile Ahmed [12] tarafından gerçekleştirilen ve benzer geometrilerde yüksek frekanslı çizgisel kaynaklardan gelen dalgaların kırınımını inceleyen araştırmalar bulunmaktadır; bu araştırmalar mükemmel

elektromanyetik iletken (PEMC) basamaklara ilişkin kırımın problemlerini incelemişlerdir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların çoğu, asimetrik paralel iki yarı düzlemin (tek basamak süreksizliği) dik birleşimi olan geometrileri ele almaktadır. Ancak saçıcı iki asimetrik yarı düzlemin bir şerit ile ayrıldığı iki dik birleşime sahip olduğunda (çift basamak süreksizliği) karmaşıklık önemli ölçüde artar. Dogan vd. [5] tarafından sunulan çalışma, **Şekil 2.1**'de gösterilen, tüm yüzeylerin mükemmel iletken olduğu ve z-eksenine paralel, zamana bağlı harmonik bir çizgisel kaynak tarafından aydınlatıldığı bu tür basamak süreksizliklerinin tam bir analizini sunması açısından benzersizdir. [5]'te, yukarıda bahsedilen sınır-değer problemini çözmek için yazarlar önce ilgili indirgenmiş dalga denklemini Fourier integral dönüşümü ile çözüp ardından iletken sınır koşullarını dönüşüm uzayında ele alarak, problemi üçüncü tür Modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgemişlerdir. Bu denklem, iki ayrı fonksiyon için üst ve alt kompleks yarı-düzlemlerde regüler olacak faktörize edilerek ve Wiener-Hopf prosedürünün diğer adımları uygulanarak iki adet integral denklem halinde çözülmüştür. Bu integral denklemlerin çözümleri ve dolayısıyla Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümü, yalnızca sayısal olarak hesaplanabilen bir kesim çizgisi integralini içermektedir.

Bu çalışmanın amacı, **Şekil 2.1**'de verilen aynı geometri için yukarıda bahsedilen üçüncü türden Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümüne yönelik yenilikçi bir yaklaşımı incelemektir. Bu amaçla, ele alınan Modifiye Wiener-Hopf denklemi, yine ikinci türden kuple Fredholm integral denklemlerine indirgenmiştir, ancak bu kez faktörizasyon işlemi her iki adımda da alt yarı-düzlemde regüler olan ifadelerle yapılmıştır. Klasik prosedürden farklı olan bu yeni yaklaşım, [5]'te yalnızca sayısal olarak değerlendirilebilen kesim çizgisi integralinin analitik olarak hesaplanabilmesini sağlamıştır. Sonuç olarak, kuple ikinci tür Fredholm integral denklemleri, iteratif olarak çözülmüş, nihai çözüm sonsuz bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi cinsinden elde edilmiştir.

Bu bağlamda bir sonraki bölümde, bir çizgisel kaynaktan gelen dalganın ardışık basamak süreksizliği yapısından kırımını probleminde ortaya çıkan üçüncü türden bir Modifiye Wiener-Hopf denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin konvansiyonel olmayan bir yaklaşımla çözümü ayrıntıları ile sunulmuştur. Daha sonraki bölümde, elde edilen

özüme ilişkin sayısal sonuçlar incelenmiştir. Son olarak dördüncü bölümde genel değerlendirmeler belirtilmiştir.

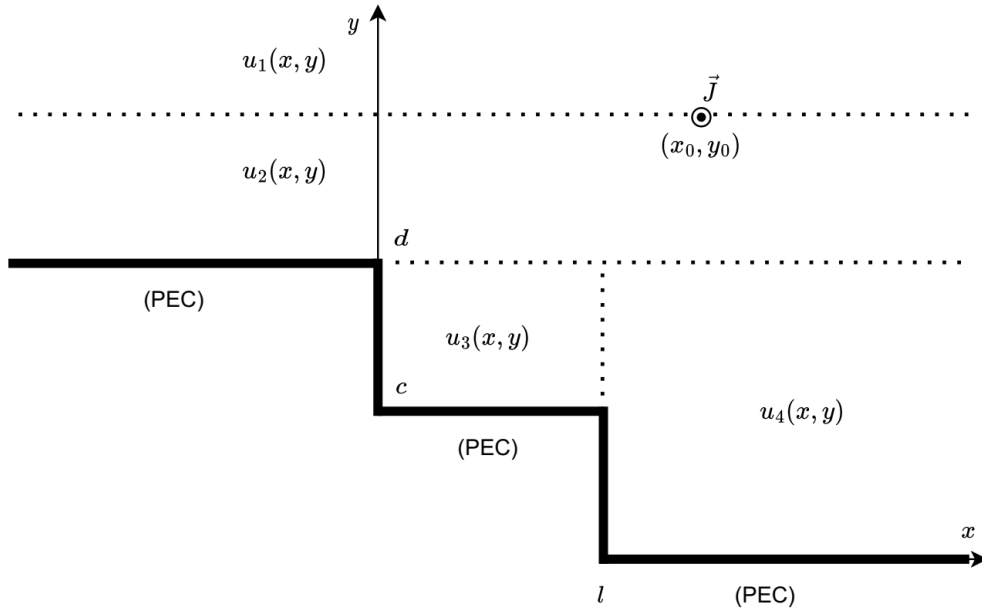


2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Bu çalışmada, ardışık basamak süreksizliğine sahip geometrilerden kırınım problemlerinde karşılaşılan tipten Modifiye Wiener-Hopf denklemler için konvansiyonel olmayan bir yaklaşımla çözüm geliştirilmiştir. Örneğin, Doğan vd.'nin, **Şekil 2.1**'de görüldüğü gibi, uzaktaki bir çizgisel kaynaktan gelen dalgaların ardışık basamak süreksizliğinden saçılmasını inceledikleri çalışmalarında elde edilmiş olan

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1(\alpha)}{M(\alpha)} + e^{i\alpha l} \frac{\Phi_+(\alpha)}{N(\alpha)} + \Phi_-(\alpha) \\ = -2iK(\alpha)C(\alpha) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} + e^{i\alpha l} \left[\frac{\gamma_n(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{K_n(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

denklemini dikkate alınsın.



Şekil 2.1: Problemin geometrisi.

Toplam alan $u_T(x, y)$

$$u_T(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) , & y > y_0, x \in (-\infty, \infty) \\ u_2(x, y) , & d < y < y_0, x \in (-\infty, \infty) \\ u_3(x, y) , & c < y < d, x \in (0, l) \\ u_4(x, y) , & 0 < y < d, x \in (l, \infty) \end{cases} \quad (2.2)$$

olmak üzere, (2.1) denkleminde görülen $\Phi_-(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$, sırasıyla,

$$\Phi_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u_2(x, d)}{\partial y} e^{i\alpha x} dx, \quad (2.3)$$

$$\Phi_1(\alpha) = \int_0^l u_2(x, d) e^{i\alpha x} dx \quad (2.4)$$

ve

$$\Phi_+(\alpha) = \int_l^{\infty} u_2(x, d) e^{i\alpha(x-l)} dx \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $K(\alpha)$, $K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ile belirli, **Şekil 2.2**'de görüldüğü gibi kesilmiş olan kompleks α -düzleminde $K(0) = k$ ile tanımlanmış, bilinen karekök fonksiyonudur. Burada, ω açısal frekans, c ışık hızı olmak üzere, $k = \omega/c$ dalga sayısıdır. Yine (2.1) denkleminde görülen çekirdek fonksiyonları $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$,

$$M(\alpha) = \frac{\sin[K(\alpha)(d - c)]}{K(\alpha)} e^{iK(\alpha)(d-c)} \quad (2.6)$$

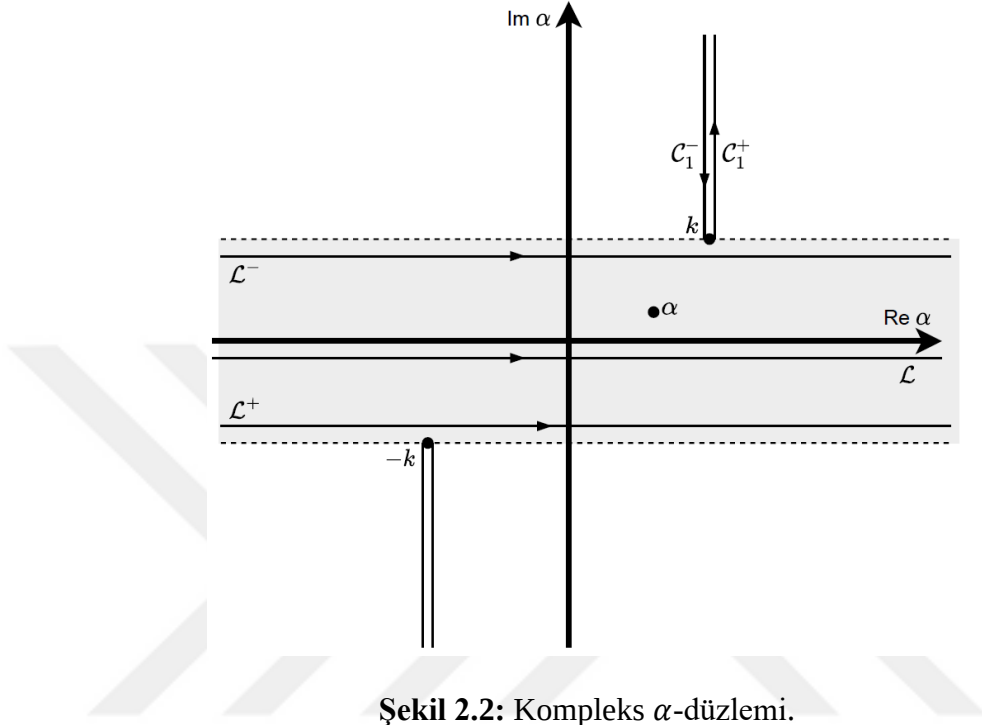
ve

$$N(\alpha) = \frac{\sin[K(\alpha)d]}{K(\alpha)} e^{iK(\alpha)d} \quad (2.7)$$

ile, $C(\alpha)$ ise

$$C(\alpha) = \frac{kZ_0 I_0}{2K(\alpha)} e^{i\alpha x_0} e^{iK(\alpha)(y_0-d)} \quad (2.8)$$

ile belirlidir.



Şekil 2.2: Kompleks α -düzlemi.

Bunların yanı sıra, (2.1) denkleminin sağ yanında f_n , g_n , h_n , p_n ve q_n katsayıları görülmektedir. Bunlar, Wiener-Hopf formülasyonu neticesinde,

$$f(y) = \frac{\partial u_3(0, y)}{\partial x}, g(y) = \frac{\partial u_3(l, y)}{\partial x}, h(y) = u_3(l, y) \quad (2.9)$$

ile

$$p(y) = \frac{\partial u_4(l, y)}{\partial x}, q(y) = u_4(l, y) \quad (2.10)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} f_n \\ g_n \\ h_n \end{bmatrix} = \frac{2}{d-c} \int_c^d \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \sin[K_n(t-c)] dt \quad (2.11)$$

ve

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \frac{2}{d} \int_0^d \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \sin(\gamma_n t) dt \quad (2.12)$$

olarak belirlenmiştir. Hem (2.1) Modifiye Wiener-Hopf denkleminde, hem de (2.11) ve (2.12) eşitliklerinde görülen K_n 'ler ve α_n 'ler

$$K_n = \frac{n\pi}{(d-c)}, \quad \alpha_n = \sqrt{k^2 - K_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

γ_n 'ler ve β_n 'ler ise

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{d}, \quad \beta_n = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

biçimindedir. (2.11) ve (2.12) ile tanımlı katsayılar için $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$f_n - e^{i\alpha_n l}(g_n - i\alpha_n h_n) = \frac{2(-1)^{n+1}K_n}{(d-c)} \Phi_1(\alpha_n), \quad (2.15)$$

$$f_n - e^{-i\alpha_n l}(g_n + i\alpha_n h_n) = \frac{2(-1)^{n+1}K_n}{(d-c)} \Phi_1(-\alpha_n) \quad (2.16)$$

ve

$$p_n - i\beta_n q_n = \frac{2(-1)^{n+1}\gamma_n}{d} \Phi_+(\beta_n) \quad (2.17)$$

bağıntıları söz konusudur. (2.1) Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözülmesiyle $\Phi_1(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$ yukarıdaki bağıntılarda yerine konur ve böylece ilgili katsayıların çözülebileceği bir lineer denklem sistemi elde edilir.

2.1. Konvansiyonel Olmayan Yaklaşım ile WHD Çözümü

(2.1) denkleminin çözümü için $M(\alpha)$ ve $N(\alpha)$ çekirdek fonksiyonlarının

$$M(\alpha) = M_-(\alpha)M_+(\alpha) \quad (2.18)$$

ve

$$N(\alpha) = N_-(\alpha)N_+(\alpha) \quad (2.19)$$

biçiminde tanımlanmış çarpanlarına ihtiyaç bulunmaktadır. Bu çarpanlar [13]'te de görüldüğü gibi, $M(\alpha)$ için

$$M_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\sin[k(d-c)]}{k}} e^{\frac{K(\alpha)(d-c)}{\pi} \ln\left[\frac{\alpha+iK(\alpha)}{k}\right]} \times e^{\frac{i\alpha(d-c)}{\pi} \left\{1-c+\ln\left[\frac{2\pi}{k(d-c)}\right]+i\frac{\pi}{2}\right\}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{i\alpha(d-c)}{m\pi}} \quad (2.20)$$

ve

$$M_-(\alpha) = M_+(-\alpha) \quad (2.21)$$

$N(\alpha)$ için

$$N_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\sin(kd)}{k}} e^{\frac{K(\alpha)d}{\pi} \ln\left[\frac{\alpha+iK(\alpha)}{k}\right]} \times e^{\frac{i\alpha d}{\pi} \left\{1-c+\ln\left(\frac{2\pi}{kd}\right)+i\frac{\pi}{2}\right\}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{i\alpha d}{m\pi}} \quad (2.22)$$

ve

$$N_-(\alpha) = N_+(-\alpha) \quad (2.23)$$

şeklindedir. Bu denklemlerde görünen $\mathcal{C}$ büyüklüğü ile $\mathcal{C} = 0.5772156649 \dots$ Euler sabiti kastedilmektedir. Bu bilgiler ışığında (2.1) Modifiye Wiener-Hopf denkleminin her iki yanı $e^{-i\alpha l} N_-(\alpha)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \frac{\Phi_1(\alpha)}{M(\alpha)} + \frac{\Phi_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} + e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \Phi_-(\alpha) \\ = -2iK(\alpha)C(\alpha)e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \\ + e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} + e^{i\alpha l} \left[\frac{\gamma_n(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{K_n(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada

$$P(\alpha) = \frac{\Phi_1(\alpha)}{M(\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \quad (2.25)$$

tanımı yapılırsa (2.24) denklemi

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) P(\alpha) + \frac{\Phi_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} + e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \Phi_-(\alpha) \\ = -ikZ_0 I_0 N_-(\alpha) e^{i\alpha(x_0-l)} e^{iK(\alpha)(y_0-d)} \\ + N_-(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\gamma_n(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} - \frac{K_n(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitliğin sol yanındaki ikinci ve üçüncü terim, sırasıyla, üst ve alt yarı-düzlemlerde regülerdir. Diğer terimlerin ise dekompoze edilmeleri gerekmektedir. Söz konusu dekompozisyon (ayırıştırma) işlemi yapılacak olursa, sol yandaki ilk terim için

$$\begin{aligned}
& e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) P(\alpha) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

sağ yandaki terimler için ise

$$\begin{aligned}
& -ikZ_0 I_0 N_-(\alpha) e^{i\alpha(x_0-l)} e^{iK(\alpha)(y_0-d)} \\
&= \frac{kZ_0 I_0}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{N_-(\tau) e^{i\tau(x_0-l)} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&- \frac{kZ_0 I_0}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{N_-(\tau) e^{i\tau(x_0-l)} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n (p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n (g_n - i\alpha h_n) N_-(\alpha)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

yazılır. (2.27-2.30) denklemlerinin sağ yanlarındaki ilk terimler alt yarı-düzlemde, ikinci terimler ise üst yarı-düzlemde regülerdir. Bu ifadeler (2.26) Wiener-Hopf denklemine taşınır, üst yarı-düzlemde regüler olan ifadeler eşitliğin soluna, alt yarı-düzlemde regüler olanlar ise eşitliğin sağına yazılırsa, sol yanda

$$\begin{aligned}
\Psi_+(\alpha) &= \frac{\Phi_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&\quad + \frac{kZ_0 I_0}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{N_-(\tau) e^{i\tau(x_0-l)} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

sağ yanda

$$\begin{aligned}
\Psi_-(\alpha) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau - e^{-i\alpha l} N_-(\alpha) \Phi_-(\alpha) \\
& + \frac{kZ_0 I_0}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{N_-(\tau) e^{i\tau(x_0-l)} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

olmak üzere

$$\Psi_+(\alpha) = \Psi_-(\alpha) \tag{2.33}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $\Psi_+(\alpha)$ ve $\Psi_-(\alpha)$, sırasıyla, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ ile tanımlı alt yarı-düzlemde regüler olan fonksiyonlardır. $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ şeridinde geçerli olan bu eşitlik için, analitik devam ilkesinden yararlanarak

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} \Psi_-(\alpha) & , \quad \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k) \\ \Psi_+(\alpha) & , \quad \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k) \end{cases} \tag{2.34}$$

biçiminde bir $\Psi(\alpha)$ tam fonksiyonu tanımlamak mümkün olur. Liouville teoremi gereği $\Psi(\alpha)$ tam fonksiyonu $|\alpha| \rightarrow \infty$ için bir sabite eşitse tüm düzlemde o sabite eşit olacaktır. $M_{\pm}(\alpha)$ ve $N_{\pm}(\alpha)$ 'nın $|\alpha| \rightarrow \infty$ için davranışları

$$M_{\pm}(\alpha) = N_{\pm}(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{-1/2}) \tag{2.35}$$

şeklindedir. Öte yandan $x \rightarrow l^+$ ve $x \rightarrow 0^-$ için ayırıt koşulları gereği, sırasıyla

$$u_2(x, d) = \mathcal{O}(|x|^{2/3}) \quad (2.36)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2(x, d) = \mathcal{O}(|x|^{-1/3}) \quad (2.37)$$

olduğundan, $|\alpha| \rightarrow \infty$ için $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Phi_-(\alpha)$ 'nin davranışları için, sırasıyla,

$$\Phi_+(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{-5/3}) \quad (2.38)$$

ve

$$\Phi_-(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{-2/3}) \quad (2.39)$$

belirlenir. Bunlar (2.34) tanımında görülen $\Psi_-(\alpha)$ ve $\Psi_+(\alpha)$ 'nin açık ifadelerinde dikkate alınır, Liouville teoremi uyarınca önce $\Psi(\alpha) = 0$, dolayısıyla sonra $\Psi_-(\alpha) = 0$ ve $\Psi_+(\alpha) = 0$ sonucu elde edilir. Buradan, kolaylıkla

$$J_1(\alpha) = \frac{kZ_0 I_0}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{N_-(\tau) e^{i\tau(x_0-l)} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.40)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_+(\alpha)}{N_+(\alpha)} = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau - J_1(\alpha) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n (p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{(\alpha + \beta_n) 2\beta_n} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n (g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{(\alpha + \alpha_n) 2\alpha_n} \end{aligned} \quad (2.41)$$

bulunur. Yukarıdaki denklem, basit bir düzenleme ile

$$Q(\alpha) = \frac{\Phi_+(\alpha)}{N(\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\gamma_n(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} - \frac{K_n(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right] \quad (2.42)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N_-(\alpha)Q(\alpha) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau - J_1(\alpha) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} \right. \\ & \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} \right. \\ & \left. + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir. Burada gözüken $J_1(\alpha)$ integrali semer noktası yöntemi ile asimptotik olarak değerlendirilebilir. Buna göre $\tau = k \cos t$, $x_0 - l = \rho_1 \cos \phi_1$ ve $y_0 - d = \rho_1 \sin \phi_1$ olarak yerine konursa

$$J_1(\alpha) = \frac{k^2 Z_0 I_0}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{N_-(k \cos t) e^{ik\rho_1 \cos(t-\phi_1)} \sin t}{(k \cos t - \alpha)} dt \quad (2.44)$$

elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi semer noktası $t = \phi_1$ 'de olan bu integralin asimptotik çözümü bazı elementer işlemler sonucu

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) & \cong -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_1}}{\sqrt{k\rho_1}} \frac{N_-(k \cos \phi_1) \sin \phi_1}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \\ & + ikZ_0 I_0 N_-(\alpha) e^{i\rho_1[\alpha \cos \phi_1 + K(\alpha) \sin \phi_1]} \mathcal{H}\left(\operatorname{Re}\left\{\arccos\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right\} - \phi_1\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

olur. Burada görülen $\mathcal{H}(\cdot)$ fonksiyonu, bilinen Heaviside birim basamak fonksiyonudur. Böylece (2.43) denklemi

$$\begin{aligned}
& N_-(\alpha)Q(\alpha) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau)P(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau + \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_1}}{\sqrt{k\rho_1}} \frac{N_-(k \cos \phi_1) \sin \phi_1}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \\
&\quad - ikZ_0 I_0 N_-(\alpha) e^{i\rho_1[\alpha \cos \phi_1 + K(\alpha) \sin \phi_1]} \mathcal{H} \left(\operatorname{Re} \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} - \phi_1 \right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

haline gelir. Benzer bir yaklaşımla, (2.1) Modifiye Wiener-Hopf denkleminin her iki yanı $M_-(\alpha)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} + e^{ial} \frac{M_-(\alpha)\Phi_+(\alpha)}{N(\alpha)} + M_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) \\
&= -2iK(\alpha)C(\alpha)M_-(\alpha) \\
&\quad + M_-(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} + e^{ial} \left[\frac{\gamma_n(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha^2 - \beta_n^2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{K_n(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

elde edilir. Bu ifade (2.42) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} + e^{ial} M_-(\alpha)Q(\alpha) + M_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) \\
&= -2iK(\alpha)C(\alpha)M_-(\alpha) + M_-(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

haline gelir. Yukarıdaki ifadenin sol yanındaki ilk ve üçüncü terimler, sırasıyla, üst ve alt yarı-düzlemde regülerdirler. Diğer terimlerin de üst ve alt yarı-düzlemde regüler parçalara ayrılabilmesi için dekompozisyon uygulanması gerekmektedir. Buna göre söz konusu terimlerin dekompozisyonu,

$$\begin{aligned}
& e^{i\alpha l} M_-(\alpha) Q(\alpha) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
& 2iK(\alpha)C(\alpha)M_-(\alpha) \\
&= \frac{kZ_0 I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{M_-(\tau) e^{i\tau x_0} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
&- \frac{kZ_0 I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(\tau) e^{i\tau x_0} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau
\end{aligned} \tag{2.50}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n M_-(\alpha)}{(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

biçimindedir. Bunların (2.48) denkleminde yerine konması ve üst yarı-düzlemde regüler terimlerin eşitliğin soluna, alt yarı-düzlemde regüler olanların ise eşitliğin sağına yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} - \frac{kZ_0I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(\tau)e^{i\tau x_0}e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l}M_-(\tau)Q(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha+\alpha_n)} \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \\
& = -M_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{e^{i\tau l}M_-(\tau)Q(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& - \frac{kZ_0I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{M_-(\tau)e^{i\tau x_0}e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha+\alpha_n)} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha-\alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

bulunur. (2.52)'nin sol yanı için

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_+(\alpha) &= \frac{\Phi_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} - \frac{kZ_0I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(\tau)e^{i\tau x_0}e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l}M_-(\tau)Q(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha+\alpha_n)} \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

sağ yanı için ise

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_-(\alpha) &= -M_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{e^{i\tau l}M_-(\tau)Q(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& - \frac{kZ_0I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{M_-(\tau)e^{i\tau x_0}e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau-\alpha)} d\tau \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha+\alpha_n)} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha-\alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

yazılırsa, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ şeridinde geçerli olan (2.52) denklemi için

$$\tilde{\Psi}_+(\alpha) = \tilde{\Psi}_-(\alpha) \tag{2.55}$$

ifadesine ulaşılır. Analitik devam ilkesinden yararlanarak

$$\tilde{\Psi}(\alpha) = \begin{cases} \tilde{\Psi}_-(\alpha) & , \quad \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k) \\ \tilde{\Psi}_+(\alpha) & , \quad \text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k) \end{cases} \quad (2.56)$$

biçiminde bir $\tilde{\Psi}(\alpha)$ tam fonksiyonu tanımlamak mümkün olur. Liouville teoremi gereği, tıpkı (2.34) ile tanımlı $\Psi(\alpha)$ fonksiyonunda olduğu gibi, $\tilde{\Psi}(\alpha)$ tam fonksiyonu da, $|\alpha| \rightarrow \infty$ için bir sabite eşitse tüm düzlemde o sabite eşit olacaktır. Burada da $M_{\pm}(\alpha)$ ve $N_{\pm}(\alpha)$ 'nın $|\alpha| \rightarrow \infty$ için davranışları ve ayırıt koşullarının dikkate alınmasıyla, $\Psi(\alpha) = 0$, dolayısıyla, $\tilde{\Psi}_-(\alpha) = 0$ ve $\tilde{\Psi}_+(\alpha) = 0$ olduğu belirlenir. Buna göre

$$J_2(\alpha) = \frac{kZ_0 I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(\tau) e^{i\tau x_0} e^{iK(\tau)(y_0-d)}}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.57)$$

olmak üzere

$$\frac{\Phi_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau + J_2(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \quad (2.58)$$

olacaktır. Ayrıca, (2.25) tanımını yardımıyla basit bir düzenleme yapılırsa, (2.58) ifadesi

$$\begin{aligned} M_-(\alpha) P(\alpha) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau + J_2(\alpha) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

haline gelir. Yine $J_1(\alpha)$ integraline benzer şekilde, yukarıdaki $J_2(\alpha)$ integrali de asimptotik olarak değerlendirilebilir. Buna göre, $\tau = k \cos t$, $x_0 = \rho_2 \cos \phi_2$ ve $y_0 - d = \rho_2 \sin \phi_2$ dönüşümleri yardımıyla, önce

$$J_2(\alpha) = \frac{k^2 Z_0 I_0}{2\pi} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(k \cos t) e^{ik\rho_2 \cos(t-\phi_2)} \sin t}{(k \cos t - \alpha)} dt \quad (2.60)$$

yazılır, ardından $t = \phi_2$ 'de bulunan semer noktasından yararlanarak

$$\begin{aligned} J_2(\alpha) &= \\ &\cong \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_2}}{\sqrt{k\rho_2}} \frac{M_-(k \cos \phi_2) \sin \phi_2}{(\alpha - k \cos \phi_2)} \\ &\quad - ik Z_0 I_0 M_-(\alpha) e^{i\rho_2[\alpha \cos \phi_2 + K(\alpha) \sin \phi_2]} \mathcal{H} \left(\operatorname{Re} \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} - \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

elde edilir. Bunun (2.59) eşitliğinde yerine konmasıyla

$$\begin{aligned} &M_-(\alpha)P(\alpha) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\ &\quad + \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_2}}{\sqrt{k\rho_2}} \frac{M_-(k \cos \phi_2) \sin \phi_2}{(\alpha - k \cos \phi_2)} \\ &\quad - ik Z_0 I_0 M_-(\alpha) e^{i\rho_2[\alpha \cos \phi_2 + K(\alpha) \sin \phi_2]} \mathcal{H} \left(\operatorname{Re} \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} - \phi_2 \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{M_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

bulunur. Böylece problemin çözümü (2.46) ve (2.62) denklemlerinden müteşekkil, ikinci tipten bir Fredholm integral denkleminin çözümüne indirgenmiş olur. Bu indirgeme esnasında uygulanan konvansiyonel olmayan prosedür sayesinde, sayısal olarak hesaplanmak zorunda olunan herhangi bir kesim çizgisi integrali karşımıza çıkmamıştır. (2.46) ve (2.62)'den oluşan integral denklem [14]'te ayrıntıları açıklanmış olan iteratif bir yöntem ile

$$P(\alpha) = P^{(1)}(\alpha) + P^{(2)}(\alpha) + \dots \quad (2.63)$$

ve

$$Q(\alpha) = Q^{(1)}(\alpha) + Q^{(2)}(\alpha) + \dots \quad (2.64)$$

formunda çözülebilir. Birinci iterasyon çözümü olarak (2.46) ve (2.62) eşitliklerinin sağ yanlarında bulunan, integral içermeyen serbest terimler kabul edilir. Daha sonra birinci iterasyon çözümlerinin integrallerde yerine konmasıyla ikinci iterasyon çözümleri elde edilir. Bu yaklaşımla, dilerse, üçüncü, dördüncü, iterasyonlar da hesaplanabilir. Geçmiş çalışmalar göstermiştir ki, ikinci iterasyondan sonra gelecek katkılar ihmal edilebilecek kadar küçük olmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada da yalnızca birinci ve ikinci iterasyon çözümleri türetilecektir. Bu bağlamde birinci iterasyon çözümleri için

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\alpha) = & \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_2}}{\sqrt{k\rho_2}} \frac{M_-(k \cos \phi_2) \sin \phi_2}{M_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_2)} \\ & - ikZ_0 I_0 e^{i\rho_2[\alpha \cos \phi_2 + K(\alpha) \sin \phi_2]} \mathcal{H} \left(\operatorname{Re} \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \phi_2 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{1}{(\alpha - \alpha_n)} - \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n M_-(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

ve

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\alpha) = & \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_1}}{\sqrt{k\rho_1}} \frac{N_-(k \cos \phi_1) \sin \phi_1}{N_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_1)} \\ & - ikZ_0 I_0 e^{i\rho_1[\alpha \cos \phi_1 + K(\alpha) \sin \phi_1]} \mathcal{H} \left(\operatorname{Re} \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \phi_1 \right) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha - \beta_n)} + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n N_-(\alpha)} \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n N_-(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

yazılır. Bu ifadeler için, $j = 1, 2$ olmak üzere

$$U_j = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} k^2 Z_0 I_0 \frac{e^{ik\rho_j}}{\sqrt{k\rho_j}} \sin \phi_j \quad (2.67)$$

ve

$$V_j(\alpha) = ikZ_0I_0e^{i\rho_j[\alpha \cos \phi_j + K(\alpha) \sin \phi_j]} \mathcal{H} \left(Re \left\{ \arccos \left(\frac{\alpha}{k} \right) \right\} - \phi_j \right) \quad (2.68)$$

konursa, (2.65) ve (2.66), sırasıyla,

$$P^{(1)}(\alpha) = \frac{U_2 M_-(k \cos \phi_2)}{M_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_2)} - V_2(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{1}{(\alpha - \alpha_n)} - \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n M_-(\alpha)} \right] \quad (2.69)$$

ve

$$Q^{(1)}(\alpha) = \frac{U_1 N_-(k \cos \phi_1)}{N_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_1)} - V_1(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\alpha + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n)}{(\alpha - \beta_n)} + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n N_-(\alpha)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\alpha + \alpha_n)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n N_-(\alpha)} \right] \quad (2.70)$$

olur. Elde edilen birinci iterasyon çözümleri

$$M_-(\alpha)P^{(2)}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) Q^{(1)}(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.71)$$

ve

$$N_-(\alpha)Q^{(2)}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) P^{(1)}(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.72)$$

integrallerinde yerine konarak ikinci iterasyon çözümlerine ulaşılır. İlk olarak, $P^{(2)}(\alpha)$ çözümünü elde edilmeye çalışılsın. $Q^{(1)}(\alpha)$ çözümü (2.71) ifadesinin sağ yanındaki integralde yerine konduğunda

$$\begin{aligned}
M_-(\alpha)P^{(2)}(\alpha) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M_-(\tau)}{N_-(\tau)} \frac{U_1 N_-(k \cos \phi_1) e^{i\tau l} d\tau}{(\tau - \alpha)(\tau - k \cos \phi_1)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) V_1(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau)}{(\tau - \alpha) N_-(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{(\tau + \beta_n)} \left[\frac{(p_n - i\tau q_n) N_-(\tau)}{(\tau - \beta_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] d\tau \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau)}{(\tau - \alpha) N_-(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{(\tau + \alpha_n)} \left[\frac{N_-(\tau)(g_n - i\tau h_n)}{(\tau - \alpha_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n) N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{2.73}$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{M_-(\tau)}{N_-(\tau)} = \frac{M(\tau) N_+(\tau)}{N(\tau) M_+(\tau)} \tag{2.71}$$

olduğu dikkate alınarak

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{M(\tau) N_+(\tau)}{N(\tau) M_+(\tau)} \frac{e^{i\tau l} d\tau}{(\tau - \alpha)(\tau - k \cos \phi_1)}, \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
I_{2n}(\alpha) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau) N_+(\tau)}{N(\tau) M_+(\tau)} \left[\frac{(p_n - i\tau q_n) N_-(\tau)}{(\tau - \beta_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{2.76}$$

ve

$$I_{3n}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \alpha_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} \left[\frac{N_-(\tau)(g_n - i\tau h_n)}{(\tau - \alpha_n)} + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] d\tau \quad (2.77)$$

olmak üzere

$$M_-(\alpha)P^{(2)}(\alpha) = -U_1 N_-(k \cos \phi_1) I_1(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \gamma_n I_{2n}(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n I_{3n}(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) V_1(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.78)$$

yazılabilir. $I_1(\alpha)$, $I_{2n}(\alpha)$ ve $I_{3n}(\alpha)$ integralleri birer birer değerlendirilerek $P^{(2)}(\alpha)$ belirlenir. Buna göre, ilk olarak $I_1(\alpha)$ ele alınsın. Jordan lemmasından yararlanmak için buradaki integrasyon eğrisi üst yarı-düzlem üzerinden kapatılırsa

$$I_1(\alpha) = \text{Rez}(\alpha) + \text{Rez}(k \cos \phi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Rez}(\beta_n) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1^+ + \mathcal{C}_1^-} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} \frac{e^{i\tau l} d\tau}{(\tau - \alpha)(\tau - k \cos \phi_1)} \quad (2.79)$$

olur. Burada $\text{Rez}(\alpha)$, $\tau = \alpha$ noktasında bulunan basit kutba ilişkin rezidüyü göstermektedir. $\mathcal{C}_1^+$ ve $\mathcal{C}_1^-$ eğrileri **Şekil 2.2**'de gösterilmektedir. (2.79) eşitliğinin sağ yanındaki rezidüler, kolaylıkla,

$$\text{Rez}(\alpha) = \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \quad (2.80)$$

$$\text{Rez}(k \cos \phi_1) = -\frac{M_-(k \cos \phi_1)}{N_-(k \cos \phi_1)} \frac{e^{ikl \cos \phi_1}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \quad (2.81)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Rez}(\beta_n) = \frac{\pi}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta_n} \frac{N_+(\beta_n)}{M_+(\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{d}\right) e^{i\frac{n\pi c}{d}} e^{i\beta_n l}}{(\beta_n - \alpha)(\beta_n - k \cos \phi_1)} \quad (2.82)$$

olarak elde edilir. Sağ yandaki son terimde görülen integral, **Şekil 2.2**'de görülen üst yarı-düzlemdeki kesim çizgisi üzerinden alınacaktır. Buna göre,

$$K(\tau)|_{\tau \in \mathcal{C}_1^+} = -K(\tau)|_{\tau \in \mathcal{C}_1^-} \quad (2.83)$$

olduğundan

$$\frac{M(\tau)}{N(\tau)} \Big|_{\tau \in \mathcal{C}_1^+ + \mathcal{C}_1^-} = -2i \frac{\sin[K(d-c)] \sin(Kc)}{\sin(Kd)} \quad (2.84)$$

bulunur ve söz konusu integral

$$\mathcal{J}_+^{(1)}(\tau) = \frac{\sin[K(d-c)]}{K(d-c)} \frac{Kd}{\sin(Kd)} \frac{\sin(Kc)}{Kc} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} \frac{c(d-c)}{d} \sqrt{k+\tau} \quad (2.85)$$

olmak üzere

$$-\frac{1}{\pi(\alpha - k \cos \phi_1)} \int_{\mathcal{C}_1^+} \mathcal{J}_+^{(1)}(\tau) \sqrt{k-\tau} e^{i\tau l} \left[\frac{1}{(\tau - \alpha)} - \frac{1}{(\tau - k \cos \phi_1)} \right] d\tau \quad (2.86)$$

biçiminde düzenlenebilir. $\mathcal{C}_1^+$ üzerinde $\tau = k + te^{i\pi/2}$ olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki integral

$$\frac{e^{i3\pi/4} e^{ikl}}{\pi(\alpha - k \cos \phi_1)} \int_0^{\infty} \mathcal{J}_+^{(1)}(k+it) \sqrt{t} e^{-tl} \left[\frac{1}{[t - ik(1 - \alpha/k)]} - \frac{1}{[t - ik(1 - \cos \phi_1)]} \right] dt \quad (2.87)$$

haline gelir. l yeterince büyük olduğunda $\mathcal{T}_+^{(1)}(k + it)$ fonksiyonunun bu integrale en büyük katkısı $t = 0$ uç noktası civarından gelir. Dolayısıyla da,

$$\mathcal{T}_+^{(1)}(k) = \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \frac{c(d-c)}{d} \sqrt{2k} \quad (2.88)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i3\pi/4} e^{ikl}}{\pi(\alpha - k \cos \phi_1)} \mathcal{T}_+^{(1)}(k) \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-tl} \left[\frac{1}{[t - ik(1 - \alpha/k)]} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{[t - ik(1 - \cos \phi_1)]} \right] dt \end{aligned} \quad (2.89)$$

yazmak mümkündür.

$$\mathcal{F}(z) = -2ie^{-iz} \sqrt{z} \int_{\sqrt{z}}^\infty e^{ix^2} dx \quad (2.90)$$

şeklinde tanımlı Fresnel integralleri için yazılan

$$\int_0^\infty e^{-tl} \frac{\sqrt{t}}{(t+z)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{l}} [1 - \mathcal{F}(izl)] \quad (2.91)$$

bağıntısından yararlanılırsa integralin çözümü

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{M(\tau) N_+(\tau)}{N(\tau) M_+(\tau)} \frac{e^{i\tau l} d\tau}{(\tau - \alpha)(\tau - k \cos \phi_1)} \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{kc(d-c)}{d} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{k}l} \frac{e^{i3\pi/4}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \{ \mathcal{F}[kl(1 \\ & \quad - \cos \phi_1)] - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \} \end{aligned} \quad (2.92)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, $I_1(\alpha)$

$$\begin{aligned}
I_1(\alpha) = & \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} - \frac{M_-(k \cos \phi_1)}{N_-(k \cos \phi_1)} \frac{e^{ikl \cos \phi_1}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \\
& + \frac{\pi}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta_n} \frac{N_+(\beta_n)}{M_+(\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{d}\right) e^{i\frac{n\pi c}{d}} e^{i\beta_n l}}{(\beta_n - \alpha)(\beta_n - k \cos \phi_1)} \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{kc(d-c)}{d} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{e^{i3\pi/4}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \{\mathcal{F}[kl(1 \\
& - \cos \phi_1)] - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)]\}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

şeklinde bulunur. $I_{2n}(\alpha)$ için ise

$$\begin{aligned}
I_{2n}(\alpha) &= \text{Rez}(\beta_n) + \text{Rez}(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau)}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n) M_+(\tau)} \frac{(p_n - i\tau q_n)}{(\tau - \beta_n)} d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} d\tau
\end{aligned} \tag{2.94}$$

yazılabilir. Söz konusu rezidüler

$$\text{Rez}(\beta_n) = \frac{e^{i\beta_n l} M_-(\beta_n) (p_n - i\beta_n q_n)}{2\beta_n (\beta_n - \alpha)} \tag{2.95}$$

ve

$$\text{Rez}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha + \beta_n)} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n) N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} + \frac{(p_n + i\beta_n q_n) N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \tag{2.96}$$

şeklindedir. Sağ yandaki kesim çizgisi integrallerinden birincisi $I_1(\alpha)$ için yapılane benzer şekilde değerlendirilirse

$$\begin{aligned}
M(\tau)|_{\tau \in \mathcal{C}_1^+ + \mathcal{C}_1^-} &= \frac{\sin[K(d-c)] (e^{iK(d-c)} - e^{-iK(d-c)})}{K} \\
&= 2i(d-c)^2 \left[\frac{\sin K(d-c)}{K(d-c)} \right]^2 \sqrt{k+\tau} \sqrt{k-\tau},
\end{aligned} \tag{2.97}$$

dolayısıyla

$$\mathcal{T}_+^{(2)}(\tau) = \frac{(p_n - i\tau q_n)}{M_+(\tau)(\tau + \beta_n)} \left[\frac{\sin K(d-c)}{K(d-c)} \right]^2 \sqrt{k+\tau} \tag{2.98}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1^+ + \mathcal{C}_1^-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau)}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n) M_+(\tau)} \frac{(p_n - i\tau q_n)}{(\tau - \beta_n)} d\tau \\
= \frac{(d-c)^2}{\pi(\alpha - \beta_n)} \int_{\mathcal{C}_1^+} \mathcal{T}_+^{(2)}(\tau) \sqrt{k-\tau} e^{i\tau l} \left[\frac{1}{(\tau - \alpha)} \right. \\
\left. - \frac{1}{(\tau - \beta_n)} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{2.99}$$

yazılabilir. Burada da, $\mathcal{C}_1^+$ üzerinde $\tau = k + te^{i\pi/2}$ olduğunun dikkate alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1^+ + \mathcal{C}_1^-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau)(p_n - i\tau q_n)}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n) M_+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - \beta_n)} \\
= \frac{(d-c)^2 e^{i\pi/4} e^{ikl}}{i\pi(\alpha - \beta_n)} \int_0^\infty \mathcal{T}_+^{(2)}(k + it) \left[\frac{\sqrt{t} e^{-tl}}{\left[t - ik \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right) \right]} \right. \\
\left. - \frac{\sqrt{t} e^{-tl}}{\left[t - ik \left(1 - \frac{\beta_n}{k} \right) \right]} \right] dt
\end{aligned} \tag{2.100}$$

olur. Yine, l 'nin yeterince büyük olması halinde $\mathcal{T}_+^{(2)}(k + it)$ fonksiyonunun bu integrale en büyük katkısı $t = 0$ uç noktası civarından gelir ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau) (p_n - i\tau q_n)}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n) M_+(\tau) (\tau - \beta_n)} d\tau \\
&= \frac{(d - c)^2 e^{i\pi/4} e^{ikl}}{i\pi(\alpha - \beta_n)} \mathcal{T}_+^{(2)}(k) \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{t} e^{-tl}}{\left[t - ik \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right) \right]} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{t} e^{-tl}}{\left[t - ik \left(1 - \frac{\beta_n}{k} \right) \right]} \right] dt
\end{aligned} \tag{2.101}$$

yazılır.

$$\mathcal{T}_+^{(2)}(k) = \frac{\sqrt{2k}(p_n - ikq_n)}{M_+(k)(k + \beta_n)} \tag{2.102}$$

eşitliği ve (2.91) ilişkisi yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l} M(\tau) (p_n - i\tau q_n)}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n) M_+(\tau) (\tau - \beta_n)} d\tau \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikl} (d - c)^2 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{kl} (\alpha - \beta_n)} \frac{k(p_n - ikq_n)}{M_+(k)(k + \beta_n)} \\
&\quad \times \{ \mathcal{F}[kl(1 - \beta_n/k)] - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

bulunur. (2.94) eşitliğinin sağ yanındaki son integral için ise, kesim çizigisi üzerinde yazılan (2.84) bağıntısından yararlanarak

$$\mathcal{T}_+^{(3)}(\tau) = \frac{\sin[K(d - c)]}{K(d - c)} \frac{Kd}{\sin(Kd)} \frac{\sin(Kc)}{Kc} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} \frac{c(d - c)}{d(\tau + \beta_n)} \sqrt{k + \tau} \tag{2.104}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} d\tau \\
&= - \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\pi\beta_n} \int_{c_1^+} \frac{e^{i\tau l} \mathcal{J}_+^{(3)}(\tau)}{(\tau - \alpha)} \sqrt{k - \tau} d\tau
\end{aligned} \tag{2.105}$$

yazılır. C_1^+ integrasyon çizgisi üzerinde $\tau = k + te^{i\pi/2}$ yazılırsa yukarıdaki ifade

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} d\tau \\
&= - \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)e^{ikl}e^{-i\pi/4}}{2\pi\beta_n} \int_{c_1^+} \frac{e^{-tl} \mathcal{J}_+^{(3)}(k + it)\sqrt{t}}{[t - ik(1 - \alpha/k)]} dt
\end{aligned} \tag{2.106}$$

haline gelir. Yeterince büyük l 'ler için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} d\tau \\
&= - \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)e^{ikl}e^{-i\pi/4}}{2\pi\beta_n} \mathcal{J}_+^{(3)}(k) \int_{c_1^+} \frac{e^{-tl}\sqrt{t}}{[t - ik(1 - \alpha/k)]} dt
\end{aligned} \tag{2.107}$$

(2.91) bağıntısı yardımıyla da

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \int_{c_1^+ + c_1^-} \frac{e^{i\tau l}}{(\tau - \alpha)(\tau + \beta_n)} \frac{M(\tau)}{N(\tau)} \frac{N_+(\tau)}{M_+(\tau)} d\tau = \\
&= \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)kc(d - c)N_+(\beta_n)}{\beta_n d(k + \beta_n)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \{1 \\
&\quad - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)]\}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

bulunur. Sonuç olarak, (2.95), (2.96), (2.103) ve (2.108) ifadelerinin (2.94)'te yerine konmasıyla $I_{2n}(\alpha)$ integrali aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}
I_{2n}(\alpha) = & \frac{e^{i\beta_n l} M_-(\beta_n)(p_n - i\beta_n q_n)}{2\beta_n(\beta_n - \alpha)} \\
& + \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha + \beta_n)} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n)N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(d-c)^2 e^{-i\pi/4}}{(\alpha - \beta_n)} \frac{k(p_n - ikq_n)}{M_+(k)(k + \beta_n)} \{ \mathcal{F}[kl(1 \\
& - \beta_n/k)] - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \} \\
& + \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)kc(d-c)N_+(\beta_n)}{\beta_n d(k + \beta_n)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \{ 1 \\
& - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

$P^{(2)}(\alpha)$ 'nin tamamen belirlenebilmesi için $I_{3n}(\alpha)$ integralinin de benzer bir biçimde değerlendirilmesi gerekmektedir. $I_{2n}(\alpha)$ 'nın tanımlandığı (2.76) ile $I_{3n}(\alpha)$ 'nın tanımlandığı (2.77) ifadeleri karşılaştırılırsa, $I_{2n}(\alpha)$ integralinde $\beta_n \rightarrow \alpha_n$, $p_n \rightarrow g_n$, $q_n \rightarrow h_n$ koymakla $I_{3n}(\alpha)$ integralinin elde edildiği kolaylıkla görülür. Bu durumda $I_{2n}(\alpha)$ integrali için elde edilen çözümde de bu dönüşümleri uygulamak $I_{3n}(\alpha)$ integralini çözmek için yeterlidir. Böylece $I_{3n}(\alpha)$ integrali için

$$\begin{aligned}
I_{3n}(\alpha) = & \frac{e^{i\alpha_n l} M_-(\alpha_n)(g_n - i\alpha_n h_n)}{2\alpha_n(\alpha_n - \alpha)} \\
& + \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n)N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} \right. \\
& \left. + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(d-c)^2 e^{-i\pi/4}}{(\alpha - \alpha_n)} \frac{k(g_n - ikh_n)}{M_+(k)(k + \alpha_n)} \{ \mathcal{F}[kl(1 \\
& - \alpha_n/k)] - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \} \\
& + \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)kc(d-c)N_+(\alpha_n)}{\alpha_n d(k + \alpha_n)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \{ 1 \\
& - \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

bulunur. Nihayet, (2.93), (2.109) ve (2.110) sonuçlarının (2.78) ifadesinde yerine konmasıyla $P^{(2)}(\alpha)$ için

$$\begin{aligned}
& P^{(2)}(\alpha) \\
&= -\frac{U_1 N_-(k \cos \phi_1) e^{i\alpha l}}{N_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_1)} + \frac{U_1 M_-(k \cos \phi_1) e^{ikl \cos \phi_1}}{M_-(\alpha)(\alpha - k \cos \phi_1)} \\
&- \frac{U_1 N_-(k \cos \phi_1)}{M_-(\alpha)} \frac{\pi}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta_n} \frac{N_+(\beta_n)}{M_+(\beta_n)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi c}{d}\right) e^{i\frac{n\pi c}{d}} e^{i\beta_n l}}{(\beta_n - \alpha)(\beta_n - k \cos \phi_1)} \\
&- \frac{U_1 N_-(k \cos \phi_1)}{M_-(\alpha)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{kc(d-c)}{d} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{(\alpha - k \cos \phi_1)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \left\{ \mathcal{F}[kl(1 \right. \\
&- \cos \phi_1)] - \mathcal{F}\left[kl\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)\right] \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{M_-(\alpha)} \left\{ \frac{e^{i\beta_n l} M_-(\beta_n)(p_n - i\beta_n q_n)}{2\beta_n(\beta_n - \alpha)} \right. \\
&+ \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha + \beta_n)} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \left[\frac{(p_n - i\alpha q_n)N_-(\alpha)}{(\alpha - \beta_n)} + \frac{(p_n + i\beta_n q_n)N_+(\beta_n)}{2\beta_n} \right] \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(d-c)^2 e^{-i\pi/4}}{(\alpha - \beta_n)} \frac{k(p_n - i\beta_n q_n)}{M_+(k)(k + \beta_n)} \left\{ \mathcal{F}\left[kl\left(1 - \frac{\beta_n}{k}\right)\right] \right. \\
&- \mathcal{F}\left[kl\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)\right] \left. \right\} \\
&+ \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(p_n + i\beta_n q_n)kc(d-c)N_+(\beta_n)}{\beta_n d(k + \beta_n)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \left\{ 1 \right. \\
&- \mathcal{F}\left[kl\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)\right] \left. \right\} \Bigg\} \\
&- \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n}{M_-(\alpha)} \left\{ \frac{e^{i\alpha_n l} M_-(\alpha_n)(g_n - i\alpha_n h_n)}{2\alpha_n(\alpha_n - \alpha)} \right. \\
&+ \frac{e^{i\alpha l}}{(\alpha + \alpha_n)} \frac{M_-(\alpha)}{N_-(\alpha)} \left[\frac{(g_n - i\alpha h_n)N_-(\alpha)}{(\alpha - \alpha_n)} + \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)N_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(d-c)^2 e^{-i\pi/4}}{(\alpha - \alpha_n)} \frac{k(g_n - i\alpha h_n)}{M_+(k)(k + \alpha_n)} \left\{ \mathcal{F}[kl(1 - \alpha_n/k)] \right. \\
&- \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \left. \right\} \\
&+ \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{kl}} \frac{(g_n + i\alpha_n h_n)kc(d-c)N_+(\alpha_n)}{\alpha_n d(k + \alpha_n)} \frac{N_+(k)}{M_+(k)} \left\{ 1 \right. \\
&- \mathcal{F}[kl(1 - \alpha/k)] \left. \right\} \Bigg\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{i\tau l} M_-(\tau) V_1(\tau)}{(\tau - \alpha) M_-(\alpha)} d\tau
\end{aligned} \tag{2.111}$$

elde edilmiş olur. Öte yandan $Q^{(2)}(\alpha)$ için de (2.69) ifadesi (2.72)'de yerine konur ve

$$\begin{aligned}
N_-(\alpha)Q^{(2)}(\alpha) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} e^{-i\tau l} \frac{N_-(\tau)}{M_-(\tau)} \frac{U_2 M_-(k \cos \phi_2)}{(\tau - \alpha)(\tau - k \cos \phi_2)} d\tau \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) V_2(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l}}{(\tau - \alpha)} \frac{N_-(\tau)}{M_-(\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_n f_n}{(\tau + \alpha_n)} \left[\frac{M_-(\tau)}{(\tau - \alpha_n)} \right. \\
& \left. - \frac{M_+(\alpha_n)}{2\alpha_n} \right] d\tau
\end{aligned} \tag{2.112}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdaki integrasyon eğrileri alt yarı-düzlemde kapatılır ve Jordan lemmasından yararlanılırsa, sağ yandaki birinci ve üçüncü integrallerin sıfıra eşit olacağı kolaylıkla görülür ve

$$Q^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i N_-(\alpha)} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{e^{-i\tau l} N_-(\tau) V_2(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \tag{2.113}$$

bulunmuş olur. (2.63), (2.64), (2.111) ve (2.113) çözümlerinin (2.63) ve (2.64) ifadelerinde yerine konmasıyla $P(\alpha)$ ve $Q(\alpha)$ fonksiyonları ikinci iterasyona kadar belirlenmiş olur. $\Phi_1(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$ fonksiyonları için ise $P(\alpha)$ ve $Q(\alpha)$ için bulunan çözümlerin (2.25) ve (2.42) ile birlikte düşünülmesi yeterli olur. Bilinmeyen katsayılar f_n, g_n, h_n, p_n ve q_n 'leri elde edebilmek için $\Phi_1(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$ fonksiyonlarının (2.15), (2.16) ve (2.17)'ye konması ve ortaya çıkan lineer denklem sisteminin sayısal yöntemlerle çözülmesi gerekmektedir. Tam bir çözüm elde edebilmek için sözü geçen üç denklemin yanı sıra, fonksiyonların tanımlarından elde edilebilen

$$q_m = \frac{2}{d} \sin(\gamma_m c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{K_n^2 - \gamma_m^2} \tag{2.114}$$

ve

$$p_m = \frac{2K_m}{(d-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma_n c)}{K_m^2 - \gamma_n^2} \quad (2.115)$$

ilişkilerinden de yararlanmak gerekmektedir.

2.2. Alanın Analizi

(2.2) denkleminde görülen $u_1(x, y)$ saçılan alanı

$$F(\alpha, y) = e^{iK(y-d)} \left\{ \Phi_1(\alpha) + e^{i\alpha l} \Phi_+(\alpha) - ikZ_0 I_0 \frac{\sin K(y_0 - d)}{K} e^{i\alpha x_0} \right\} \quad (2.116)$$

olmak üzere

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} F(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (2.117)$$

şeklinde tanımlanan ters Fourier dönüşümü ile hesaplanır. $\Phi_1(\alpha)$ ve $\Phi_+(\alpha)$ için bulunan çözümlerin yerine konması ve

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y - d &= r \sin \theta \\ x - l &= \tilde{r} \cos \tilde{\theta}, & y - d &= \tilde{r} \sin \tilde{\theta} \\ x_0 - l &= \rho_1 \cos \phi_1, & y_0 - d &= \rho_1 \sin \phi_1 \\ x_0 &= \rho_2 \cos \phi_2, & y_0 - d &= \rho_2 \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (2.118)$$

dönüşümlerinin uygulanmasıyla, (2.117) integrali semer noktası yöntemi yardımıyla asimptotik olarak değerlendirilebilir hale gelir. Böylelikle kırınan alan için

$$\mathcal{V} = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i3\pi}{4}} \sin \theta [M_-(k \cos \theta)]^2 P(-k \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \quad (2.116)$$

olmak üzere

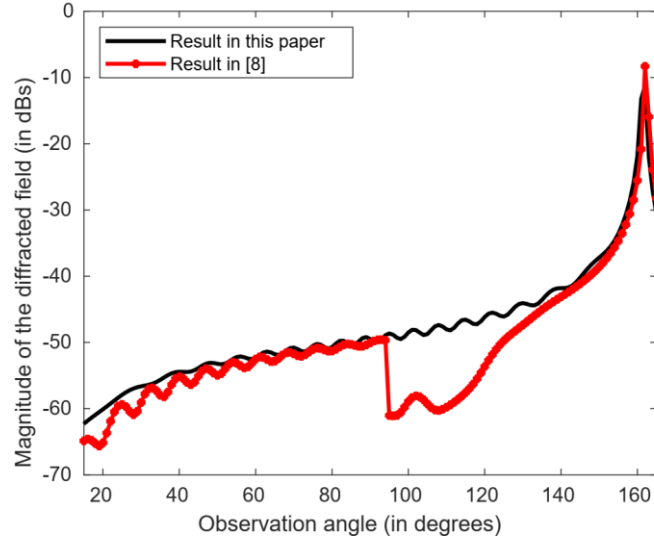
$$\begin{aligned}
& u_1^d \\
& \cong \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}} U_2 \sin \theta M_-(k \cos \theta) M_-(k \cos \phi_2) e^{ikr}}{\sqrt{2\pi} (\cos \theta + \cos \phi_2) \sqrt{kr}} \\
& + \mathcal{H}(\cos \phi_1 - \cos \phi_2) \frac{e^{\frac{i3\pi}{4}} U_1 \sin \tilde{\theta} N_-(k \cos \tilde{\theta}) N_-(k \cos \phi_1) e^{ik\tilde{r}}}{\sqrt{2\pi} (\cos \tilde{\theta} + \cos \phi_1) \sqrt{k\tilde{r}}} \\
& + \frac{ke^{\frac{i3\pi}{4}} \sin \theta M_-(k \cos \theta) e^{ikr}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n M_+(\alpha_n)}{\alpha_n (\alpha_n - k \cos \theta)} \\
& + \frac{ke^{\frac{i3\pi}{4}} \sin \tilde{\theta} N_-(k \cos \tilde{\theta}) e^{ik\tilde{r}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n N_+(\beta_n) (p_n + i\beta_n q_n)}{\beta_n (\beta_n - k \cos \tilde{\theta})} \\
& - \mathcal{V} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n N_+(\alpha_n) (g_n + i\alpha_n h_n)}{\alpha_n (\alpha_n - k \cos \tilde{\theta})}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

elde edilmiş olur.

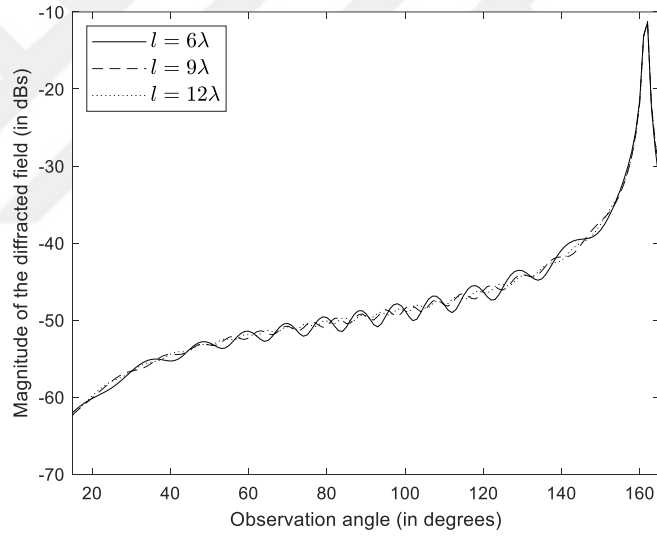
3. SAYISAL SONUÇLAR

İkinci bölümde elde edilen kırınan alanın, farklı basamak süreksizliği parametreleri olan genişlik l ve yükseklikler c ve d (bkz. **Şekil 2.1**) ile nasıl değişim gösterdiği, $\phi = \arctan(y/x) \in [15^\circ, 165^\circ]$ gözlem açısı aralığı için incelenmiş, yapılan sayısal hesaplamalara ilişkin sonuçlar bu bölümde grafiklerle sunulmuştur. Tüm analizlerde, λ monokromatik çizgisel kaynağa ilişkin dalga boyu olmak üzere, $k = 2\pi/\lambda$, $x_0 = 2\lambda$, $y_0 = \lambda > d$ değerleri dikkate alınmıştır. Ayrıca, kırınan alanının genliğinin birinci ve ikinci mertebe kırınım katkılarından oluştuğu düşünülmüştür. Öncelikle, mevcut çalışmada öne atılan konvansiyonel olmayan yaklaşımın Doğan vd. yaklaşımı [5] ile karşılaştırılması gerçekleştirilmiştir. Bu karşılaştırmaya ilişkin sonuçlar **Şekil 4.1**'de görülmektedir. Şekilden de anlaşılabileceği gibi, mevcut çalışmadaki yaklaşım ile hem ancak sayısal olarak değerlendirilebildiği için hesap yükü getiren bir kesim çizgisi integralinden kurtulmuş hem de daha uniform bir sonuç elde edilebilmiştir. Aralarındaki küçük farklar, yeni yaklaşımda bahsi geçen kesim çizgisi integralinin bulunmamasından kaynaklanmaktadır.

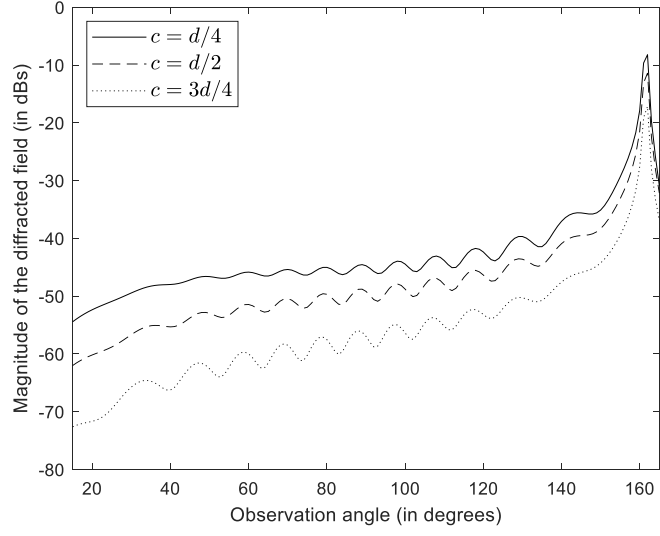
Diğer yandan, **Şekil 4.2**'de kırınan alanın genliğinin, $d/c = 2$ ve $d = \lambda/3$ için basamak genişliği l ile değişimi gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü üzere, kırınan alanın genliğindeki salınım, l değerinin artmasıyla azalmaktadır. **Şekil 4.3**'te ise $L = 9\lambda$ ve $d = \lambda/3$ için, kırınan alanın genliğinin d/c oranının farklı değerleri için aldığı değerler sunulmuştur. Bu oranın artması durumunda kırınan alanın genliğinin de arttığı gözlemlenmiştir. Son olarak, **Şekil 4.4**'te kırınan alanın genliğinin basamak yüksekliği d ile arasındaki ilişki görülmektedir. Burada da $d/c = 2$ ve $L = 9\lambda$ dikkate alınmıştır. d değerinin azalmasıyla kırınan alanın genliğinin de azaldığı kolayca anlaşılmaktadır.



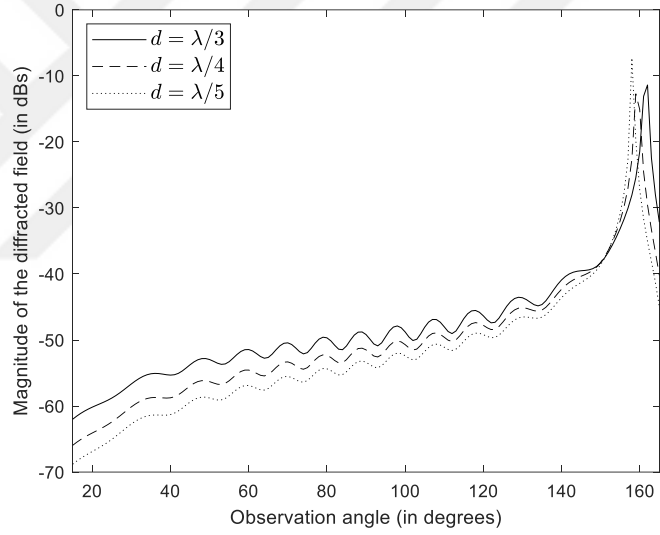
Şekil 4.1: Bu çalışmada sunulan yaklaşım ile Doğan vd. yaklaşımının [5] karşılaştırması.



Şekil 4.2: Kırınan alanın genliğinin basamak genişliği l ile değişimi.



Şekil 4.3: Kırınan alanın genliğinin d/c oranı ile değişimi.



Şekil 4.4: Kırınan alanın genliğinin d ile değişimi.

4. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada, bir çizgisel kaynaktan gelen monokromatik elektromanyetik dalgaların mükemmel iletken ardışık basamak süreksizliklerinden saçılması sırasında karşılaşılan üçüncü türden Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözümünde, faktörizasyon prosedüründe tümü alt yarı-düzlemde regüler olan fonksiyonların dikkate alınmasına dayanan alışılmışın dışında yenilikçi bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşım ile problem ikinci türden kuple Fredholm integral denkleminin çözümüne indirgenirken, klasik yaklaşımda karşılaşılan ve ancak sayısal olarak değerlendirilebilen bir kesim çizgisi integralinden kurtulunmuştur. Söz konusu integral denklemler asimptotik olarak çözülmüş ve kırınan alan elde edilmiştir. Bu çalışmadaki konvansiyonel olmayan yaklaşım ile klasik yaklaşım karşılaştırıldığında, yeni yaklaşımın daha uniform sonuçlar verdiği ve klasik yaklaşıma ait çözümde sebebi açıklanamayan bir süreksizlikten kaçınmayı mümkün kıldığı görülmüştür. Ayrıca, basamak süreksizliklerinin yüksekliği ve genişliği gibi çeşitli parametrelerin kırınım olayı üzerindeki etkileri de sunulmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Noble B., (1998), “Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations”, 2nd Edition, Chelsea Pub. Co.
- [2] Volakis J.L., (1988), “High frequency scattering by a thin material half plane and strip”, Radio Science 23 (3), 450-462.
- [3] Büyükaksoy A., Birbir F., (1993), “Plane wave diffraction by an impedance step”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 41 (8), 1160-1164.
- [4] Tayyar İ. T., Büyükaksoy A., Işıkyer A., (2008), “Wiener-Hopf analysis of the parallel plate wave guide with opposing rectangular dielectric-filled grooves”, Canadian Journal of Physics, 86 (5), 733-745.
- [5] Dogan M., Dikmen F., Alkumru A., (2017), “Line source diffraction by perfectly conducting successive steps”, Wave Motion, 68 (1), 253-271.
- [6] Sommers G. A., Pathak P. H., (1992), “Uniform GTD solution for the diffraction by metallic tapes on paneled compact-range reflectors”, IEE Proceedings H (Microwaves, Antennas and Propagation), 139 (3), 297-305.
- [7] Johansen E., (1967), “Surface wave scattering by a step”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 15 (3), 442-448.
- [8] Büyükasoy A., Birbir F., (1993), “Plane wave diffraction by an impedance step”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 41 (8), 1160-1164.
- [9] Büyükasoy A., Birbir F., (1997), “Plane wave diffraction by a reactive step”, International Journal of Engineering Sciences, 35 (4), 311-319.
- [10] Volakis J. L., Ricoy M., (1985), “Diffraction by a thick impedance edge and impedance step protrusion”, Technical Report No: 388967-1-F=RL-255, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Michigan, Ann Arbor, USA.
- [11] Ayub M., Ramzan M., Mann A. B., (2009), “Magnetic line source diffraction by an impedance step”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 57 (4), 1289-1293.
- [12] Ahmed S., (2015), “Magnetic line source diffraction by a perfect electromagnetic conductor (PEMC) step”, Journal of Modern Optics, 62 (3), 175-178.
- [13] Mittra R., Lee S.W., (1971), “Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves”, The McMillan Company.
- [14] Idemen M., (1974), “On the Functional Equation Related to the Three-Part Mixed Boundary Value Problems”, SIAM Journal on Applied Mathematics, 27 (3), 404-415.

ÖZGEÇMİŞ

Kadir DURGUT, 2016 yılında doktora eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalı Başkanlığı'nda başlamıştır. 2015 yılından bu yana Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilgi Güvenliği ve İleri Teknolojiler Araştırma Merkezi'nde (BİLGEM) Kıdemli Baş Uzman Araştırmacı unvanıyla, Milli Muharip Uçak (KAAN) geliştirilmesi projesi kapsamında yürütülen Yakın Alan Radar Kesit Alanı Test Tesisi Kurulumu (NFRTF) ve EMC Test Sistemi (EMCTS) projelerinde Proje Yöneticisi olarak görev yapmaktadır.



TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR

Durgut K., Çınar G., Alkumru A., (2025), “A Novel Approach for the Solution of Line Source Diffraction by Perfectly Conducting Successive Steps”, Journal of Electromagnetic Engineering and Science (JEES), 25 (3), accepted to be published in May 2025 .

