

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİX ALFABE ÜZERİNDE TANIMLI KODLAR HAKKINDA

GAMZE AVCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. YASEMİN ÇENGELLENMİŞ

EDİRNE-2025

Gamze AVCI'nın hazırladığı “Mix Alfabe Üzerinde Tanımlı Kodlar Hakkında” başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmza

Prof. Dr. Yasemin ÇENGELLENMİŞ

.....

Prof. Dr. Figen ÖKE

.....

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

.....

Tez Savunma Tarihi: 26/05/2025

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Yasemin ÇENGELLENMİŞ

Tez Danışmanı

.....

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Doç. Dr. Filiz UMAROĞULLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

26/05/2025

Gamze AVCI

İmza

ÖZET

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kodlama teorisi ve özel bazı lineer kodlar hakkında literatür araştırmalarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde cebirsel kavramlar, kodlama teorisi ve sonlu cisimler ile bazı halka aileleri üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların özellikleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde F_q sonlu bir cisim, $B = F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ bir halka ailesi olmak üzere yeni bir $\Delta = F_q B$ mix alfabe oluşturulmuştur. Özel olarak Δ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların cebirsel yapısı çalışılmıştır. Ayrıca ayrılabilir kod kavramı verilmiş ve skew constacyclic kodların duali ve Gray görüntüsü elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde F_q sonlu bir cisim, $\beta_1, \beta_2 \in F_q^*$ için $R_1 = F_q + u_1 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$ ve $R_2 = F_q + u_1 F_q + u_2 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$, $u_2^2 = \beta_2 u_2$, $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$ halka aileleri olmak üzere yeni bir $F_q R_1 R_2$ mix alfabe oluşturularak $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı lineer kodlar araştırılmıştır. Özel olarak $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların cebirsel yapısı, ayrılabilir kod kavramı, duali ve Gray görüntüsü verilmiştir.

Beşinci bölümde F_q sonlu bir cisim, $i = 3, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$ $k \geq 3$ için $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k]/\langle w_j^2 = w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ olmak üzere yeni bir halka ailesi oluşturulup, bu halka ailesi üzerinde skew constacyclic kodlar çalışılmıştır. Daha sonra yeni bir $F_q S_{q,k}$ mix alfabe oluşturularak $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı lineer kodlar araştırılmıştır. Özel olarak skew constacyclic kodların cebirsel yapısı, ayrılabilir kod kavramı, duali ve Gray görüntü verilmiştir.

Son bölümde ise sonuç ve tartışmalar kısmına yer verilmiştir.

Yıl : 2025

Sayfa Sayısı : 88

Anahtar Kelimeler : Skew constacyclic kod, Gray dönüşüm, mix alfabe



ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, a literature review on coding theory and some specific linear codes are discussed.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to algebraic concepts, coding theory and skew constacyclic codes defined over finite field and certain families of rings are given.

In the third chapter, a new mixed alphabet $\Delta = F_q B$ is constructed, where F_q is a finite field and $B = F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ is a family of finite rings. The algebraic structure of skew constacyclic codes over Δ is specifically studied. Additionally, the concept of separable codes is introduced, and the duals and Gray images of skew constacyclic codes are obtained.

In the fourth chapter, a new mixed alphabet $F_q R_1 R_2$ is constructed using finite field F_q and two families of finite rings $R_1 = F_q + u_1 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$ and $R_2 = F_q + u_1 F_q + u_2 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$, $u_2^2 = \beta_2 u_2$, $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$, $\beta_1, \beta_2 \in F_q^*$. Linear codes defined over $F_q R_1 R_2$ are investigated. In particular, the algebraic structure of skew constacyclic codes over $F_q R_1 R_2$, the concept of separable codes, their duals and Gray images are studied.

In the fifth chapter, a new family of finite rings is constructed as $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k]/\langle w_j^2 = w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ for $i = 3, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$, $k \geq 3$, F_q is a finite field. Skew constacyclic codes over $S_{q,k}$ are studied for $k \geq 3$. Furthermore, a new mixed alphabet $F_q S_{q,k}$ is constructed, and linear codes over $F_q S_{q,k}$ are investigated. Specifically, the algebraic structure of skew constacyclic codes, the concept of separable codes, their duals and Gray images are explored.

The final chapter includes the conclusion and discussions.

Year : 2025

Number of Pages : 88

Keywords : Skew constacyclic code, Gray map, mix alphabet



ÖNSÖZ

Yüksek Lisans Tez danışmanlığını üstlenerek beni heveslendiren ve yönlendiren, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum, aynı zamanda çok sevgili hocam Prof. Dr. Yasemin ÇENGELLENMİŞ'e üzerimdeki emekleri için sonsuz teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Perihan AVCI'ya, babam Recep AVCI'ya ve abim Hamza AVCI'ya çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitimim süresince çalışmalarımı tekrar tekrar okuyarak bana eleştirileriyle yol gösteren Sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ hocama çok teşekkür ederim.

Bu süreçte her zaman beni destekleyen ve benden yardımlarını esirgemeyen Burak Kamil USLU'ya çok teşekkür ederim.

Gamze AVCI

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
ÖNSÖZ.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1. Tez Organizasyonu.....	4
BÖLÜM 2 TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. Cebir ile İlgili Temel Kavramlar.....	6
2.2. Kodlama Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar.....	13
2.3. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar ve Özellikleri.....	18
2.4. B Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar ve Özellikleri.....	19
2.5. R_k Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar ve Özellikleri.....	25
BÖLÜM 3 $F_q B$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR.....	30
3.1. $F_q B$ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Ayrılabilir Kodlar.....	30
3.2. φ Gray Dönüşüm ve Skew Constacyclic Kodların Gray Görüntüleri.....	37
BÖLÜM 4 $F_q R_1 R_2$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR.....	41

4.1. $F_q R_1 R_2$ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Ayrılabilir Kodlar.....	41
4.2. Φ Gray Dönüşüm ve Skew Constacyclic Kodların Gray Görüntüleri.....	49
BÖLÜM 5 $F_q S_{q,k}$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR.....	54
5.1. $S_{q,k}$ Halka Ailesi, Cebirsel Yapısı, Üreteç İdempotenleri ve Gray Dönüşüm.....	54
5.2. $S_{q,k}$ Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Gray Görüntüleri.....	57
5.3. $F_q S_{q,k}$ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Ayrılabilir Kodlar.....	60
5.4. ψ_k Gray Dönüşüm ve Skew Constacyclic Kodların Gray Görüntüleri.....	67
BÖLÜM 6 SONUÇ ve TARTIŞMALAR.....	71
6.1. Sonuçlar.....	71
6.2. Gelecek Çalışma.....	72
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	75

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F_q	q elemanlı sonlu cisim
F_q^n	n boyutlu F_q -vektör uzayı
(n, M, d)	uzunluğu n , eleman sayısı M ve minimum uzaklığı d olan kod
$[n, k, d]$	uzunluğu n , boyutu k ve minimum uzaklığı d olan lineer kod
$d(x, y)$	x ile y arasındaki uzaklık
d_H, d_G	sırasıyla Hamming ve Gray uzaklık fonksiyonları
w_H, w_G	sırasıyla Hamming ve Gray ağırlık fonksiyonları
$C^\perp$	C kodunun duali
$w_H(C)$	C kodunun minimum Hamming ağırlığı
$w_G(C)$	C kodunun minimum Gray ağırlığı
$d_H(C)$	C kodunun minimum Hamming uzaklığı
$d_G(C)$	C kodunun minimum Gray uzaklığı
$ C $	C kodunun eleman sayısı
$F_q[x, \sigma_t]$	σ_t otomorfizması ile belirli skew polinom halkası
σ_t	Aşikâr olmayan Frobenius otomorfizması
$C = \langle g(x) \rangle$	$g(x)$ tarafından üretilen C kodu
B	$F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ halka ailesi
R_k	$i = 1, \dots, k$ olmak üzere $F_q[u_1, u_2, \dots, u_k]/\langle u_i^2 = \beta_i u_i, u_i u_j = u_j u_i = 0 \rangle$ halka ailesi
$S_{q,k}$	$i = 3, \dots, k, j = 1, \dots, k, i \neq j, k \geq 3$ olmak üzere $F_q[w_1, w_2, \dots, w_k]/\langle w_j^2 = w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 = w_2 w_1 \rangle$ halka ailesi

$ord(\varrho)$	ϱ aşıkâr olmayan otomorfizmanın mertebesi
$Aut(R)$	R halkası üzerinde tanımlı otomorfizmalar kümesi
$R[x, \theta]$	θ otomorfizması ile belirli skew polinom halkası



ŞEKİLLER DİZİNİ

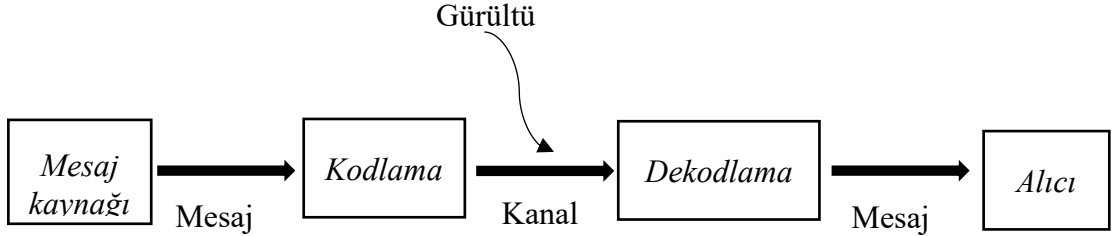
Şekil 1.1. Temel iletişim sistemi	1
---	---



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kodlama teorisinin temelleri, 1948 yılında Claude Shannon'ın "A Mathematical Theory of Communication" adlı makalesiyle atılmıştır (Shannon, 1948). Bu çalışmada, iletişim kanallarında bir mesajın belirli bir kodlama ve dekodlama yöntemiyle, belirli bir hata oranının altında alıcıya güvenilir şekilde iletilebileceği gösterilmiştir. Bu başlangıç teorisinin ardından, kodlama teorisi, iletişim sırasında veya veri depolamada oluşabilecek hataların tespiti ve düzeltilmesi üzerine odaklanmıştır. Amaç, hem doğru veri iletimini sağlamak hem de zaman ve enerji açısından daha verimli kodlama yöntemleri geliştirmek olmuştur.



Şekil 1.1 Temel İletişim Sistemi

Şekil 1.1, mesaj kaynağı, iletişim kanalı ve alıcı arasındaki veri akışını ve bu süreçteki kodlama ve dekodlama adımlarını görselleştirmektedir. İletişim sistemlerinin temel amacı, gönderilen mesajın alıcıya hatasız ve doğru bir biçimde aktarılmasıdır. Bu süreçte, mesaj önce mesaj kaynağından iletişim kanalına gönderilir. Mesajın, kanalda oluşabilecek hatalara karşı korunması için uygun matematiksel kodlama yöntemleri devreye girer. Kodlanmış mesaj, iletişim sırasında meydana gelebilecek hatalar

sonucunda bozulmuş bir şekilde dekodlama birimine ulaştığında, uygun dekodlama teknikleri kullanılarak dekodlanan mesaj alıcıya doğruluğu yüksek bir olasılıkla iletilir.

İletişim sistemlerinin mesajı hatasız bir şekilde iletme hedefi, matematiksel kodlama yöntemlerinin geliştirilmesiyle doğrudan ilişkilidir. Kodlama teorisinin bu bağlamdaki önemi, F_2 cismi üzerindeki çalışmalar ile başlamış, daha sonra bu çalışmalar F_q cismi üzerine genişletilmiştir. 1970'lerin başlarından itibaren ise çalışmalar halkalar üzerine taşınmıştır ve asıl ilerleme Z_4 , dört elemanlı bir halka olmak üzere Hammons ve arkadaşlarının bu halkayı kullanarak geliştirdikleri yöntem ile sağlanmıştır. Hammons ve arkadaşları, Z_4 halkası üzerindeki kodların Gray dönüşümleri sayesinde F_2 cismi üzerinde lineer olmayan ancak daha iyi parametrelere sahip kodların elde edilebileceğini göstermiştir (Hammons, Kumar, Calderbank, Sloane & Sole, 1994). Bu yenilik, kodlama teorisinin yeni boyutlar kazanmasına yol açmış ve araştırmacılar farklı halkalar üzerindeki kodları keşfetmeye yönelmiştir.

Kodlama teorisindeki bu yenilikler, yalnızca F_2 ve Z_4 gibi yapılar üzerindeki çalışmaları ilerletmekle kalmamış, aynı zamanda lineer kodlar ve onların özel bir sınıfı olan cyclic kodlar gibi düzenli cebirsel yapılara sahip kodların gelişimini de desteklemiştir.

Lineer kodların özel bir sınıfı olan cyclic kodlar, ilk kez 1957 yılında Prange tarafından tanımlanmıştır. Prange, F_q cismi üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir cyclic kodun, $F_q[x]/(x^n - 1)$ bölüm halkasının bir idealine karşılık geldiğini göstermiştir. Böylece ideallerin zengin cebirsel yapısından faydalanabilmeyi mümkün kılmıştır (Prange, 1957).

Cyclic kodlar üzerine yapılan çalışmalar, bu kodların daha genel sınıflarının tanımlanması amacıyla genişletilmiş ve constacyclic kodlar gibi cyclic kodların üst sınıfları incelenmeye başlanmıştır.

Constacyclic kodlar, kodlama teorisinde cyclic kodların bir genişletilmesi olarak tanımlanmıştır. Bu kodlar, belirli bir birimsel çarpanla cyclic shift (döngüsel kaydırma) yapan lineer kodlardır. İlk olarak 1994 yılında J. M. Jensen tarafından tanımlanmıştır (Jensen, 1994).

J. M. Jensen'in "A class of constacyclic codes" makalesi, kodlama teorisinin birçok temel kavramını ortaya koymuş ve bu alandaki gelişmelere öncülük etmiştir. Constacyclic kodlar, bu bağlamda önemli bir yenilik olarak kabul edilmiştir. Daha sonra birçok bilim insanı farklı cebirsel yapılar üzerinde constacyclic kodları çalışmıştır. Bu çalışmalardan bazıları constacyclic kodların halkalar ve halka aileleri üzerinde nasıl tanımlanabileceğini ve bu yapıların cebirsel özelliklerini ortaya koyarak kodlama teorisine önemli katkılarda bulunmuştur (Chen vd., 2012; Dinh vd., 2010; Siap vd., 2009; Zhu vd., 2014).

Constacyclic kodlar üzerine yapılan çalışmalar, cyclic kodların daha genel bir sınıfının tanımlanmasını teşvik etmiş ve bu doğrultuda skew cyclic kodlar gibi yeni sınıfların ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır. Skew cyclic kodlar ilk defa 2007 yılında Boucher ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır (Boucher, Geiselmann & Ulmer, 2007).

Skew cyclic kodlar üzerine yapılan çalışmalar, bu kodların sınırlı yapısal özelliklerini aşarak daha genel bir kod sınıfı olan skew constacyclic kodların ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır.

Skew constacyclic kodlar ise ilk defa 2010 yılında Jitman vd. tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada, skew constacyclic kodların tanımı yapılmış ve bu kodların özellikleri belirlenmiştir (Jitman, Ling & Udomkavanich, 2010). Bu alanda başka bir önemli çalışma ise Dinh vd. tarafından 2016 yılında ilk defa sonlu cisimler üzerinde yapılmıştır. Bu çalışmada, θ, F_q sonlu cismi üzerinde aşikâr olmayan bir otomorfizma, n, θ 'nın mertebesi tarafından bölünebilir bir tam sayı, λ, F_q da birimsel bir eleman ve $\theta(\lambda) = \lambda$ olmak üzere F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı n uzunluğundaki bir C kodunun skew constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşulun $g(x)$, $x^n - \lambda$ polinomunun bir sağ böleni olmak üzere, $\langle g(x) \rangle \subseteq F_q[x, \theta]/\langle x^n - \lambda \rangle$ bir sol ideal olması gösterilmiştir (Dinh, Nguyen & Sriboonchitta, 2016).

Skew constacyclic kodların cebirsel özellikleri ve matematiksel koşulları üzerine yapılan bu çalışmalar, bu kodların daha spesifik halka aileleri üzerinde incelenmesine olanak sağlamıştır.

Özel olarak 2020 yılında $B = F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ halka ailesi üzerinde skew constacyclic kodlar incelenmiştir (Verma, Prakash & Singh, 2020).

Bir başka çalışma ise $R_k = F_q[u_1, u_2, \dots, u_k] / \langle u_i^2 = \beta_i u_i, u_i u_j = u_j u_i = 0 \rangle$ halka ailesi üzerinde skew constacyclic kodların incelendiği çalışmadır (Kong, Zheng, Liu & Jiang, 2023).

Skew constacyclic kodlar, özellikle sonlu cisimler ve sonlu halkalar üzerinde çalışılmıştır. Ancak, bazı uygulamalarda bu kodlardan daha iyi parametrelere sahip olan alternatif kodlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu noktada, mix alfabeler üzerinde çalışılan kodlara geçiş önemli bir adım olarak karşımıza çıkmaktadır. Mix alfabe üzerinde tanımlı kodlar ise ilk kez 1997 yılında Rifa tarafından çalışılmıştır (Rifa & Pujol, 1997). Hatta araştırmacılar bu kodları iyi kuantum hata düzelten kodlar ve DNA kodlar elde etmekte kullanmışlardır. Mix alfabeler üzerinde çalışmanın temel motivasyonu, farklı cebirsel yapıların birleşimiyle daha zengin bir cebirsel yapı oluşturmak ve optimal kodlar elde etme olasılığını artırmaktır.

1.1 Tez Organizasyonu

Tezin geri kalan kısmı şu şekilde düzenlenmektedir:

Bölüm 2’de, literatürde yer alan cebirsel kavramlar, kodlama teorisi ve skew constacyclic kodlar ile ilgili tanım, teorem, önerme ve sonuçlara yer verilmiştir.

Bölüm 3’te, F_q sonlu bir cisim, $B = F_q[v] / \langle v^3 - v \rangle$ halka ailesi olmak üzere literatürde var olmayan bir $\Delta = F_q B$ mix alfabe oluşturulmuştur. Δ üzerinde tanımlı lineer kodlar incelenmiştir. Özel olarak Δ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlar çalışılmıştır. Bu kodların polinom temsilleri elde edilmiş ve dualleri belirlenmiştir. Ayrılabilir kod kavramı verilmiştir. Bir Gray dönüşümü tanımlanarak, bu dönüşümün F_q -lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Δ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların Gray görüntüsünün, indeksi (1,3) olan mix genelleştirilmiş skew quasi-constacyclic kod olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 4’te, F_q sonlu bir cisim, $\beta_1, \beta_2 \in F_q^*$ için $R_1 = F_q + u_1 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$ ve $R_2 = F_q + u_1 F_q + u_2 F_q$, $u_1^2 = \beta_1 u_1$, $u_2^2 = \beta_2 u_2$, $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$ halka aileleri olmak üzere yeni bir $F_q R_1 R_2$ mix alfabe oluşturulmuştur. $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı lineer kodlar araştırılmıştır. Özel olarak $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlar çalışılmıştır. Bu kodların polinom temsilleri elde edilip ve dualleri belirlenmiştir.

Ayrılabilir kod kavramı verilmiştir. Bir Gray dönüşüm tanımlanarak, bu dönüşümün F_q -lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların Gray görüntüsünün, indeksi $(1,2,3)$ olan mix genelleştirilmiş skew quasi-constacyclic kod olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 5'te, $S_{q,k}$ halka ailesi ve cebirsel yapısı verilmiş, üreteç idempotentleri belirlenmiştir. Bu halka ailesi üzerinde birimsel eleman, otomorfizma ve Gray dönüşüm tanımlanmıştır. Özel olarak Skew constacyclic kodlar, dualleri ve Gray görüntüleri verilmiştir. Daha sonra F_q sonlu bir cisim, $S_{q,k}$ halka ailesi olmak üzere yeni bir $F_q S_{q,k}$ mix alfabe oluşturulmuştur. $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı lineer kodlar araştırılmıştır. Özel olarak $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlar çalışılmıştır. Bu kodların polinom temsilleri elde edilmiş ve dualleri belirlenmiştir. Ayrılabilir kod kavramı verilmiştir. Bir Gray dönüşümü tanımlanmış ve bu dönüşümün F_q -lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğu gösterilmiştir. $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı skew constacyclic kodların Gray görüntüsünün, indeksi $(1, k + 2)$ olan mix genelleştirilmiş skew quasi-constacyclic kod olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 6'da sonuç ve tartışmalara yer verilmiştir.

Sonlu bir cisim ya da sonlu halka aileleri üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlarla ilgili literatürde var olan çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmalar vasıtasıyla literatürde yer almayan yeni tanımladığımız bazı mix alfabeler üzerindeki skew constacyclic kodlar araştırılmış ve bu kodların özellikleri incelenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Cebir ile İlgili Temel Kavramlar

Kodlama Teorisi, birden fazla disiplinin birbiriyle etkileşimi ile ortaya çıkan bir alandır. Özellikle matematiğin bir dalı olan cebir ile yakından ilişkilidir. Dolayısıyla tezin bütünlüğünü korumak amacıyla bu bölümde cebir ile ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

2.1.1. Tanım:

G boştan farklı herhangi bir küme olsun. $G \times G$ kümesinden G kümesine tanımlı bir

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

şeklindeki fonksiyona G üzerinde tanımlı bir “*ikili işlem*” denir.

Bir küme üzerinde bir ya da daha fazla ikili işlem tanımlı ise bu kümeye “*cebirsel yapı*” denir (Karakaş, 2012).

2.1.2. Tanım:

G boştan farklı herhangi bir küme ve $*$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun.

- i) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$,
- ii) En az bir $e \in G$ var öyle ki her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$,
- iii) Her $a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde en az bir $a^{-1} \in G$ vardır.

koşullarını sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına “*grup*” denir.

Ek olarak,

iv) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$

koşulunu sağlayan $(G,*)$ grubuna “*değişmeli grup*” denir (Çallıalp, 2013).

2.1.3. Tanım:

R boştan farklı herhangi bir küme ve “+” ile “.”, R kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun.

i) $(R, +)$ değişmeli gruptur,

ii) Her $a, b, c \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$,

iii) Her $a, b, c \in R$ için $(a + b).c = a.c + b.c$ ve $a.(b + c) = a.b + a.c$,

koşullarını sağlayan $(R, +, .)$ cebirsel yapısına ‘*halka*’ denir.

Ek olarak,

iv) Her $a, b \in R$ için $a.b = b.a$ olur.

koşulunu sağlayan $(R, +, .)$ halkasına “*değişmeli halka*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.4. Tanım:

Eğer $(R, +, .)$ halkasında herhangi bir $a \in R$ için $1_R . a = a . 1_R = a$ koşulunu sağlayan 1_R elemanı varsa R ’ye “*birimli halka*” ve 1_R elemanına “*birim eleman*” denir (Hungerford, 1973).

Eleman sayısı sonlu olan halkaya sonlu halka denir ve R sonlu bir halka olmak üzere R halkasının eleman sayısı $|R|$ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım:

R birimli bir halka olmak üzere R halkasında tersi mevcut olan elemanlara birimsel eleman denir (Hungerford, 1973).

2.1.6. Tanım:

R halkasında $0_R \neq a \in R$ elemanı için $a.b = 0_R$ ($b.a = 0_R$) olacak biçimde en az bir $0_R \neq b \in R$ varsa a 'ya bir “*sol (sağ) bölen*” denir. R halkasının hem sağ hem de sol sıfır bölen elemanına “*sıfır bölen*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.7. Tanım:

$R, 1_R \neq 0_R$ birim elemanlı bir halka olsun. R halkasının 0_R 'dan farklı her elemanı birimsel (tersinir) ise R 'ye “*bölüm halkası (division ring)*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.8. Tanım:

R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0_R$ şartını sağlayan en küçük pozitif n tamsayısına R halkasının “*karakteristiği*” denir. Eğer böyle bir en küçük pozitif n tamsayısı yoksa R halkasının karakteristiği 0_R 'dır denir (Asar, 2010).

2.1.9. Tanım:

R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer her $a, b \in S$ için $a - b \in S$ ve $a.b \in S$ ise S halkasına R 'nin “*alt halkası*” denir (Çallıalp, 2013).

2.1.10. Tanım:

R ve S iki halka olsun. Her $a, b \in R$ için,

- i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
- ii) $f(a.b) = f(a).f(b)$

koşullarını sağlayan bir $f: R \rightarrow S$ fonksiyonuna “*halka homomorfizması*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.11. Tanım:

$f: R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer f ;

- i) Birebir ise “*monomorfizma*”,
- ii) Örten ise “*epimorfizma*”,
- iii) Hem birebir hemde örten ise “*izomorfizma*” olarak adlandırılır. (Bu durumda R ve S halkaları *izomorftur* denir ve $R \cong S$ ile gösterilir.)

Ek olarak, R bir halka olmak üzere, $f: R \rightarrow R$ bir izomorfizma ise f 'ye “*otomorfizma*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.12. Tanım:

$(R, +, \cdot)$ halka olsun. $\emptyset \neq I \subseteq R$ olmak üzere I alt kümesi,

i) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$,

ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $r \cdot a \in I$ ($a \cdot r \in I$)

şartlarını sağlıyor ise I kümesine R halkasının bir “*sol (sağ) ideali*” denir. Eğer I ideali hem sağ ideal hem de sol ideal ise I kümesine R halkasının “*ideali*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.13. Not:

Eğer R halkası değişmeli ise sağ ve sol ideal aynı olacaktır. $\{0\}$ ve R , R halkasının aşikar idealleridir. R halkasının bu ideallerden farklı ideallerine ise öz idealleri denir.

2.1.14. Tanım:

R bir halka ve X , R 'nin alt kümesi olsun. $\{A_i | i \in I\}$ ailesi R 'nin X kümesini içeren tüm ideallerinin ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} A_i$ ailesine “ *X kümesi ile üretilen ideal*” denir. Bu ideal $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

X kümesinin elemanlarına $\langle X \rangle$ idealinin “*üreteçleri*” denir. Eğer X sonlu bir küme ise $\langle X \rangle$ idealine “*sonlu üretilmiştir*” denir. Eğer $X = \{x\}$ tek elemanlı bir küme ise $\langle x \rangle$ tek eleman ile üretilen ideale “*esas ideal*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.15. Tanım:

Her ideali esas ideal olan halkaya “*esas ideal halkası*” denir (Hungerford, 1973).

2.1.16. Önerme:

R bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için R halkasının bir I idealine göre her $a, b \in R$ için

$$a \equiv b \pmod{I} \Leftrightarrow a - b \in I$$

şeklinde tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Çallıalp, 2013).

2.1.17. Önerme:

R/I , R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları kümesi olsun. Her $a + I, b + I \in R/I$ için

$$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I \text{ ve } (a + I) \odot (b + I) = (a.b) + I$$

biçiminde tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir bölüm halkasıdır (Çallıalp, 2013).

2.1.18. Tanım:

R birimli ve değişmeli bir halka ve M de R halkasının $\langle 1 \rangle$ den farklı bir ideali olsun. R halkasının M idealini kapsayan M ve R den başka ideali yoksa, M idealine R halkasının bir “maksimal ideali” denir (Hungerford, 1973).

2.1.19. Tanım:

Tek bir maksimal ideali olan halkaya bir “yerel (lokal) halka” denir. Sonlu sayıda maksimal ideali olan halkaya ise “yarı yerel (semi lokal) halka” denir (Jitman vd., 2010).

2.1.20. Tanım:

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının tüm ideallerinin ailesi kapsama bağıntısına göre sıralı ise R halkasına “sonlu zincir halkası” denir (Jitman vd., 2010).

2.1.21. Önerme:

R bir sonlu zincir halkası ise R ’nin her ideali esas idealdir ve R tek maksimal ideale sahiptir. π , R halkasının maksimal idealinin bir üretici olmak üzere R halkasının tüm idealleri $R = \langle 1 \rangle \supsetneq \langle \pi \rangle \supsetneq \langle \pi^2 \rangle \supsetneq \dots \supsetneq \langle \pi^{y-1} \rangle \supsetneq \langle \pi^y \rangle = \langle 0 \rangle$ şeklinde zincir formundadır (Jitman vd., 2010).

2.1.22. Tanım:

R bir halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olmak üzere her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $f: R \times M \rightarrow M$, $f(r, m) = r.m$ şeklinde tanımlanan ve her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için

- i) $r.(m + n) = r.m + r.n$
- ii) $(r + s).m = r.m + s.m$
- iii) $(s.r).m = s.(r.m)$

özelliklerini sağlayan bir f fonksiyonu varsa M ’ye “sol R -modül” denir. Benzer şekilde sağ modül tanımı da yapılabilir (Taşçı, 2007).

2.1.23. Teorem:

M bir R -modül ve $A \subset M$ olmak üzere A 'nın alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in A$ için $a - b \in A$ ve her $r \in R$, her $a \in A$ için $r.a \in A$ olmasıdır (Taşçı, 2007).

2.1.24. Tanım:

$(R, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka olsun. $R - \{0\} = R^*$ olmak üzere $(R^*, \cdot)$ bir grup ise R halkasına “*cisim*” denir (Çallıalp, 2013).

2.1.25. Tanım:

Sonlu elemanlı cisme sonlu cisim denir.

2.1.26. Teorem:

Sonlu cisimlerin sıfırdan farklı her elemanı birimseldir (Roman, 1992).

2.1.27. Teorem:

$1 < q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere q elemanlı bir cismin var olması için gerek ve yeter koşul q sayısının bir asalın kuvveti şeklinde yazılmasıdır (Roman, 1992).

2.1.28. Tanım:

p bir asal sayı ve $n \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere $q = p^n$ elemanlı sonlu cisme “*Galois cismi*” denir ve F_q ya da $GF(q)$ ile gösterilir (Roman, 1992).

2.1.29. Not:

p asal olmak üzere $F_p \cong \mathbb{Z}_p$ dir.

2.1.30. Örnek:

$F_{11} \cong \mathbb{Z}_{11} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{10}\}$ dir.

2.1.31. Tanım:

F sonlu bir cisim olmak üzere $p.1_F = 0_F$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına F cisminin “*karakteristiği*” denir. Böyle bir p tam sayısı olmadığı durumlarda karakteristik 0'dır denir. Ayrıca $\text{kar}F = p$ ise $n \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere F cismi $q = p^n$ elemanlıdır (Roman, 1992).

2.1.32. Önerme:

$p(x)$, $F_q[x]$ de $der(p(x)) = d$ olan asal bir polinom olmak üzere $F_q[x]/\langle p(x) \rangle$ bölüm halkası bir cisimdir ve

$$F_q[x]/\langle p(x) \rangle = \{r(x) + \langle p(x) \rangle \mid der(r(x)) < d, r(x) \in F_q[x]\}$$

şeklindedir (Roman, 1992).

2.1.33. Örnek:

$GF(81)$ cismi için $GF(81) \cong GF(3)[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle \cong Z_3[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$ dir.

2.1.34. Tanım:

F bir cisim ve $\theta: F \rightarrow F$ dönüşümü birebir ve örten bir homomorfizma ise θ , F üzerinde tanımlı bir “otomorfizmadır” denir. Her $a \in F$ için $\theta^m(a) = a$ şartını sağlayan en küçük m pozitif tam sayısına ise θ ’nin mertebesi denir ve kısaca $ord(\theta) = m$ olarak gösterilir (Roman, 1992).

2.1.35. Teorem:

F cisminin θ tarafından sabit bırakılan elemanlarının kümesi $K = \{a \mid \theta(a) = a, a \in F\}$, F ’nin bir alt cismidir (Roman, 1992).

2.1.36. Tanım:

$(V, \oplus)$ değişmeli grup, $(F, +, \cdot)$ bir cisim olmak üzere

$$g: F \times V \rightarrow V$$

$$(a, v) \mapsto g(a, v) = a \odot v$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, V ’ye $(F, +, \cdot)$ cismi üzerinde bir “vektör uzayı” denir (Çallıalp & Kuruoğlu, 1996).

- i) Her $a, b \in F$ ve her $u, v \in V$ için $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ dir.
- ii) Her $a, b \in F$ ve her $v \in V$ için $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$ dir.
- iii) Her $a, b \in F$ ve her $v \in V$ için $(a \cdot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$ dir.

iv) $1 \in F$ ve her $v \in V$ için $1 \odot v = v$ dir.

2.1.37. Tanım:

V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ alt kümesi olsun. W, V vektör uzayındaki işlemlere göre bir vektör uzayı ise W 'ye V 'nin bir “alt uzayı” denir (Çallıalp & Kuruoğlu, 1996).

2.1.38. Teorem:

V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\emptyset \neq W \subseteq V$ kümesinin V 'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $w_1, w_2 \in W$ ve her $a, b \in F$ için $(a \odot w_1) \oplus (b \odot w_2) \in W$ olmasıdır (Çallıalp & Kuruoğlu, 1996).

2.2. Kodlama Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar

Tezin bütünlüğünü korumak amacıyla, bu bölümde tez kapsamı boyunca kullanılacak tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir.

2.2.1. Tanım:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ sonlu kümesine “alfabe” ve bileşenleri A kümesinin elemanlarından oluşan sonlu dizilişlerin kümesine “ q -lu kod” denir (Roman, 1992).

2.2.2. Tanım:

Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i \in A$ olmak üzere $a = a_1 a_2 \dots a_n$ elemanına A üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir “ q -lu sözcük” denir.

$$a_1 a_2 \dots a_n \leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ile gösterilir (Roman, 1992).

2.2.3. Tanım:

A alfabe olsun. $\emptyset \neq C \subseteq A^n$ olmak üzere C kümesine A üzerinde tanımlı n uzunluğunda “ q -lu blok” kod ve kodun bir elemanına da “kod sözcüğü” denir.

C kodunun eleman sayısı $|C| = M$ ile gösterilirse C koduna n uzunluğunda M elemanlı bir kod denir ve (n, M) ile gösterilir (Roman, 1992).

2.2.4. Tanım:

$V(q, n) = F_q^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in F_q, i = 1, 2, \dots, n\}$ kümesi n boyutlu bir F_q -vektör uzayı olmak üzere, F_q^n vektör uzayının bir C alt uzayına F üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir “lineer kod” denir.

C, F_q^n vektör uzayının k boyutlu bir alt uzayı ise C ’ye F_q üzerinde tanımlı bir “lineer $[n, k]$ - kod” denir (Huffman vd., 2003).

2.2.5. Tanım:

R sonlu bir halka ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $R^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ kümesinin M elemanlı bir C R -alt modülüne, n uzunluklu, M elemanlı bir “lineer kod” denir. Kodun herhangi bir elemanına “kod sözcüğü”, R^n kümesinin herhangi bir elemanına “sözcük” denir (Huffman vd., 2003).

2.2.6. Tanım:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in F_q^n \text{ için}$$

$$d: F_q^n \times F_q^n \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i, i = 1, 2, \dots, n\}|$$

biçiminde tanımlanan d dönüşümüne “Hamming uzaklığı” denir (Ling & Xing, 2004).

2.2.7. Tanım:

Bir kodunun birbirinden farklı kod sözcüklerinin Hamming uzaklığının en küçüğüne kodunun “minimum uzaklığı” denir ve $d = d(C) = \min\{d(x, y) : x \neq y, x, y \in C\}$ biçiminde gösterilir (Ling & Xing, 2004).

2.2.8. Tanım:

Uzunluğu n , eleman sayısı M ve minimum uzaklığı d olan bir C koduna “ (n, M, d) -kod” denir (Ling & Xing, 2004).

2.2.9. Not:

Bir C $[n, k]$ -kodun d minimum uzaklığı da belirtilmek isteniyorsa, C bir $[n, k, d]$ -kod şeklinde gösterilir.

2.2.10. Tanım:

$\mathbf{x} \in F_q^n$ bir vektör uzayın herhangi bir elemanı olmak üzere $\mathbf{x}$ elemanının sıfırdan farklı bileşenlerinin sayısına $\mathbf{x}$ elemanının “*Hamming ağırlığı*” denir ve $w(\mathbf{x})$ ya da $w_H(\mathbf{x})$ ile gösterilir.

Bir C kodunun sıfırdan farklı tüm kod sözcüklerinin ağırlıklarının en küçüğüne C kodunun “*minimum ağırlığı*” denir ve $w(C)$ ya da $w_H(C)$ ile gösterilir (Ling & Xing, 2004).

2.2.11. Lemma:

Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_q^n$ için, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w_H(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ eşitliği sağlanır (Ling & Xing, 2004).

2.2.12. Teorem:

C bir lineer kod olsun. Bu durumda, $d_H(C) = w_H(C)$ eşitliği sağlanır (Ling & Xing, 2004).

2.2.13. Tanım:

Herhangi iki $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in F_q^n$ olmak üzere

$$\cdot : F_q^n \times F_q^n \rightarrow F_q$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “*iç çarpım*” adı verilir. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ise $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$ birbirine diktir (ortogonaldır) denir (Hill, 1986).

2.2.14. Tanım:

C , F_q üzerinde tanımlı bir $[n, k]$ -kod olmak üzere $C^\perp = \{\mathbf{v} \in F_q^n : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{u} \in C\}$ kümesine C kodunun “*duali*” denir. $C^\perp = C$ ise C koduna self-dual kod, $C \subseteq C^\perp$ ise C koduna “*self-ortogonal kod*” denir (Ling & Xing, 2004).

2.2.15. Teorem:

C , F_q üzerinde tanımlı bir $[n, k]$ -kod olmak üzere

i) $|C| = q^k,$

- ii) $C^\perp$ de lineer bir koddur ve $\text{boy}(C) + \text{boy}(C^\perp) = n$,
- iii) $(C^\perp)^\perp = C$ dir (Ling & Xing, 2004).

2.2.16. Tanım:

C , F_q^n F_q -vektör uzayının bir alt kümesi ve τ , $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in F_q^n$ için $\tau(\mathbf{c}) = (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2}) \in F_q^n$ biçiminde bir cyclic shift olmak üzere $\tau(C) = C$ oluyorsa C kümesine “cyclic (devirli) küme” denir. C lineer bir kod ve cyclic bir küme ise C koduna “cyclic kod (devirli kod)” denir (Hill, 1986).

2.2.17. Önerme:

$$\pi: F_q^n \rightarrow F_q[x]/\langle x^n - 1 \rangle$$

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \mapsto c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$$

olarak tanımlanan π fonksiyonu bir vektör uzayı izomorfizması olmak üzere $C \subseteq F_q^n$ lineer kodunun cyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\pi(C)$ 'nin $F_q[x]/\langle x^n - 1 \rangle$ halkasının bir ideali olmasıdır (Ling & Xing, 2004).

2.2.18. Tanım:

C , F_q üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir cyclic kod ve bu koda karşılık gelen idealin içindeki sıfırdan farklı en küçük dereceli monik bir polinom $g(x)$ olmak üzere, $g(x)$ polinomuna C kodunun “üreteç polinomu” denir ve

$$C = \langle g(x) \rangle = \{f(x).g(x) \mid f(x) \in F_q[x]/\langle x^n - 1 \rangle\}$$

şeklindedir (Ling & Xing, 2004).

2.2.19. Tanım:

C , F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı bir lineer kod ve $\lambda \in F_q^*$ olsun. τ_λ , herhangi bir $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in F_q^n$ için $\tau_\lambda(C) = (\lambda c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}) \in F_q^n$ biçiminde bir constacyclic shift olmak üzere $\tau_\lambda(C) = C$ oluyorsa C 'ye “ λ -constacyclic kod (sabit devirli kod)” denir.

$\lambda = 1$ olması durumunda constacyclic kod ile cyclic kod tanımları çakışır ve $\lambda = -1$ olması durumunda ise constacyclic kod ile negacyclic kod tanımı çakışır (Ling & Xing, 2004).

2.2.20. Teorem:

$$\Pi: F_q^n \rightarrow F_q[x]/\langle x^n - \lambda \rangle$$

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \mapsto c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$$

olarak tanımlanan Π fonksiyonu bir vektör uzayı izomorfizması olmak üzere $C \subseteq F_q^n$ lineer kodunun constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\Pi(C)$ 'nin $F_q[x]/\langle x^n - \lambda \rangle$ halkasının bir ideali olmasıdır (Ling & Xing, 2004).

2.2.21. Tanım:

θ, F_q üzerinde tanımlı aşikâr olmayan bir otomorfizma ve C, F_q üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir lineer kod olsun. τ^θ , herhangi bir $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in F_q^n$ için $\tau^\theta(\mathbf{c}) = (\theta(c_{n-1}), \theta(c_0), \dots, \theta(c_{n-2})) \in F_q^n$ biçimindeki bir skew cyclic shift olmak üzere $\tau^\theta(C) = C$ oluyorsa C 'ye “*skew cyclic kod (çarpık devirli kod)*” denir (Boucher, Geiselmann & Ulmer, 2007).

θ aşikâr otomorfizma alınırca bu tanım cyclic kod tanımı ile çakışır.

2.2.22. Teorem:

F_q sonlu cisim ve $\theta \in \text{Aut}(F_q)$ aşikâr olmayan bir otomorfizması için, $F_q[x, \theta] = \{c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} \mid c_i \in F_q, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ kümesi bilinen polinom toplaması ve $(ax^k)(bx^l) = a\theta^k(b)x^{k+l}$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile değişmeli olmayan bir halkadır (Boucher vd, 2007).

2.2.23. Tanım:

$F_q[x, \theta]$ halkasına “*skew polinom halkası*” denir (Boucher vd, 2007).

2.2.24. Önerme:

θ, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı, mertebesi m olan aşikâr olmayan bir otomorfizma ve C, F_q üzerinde tanımlı, n uzunluğunda bir lineer kod olmak üzere $m \mid n$ ise $R_n = F_q[x, \theta]/\langle x^n - 1 \rangle$ kümesi bir halkadır (Şiap, Abualrub, Aydın & Seneviratne, 2010).

2.2.25. Önerme:

θ, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı, mertebesi m olan aşikâr olmayan bir otomorfizma ve C, F_q üzerinde tanımlı, n uzunluğunda bir lineer kod olmak üzere $m \nmid n$ ise $R_n = F_q[x, \theta]/\langle x^n - 1 \rangle$ kümesi toplama ve her $r(x) \in F_q[x, \theta]$ ve her $f(x) + \langle x^n - 1 \rangle \in R_n$ için $r(x) * (f(x) + \langle x^n - 1 \rangle) = r(x) * f(x) + \langle x^n - 1 \rangle$ işlemine göre bir sol $F_q[x, \theta]$ -modüldür (Şiap vd, 2010).

2.2.26. Teorem:

$\rho: F_q^n \rightarrow F_q[x, \theta]/\langle x^n - 1 \rangle$ 'e tanımlı bir izomorfizma, θ, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı, mertebesi m olan aşikâr olmayan bir otomorfizma ve C, F_q üzerinde tanımlı n uzunluğunda bir lineer kod olmak üzere $m \mid n$ ise C kodunun bir skew cyclic kod olması için gerek ve yeter koşul $\rho(C)$ kümesinin $F_q[x, \theta]/\langle x^n - 1 \rangle$ halkasının bir sol ideali olmasıdır (Şiap vd, 2010).

$$\begin{array}{ccc} C \subseteq F_q^n & \Leftrightarrow & \rho(C) \subseteq F_q[x, \theta]/\langle x^n - 1 \rangle \\ \text{Skew cyclic} & & \text{sol ideal} \\ \text{kod} & & \end{array}$$

2.3. F_q Sonlu Cismi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar

Bu bölümde Dinh ve arkadaşlarının makalesinde yer alan teorem ve tanımlar verilmektedir (Dinh, Nguyen & Sriboonchitta, 2016).

2.3.1. Teorem:

F_p^m sonlu cismi üzerindeki m farklı $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ F_p -otomorfizma $t = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere her $\alpha \in F_p^{*m}$ için $\sigma_t(\alpha) = \alpha^{p^t}$ şeklindedir. Bu otomorfizmalar kümesi bileşke işlemine göre σ_1 ile üretilmiş m -inci mertebeden devirli bir gruptur. (Lidl & Niederreiter, 1994).

2.3.2. Tanım:

2.3.1. Teoremdeki otomorfizmalara “*Frobenius otomorfizması*” denir. (Lidl & Niederreiter, 1994).

2.3.3. Tanım:

σ_t, F_q sonlu cismi üzerindeki aşikâr olmayan bir Frobenius otomorfizması, $\lambda_0 \in F_q^*$ birimsel bir eleman ve C, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. $\tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}$, her $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_0-1}) \in F_q^{\alpha_0}$ için $\tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{c}) = (\sigma_t(\lambda_0 c_{\alpha_0-1}), \sigma_t(c_0), \dots, \sigma_t(c_{\alpha_0-2})) \in F_q^{\alpha_0}$ biçimindeki bir skew σ_t - λ_0 constacyclic shift olmak üzere $\tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(C) = C$ oluyorsa C 'ye “skew σ_t - λ_0 constacyclic kod” denir (Dinh vd., 2016).

Bu tanım $\lambda_0 = 1$, σ_t otomorfizma ise bu tanım skew cyclic kod, σ_t aşikâr otomorfizma, λ_0 birimsel bir eleman ise constacyclic kod ve $\lambda_0 = 1$, σ_t aşikâr otomorfizma ise cyclic kod tanımı ile çakışır.

2.3.4. Teorem:

σ_t, F_q sonlu cismi üzerinde aşikâr olmayan bir Frobenius otomorfizması, $\text{ord}(\sigma_t) \mid \alpha_0$ ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$ olacak şekilde $\lambda_0 \in F_q^*$ olsun. F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir C kodunun skew σ_t - λ_0 constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $g(x)$, $x^{\alpha_0} - \lambda_0$ 'nın bir sağ böleni olmak üzere $\langle g(x) \rangle \subseteq F_q[x, \sigma_t] / \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle$ sol ideal olmasıdır (Dinh vd., 2016).

2.3.5. Önerme:

σ_t, F_q sonlu cismi üzerindeki aşikâr olmayan bir Frobenius otomorfizması, $\lambda_0 \in F_q^*$ birimsel bir eleman, $\text{ord}(\sigma_t) \mid \alpha_0$ ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$ olsun. F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir C lineer kodu skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ise $C^\perp$ lineer kodu da F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda skew σ_t - λ_0^{-1} constacyclic koddur (Dinh vd., 2016).

2.4. B Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar

Literatürde $q = p^m$, p tek asal, $v^3 = v$ olmak üzere $B = F_q + vF_q + v^2F_q \cong F_q[v] / \langle v^3 - v \rangle$ halka ailesi üzerinde tanımlı kodlar ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Bu bölümde bu makalelerde yer alan skew constacyclic kodlarla ilgili tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir (Kong ve Zheng, 2023, Ma, Gao & Fu, 2018; Verma, Prakash & Singh, 2020).

2.4.1. Önerme:

B halka ailesi karakteristiği p olan sonlu zincir olmayan, $\langle v \rangle$, $\langle v - 1 \rangle$ ve $\langle v + 1 \rangle$ şeklinde üç maksimal ideale sahip yarı local birimli bir halkadır. Ayrıca esas ideal halkasıdır (Ma, Gao & Fu, 2018).

2.4.2. Önerme:

B halka ailesinin ortogonal idempotentleri, $e_0 = 1 - v^2$, $e_1 = 2^{-1}(v + v^2)$, $e_2 = 2^{-1}(v^2 - v)$ dir. Diğer bir deyişle, $i = 0, 1, 2$ için $e_i^2 = e_i$, $e_0 + e_1 + e_2 = 1$ ve $i, j = 0, 1, 2$ için $i \neq j$ olmak üzere $e_i \cdot e_j = 0$ dır (Ma vd., 2018).

2.4.3. Önerme:

B halka ailesi $B = Be_0 \oplus Be_1 \oplus Be_2 \cong F_q e_0 \oplus F_q e_1 \oplus F_q e_2$ şeklinde ifade edilir (Ma vd., 2018).

2.4.4. Teorem:

B halka ailesinin herhangi bir $r = a + vb + v^2c$ elemanı $r_0, r_1, r_2 \in F_q$ olmak üzere $r = r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2$ şeklinde teklikle ifade edilir (Ma vd., 2018).

2.4.5. Lemma:

Herhangi bir $a + vb + v^2c = ae_0 + (a + b + c)e_1 + (a - b + c)e_2 \in B$ olsun. $a + vb + v^2c \in B^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul a , $a + b + c$ ve $a - b + c \in F_q^*$ olmasıdır (Ma vd., 2018).

B halka ailesi üzerinde Gray dönüşüm tanımı terslenebilir herhangi bir matris yardımıyla tanımlanabilir. Terslenebilir matris birim matris olarak alınırse aşağıdaki tanım verilebilir (Ma vd., 2018).

2.4.6. Tanım:

$$\psi: B \rightarrow F_q^3$$

$$(b_0 e_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2) \mapsto (b_0, b_1, b_2)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir (Ma vd., 2018).

Bu dönüşüm B^γ 'ye aşağıdaki gibi genişletilebilir. $i = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ için $u_i = b_0^i e_0 + b_1^i e_1 + b_2^i e_2 \in B$ olmak üzere,

$$\psi: B^\gamma \rightarrow F_q^{3\gamma}$$

$$(u_0, \dots, u_{\gamma-1}) \mapsto (b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{\gamma-1}, b_1^0, b_1^1, \dots, b_1^{\gamma-1}, b_2^0, \dots, b_2^{\gamma-1})$$

dir (Ma vd., 2018).

2.4.7. Tanım:

w_H, F_q^3 -vektör uzayı üzerinde tanımlı Hamming ağırlığı olmak üzere herhangi bir $r = r_0e_0 + r_1e_1 + r_2e_2 \in B$ için $w_G(r) = w_H(\psi(r))$ şeklinde tanımlı w_G fonksiyonuna r elemanının “Gray ağırlığı” denir.

Herhangi bir $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{\gamma-1}) \in B^\gamma$ elemanı için Gray ağırlık $w_G(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} w_G(u_i)$ biçiminde tanımlanır (Ma vd., 2018).

2.4.8. Tanım:

D, B halka ailesi üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. Herhangi $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in D$ için $d_G(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = w_G(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2)$ şeklinde tanımlı d_G fonksiyonuna “Gray uzaklığı” denir. D kodunun minimum Gray uzaklığı $d_G(D) = \min\{d_G(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) | \mathbf{d}_1 \neq \mathbf{d}_2, \forall \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in D\}$ şeklinde tanımlanır (Ma vd., 2018).

2.4.9. Önerme:

ψ Gray dönüşüm F_q - lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşümdür (Ma vd., 2018).

2.4.10. Önerme:

B üzerinde tanımlı γ uzunluğunda bir D lineer kodu,

$$D_0 = \{\mathbf{r}_0 \in F_q^\gamma | \exists \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in F_q^\gamma, \mathbf{r}_0e_0 + \mathbf{r}_1e_1 + \mathbf{r}_2e_2 \in D\}$$

$$D_1 = \{\mathbf{r}_1 \in F_q^\gamma | \exists \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 \in F_q^\gamma, \mathbf{r}_0e_0 + \mathbf{r}_1e_1 + \mathbf{r}_2e_2 \in D\}$$

$$D_2 = \{\mathbf{r}_2 \in F_q^\gamma | \exists \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 \in F_q^\gamma, \mathbf{r}_0e_0 + \mathbf{r}_1e_1 + \mathbf{r}_2e_2 \in D\}$$

F_q üzerinde tanımlı γ uzunluğunda lineer kodlar olmak üzere $D = e_0D_0 \oplus e_1D_1 \oplus e_2D_2$ biçiminde teklikle ifade edilir (Ma vd., 2018).

2.4.11. Önerme:

$D = e_0D_0 \oplus e_1D_1 \oplus e_2D_2$, B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda, d_G minimum uzaklığa sahip, $i = 0,1,2$ için k_i 'ler D_i lineer kodların boyutu olmak üzere

$|D| = q^{\sum_{i=0}^2 k_i}$ olan bir lineer kod olsun. Bu durumda F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı $\psi(D)$, $[3\gamma, \sum_{i=0}^2 k_i, d_G]$ parametrelerine sahip bir lineer koddur (Ma vd., 2018).

2.4.12.Önerme:

$Aut(F_{p^m})$, F_{p^m} cismi üzerindeki tüm F_p -otomorfizmaların kümesi ve $\sigma_t \in Aut(F_{p^m})$ aşikar olmayan otomorfizma olsun. Bu durumda her $a + bv + cv^2 \in B$ için,

$$\Phi: B \rightarrow B$$

$$a + bv + cv^2 \mapsto \sigma_t(a) + \sigma_t(b)v + \sigma_t(c)v^2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir otomorfizmadır (Verma, Prakash & Singh, 2020).

2.4.13. Tanım:

Φ, B halkası üzerinde tanımlı aşikar olmayan bir otomorfizma, $\Lambda \in B^*$ birimsel bir eleman ve D, B halka ailesi üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. τ_Λ^Φ , her $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{\gamma-1}) \in B^\gamma$ için $\tau_\Lambda^\Phi(\mathbf{d}) = (\Phi(\Lambda d_{\gamma-1}), \Phi(d_0), \dots, \Phi(d_{\gamma-2})) \in B^\gamma$ biçiminde bir skew Φ - Λ constacyclic shift olmak üzere $\tau_\Lambda^\Phi(D) = D$ oluyorsa D 'ye “*skew Φ - Λ constacyclic kod*” denir (Verma vd., 2020).

Özel olarak $\Lambda = 1$ ise D 'ye skew cyclic, $\Lambda = -1$ ise D 'ye skew negacyclic kod denir. Φ aşikar otomorfizma ise constacyclic kod, $\Lambda = 1$, Φ aşikar otomorfizma ise bu tanım cyclic kod tanımı ile çakışır.

2.4.14. Teorem:

B halka ailesi ve $\Phi \in Aut(B)$ aşikâr olmayan bir otomorfizması için, $B[x, \Phi] = \{r_0 + r_1x + \dots + r_{n-1}x^{n-1} | r_i \in B, i = 0, 1, \dots, n-1\}$ kümesi bilinen polinom toplaması ve $(ax^k)(bx^l) = a\Phi^k(b)x^{k+l}$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile değişmeli olmayan bir halkadır.

2.4.15. Tanım:

$B[x, \Phi]$ halkasına “*skew polinom halkası*” denir (Verma vd., 2020).

2.4.16. Teorem:

$x^\gamma - \Lambda$ polinomunun $B[x, \Phi]$ halkasının merkezi eleman olması için gerek ve yeterli koşul $\Phi(\Lambda) = \Lambda$ ve $ord(\Phi) \mid \gamma$ olmasıdır (Verma vd., 2020).

2.4.17. Önerme:

$$\pi: B^\gamma \longrightarrow B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$$

$$\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{\gamma-1}) \mapsto d_0 + d_1x + \dots + d_{\gamma-1}x^{\gamma-1} + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir B -modül izomorfizmasıdır.

Bu dönüşüm yardımıyla $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{\gamma-1})$ vektörü $\pi(\mathbf{d}) = d_0 + d_1x + \dots + d_{\gamma-1}x^{\gamma-1} + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle \in B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ ile gösterilecektir (Verma vd., 2020).

2.4.18. Teorem:

$\Phi(\Lambda) = \Lambda$ ve $\text{ord}(\Phi) \mid \gamma$ olsun. D lineer kodunun B halkası üzerinde γ uzunluğunda skew Φ - Λ constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\pi(D)$ kümesinin $B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ bölüm halkasının bir sol ideali olmasıdır (Verma vd., 2020).

2.4.19. Önerme:

$\text{ord}(\Phi) \nmid \gamma$ veya $\Phi(\Lambda) \neq \Lambda$ olsun. Bu durumda $B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ kümesi bilinen toplama ve her $p(x) \in B[x, \Phi], r(x) + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle \in B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ için $p(x)(r(x) + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle) = p(x)r(x) + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ şeklinde tanımlı skaler çarpım ile bir sol $B[x, \Phi]$ modüldür (Verma vd., 2020).

2.4.20. Teorem:

$\text{ord}(\Phi) \nmid \gamma$ olsun. Bu durumda bir D lineer kodunun B üzerinde tanımlı γ uzunluğunda skew Φ - Λ constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\pi(D)$ kümesinin $B[x, \Phi]/\langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ 'nin bir sol $B[x, \Phi]$ alt modül olmasıdır (Verma vd., 2020).

2.4.21. Teorem:

$\Lambda = \lambda_1 e_0 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 \in B^*$ birimsel bir eleman ve $\Phi \in \text{Aut}(B)$, $D = \bigoplus_{i=0}^2 e_i D_i$, B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda lineer kod olsun. D 'nin B halka ailesi üzerinde tanımlı skew Φ - Λ constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $i = 0, 1, 2$ için D_i 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı skew σ_t - λ_i constacyclic kod olmasıdır (Verma vd., 2020).

2.4.22. Önerme:

$\Lambda \in B^*$ ve $\Phi \in \text{Aut}(B)$ olsun. $j = 0, 1, 2$ için $D_j = \langle d_j(x) \rangle$, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı skew σ_t - λ_j constacyclic kodlar olmak üzere $D = \bigoplus_{i=0}^2 e_i D_i$ skew Φ - Λ constacyclic kod ise

- i) $d(x) = e_0 d_0(x) + e_1 d_1(x) + e_2 d_2(x)$ olmak üzere $D = \langle d(x) \rangle$ olacak şekilde $x^\gamma - \Lambda$ 'nın en az bir monik $d(x) \in B[x, \Phi]$ sağ böleni vardır.
- ii) $D = \langle e_0 d_0(x), e_1 d_1(x), e_2 d_2(x) \rangle$ ve $|D| = p^{3\gamma - \sum_{j=0}^2 \text{der}(d_j(x))}$ dir (Verma vd., 2020).

2.4.23. Tanım:

D, B halka ailesi üzerinde tanımlı, $s > 0, t > 0$ tamsayılar olmak üzere $n = st$ uzunluğunda lineer bir kod, $\Phi \in \text{Aut}(B)$ ve $\Lambda \in B^*$ olsun. $i = 1, 2, \dots, t$ olmak üzere her $a^i \in B^s$ elemanı için $\Upsilon_{\Phi, t}: B^n \rightarrow B^n$ tanımlı $\Upsilon_{\Phi, t}(a) = (a^1 | a^2 | \dots | a^t) = (\tau_\Lambda^\Phi(a^1) | \tau_\Lambda^\Phi(a^2) | \dots | \tau_\Lambda^\Phi(a^t))$ şeklinde lineer bir dönüşüm olsun. $\Upsilon_{\Phi, t}(D) = D$ ise D 'ye n uzunluğunda, t indeksli “skew quasi twisted kod” denir.

Özel olarak Φ aşık otomorfizma alınırsa D 'ye quasi twisted kod denir (Verma vd., 2020).

2.4.24. Teorem:

D, B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda bir skew Φ - Λ constacyclic kod ise $\psi(D), F_q$ cismi üzerinde tanımlı indeksi 3 olan 3γ uzunluğunda bir skew quasi twisted koddur (Verma vd., 2020).

2.4.25. Önerme:

$D = \bigoplus_{i=0}^2 e_i D_i$, B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda skew Φ - Λ constacyclic kod ise $i = 0, 1, 2$ için $D_i^\perp$ 'ler F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı skew σ_t - λ_i^{-1} constacyclic kodlar olmak üzere $D^\perp = \bigoplus_{i=0}^2 e_i D_i^\perp$ kodu da B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda skew Φ - Λ^{-1} constacyclic koddur (Verma vd., 2020).

2.5. R_k Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodlar

Bu bölümde (Kong, Zheng, Liu & Jiang, 2023) makalesinde yer alan tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir. Bu makalede $q = p^m$, p tek asal, $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $\beta_i \in F_q^*$ ve $j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$ olmak üzere $R_k = F_q[u_1, u_2, \dots, u_k] / \langle u_i^2 = \beta_i u_i, u_i u_j = u_j u_i = 0 \rangle$ halka ailesi üzerinde skew constacyclic kodlar ve bu kodların özellikleri incelenmiştir (Kong, Zheng, Liu & Jiang, 2023).

2.5.1. Önerme:

R_k sonlu zincir olmayan yarı local bir halkadır ve $|R_k| = q^{k+1}$ dir.

2.5.2. Örnek

$k = 1$ için $R_1 = F_q[u_1] / \langle u_1^2 - \beta_1 u_1 \rangle$ dir, $k = 2$ için $R_2 = F_q[u_1, u_2] / \langle u_1^2 - \beta_1 u_1, u_2^2 - \beta_2 u_2, u_1 u_2 = u_2 u_1 \rangle$ dir.

2.5.3. Not:

R_k halka ailesinin herhangi bir r_k elemanı $j = 1, 2, \dots, k$ için $a_j \in F_q$ olmak üzere taban elemanlarına bağlı olarak $r_k = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$ şeklinde yazılır.

2.5.4. Önerme:

R_k halka ailesinin ortogonal idempotentleri

$$\xi_1 = \frac{u_1}{\beta_1}, \xi_2 = \frac{u_2}{\beta_2}, \dots, \xi_k = \frac{u_k}{\beta_k}, \xi_{k+1} = 1 - \frac{u_1}{\beta_1} - \frac{u_2}{\beta_2} - \dots - \frac{u_k}{\beta_k} \text{ dir.}$$

Bu idempotentler $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{k+1} = 1$, $s, f = 1, 2, \dots, k + 1$ için $s \neq f$ olmak üzere $\xi_s \cdot \xi_f = 0$ ve $s = 1, 2, \dots, k + 1$ için $\xi_s^2 = \xi_s$ sağlar (Kong vd., 2023).

2.5.5. Önerme:

R_k halka ailesi $R_k = \xi_1 R_k \oplus \xi_2 R_k \oplus \dots \oplus \xi_{k+1} R_k \cong \xi_1 F_q \oplus \xi_2 F_q \oplus \dots \oplus \xi_{k+1} F_q$ şeklinde ifade edilir. Diğer bir deyişle herhangi bir $r_k = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \in R_k$ elemanı $r_{k,1}, r_{k,2}, \dots, r_{k,k+1} \in F_q$ olmak üzere $r_k = r_{k,1} \xi_1 + \dots + r_{k,k+1} \xi_{k+1}$ şeklinde teklikte yazılır (Kong vd., 2023).

2.5.6. Teorem:

Herhangi bir $\lambda_k = \lambda_{k,1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k$ elemanının birimsel eleman olması için gerekli ve yeterli koşul $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $\lambda_{k,j}$ 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde birimsel eleman olmasıdır (Kong vd., 2023).

2.5.7. Tanım:

Herhangi bir $r_k = r_{k,1}\xi_1 + \dots + r_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k$ elemanı için

$$\phi_k: R_k \rightarrow F_q^{k+1}$$

$$r_k \mapsto (r_{k,1}, r_{k,2}, \dots, r_{k,k+1})$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir (Kong vd., 2023).

Bu dönüşüm $R_k^{\alpha_k}$ 'ya aşağıdaki gibi genişletilebilir. $z = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1$ olmak üzere $r_k^z = r_{k,1}^z\xi_1 + r_{k,2}^z\xi_2 + \dots + r_{k,k+1}^z\xi_{k+1} \in R_k^{\alpha_k}$ elemanı için

$$\phi_k: R_k^{\alpha_k} \rightarrow F_q^{(k+1)\alpha_k}$$

$$(r_k^0, r_k^1, \dots, r_k^{\alpha_k-1}) \mapsto (r_{k,1}^0, \dots, r_{k,k+1}^0, r_{k,1}^1, \dots, r_{k,k+1}^1, \dots, r_{k,1}^{\alpha_k-1}, \dots, r_{k,k+1}^{\alpha_k-1})$$

dir (Kong vd., 2023).

2.5.8. Tanım:

$w_H, F_q^{(k+1)}$ vektör uzayı üzerinde tanımlı Hamming ağırlık olmak üzere $r_k = r_{k,1}\xi_1 + \dots + r_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k$ elemanı için $w_G(r_k) = w_H(\phi_k(r_k))$ şeklinde tanımlanan w_G fonksiyonuna r_k elemanının “Gray ağırlığı” denir.

Herhangi bir $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{\alpha_k-1})$ kod sözcüğünün Gray ağırlığı $w_G(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} w_G(v_i)$ şeklindedir.

2.5.9. Tanım:

Her $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in C_k$ için $d_G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = w_G(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ şeklinde tanımlanan d_G fonksiyonuna “Gray uzaklığı” denir.

C_k kodunun minimum Gray uzaklığı ise

$$d_G(C_k) = \min\{d_G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') | \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in C_k, \mathbf{v} \neq \mathbf{v}'\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.5.10. Önerme:

ϕ_k Gray dönüşümü F_q - lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşümdür (Kong vd., 2023).

2.5.11. Önerme:

R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğundaki C_k lineer kodu, $j = 1, 2, \dots, k + 1$ için $C_{k,j} = \{x_j \in F_q^{\alpha_k} \mid \sum_{i=1}^{k+1} x_i \xi_j \in C_k, \exists x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,j-1}, x_{k,j+1}, \dots, x_{k,k+1} \in F_q^{\alpha_k}\}$ olmak üzere $C_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}$ biçiminde teklikle yazılır (Kong vd., 2023).

2.5.12. Teorem:

σ_t, F_q sonlu cismi üzerinde aşikâr olmayan bir Frobenius otomorfizması olmak üzere herhangi bir $r_k \in R_k$ için

$$\delta_k: R_k \longrightarrow R_k$$

$$r_k = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k \mapsto \sigma_t(a_0) + \sigma_t(a_1) u_1 + \dots + \sigma_t(a_k) u_k$$

şeklinde tanımlanan δ_k dönüşümü R_k halka ailesi üzerinde tanımlı aşikâr olmayan bir otomorfizmadır (Kong vd., 2023).

2.5.13. Lemma:

$\lambda_k = \lambda_{k,1} \xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1} \xi_{k+1} \in R_k^*$ olsun. $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$ olması için gerekli ve yeterli koşul $j = 1, 2, \dots, k + 1$ olmak üzere $\sigma_t(\lambda_{k,j}) = \lambda_{k,j}$ ve $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $\beta_i \in F_q^*$ olmak üzere $\sigma_t(\beta_i) = \beta_i$ olmasıdır.

2.5.14. Tanım:

δ_k, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı aşikâr olmayan bir otomorfizma ve $\lambda_k \in R_k^*$ da birimsel bir eleman olsun. $C_k \subset R_k^{\alpha_k}$ alt kümesi,

i) $C_k, R_k^{\alpha_k}$ modülünün bir R_k - alt modülü,

ii) Her $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{\alpha_k-1}) \in C_k$ iken $\tau_{\lambda_k}^{\delta_k}(\mathbf{c}) = (\lambda_k \delta_k(c_{\alpha_k-1}), \delta_k(c_0), \dots, \delta_k(c_{\alpha_k-2})) \in C_k$ koşullarını sağlıyorsa C_k 'ya R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda “*skew δ_k - λ_k constacyclic kod*” denir (Kong vd., 2023).

2.5.15. Teorem:

R_k halka ailesi, $\delta_k \in \text{Aut}(R_k)$ aşıkâr olmayan olmayan bir otomorfizması olsun. Bu durumda $R_k[x, \delta_k] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{\alpha_k-1}x^{\alpha_k-1} \mid a_i \in R_k, i = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1\}$ kümesi bilinen polinom toplaması ve $(ax^l).(bx^s) = a\delta_k^l(b).x^{l+s}$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ile değişmeli olmayan bir halkadır (Kong vd., 2023).

2.5.16. Tanım:

Bu halkaya “*skew polinom halkası*” denir (Kong vd., 2023).

Polinom temsili için,

2.5.17. Önerme:

$$\begin{aligned} \Psi_k: R_k^{\alpha_k} &\rightarrow R_k[x, \delta_k]/\langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle \\ (a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_k-1}) &\mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_{\alpha_k-1}x^{\alpha_k-1} + \langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir R_k -modül izomorfizmasıdır (Kong vd., 2023).

2.5.18. Not:

$l = \text{ord}(\delta_k)$ ve $l \mid \alpha_k$ olsun. Bu durumda $R_k[x, \delta_k]/\langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle$ bir bölüm halkasıdır.

2.5.19. Teorem:

C_k lineer kodunun R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda skew δ_k - λ_k constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\Psi_k(C_k)$ kümesinin $R_k[x, \delta_k]/\langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle$ bölüm halkasının bir sol ideali olmasıdır (Kong vd., 2023).

2.5.20. Not:

Eğer $l \nmid \alpha_k$ ise o zaman $R_k[x, \delta_k]/\langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle$ kümesi bilinen toplama işlemi ve her $q(x) \in R_k[x, \delta_k], s(x) + \langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle \in R_k[x, \delta_k]/\langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle$ için $q(x)(s(x) + \langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle) = q(x)s(x) + \langle x^{\alpha_k} - \lambda_k \rangle$ şeklinde tanımlı skaler çarpma ile bir sol $R_k[x, \delta_k]$ - modüldür.

2.5.21. Teorem:

$C_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}$, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir lineer kod, $\lambda_k = \lambda_{k,1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k^*$ birimsel bir eleman, $\text{ord}(\delta_k) \mid \alpha_k$ ve $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$

olsun. C_k kodunun R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir skew δ_k - λ_k constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $C_{k,j}$ 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda skew σ_t - $\lambda_{k,j}$ constacyclic kod olmasıdır (Kong vd., 2023).

2.5.22. Teorem:

$\lambda_k = \lambda_{k,1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k^*$ birimsel bir eleman, $\text{ord}(\delta_k) \mid \alpha_k$, $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$ ve $C_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}$, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir skew δ_k - λ_k constacyclic kod olsun. Bu durumda $C_k^\perp = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}^\perp$, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir skew δ_k - λ_k^{-1} constacyclic koddur ve $\lambda_k^{-1} = \lambda_{k,1}^{-1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}^{-1}\xi_{k+1}$ olmak üzere $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $C_{k,j}^\perp$, F_q üzerinde tanımlı bir skew σ_t - $\lambda_{k,j}^{-1}$ constacyclic koddur (Kong vd., 2023).

2.5.23. Teorem:

$C_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}$, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir skew δ_k - λ_k constacyclic kod, $\lambda_k = \lambda_{k,1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k^*$ birimsel bir eleman, $\text{ord}(\delta_k) \mid \alpha_k$ ve $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$ olsun. Bu durumda $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $g_{k,j}(x) \in F_q[x, \sigma_t]$, $C_{k,j}$ skew σ_t - $\lambda_{k,j}$ constacyclic kodların üreteç polinomları olmak üzere $\Psi_k(C_k) = \langle \xi_1 g_{k,1}(x) + \dots + \xi_{k+1} g_{k,k+1}(x) \rangle$ olacak şekilde $x^{\alpha_k} - \lambda_k$ polinomunun sağ böleni olan bir $\xi_1 g_{k,1}(x) + \dots + \xi_{k+1} g_{k,k+1}(x) \in R_k[x, \delta_k]$ polinomu vardır (Kong vd., 2023).

2.5.24. Sonuç:

$C_k = \bigoplus_{j=1}^{k+1} \xi_j C_{k,j}$, R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğunda bir skew δ_k - λ_k constacyclic kod, $\lambda_k = \lambda_{k,1}\xi_1 + \dots + \lambda_{k,k+1}\xi_{k+1} \in R_k^*$, $\text{ord}(\delta_k) \mid \alpha_k$, $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$ olsun. Bu durumda $f_{k,j}(x)g_{k,j}(x) = x^{\alpha_k} - \lambda_{k,j}$ olmak üzere $f_{k,j}(x) = a_{0,k,j} + a_{1,k,j}x + \dots + a_{\alpha_k-r,k,j}x^{\alpha_k-r} \in F_q[\sigma_t]$ polinomlarından elde edilen $f_{k,j}^*(x) = a_{\alpha_k-r,k,j} + \sigma_t(a_{\alpha_k-r-1,k,j})x + \dots + \sigma_t^{\alpha_k-r}(a_{0,k,j})x^{\alpha_k-r}$ polinomları $C_{k,j}^\perp$ skew σ_t - $\lambda_{k,j}^{-1}$ constacyclic kodların üreteç polinomları olmak üzere $\Psi_k(C_k^\perp) = \langle \xi_1 f_{k,1}^*(x) + \dots + \xi_{k+1} f_{k,k+1}^*(x) \rangle$ ve $|C_k^\perp| = q^{\sum_{j=1}^{k+1} \text{der}(g_{k,j}(x))}$ dir (Kong vd., 2023).

BÖLÜM 3

$F_q B$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR, GRAY GÖRÜNTÜLERİ ve DUALLERİ

Bu bölümde, F_q sonlu bir cisim, $B = F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ bir halka ailesi olmak üzere yeni bir $\Delta = F_q B$ alfabesi oluşturulmuştur. Δ -lineer kodu ve bu alfabe üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlar ve özellikleri incelenmiştir. Bu kodların dualleri belirlenmiş ve ayrılabilir kod kavramı verilmiştir. Bir Gray dönüşüm tanımlanarak skew constacyclic kodların Gray görüntüsü belirlenmiştir.

3.1. Δ -Lineer Kod ve Δ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kod

3.1.1. Önerme:

$\Delta = F_q B = \{(a, b) | a \in F_q, b \in B\}$ kümesi, bilinen toplama işlemi ve ϕ , herhangi bir $s = m + vl + v^2n \in B$ için

$$\phi: B \rightarrow F_q$$

$$m + vl + v^2n \mapsto m$$

biçiminde verilen bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$.: B \times \Delta \rightarrow \Delta$$

$$(s, (a, b)) \mapsto s.(a, b) = (\phi(s)a, sb)$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre bir B -modüldür.

Kanıt:

Her $s \in B$ ve her $(a, b), (c, d) \in \Delta$ için

$$+: \Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta$$

$$((a, b), (c, d)) \mapsto (a + c, b + d)$$

$$.: B \times \Delta \longrightarrow \Delta$$

$$(s, (a, b)) \mapsto s.(a, b) = (\phi(s)a, sb)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile Δ 'nın bir B -modül olduğu kolaylıkla görülür.

Bu teoremden yola çıkarak aşağıdaki önerme verilebilir.

3.1.2. Önerme:

$$\Delta_{\alpha_0\gamma} = F_q^{\alpha_0} B^\gamma = \{(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1}) \mid a_i \in F_q, b_j \in B, i = 0, 1, \dots, \alpha_0 - 1, j = 0, 1, \dots, \gamma - 1\}$$

olmak üzere her $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1}), (a'_0, a'_1, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, b'_1, \dots, b'_{\gamma-1}) \in \Delta_{\alpha_0\gamma}$ ve herhangi bir $s \in B$ için

$$+: \Delta_{\alpha_0\gamma} \times \Delta_{\alpha_0\gamma} \longrightarrow \Delta_{\alpha_0\gamma}$$

$$((a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1}), (a'_0, a'_1, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, b'_1, \dots, b'_{\gamma-1}))$$

$$\mapsto (a_0 + a'_0, \dots, a_{\alpha_0-1} + a'_{\alpha_0-1}, b_0 + b'_0, \dots, b_{\gamma-1} + b'_{\gamma-1})$$

şeklinde tanımlı toplama ve

$$.: B \times \Delta_{\alpha_0\gamma} \longrightarrow \Delta_{\alpha_0\gamma}$$

$$(s, (a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1})) \mapsto$$

$$(\phi(s)a_0, \phi(s)a_1, \dots, \phi(s)a_{\alpha_0-1}, sb_0, sb_1, \dots, sb_{\gamma-1})$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre $\Delta_{\alpha_0\gamma}$ bir B -modüldür.

3.1.3. Tanım:

$\Delta_{\alpha_0\gamma}$ nin boş kümeden farklı bir $\mathcal{C}$ alt kümesi, $\Delta_{\alpha_0\gamma}$ nin bir B - alt modülü ise $\mathcal{C}$ 'ye (α_0, γ) uzunluğunda bir $F_q B$ -lineer kod (ya da Δ -lineer) denir.

Bölüm 2, 2.3.3 Tanım da, mertebesi α_0 'ı bölen aşikâr olmayan bir $\sigma_t \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$ olacak şekilde herhangi bir $\lambda_0 \in F_q^*$ birimseli için, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda skew σ_t - λ_0 constacyclic kod tanımı verilmişti. Benzer şekilde Bölüm 2, 2.4.13 Tanım da, mertebesi γ 'yı bölen aşikâr olmayan bir $\Phi \in$

$Aut(B)$ otomorfizması ve $\Phi(\Lambda) = \Lambda$ olacak şekilde herhangi bir $\Lambda \in B^*$ birimseli için B halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda skew Φ - Λ constacyclic kod tanımı verilmişti. Bu durumda Δ üzerinde tanımlı skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic kodu aşağıdaki gibi verilir.

3.1.4. Tanım:

$\sigma_t \in Aut(F_q)$, $ord(\sigma_t) \mid \alpha_0$ ve $\lambda_0 \in F_q^*$ birimseli için $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$ olsun. $\Phi \in Aut(B)$, $ord(\Phi) \mid \gamma$ ve $\Lambda \in B^*$ birimseli için $\Phi(\Lambda) = \Lambda$ olsun. $\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir Δ -lineer kod olmak üzere her $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}$ iken $\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) = (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \Lambda \Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) \in \mathcal{C}$ oluyorsa (α_0, γ) uzunluğundaki $\mathcal{C}$ lineer koduna “skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic kod” adı verilir.

$\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}$ ‘ye skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic shift (skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) sabit devirli öteleme) denir.

Özel olarak bu tanım $\lambda_0 = \Lambda = 1$ ve σ_t, Φ otomorfizmaları aşikâr otomorfizma alınırsa cyclic kod, λ_0, Λ birimsel eleman ve σ_t, Φ otomorfizmaları aşikâr otomorfizma alınırsa constacyclic kod ve $\lambda_0 = \Lambda = 1$ ve σ_t, Φ aşikâr olmayan otomorfizma alınırsa skew cyclic kod tanımı ile çakışır.

3.1.5. Önerme:

$\Gamma = F_q[x, \sigma_t] / \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle \times B[x, \Phi] / \langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ olsun. Herhangi bir $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \Delta_{\alpha_0 \gamma}$ için

$$\begin{aligned} \Omega: \Delta_{\alpha_0 \gamma} &\longrightarrow \Gamma \\ (a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) &\longmapsto (a_0 + a_1 x + \dots + a_{\alpha_0-1} x^{\alpha_0-1} + \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle, b_0 + \dots + b_{\gamma-1} x^{\gamma-1} + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir izomorfizmadır.

Bu dönüşüm yardımıyla $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \Delta_{\alpha_0 \gamma}$ elemanını $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{\alpha_0-1} x^{\alpha_0-1} + \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle$, $b(x) = b_0 + \dots + b_{\gamma-1} x^{\gamma-1} + \langle x^\gamma - \Lambda \rangle$ olmak üzere $(a(x), b(x))$ ile göstereceğiz.

3.1.6. Teorem:

Γ kümesi bilinen toplama ve her $r(x) = r_0 + r_1x + \dots + r_tx^t \in B[x, \Phi]$ ve her $(a(x), b(x)) \in \Gamma$ için $\phi(r(x)) = \phi(r_0) + \phi(r_1)x + \dots + \phi(r_t)x^t \in F_q[x, \sigma_t]$ olmak üzere

$$\cdot : B[x, \Phi] \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

$$(r(x), (a(x), b(x))) \mapsto (\phi(r(x))a(x), r(x)b(x))$$

şeklinde tanımlanan soldan çarpma işlemine göre bir sol $B[x, \Phi]$ -modüldür.

Kanıt:

Her $(a(x), b(x)), (a'(x), b'(x)) \in \Gamma$ ve her $r(x) \in B[x, \Phi]$ için

$$+ : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

$$((a(x), b(x)), (a'(x), b'(x))) \mapsto (a(x) + a'(x), b(x) + b'(x))$$

ve

$$\cdot : B[x, \Phi] \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

$$(r(x), (a(x), b(x))) \mapsto (\phi(r(x))a(x), r(x)b(x))$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile Γ kümesinin bir sol $B[x, \Phi]$ -modül olduğu kolaylıkla görülür.

3.1.7. Teorem:

(α_0, γ) uzunluğunda bir Δ -lineer kodun skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olması için gerek ve yeter koşul $\Omega(\mathcal{C})$ kümesinin Γ 'nin bir sol $B[x, \Phi]$ -alt modülü olmasıdır.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olsun.

Bu durumda $x \cdot (a(x), b(x)) = (\sigma_t(a_0)x + \sigma_t(a_1)x^2 + \dots + \lambda_0\sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \Phi(b_0)x + \Phi(b_1)x^2 + \dots + \Lambda\Phi(b_{\gamma-1})) \in \Omega(\mathcal{C})$ elde edilir. $\mathcal{C}$ 'nin lineerliğinden en az bir $r(x) \in B[x, \Phi]$ için $r(x) \cdot (a(x), b(x)) \in \Omega(\mathcal{C})$ dir.

Tersine $\Omega(\mathcal{C})$, Γ 'nın bir sol $B[x, \Phi]$ -alt modül olsun. Bu durumda $x. (a(x), b(x)) \in \Omega(\mathcal{C})$ olur ki bu da $\mathcal{C}$ kodunun bir skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olduğu anlamına gelir.

3.1.8. Tanım:

$\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir Δ -lineer kod olsun. Herhangi bir $\mathbf{c} = (a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1})$ ve $\mathbf{c}' = (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\gamma-1})$ elemanlarının iç çarpımı

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = \sum_{i=0}^{\alpha_0-1} a_i a'_i + \sum_{j=0}^{\gamma-1} b_j b'_j$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{c}' \in \Delta_{\alpha_0 \gamma} \mid \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 0, \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}$$

biçiminde tanımlı kümeye $\mathcal{C}$ lineer kodunun “*duali*” adı verilir.

Mertebesi α_0 'ı bölen ve $\lambda_0 \in F_q^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\sigma_t \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ile tanımlanabilen F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğundaki bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kodun dualinin skew σ_t - λ_0^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 2, 2.3.5 Önerme de verilmişti.

Mertebesi γ 'yı bölen ve $\Lambda \in B^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\Phi \in \text{Aut}(B)$ otomorfizması ile tanımlanabilen γ uzunluğundaki bir skew Φ - Λ constacyclic kodun dualinin skew Φ - Λ^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 2, 2.4.25 Önerme de verilmişti.

Bu bilgiler kullanılarak skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kodun duali aşağıdaki gibi verilebilir.

3.1.9. Önerme:

m_1 ve m_2 sırasıyla σ_t ve Φ aşikâr olmayan otomorfizmalarının mertebesi olmak üzere $m_1 \mid \alpha_0$, $m_2 \mid \gamma$ ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$, $\Phi(\Lambda) = \Lambda$, $\lambda_0 \in F_q^*$, $\Lambda \in B^*$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ (α_0, γ) uzunluğunda bir Δ -lineer kodu skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod ise $\mathcal{C}^\perp$ lineer kodu (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) -($\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}$)-constacyclic koddur.

Kanıt:

$\mathbf{c} = (a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}$ olsun. Herhangi bir $\mathbf{c}' = (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}^\perp$ için $\tau_{\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}}^{\sigma_t, \Phi}(a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\gamma-1}) = (\lambda_0^{-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a'_0), \dots, \sigma_t(a'_{\alpha_0-2}), \Lambda^{-1} \Phi(b'_{\gamma-1}), \Phi(b'_0), \dots, \Phi(b'_{\gamma-2})) \in \mathcal{C}^\perp$ olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla bunun için

$$\mathbf{c} \cdot \tau_{\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}}^{\sigma_t, \Phi}(\mathbf{c}') = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Yani,

$$(\lambda_0^{-1} a_0 \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}) + a_1 \sigma_t(a'_0) + \dots + a_{\alpha_0-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-2})) + (\Lambda^{-1} b_0 \Phi(b'_{\gamma-1}) + b_1 \Phi(b'_0) + \dots + b_{\gamma-1} \Phi(b'_{\gamma-2})) = 0 \text{ dir.}$$

h_{λ_0}, F_q da λ_0 birimselinin mertebesi ve h_Λ da B de Λ birimselinin mertebesi olsun.

Bu durumda $\lambda_0^{h_{\lambda_0}} = 1$ ve $\Lambda^{h_\Lambda} = 1$ dir. $\varsigma = h_{\lambda_0} \cdot h_\Lambda \cdot \alpha_0 \cdot \gamma$ olsun. $\ddot{O} = h_{\lambda_0} \cdot h_\Lambda \cdot \gamma$ ve $K = h_{\lambda_0} \cdot h_\Lambda \cdot \alpha_0$ alalım. Herhangi bir $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ için $\mathcal{C}$ skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olduğundan, $(\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi})^{\varsigma-1}(\mathbf{c}) = (\lambda_0^{\ddot{O}} \sigma_t^{\varsigma-1}(a_1), \dots, \lambda_0^{\ddot{O}} \sigma_t^{\varsigma-1}(a_{\alpha_0-1}), \lambda_0^{\ddot{O}-1} \sigma_t^{\varsigma-1}(a_0),$

$\Lambda^K \Phi^{\varsigma-1}(b_1), \dots, \Lambda^K \Phi^{\varsigma-1}(b_{\gamma-1}), \Lambda^{K-1} \Phi^{\varsigma-1}(b_0)) \in \mathcal{C}$ dir. Dolayısıyla

$$(\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi})^{\varsigma-1}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}' = (\sigma_t^{\varsigma-1}(a_1) a'_0 + \sigma_t^{\varsigma-1}(a_2) a'_1 + \dots + \sigma_t^{\varsigma-1}(a_{\alpha_0-1}) a'_{\alpha_0-2} + \lambda_0^{-1} \sigma_t^{\varsigma-1}(a_0) a'_{\alpha_0-1}) + (\Phi^{\varsigma-1}(b_1) b'_0 + \Phi^{\varsigma-1}(b_2) b'_1 + \dots + \Phi^{\varsigma-1}(b_{\gamma-1}) b'_{\gamma-2} + \Lambda^{-1} \Phi^{\varsigma-1}(b_0) b'_{\gamma-1}) = 0 \text{ dir. Diğer bir deyişle;}$$

$$(\lambda_0^{-1} \sigma_t^{\varsigma-1}(a_0) a'_{\alpha_0-1} + \sigma_t^{\varsigma-1}(a_1) a'_0 + \sigma_t^{\varsigma-1}(a_2) a'_1 + \dots + \sigma_t^{\varsigma-1}(a_{\alpha_0-1}) a'_{\alpha_0-2}) + (\Lambda^{-1} \Phi^{\varsigma-1}(b_0) b'_{\gamma-1} + \Phi^{\varsigma-1}(b_1) b'_0 + \Phi^{\varsigma-1}(b_2) b'_1 + \dots + \Phi^{\varsigma-1}(b_{\gamma-1}) b'_{\gamma-2}) = 0 \text{ dir.}$$

$m_1 \mid \alpha_0, m_2 \mid \gamma$ olduğundan bu durumda σ_t^ς ve Φ^ς aşikâr otomorfizmadır. Ayrıca $\Phi \mid_{F_q} = \sigma_t$ dir. Yukarıdaki denklemde her iki tarafa Φ uygulanırsa, $(\lambda_0^{-1} a_0 \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}) + a_1 \sigma_t(a'_0) + \dots + a_{\alpha_0-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-2})) + (\Lambda^{-1} b_0 \Phi(b'_{\gamma-1}) + b_1 \Phi(b'_0) + \dots + b_{\gamma-1} \Phi(b'_{\gamma-2})) = 0$ elde edilir. Yani $\mathbf{c} \cdot \tau_{\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}}^{\sigma_t, \Phi}(\mathbf{c}') = 0$ dır. Dolayısıyla $\tau_{\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}}^{\sigma_t, \Phi}(\mathbf{c}') \in \mathcal{C}^\perp$ olur. Bu durumda $\mathcal{C}^\perp(\alpha_0, \gamma)$ uzunluğunda skew (σ_t, Φ) -($\lambda_0^{-1}, \Lambda^{-1}$) constacyclic koddur.

Skew constacyclic kodun yapısını daha iyi anlamak için Lemma 2.4.5, Önerme 2.4.15 ve Önerme 2.4.24 ü hatırlayalım.

3.1.10. Tanım:

C bir Δ -lineer kod olsun. C , α_0 uzunluğunda F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı bir kod ve D , γ uzunluğunda B halka ailesi üzerinde tanımlı bir kod olmak üzere $\mathcal{C} = C \otimes D$ ise $\mathcal{C}$ koduna “ayrılabilir kod” denir.

3.1.11. Teorem:

C ve D sırasıyla F_q ve B üzerinde tanımlı α_0 ve γ uzunluklarında lineer kodlar olmak üzere $\mathcal{C} = C \otimes D$, (α_0, γ) uzunluğunda bir Δ -lineer kod olsun. $\mathcal{C}$ lineer kodunun skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul C ’nin F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve D kodunun B sonlu halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda bir skew Φ - Λ constacyclic kod olmasıdır.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olsun. $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}) \in C$ ve $(b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in D$ olmak üzere herhangi bir $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}$ elemanı alınsın. $\mathcal{C}$ skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olduğundan $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \Lambda \Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) \in \mathcal{C}$ dir. Dolayısıyla $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2})) \in C$ ve $(\Lambda \Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) \in D$ elde edilir. Bu durumda C lineer kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve D lineer kodunun B sonlu halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda bir skew Φ - Λ constacyclic koddur.

Tersine C , F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve D , B sonlu halka ailesi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda bir skew Φ - Λ constacyclic kod olsun. $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}) \in C$ ve $(b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in D$ olmak üzere $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}$ olsun. C , F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod olduğundan $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2})) \in C$ dir. Benzer şekilde D , B sonlu halka ailesi üzerinde tanımlı bir skew Φ - Λ constacyclic kod olduğundan $(\Lambda \Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) \in D$ ’dir. O halde $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots,$

$\sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \Lambda\Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) \in \mathcal{C}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic koddur.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki verilebilir.

3.1.11. Sonuç:

$\mathcal{C}$ bir Δ -lineer ayrılabilir kod olsun. $\mathcal{C}$ kodunun (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{C}$ kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda skew σ_t - λ_0 constacyclic kod olması ve $\Lambda = \lambda_1 e_0 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 \in B^*$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için D_i 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı γ uzunluğunda skew σ_t - λ_i constacyclic kod olmasıdır.

3.2. Gray Dönüşüm

3.2.1. Tanım:

ψ dönüşümü 2.4.6 Tanımdaki gibi olmak üzere herhangi bir $(a, b) \in \Delta$ elemanı için

$$\begin{aligned} \varphi: \Delta &\longrightarrow F_q^4 \\ (a, b) &\longmapsto (a, \psi(b)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir.

Bu dönüşüm $\Delta_{\alpha_0\gamma}$ üzerine genişletilecek olursa, $j = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ için $b_j = x_j e_0 + y_j e_1 + z_j e_2$ olmak üzere

$$\varphi: \Delta_{\alpha_0\gamma} \longrightarrow F_q^{\alpha_0+3\gamma}$$

$$(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, x_0, \dots, x_{\gamma-1}, y_0, \dots, y_{\gamma-1}, z_0, \dots, z_{\gamma-1})$$

şeklindedir.

3.2.2. Tanım:

$w_H, F_q^{\alpha_0}$ üzerinde tanımlı Hamming ağırlık ve w_G, B^γ üzerinde tanımlı Gray ağırlık olmak üzere herhangi bir $\mathbf{c} = (a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \mathcal{C}$ kod sözcüğünün Gray ağırlığı

$$w_G(\mathbf{c}) = w_H(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}) + w_G(b_0, \dots, b_{\gamma-1})$$

şeklinde tanımlanır.

$\forall \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{C}$ için $d_G(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = w_G(\mathbf{c} - \mathbf{c}') = w_H(\varphi(\mathbf{c} - \mathbf{c}'))$ şeklinde tanımlanan d_G fonksiyonuna “Gray uzaklık” denir. $\mathbf{C}$ kodunun minimum Gray uzaklığı ise

$$d_G(\mathbf{C}) = \min\{d_G(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \mid \forall \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{C}, \mathbf{c} \neq \mathbf{c}'\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2.3. Önerme:

φ Gray dönüşümü uzaklık koruyan, F_q -lineer bir dönüşümdür.

Kanıt:

$\mathbf{r}' = x'_0 e_0 + x'_1 e_1 + x'_2 e_2$, $\mathbf{r}'' = x''_0 e_0 + x''_1 e_1 + x''_2 e_2 \in B^\gamma$ ve $\beta \in F_q$ olmak üzere $\mathbf{c}' = (\mathbf{b}', \mathbf{r}')$, $\mathbf{c}'' = (\mathbf{b}'', \mathbf{r}'') \in \Delta_{\alpha_0 \gamma}$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{c}' + \mathbf{c}'') &= (\mathbf{b}' + \mathbf{b}'', x'_0 + x''_0, x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2) \\ &= (\mathbf{b}', x'_0, x'_1, x'_2) + (\mathbf{b}'', x''_0, x''_1, x''_2) \\ &= \varphi(\mathbf{c}') + \varphi(\mathbf{c}''), \text{ ve} \\ \varphi(\beta \mathbf{c}') &= (\beta \mathbf{b}', \beta x'_0, \beta x'_1, \beta x'_2) \\ &= \beta(\mathbf{b}', x'_0, x'_1, x'_2) \\ &= \beta \varphi(\mathbf{c}') \end{aligned}$$

olduğundan φ F_q -lineer bir dönüşümdür.

φ 'nin bir F_q -lineer dönüşüm olduğunu kullanarak her $\mathbf{c}', \mathbf{c}'' \in \Delta_{\alpha_0 \gamma}$ için $d_G(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') = w_G(\mathbf{c}' - \mathbf{c}'') = w_H(\varphi(\mathbf{c}') - \varphi(\mathbf{c}'')) = d_H(\varphi(\mathbf{c}'), \varphi(\mathbf{c}''))$ elde edilir. Dolayısıyla φ uzaklık koruyan bir dönüşümdür.

3.2.4. Önerme:

$\mathbf{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda d_G minimum uzaklıklı bir Δ -lineer kod olsun. Bu durumda $\varphi(\mathbf{C})$, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı bir $[\alpha_0 + 3\gamma, k, d_G = d_H]$ koddur.

3.2.5. Tanım:

$i = 1, 2, \dots, k_1$ için $\mathbf{a}_i \in F_q^\alpha$ ve $j = 1, 2, \dots, k_2$ için $\mathbf{b}_j \in F_q^\beta$ olmak üzere $\omega = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{k_2}) \in F_q^{\alpha k_1} F_q^{\beta k_2} = \Xi$ olsun.

$$\eta: \Xi \rightarrow \Xi$$

$$\omega \mapsto \left(\tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_1), \tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_2), \dots, \tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_{k_1}), \tau_{\lambda_1}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_1), \tau_{\lambda_2}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_2), \dots, \tau_{\lambda_{k_2}}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_{k_2}) \right)$$

dönüşümü tanımlansın. E , $(\alpha k_1, \beta k_2)$ uzunluğunda $F_q^{\alpha k_1} F_q^{\beta k_2}$ üzerinde tanımlı bir kod ve $\eta(E) = E$ ise $i = 1, 2, \dots, k_2$ olmak üzere bu koda (k_1, k_2) indeksli “genelleştirilmiş mix skew quasi (σ_t, σ_t) -(λ_0, λ_i) constacyclic kod” denir.

Eğer $k_1 = k_2$ ise, E koduna $i = 1, 2, \dots, k_2$ olmak üzere indeksi (k_1, k_2) olan mix skew quasi (σ_t, σ_t) -(λ_0, λ_i) constacyclic kod denir (Dinh vd, 2023).

3.2.6. Önerme:

φ Gray dönüşüm, $\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}$, $\Delta_{\alpha_0 \gamma}$ de skew (σ_t, Φ) -(λ_0, Λ) constacyclic shift, η yukarıdaki gibi bir dönüşüm ve $\Lambda = \lambda_1 e_0 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 \in B^*$ olsun. Bu durumda $\varphi \tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi} = \eta \varphi$ eşitliği sağlanır.

Kanıt:

$i = 0, 1, 2, \dots, \gamma - 1$ için $b_i = x_i e_0 + y_i e_1 + z_i e_2$ olmak üzere $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \in \Delta_{\alpha_0 \gamma}$ olsun.

$$\varphi \left(\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1}) \right) = \varphi(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}),$$

$$\lambda_0 \Lambda \Phi(b_{\gamma-1}), \Phi(b_0), \dots, \Phi(b_{\gamma-2})) = (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}),$$

$$\lambda_1 \sigma_t(x_{\gamma-1}), \dots, \sigma_t(x_{\gamma-2}), \lambda_2 \sigma_t(y_{\gamma-1}), \dots, \sigma_t(y_{\gamma-2}), \lambda_3 \sigma_t(z_{\gamma-1}), \dots, \sigma_t(z_{\gamma-2})) \dots (1)$$

$$\eta(\varphi(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\gamma-1})) = \eta(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, x_0, \dots, x_{\gamma-1}, y_0, \dots, y_{\gamma-1}, z_0, \dots, z_{\gamma-1})$$

$$= (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_1 \sigma_t(x_{\gamma-1}), \sigma_t(x_0), \dots, \sigma_t(x_{\gamma-2}), \lambda_2 \sigma_t(y_{\gamma-1}),$$

$$\sigma_t(y_0), \dots, \sigma_t(y_{\gamma-2}), \lambda_3 \sigma_t(z_{\gamma-1}), \sigma_t(z_0), \dots, \sigma_t(z_{\gamma-2})) \dots (2)$$

$$(1) = (2) \text{ olduğundan, } \varphi \tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi} = \eta \varphi \text{ dir.}$$

3.2.7. Teorem:

$\Lambda = \lambda_1 e_0 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_2 \in B^*$ olmak üzere $\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic kod ise $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\varphi(\mathcal{C})$, indeksi $(1, 3)$ olan bir genelleştirilmiş mix skew quasi (σ_t, σ_t) - (λ_0, λ_i) constacyclic koddur.

Özel olarak $\alpha_0 = \gamma$ ise (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic kodun Gray dönüşüm altındaki görüntüsü $i = 1, 2, 3$ olmak üzere indeksi $(1, 3)$ olan mix skew quasi (σ_t, σ_t) - (λ_0, λ_i) constacyclic kod olur.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, (α_0, γ) uzunluğunda bir skew (σ_t, Φ) - (λ_0, Λ) constacyclic kod olsun. Yani $\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ dir. $\varphi(\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}(\mathcal{C})) = \varphi(\mathcal{C})$ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.2.6 kullanılırsa $\varphi(\tau_{\lambda_0, \Lambda}^{\sigma_t, \Phi}(\mathcal{C})) = \eta(\varphi(\mathcal{C})) = \varphi(\mathcal{C})$ elde edilir. Dolayısıyla $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\varphi(\mathcal{C})$, indeksi $(1, 3)$ olan genelleştirilmiş mix skew quasi (σ_t, σ_t) - (λ_0, λ_i) constacyclic koddur.

BÖLÜM 4

$F_q R_1 R_2$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR, GRAY GÖRÜNTÜLERİ ve DUALLERİ

Bu bölümde, $R_0 = F_q$ sonlu bir cisim, $\beta_1, \beta_2 \in F_q^*$ için $u_1^2 = \beta_1 u_1$ olmak üzere $R_1 = F_q + u_1 F_q$ ve $u_1^2 = \beta_1 u_1$, $u_2^2 = \beta_2 u_2$, $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$ olmak üzere $R_2 = F_q + u_1 F_q + u_2 F_q$ halka aileleri olmak üzere yeni bir $F_q R_1 R_2$ alfabesi oluşturulmuştur. $F_q R_1 R_2$ -lineer kodu ve bu alfabe üzerinde tanımlı skew constacyclic kodlar çalışılmıştır. Bu kodların dualleri belirlenmiş ve ayrılabilir kod kavramı verilmiştir. Bir Gray dönüşümü tanımlanarak skew constacyclic kodların Gray görüntüsü belirlenmiştir.

4.1. $F_q R_1 R_2$ -Lineer Kod ve $F_q R_1 R_2$ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kod

4.1.1. Önerme:

$F_q R_1 R_2 = \{(a, b, c) | a \in F_q, b \in R_1, c \in R_2\}$ kümesi, bilinen toplama ve herhangi bir $r = x + yu_1 + zu_2 \in R_2$ için

$$\phi_0: R_2 \rightarrow F_q$$

$$x + yu_1 + zu_2 \mapsto x$$

ve

$$\phi_1: R_2 \rightarrow R_1$$

$$x + yu_1 + zu_2 \mapsto x + yu_1$$

biçiminde verilen iki lineer dönüşüm olmak üzere

$$\cdot: R_2 \times F_q R_1 R_2 \rightarrow F_q R_1 R_2$$

$$(r, (a, b, c)) \mapsto (\phi_0(r)a, \phi_1(r)b, rc)$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre bir R_2 -modüldür.

Kanıt:

$$\forall (a, b, c), (a', b', c') \in F_q R_1 R_2, \forall r \in R_2 \text{ için}$$

$$+: F_q R_1 R_2 \times F_q R_1 R_2 \rightarrow F_q R_1 R_2$$

$$((a, b, c), (a', b', c')) \mapsto (a + a', b + b', c + c')$$

$$\therefore R_2 \times F_q R_1 R_2 \rightarrow F_q R_1 R_2$$

$$(r, (a, b, c)) \mapsto (\phi_0(r)a, \phi_1(r)b, rc)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile $F_q R_1 R_2$ 'nin bir R_2 -modül olduğu kolaylıkla görülür.

4.1.2. Önerme:

$F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} = \{(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}) \mid a_i \in F_q, b_j \in R_1, c_z \in R_2 \mid i = 0, 1, \dots, \alpha_0 - 1, j = 0, 1, \dots, \alpha_1 - 1, z = 0, 1, \dots, \alpha_2 - 1\}$ olmak üzere her $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}, (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\alpha_1-1}, c'_0, \dots, c'_{\alpha_2-1}) \in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ ve herhangi bir $r \in R_2$ için

$$+: F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \times F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \rightarrow F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$$

$$\begin{aligned} &((a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}), (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\alpha_1-1}, c'_0, \dots, c'_{\alpha_2-1})) \\ &\mapsto (a_0 + a'_0, \dots, a_{\alpha_0-1} + a'_{\alpha_0-1}, b_0 + b'_0, \dots, b_{\alpha_1-1} + b'_{\alpha_1-1}, c_0 + c'_0, \dots, c_{\alpha_2-1} + c'_{\alpha_2-1}) \end{aligned}$$

ve

$$\therefore R_2 \times F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \rightarrow F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$$

$$\begin{aligned} &(r, (a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1})) \\ &\mapsto ((\phi_0(r)a_0, \dots, \phi_0(r)a_{\alpha_0-1}, \phi_1(r)b_0, \dots, \phi_1(r)b_{\alpha_1-1}, rc_0, \dots, rc_{\alpha_2-1})) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre $F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ bir R_2 -modüldür.

4.1.3. Tanım:

$F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$,nin boş kümeden farklı bir $\mathcal{C}$ alt kümesi, $F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$,nin bir R_2 -alt modülü ise $\mathcal{C}$ 'ye $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir “ $F_q R_1 R_2$ -lineer kod” denir.

Bölüm 2, 2.3.3 Tanım da verilen mertebesi α_0 'ı bölen aşikâr olmayan bir $\sigma_t \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$ olacak şekildeki herhangi bir $\lambda_0 \in F_q^*$ birimseli için, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda skew σ_t - λ_0 constacyclic kod tanımı ve Bölüm 2, 2.5.14 Tanım da verilen mertebesi α_k 'yı bölen aşikâr olmayan bir $\delta_k \in \text{Aut}(R_k)$ otomorfizması ve $\delta_k(\lambda_k) = \lambda_k$ olacak şekildeki herhangi bir $\lambda_k \in R_k^*$ birimseli için R_k halka ailesi üzerinde tanımlı skew δ_k - λ_k constacyclic kod tanımları kullanılarak $F_q R_1 R_2$ üzerinde tanımlı skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod aşağıdaki şekilde verilir.

4.1.4. Tanım:

$\sigma_t \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizmasının mertebesi t olmak üzere $t \mid \alpha_0$, $\lambda_0 \in F_q^*$ birimsel elemanı için $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0$, $\delta_1 \in \text{Aut}(R_1)$ otomorfizmasının mertebesi b olmak üzere $b \mid \alpha_1$, $\lambda_1 \in R_1^*$ birimsel elemanı için $\delta_1(\lambda_1) = \lambda_1$ ve $\delta_2 \in \text{Aut}(R_2)$ otomorfizmasının mertebesi m olmak üzere $m \mid \alpha_2$, $\lambda_2 \in R_2^*$ birimsel elemanı için $\delta_2(\lambda_2) = \lambda_2$ olsun. $\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kod olmak üzere her $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in \mathcal{C}$ iken $\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}) = (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2}), \lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \in \mathcal{C}$ oluyorsa $\mathcal{C}$ lineer koduna “skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod” adı verilir.

$\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}$ ye skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic shift (çarpık $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) sabit devirli öteleme) denir.

Özel olarak bu kod $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\sigma_t, \delta_1, \delta_2$ otomorfizmaları aşikâr otomorfizma alınırsa cyclic, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ birimsel eleman, $\sigma_t, \delta_1, \delta_2$ aşikâr otomorfizma alınırsa constacyclic, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\sigma_t, \delta_1, \delta_2$ aşikâr olmayan otomorfizma alınırsa skew cyclic kod tanımı ile çakışır.

4.1.5. Önerme:

$\chi = F_q[x, \sigma_t]/\langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle \times R_1[x, \delta_1]/\langle x^{\alpha_1} - \lambda_1 \rangle \times R_2[x, \delta_2]/\langle x^{\alpha_2} - \lambda_2 \rangle$ olsun.

$$\varphi: F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \rightarrow \chi$$

$$(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1}) \mapsto (a_0 + a_1x + \dots + a_{\alpha_0-1}x^{\alpha_0-1} + \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle, b_0 + b_1x + \dots + b_{\alpha_1-1}x^{\alpha_1-1} + \langle x^{\alpha_1} - \lambda_1 \rangle, c_0 + c_1x + \dots + c_{\alpha_2-1}x^{\alpha_2-1} + \langle x^{\alpha_2} - \lambda_2 \rangle)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır.

Bu dönüşüm yardımıyla $(a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1})$ elemanını $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{\alpha_0-1}x^{\alpha_0-1} + \langle x^{\alpha_0} - \lambda_0 \rangle$, $b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{\alpha_1-1}x^{\alpha_1-1} + \langle x^{\alpha_1} - \lambda_1 \rangle$, $c(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{\alpha_2-1}x^{\alpha_2-1} + \langle x^{\alpha_2} - \lambda_2 \rangle$ olmak üzere $(a(x), b(x), c(x))$ ile göstereceğiz.

4.1.6. Teorem:

χ kümesi bilinen toplama ve her $r(x) = r_0 + r_1x + \dots + r_tx^t \in R_2[x, \delta_2]$, her $(a(x), b(x), c(x)) \in \chi$ ve $v = 0, 1$, $\sigma_t = \delta_0$ için $\phi_v(r(x)) = \phi_v(r_0) + \phi_v(r_1)x + \dots + \phi_v(r_t)x^t \in R_v[x, \delta_v]$ olmak üzere

$$\therefore R_2 \times \chi \rightarrow \chi$$

$$(r(x), (a(x), b(x), c(x))) \mapsto (\phi_0(r(x))a(x), \phi_1(r(x))b(x), r(x)c(x))$$

şeklinde tanımlanan soldan çarpma işlemine göre bir sol $R_2[x, \delta_2]$ -modüldür.

Kanıt:

Her $(a(x), b(x), c(x)), (a'(x), b'(x), c'(x)) \in \chi$ ve her $r(x) \in R_2[x, \delta_2]$ için

$$+: \chi \times \chi \rightarrow \chi$$

$$((a(x), b(x), c(x)), (a'(x), b'(x), c'(x)))$$

$$\mapsto (a(x) + a'(x), b(x) + b'(x), c(x) + c'(x))$$

$$\therefore R_2 \times \chi \rightarrow \chi$$

$$(r(x), (a(x), b(x), c(x))) \mapsto (\phi_0(r(x))a(x), \phi_1(r(x))b(x), r(x)c(x))$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile χ kümesinin bir sol $R_2[x, \delta_2]$ -modül olduğu kolaylıkla görülür.

4.1.7. Teorem:

$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kodun skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ constacyclic kod olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\mathcal{C})$ kümesinin χ 'nin bir sol $R_2[x, \delta_2]$ -alt modül olmasıdır.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ constacyclic kod olsun. Bu durumda

$x. (a(x), b(x), c(x)) = (\sigma_t(a_0)x + \sigma_t(a_1)x^2 + \dots + \lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \delta_1(b_0)x + \delta_1(b_1)x^2 + \dots + \lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_2(c_0)x + \delta_2(c_1)x^2 + \dots + \lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1})) \in \varphi(\mathcal{C})$ elde edilir. $\mathcal{C}$ 'nin lineerliğinden $\forall r(x) \in R_2[x, \delta_2]$ için $r(x). (a(x), b(x), c(x)) \in \varphi(\mathcal{C})$ 'dir.

Tersine $\varphi(\mathcal{C})$, χ 'nin bir sol $R_2[x, \delta_2]$ -alt modülü olsun. Bu durumda $x. (a(x), b(x), c(x)) \in \varphi(\mathcal{C})$ olur ki bu da $\mathcal{C}$ kodunun bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ constacyclic kod olduğu anlamına gelir.

4.1.8. Tanım:

$\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kod olsun. Herhangi $\mathbf{c} = (a_0, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, \dots, c_{\alpha_2-1})$ ve $\mathbf{c}' = (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\alpha_1-1}, c'_0, \dots, c'_{\alpha_2-1})$ elemanlarının iç çarpımı

$$\mathbf{c}\mathbf{c}' = \sum_{i=0}^{\alpha_0-1} a_i a'_i + \sum_{j=0}^{\alpha_1-1} b_j b'_j + \sum_{e=0}^{\alpha_2-1} c_e c'_e$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\mathcal{C}^\perp = \{\mathbf{c}' \in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \mid \mathbf{c}\mathbf{c}' = 0, \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}$$

kümesine $\mathcal{C}$ lineer kodunun “*duali*” adı verilir.

Mertebesi α_0 'ı bölen ve $\lambda_0 \in F_q^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\sigma_t \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ile tanımlanabilen F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğundaki bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kodun dualinin de bir skew σ_t - λ_0^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 2, 2.3.5 Önerme de verildi. Mertebesi α_k 'yı bölen ve $\lambda_k \in R_k^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\delta_k \in \text{Aut}(R_k)$

otomorfizması ile tanımlanabilen R_k halka ailesi üzerinde tanımlı α_k uzunluğundaki bir skew δ_k - λ_k constacyclic kodun dualinin de bir skew δ_k - λ_k^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 2, 2.5.22 Teorem de verildi.

Bu bilgiler kullanılarak skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ constacyclic kodun duali aşağıdaki gibi verilebilir.

4.1.9. Önerme:

n_0, n_1, n_2 sırasıyla $\sigma_t, \delta_1, \delta_2$ aşikâr olmayan otomorfizmalarının mertebesi olmak üzere $n_0 \mid \alpha_0, n_1 \mid \alpha_1, n_2 \mid \alpha_2$ ve $\sigma_t(\lambda_0) = \lambda_0, \delta_1(\lambda_1) = \lambda_1, \delta_2(\lambda_2) = \lambda_2, \lambda_0 \in F_q^*, k = 1, 2$ için $\lambda_k \in R_k^*$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kodu skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ constacyclic kod ise $\mathcal{C}^\perp$ lineer kodu $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ - $(\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$ constacyclic koddur.

Kanıt:

Herhangi bir $\mathbf{c} = (a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in \mathcal{C}$ olsun.

Her $\mathbf{c}' = (a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\alpha_1-1}, c'_0, \dots, c'_{\alpha_2-1}) \in \mathcal{C}^\perp$ için

$$\tau_{\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(a'_0, \dots, a'_{\alpha_0-1}, b'_0, \dots, b'_{\alpha_1-1}, c'_0, \dots, c'_{\alpha_2-1}) = (\lambda_0^{-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a'_0), \dots, \sigma_t(a'_{\alpha_0-2}), \lambda_1^{-1} \delta_1(b'_{\alpha_1-1}), \delta_1(b'_0), \dots, \delta_1(b'_{\alpha_1-2}), \lambda_2^{-1} \delta_2(c'_{\alpha_2-1}), \delta_2(c'_0), \dots, \delta_2(c'_{\alpha_2-2})) \in \mathcal{C}^\perp$$

olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla bunun için

$$\mathbf{c} \tau_{\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(\mathbf{c}') = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Yani,

$$\begin{aligned} & [\lambda_0^{-1} a_0 \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}) + a_1 \sigma_t(a'_0) + \dots + a_{\alpha_0-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-2})] + \\ & [\lambda_1^{-1} b_0 \delta_1(b'_{\alpha_1-1}) + b_1 \delta_1(b'_0) + \dots + b_{\alpha_1-1} \delta_1(b'_{\alpha_1-2})] + \\ & [\lambda_2^{-1} c_0 \delta_2(c'_{\alpha_2-1}) + c_1 \delta_2(c'_0) + \dots + c_{\alpha_2-1} \delta_2(c'_{\alpha_2-2})] = 0. \end{aligned}$$

h_{λ_0}, F_q 'da λ_0 birimselinin mertebesi, h_{λ_1}, R_1 'de λ_1 birimselinin mertebesi ve h_{λ_2}, R_2 'de λ_2 birimselinin mertebesi olsun. Bu durumda $\lambda_0^{h_{\lambda_0}} = 1, \lambda_1^{h_{\lambda_1}} = 1$ ve $\lambda_2^{h_{\lambda_2}} = 1$ 'dir.

$l = h_{\lambda_0} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$ olsun. $K = h_{\lambda_0} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \alpha_1 \alpha_2$, $N = h_{\lambda_0} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \alpha_0 \alpha_2$, $M = h_{\lambda_0} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \alpha_0 \alpha_1$ alalım. Herhangi bir $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ için $\mathbf{C}$ skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olduğu için

$$(\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2})^{l-1}(\mathbf{c}) = (\lambda_0^K \sigma_t^{l-1}(a_1), \dots, \lambda_0^K \sigma_t^{l-1}(a_{\alpha_0-1}), \lambda_0^{K-1} \sigma_t^{l-1}(a_0), \lambda_1^N \delta_1^{l-1}(b_1), \dots, \lambda_1^N \delta_1^{l-1}(b_{\alpha_1-1}), \lambda_1^{N-1} \delta_1^{l-1}(b_0), \lambda_2^M \delta_2^{l-1}(c_1), \dots, \lambda_2^M \delta_2^{l-1}(c_{\alpha_2-1}), \lambda_2^{M-1} \delta_2^{l-1}(c_0)) \in \mathbf{C} \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} (\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2})^{l-1}(\mathbf{c})\mathbf{c}' &= [\sigma_t^{l-1}(a_1)a'_0 + \sigma_t^{l-1}(a_2)a'_1 + \dots + \sigma_t^{l-1}(a_{\alpha_0-1})a'_{\alpha_0-2} + \\ &\lambda_0^{-1} \sigma_t^{l-1}(a_0)a'_{\alpha_0-1}] + [\delta_1^{l-1}(b_1)b'_0 + \delta_1^{l-1}(b_2)b'_1 + \dots + \delta_1^{l-1}(b_{\alpha_1-1})b'_{\alpha_1-2} + \\ &\lambda_1^{-1} \delta_1^{l-1}(b_0)b'_{\alpha_1-1}] + [\delta_2^{l-1}(c_1)c'_0 + \delta_2^{l-1}(c_2)c'_1 + \dots + \delta_2^{l-1}(c_{\alpha_2-1})c'_{\alpha_2-2} + \\ &\lambda_2^{-1} \delta_2^{l-1}(c_0)c'_{\alpha_2-1}] = 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Başka bir deyişle

$$\begin{aligned} &[\lambda_0^{-1} \sigma_t^{l-1}(a_0)a'_{\alpha_0-1} + \sigma_t^{l-1}(a_1)a'_0 + \sigma_t^{l-1}(a_2)a'_1 + \dots + \sigma_t^{l-1}(a_{\alpha_0-1})a'_{\alpha_0-2}] + \\ &[\lambda_1^{-1} \delta_1^{l-1}(b_0)b'_{\alpha_1-1} + \delta_1^{l-1}(b_1)b'_0 + \delta_1^{l-1}(b_2)b'_1 + \dots + \delta_1^{l-1}(b_{\alpha_1-1})b'_{\alpha_1-2}] + \\ &[\lambda_2^{-1} \delta_2^{l-1}(c_0)c'_{\alpha_2-1} + \delta_2^{l-1}(c_1)c'_0 + \delta_2^{l-1}(c_2)c'_1 + \dots + \delta_2^{l-1}(c_{\alpha_2-1})c'_{\alpha_2-2}] = 0 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$n_0 \mid \alpha_0$, $n_1 \mid \alpha_1$, $n_2 \mid \alpha_2$ olduğundan bu durumda σ_t^l , δ_1^l ve δ_2^l aşikâr otomorfizmalardır.

Ayrıca $\delta_2 \mid_{F_q} = \sigma_t$ ve $\delta_2 \mid_{R_1} = \delta_1$ dir. Yukarıdaki denklemde her iki tarafa δ_2 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &[\lambda_0^{-1} a_0 \sigma_t(a'_{\alpha_0-1}) + a_1 \sigma_t(a'_0) + \dots + a_{\alpha_0-1} \sigma_t(a'_{\alpha_0-2})] + [\lambda_1^{-1} b_0 \delta_1(b'_{\alpha_1-1}) + b_1 \delta_1(b'_0) \\ &+ \dots + b_{\alpha_1-1} \delta_1(b'_{\alpha_1-2})] + [\lambda_2^{-1} c_0 \delta_2(c'_{\alpha_2-1}) + c_1 \delta_2(c'_0) + \dots + c_{\alpha_2-1} \delta_2(c'_{\alpha_2-2})] = 0 \text{ elde} \\ &\text{edilir. Bu durumda } \mathbf{C}^\perp \text{ lineer kodu } (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \text{ uzunluğunda bir skew } (\sigma_t, \delta_1, \delta_2)\text{-} \\ &(\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}) \text{ constacyclic koddur.} \end{aligned}$$

4.1.10. Tanım:

$\mathbf{C}$, bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kod olsun. B_0 , α_0 uzunluğunda F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı, B_1 , α_1 uzunluğunda R_1 üzerinde tanımlı ve B_2 , α_2 uzunluğunda R_2 üzerinde tanımlı, sırasıyla α_0 , α_1 ve α_2 koordinatları $\mathbf{C}$ kodundan silinerek elde edilen kodlar olmak üzere $\mathbf{C} = B_0 \otimes B_1 \otimes B_2$ ise $\mathbf{C}$ koduna ayrılabilir kod denir.

4.1.11. Teorem:

B_0, B_1, B_2 sırasıyla F_q, R_1, R_2 üzerinde tanımlı $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ uzunluklarında lineer kodlar olmak üzere $\mathcal{C} = B_0 \otimes B_1 \otimes B_2$ kodu $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda $F_q R_1 R_2$ -lineer kod olsun. $\mathcal{C}$ lineer kodunun skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olması için gerek ve yeterli koşul B_0 kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve $u = 1, 2$ için B_u kodunun R_u üzerinde tanımlı α_u uzunluğunda bir skew δ_u - λ_u constacyclic kod olmasıdır.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olsun. $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}) \in B_0$, $(b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}) \in B_1$, $(c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in B_2$ olmak üzere herhangi bir $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in \mathcal{C}$ elemanı için $\mathcal{C}$ skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olduğundan

$(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \delta_1(b_1), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2}), \lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \delta_2(c_1), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \in \mathcal{C}$ dir. Dolayısıyla $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2})) \in B_0$, $(\lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \delta_1(b_1), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2})) \in B_1$, $(\lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \delta_2(c_1), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \in B_2$ dir. Bu nedenle B_0 lineer kodu F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve $u = 1, 2$ için B_u lineer kodu R_u üzerinde tanımlı α_u uzunluğunda bir skew δ_u - λ_u constacyclic koddur.

Tersine B_0, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod ve $u = 1, 2$ için B_u, R_u üzerinde tanımlı α_u uzunluğunda bir skew δ_u - λ_u constacyclic kod olsun. $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}) \in B_0$, $(b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}) \in B_1$, $(c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in B_2$ olmak üzere herhangi bir $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in \mathcal{C}$ için B_0, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod olduğundan $(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2})) \in B_0$ dir. Benzer şekilde $u = 1, 2$ için B_u, R_u üzerinde tanımlı α_u uzunluğunda bir skew δ_u - λ_u constacyclic kod olduğundan $(\lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2})) \in B_1$, $(\lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \in B_2$ dir. O halde

$(\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \delta_1(b_1), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2}), \lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \delta_2(c_1), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \in \mathcal{C}$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olur.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki verilebilir.

4.1.12. Sonuç:

$\mathcal{C}$ bir $F_q R_1 R_2$ -lineer ayrılabilir kod olsun. $\mathcal{C}$ kodunun skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olması için gerek ve yeterli koşul B_0 kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_0 uzunluğunda bir skew σ_t - λ_0 constacyclic kod, $u = 1, 2$ olmak üzere $B_{1,u}$ kodlarının F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_1 uzunluğunda skew σ_t - $\lambda_{1,u}$ constacyclic kod ve $s = 1, 2, 3$ olmak üzere $B_{1,s}$ kodlarının F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı α_2 uzunluğunda skew σ_t - $\lambda_{2,s}$ constacyclic kod olmasıdır.

4.2. Gray Dönüşüm

Bölüm 2, 2.5.4 Önerme de $\xi_1 = \frac{u_1}{\beta_1}$, $\xi_2 = 1 - \frac{u_1}{\beta_1}$ ve $\xi'_1 = \frac{u_1}{\beta_1}$, $\xi'_2 = \frac{u_2}{\beta_2}$, $\xi'_3 = 1 - \frac{u_1}{\beta_1} - \frac{u_2}{\beta_2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_1: R_1 &\rightarrow F_q^2 \\ a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 &\mapsto (a_{1,1}, a_{1,2}) \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2: R_2 &\rightarrow F_q^3 \\ a_{2,1}\xi'_1 + a_{2,2}\xi'_2 + a_{2,3}\xi'_3 &\mapsto (a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşümler verilmişti.

Bu dönüşümler yardımı ile aşağıdaki tanım verilebilir.

4.2.1. Tanım:

Herhangi bir $(a_0, a_1, a_2) \in F_q R_1 R_2$ elemanı için

$$\Phi: F_q R_1 R_2 \rightarrow F_q^6$$

$$(a_0, a_1, a_2) = (a_0, a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2, a_{2,1}\xi'_1 + a_{2,2}\xi'_2 + a_{2,3}\xi'_3) \mapsto (a_0, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3})$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir.

Bu dönüşüm $F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ üzerine genişletilecek olursa, $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,\alpha_0-1}, a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,\alpha_1-1}, a_{2,0}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\alpha_2-1}) \in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ olmak üzere

$$\Phi: F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \rightarrow F_q^{\alpha_0+2\alpha_1+3\alpha_2}$$

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \mapsto (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots, a_{0,\alpha_0-1}, \phi_1(a_{1,0}), \dots, \phi_1(a_{1,\alpha_1-1}), \phi_2(a_{2,0}), \dots, \phi_2(a_{2,\alpha_2-1}))$$

şeklindedir.

4.2.2. Tanım:

w_H, F_q üzerinde tanımlı Hamming ağırlık ve $w_G, R_1^{\alpha_1}$ ve $R_2^{\alpha_2}$ üzerinde tanımlı Gray ağırlık olmak üzere $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in \mathcal{C}$ kod sözcüğünün Gray ağırlığı

$$w_G(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = w_H(\mathbf{a}_0) + w_G(\mathbf{a}_1) + w_G(\mathbf{a}_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Her $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{C}$ için $d_G(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = w_G(\mathbf{a}' - \mathbf{b}') = w_H(\Phi(\mathbf{a}' - \mathbf{b}'))$ şeklinde tanımlanan d_G fonksiyonuna “Gray uzaklık” denir. $\mathcal{C}$ kodunun minimum Gray uzaklığı ise

$$d_G(\mathcal{C}) = \min\{d_G(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \mid \forall \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{C}, \mathbf{a}' \neq \mathbf{b}'\}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.3. Önerme:

Φ Gray dönüşümü uzaklık koruyan, F_q -lineer bir dönüşümdür.

Kanıt:

$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}'_{1,1}\xi_1 + \mathbf{a}'_{1,2}\xi_2, \mathbf{a}''_1 = \mathbf{a}''_{1,1}\xi_1 + \mathbf{a}''_{1,2}\xi_2 \in R_1, \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_{2,1}\xi'_1 + \mathbf{a}'_{2,2}\xi'_2 + \mathbf{a}'_{2,3}\xi'_3, \mathbf{a}''_2 = \mathbf{a}''_{2,1}\xi'_1 + \mathbf{a}''_{2,2}\xi'_2 + \mathbf{a}''_{2,3}\xi'_3 \in R_2$ olmak üzere $\mathbf{y} = (\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2), \mathbf{r} = (\mathbf{a}''_0, \mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2) \in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ ve $\rho \in F_q$ olsun.

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{y} + \mathbf{r}) &= (\mathbf{a}'_0 + \mathbf{a}''_0, \mathbf{a}'_{1,1} + \mathbf{a}''_{1,1}, \mathbf{a}'_{1,2} + \mathbf{a}''_{1,2}, \mathbf{a}'_{2,1} + \mathbf{a}''_{2,1}, \mathbf{a}'_{2,2} + \mathbf{a}''_{2,2}, \mathbf{a}'_{2,3} + \mathbf{a}''_{2,3}) \\ &= (\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_{1,1}, \mathbf{a}'_{1,2}, \mathbf{a}'_{2,1}, \mathbf{a}'_{2,2}, \mathbf{a}'_{2,3}) + (\mathbf{a}''_0, \mathbf{a}''_{1,1}, \mathbf{a}''_{1,2}, \mathbf{a}''_{2,1}, \mathbf{a}''_{2,2}, \mathbf{a}''_{2,3}) \\ &= \Phi(\mathbf{y}) + \Phi(\mathbf{r}) \text{ ve} \end{aligned}$$

$\Phi(\rho\mathbf{y}) = (\rho\mathbf{a}'_0, \rho\mathbf{a}'_{1,1}, \rho\mathbf{a}'_{1,2}, \rho\mathbf{a}'_{2,1}, \rho\mathbf{a}'_{2,2}, \rho\mathbf{a}'_{2,3}) = \rho\Phi(\mathbf{y})$ olduğundan Φ bir F_q -lineer dönüşümdür.

Φ 'nin F_q -lineer dönüşüm olduğunu kullanarak her $\mathbf{y} = (\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2)$, $\mathbf{r} = (\mathbf{a}''_0, \mathbf{a}''_1, \mathbf{a}''_2)$
 $\in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ için $d_G(\mathbf{y}, \mathbf{r}) = w_G(\mathbf{y} - \mathbf{r}) = w_H(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{r})) = d_H(\Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{r}))$ elde edilir, dolayısıyla Φ uzaklık koruyan bir dönüşümdür.

4.2.4. Önerme

$\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda d_G minimum uzaklıklı bir $F_q R_1 R_2$ -lineer kod olsun. Bu durumda $\Phi(\mathcal{C})$, F_q cismi üzerinde tanımlı bir $[\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2, k, d_H = d_G]$ koddur.

4.2.5. Tanım:

$i = 1, 2, \dots, k_1$ için $\mathbf{a}_i \in F_q^{\alpha_0}$, $j = 1, 2, \dots, k_2$ için $\mathbf{b}_j \in F_q^{\alpha_1}$ ve $s = 1, 2, \dots, k_3$ için $\mathbf{c}_s \in F_q^{\alpha_2}$ olmak üzere $\omega = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{k_2}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{k_3}) \in F_q^{\alpha_0 k_1} F_q^{\alpha_1 k_2} F_q^{\alpha_2 k_3} = \Gamma$ olsun. $\mu = (\tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_1), \tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_2), \dots, \tau_{\lambda_0}^{\sigma_t}(\mathbf{a}_{k_1}), \tau_{\lambda_{1,1}}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_1), \tau_{\lambda_{1,2}}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_2), \dots, \tau_{\lambda_{1,k_2}}^{\sigma_t}(\mathbf{b}_{k_2}), \tau_{\lambda_{2,1}}^{\sigma_t}(\mathbf{c}_1), \tau_{\lambda_{2,2}}^{\sigma_t}(\mathbf{c}_2), \dots, \tau_{\lambda_{2,k_3}}^{\sigma_t}(\mathbf{c}_{k_3}))$ olmak üzere

$$\eta: \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$\omega \mapsto \mu$$

dönüşümü tanımlansın. D , $(\alpha_0 k_1, \alpha_1 k_2, \alpha_2 k_3)$ uzunluğunda $F_q^{\alpha_0 k_1} F_q^{\alpha_1 k_2} F_q^{\alpha_2 k_3}$ üzerinde tanımlı bir kod ve $\eta(D) = D$ ise $j = 1, 2, \dots, k_2$, $w = 1, 2, \dots, k_3$ olmak üzere bu koda (k_1, k_2, k_3) indeksli “genelleştirilmiş mix skew quasi $(\sigma_t, \sigma_t, \sigma_t)$ -($\lambda_0, \lambda_{1,j}, \lambda_{2,w}$) constacyclic” kod denir.

Eğer $k_1 = k_2 = k_3$ ise, D koduna $j = 1, 2, \dots, k_2$, $w = 1, 2, \dots, k_3$ olmak üzere indeksi (k_1, k_2, k_3) olan mix skew quasi $(\sigma_t, \sigma_t, \sigma_t)$ -($\lambda_0, \lambda_{1,j}, \lambda_{2,w}$) constacyclic kod denir.

4.2.6. Önerme:

Φ Gray dönüşüm, $\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}$, $F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ de skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic shift, η yukarıdaki gibi bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\Phi \tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2} = \eta \Phi$ eşitliği sağlanır.

Kanıt:

$i = 0, 1, \dots, \alpha_1 - 1$ için $b_i = r_{1,1}^i \xi_1 + r_{1,2}^i \xi_2$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_2 - 1$ için $c_j = r_{2,1}^j \xi'_1 + r_{2,2}^j \xi'_2 + r_{2,3}^j \xi'_3$, $\lambda_1 = \lambda_{1,1} \xi_1 + \lambda_{1,2} \xi_2$ ve $\lambda_2 = \lambda_{2,1} \xi'_1 + \lambda_{2,2} \xi'_2 + \lambda_{2,3} \xi'_3$ olmak üzere $(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1}) \in F_q^{\alpha_0} R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2}$ olsun.

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1})) &= \Phi((\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \\ \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_1 \delta_1(b_{\alpha_1-1}), \delta_1(b_0), \dots, \delta_1(b_{\alpha_1-2}), \lambda_2 \delta_2(c_{\alpha_2-1}), \delta_2(c_0), \dots, \delta_2(c_{\alpha_2-2})) \\ &= (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_{1,1} \sigma_t(r_{1,1}^{\alpha_1-1}), \sigma_t(r_{1,1}^0), \dots, \sigma_t(r_{1,1}^{\alpha_1-2}), \lambda_{1,2} \sigma_t(r_{1,2}^{\alpha_1-1}), \\ \sigma_t(r_{1,2}^0), \dots, \sigma_t(r_{1,2}^{\alpha_1-2}), \lambda_{2,1} \sigma_t(r_{2,1}^{\alpha_2-1}), \sigma_t(r_{2,1}^0), \dots, \sigma_t(r_{2,1}^{\alpha_2-2}), \lambda_{2,2} \sigma_t(r_{2,2}^{\alpha_2-1}), \sigma_t(r_{2,2}^0), \dots, \\ \sigma_t(r_{2,2}^{\alpha_2-2}), \lambda_{2,3} \sigma_t(r_{2,3}^{\alpha_2-1}), \sigma_t(r_{2,3}^0), \dots, \sigma_t(r_{2,3}^{\alpha_2-2})) \dots (1) \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(\Phi(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, b_0, b_1, \dots, b_{\alpha_1-1}, c_0, c_1, \dots, c_{\alpha_2-1})) &= \eta(a_0, a_1, \dots, a_{\alpha_0-1}, r_{1,1}^0, r_{1,1}^1, \\ r_{1,1}^{\alpha_1-1}, r_{1,2}^0, \dots, r_{1,2}^{\alpha_1-1}, r_{2,1}^0, \dots, r_{2,1}^{\alpha_2-1}, r_{2,2}^0, \dots, r_{2,2}^{\alpha_2-1}, r_{2,3}^0, \dots, r_{2,3}^{\alpha_2-1}) &= (\lambda_0 \sigma_t(a_{\alpha_0-1}), \sigma_t(a_0), \\ \dots, \sigma_t(a_{\alpha_0-2}), \lambda_{1,1} \sigma_t(r_{1,1}^{\alpha_1-1}), \sigma_t(r_{1,1}^0), \dots, \sigma_t(r_{1,1}^{\alpha_1-2}), \lambda_{1,2} \sigma_t(r_{1,2}^{\alpha_1-1}), \sigma_t(r_{1,2}^0), \dots, \sigma_t(r_{1,2}^{\alpha_1-2}) \\ , \lambda_{2,1} \sigma_t(r_{2,1}^{\alpha_2-1}), \sigma_t(r_{2,1}^0), \dots, \sigma_t(r_{2,1}^{\alpha_2-2}), \lambda_{2,2} \sigma_t(r_{2,2}^{\alpha_2-1}), \sigma_t(r_{2,2}^0), \dots, \sigma_t(r_{2,2}^{\alpha_2-2}), \lambda_{2,3} \sigma_t(r_{2,3}^{\alpha_2-1}) \\ , \sigma_t(r_{2,3}^0), \dots, \sigma_t(r_{2,3}^{\alpha_2-2})) \dots (2) \end{aligned}$$

(1) = (2) olduğundan, $\Phi \tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2} = \eta \Phi$ dir.

4.2.7. Teorem:

$\lambda_1 = \lambda_{1,1} \xi_1 + \lambda_{1,2} \xi_2 \in R_1^*$ ve $\lambda_2 = \lambda_{2,1} \xi'_1 + \lambda_{2,2} \xi'_2 + \lambda_{2,3} \xi'_3 \in R_2^*$ olmak üzere $\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod ise $\Phi(\mathcal{C})$, indeksi (1,2,3) olan bir genelleştirilmiş mix skew quasi $(\sigma_t, \sigma_t, \sigma_t)$ -($\lambda_0, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \lambda_{2,3}$) constacyclic koddur.

Kanıt:

$\mathcal{C}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ uzunluğunda bir skew $(\sigma_t, \delta_1, \delta_2)$ -($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) constacyclic kod olsun. Yani $\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ dir. $\Phi(\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(\mathcal{C})) = \Phi(\mathcal{C})$ olduğunu biliyoruz. Önerme 4.2.6 kullanılırsa $\Phi(\tau_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2}^{\sigma_t, \delta_1, \delta_2}(\mathcal{C})) = \eta(\Phi(\mathcal{C})) = \Phi(\mathcal{C})$ elde edilir. Dolayısıyla $\Phi(\mathcal{C})$,

indeksi $(1,2,3)$ olan bir genelleştirilmiş mix skew quasi $(\sigma_t, \sigma_t, \sigma_t)$ -
 $(\lambda_0, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \lambda_{2,3})$ constacyclic koddur.



BÖLÜM 5

$F_q S_{q,k}$ ÜZERİNDE TANIMLI SKEW CONSTACYCLIC KODLAR, GRAY GÖRÜNTÜLERİ ve DUALLERİ

5.1. $S_{q,k}$ Halka Ailesi, Cebirsel Yapısı, Üreteç İdempotenleri ve Gray Dönüşüm

Rabia Dertli vd. $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı, $j = 1, 2, \dots, 5$, $i = 3, 4, 5$ ve $i \neq j$ olmak üzere $S_{q,5} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_5] / \langle w_j^2 - w_j, w_i = w_j, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ halka ailesini tanımlayarak bu halka ailesi üzerinde tanımlı skew cyclic kodlardan DNA kodlar ve kuantum kodlar elde ettiler (Dertli R. vd., 2024).

Daha sonra bu halka ailesi $k \geq 3$ için $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 3, 4, \dots, k$ ve $i \neq j$ olmak üzere $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k] / \langle w_j^2 - w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle = \{\beta_k = a_{k,0} + \dots + a_{k,k+1} w_1 w_2 \mid a_{k,t} \in F_q, t = 1, \dots, k+1\}$ halka ailesine genişletildi (Avcı G., Dertli R., Çengellenmiş Y., Dertli A., 2025)

5.1.1. Önerme:

$k \geq 3$ için $S_{q,k}$ halka ailesinin ortogonal idempotentleri,

$$\alpha_1 = 1 - \sum_{e=1}^k w_e + w_1 w_2$$

$$\alpha_2 = w_1 - w_1 w_2$$

$$\alpha_3 = w_2 - w_1 w_2$$

$$\alpha_4 = w_3$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{k+1} = w_k$$

$$\alpha_{k+2} = w_1 w_2$$

şeklindedir. Diğer bir deyişle, $1 \leq s, r \leq k+2$, $s \neq r$ olmak üzere $\alpha_s^2 = \alpha_s$, $\alpha_s \alpha_r = 0$ ve $\sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s = 1$ dir (Avcı G. vd., 2025).

5.1.2. Önerme:

$k \geq 3$ olmak üzere $S_{q,k}$ halka ailesi

$$S_{q,k} = \alpha_1 S_{q,k} \oplus \dots \oplus \alpha_{k+2} S_{q,k} \cong \alpha_1 F_q \oplus \dots \oplus \alpha_{k+2} F_q$$

şeklinde ifade edilir (Avcı G. vd., 2025).

5.1.3. Teorem:

$k \geq 3$ olmak üzere $S_{q,k}$ halka ailesinin herhangi bir $\beta_k = a_{k,0} + \sum_{e=1}^k a_{k,e} w_e + a_{k,k+1} w_1 w_2$ elemanı $i = 1, \dots, k+2$ için α_i ortogonal idempotentler, $b_{k,s} \in F_q$ olmak üzere $\beta_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s}$ şeklinde teklikle ifade edilir (Avcı G. vd., 2025).

5.1.4. Tanım:

$k \geq 3$ için $B = \{1, 2, \dots, k+2\}$ olmak üzere

$$\psi_k: S_{q,k} \rightarrow F_q^{k+2}$$

$$\beta_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s} \mapsto (b_{k,s})_{s \in B}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir (Avcı G. vd., 2025).

Bu dönüşüm $S_{q,k}^{\eta_k}$ ya aşağıdaki şekilde genişletilebilir. $z = 1, 2, \dots, \eta_k$, $k \geq 3$ için $\beta_{k,z} = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s,z}$, $b_{k,s,z} \in F_q$ olmak üzere $\Upsilon = (b_{k,1,1}, b_{k,1,2}, \dots, b_{k,1,\eta_k}, \dots, b_{k,k+2,1}, b_{k,k+2,2}, \dots, b_{k,k+2,\eta_k})$ olsun. Bu durumda her $\beta_k = (\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in S_{q,k}^{\eta_k}$ için

$$\psi_k: S_{q,k}^{\eta_k} \rightarrow F_q^{(k+2)\eta_k}$$

$$\beta_k \mapsto \Upsilon$$

dır (Avcı G. vd., 2025).

5.1.5. Tanım:

w_H, F_q^{k+2} - vektör uzayı üzerinde tanımlı Hamming ağırlığı olmak üzere herhangi bir $\beta_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s} \in S_{q,k}$ için $w_G(\beta_k) = w_H(\psi_k(\beta_k))$ şeklinde tanımlı w_G fonksiyonuna β_k elemanının “Gray ağırlığı” denir (Avcı G. vd., 2025).

5.1.6. Tanım:

$C_k, S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı bir lineer kod olsun. Herhangi $\beta_k, \beta'_k \in S_{q,k}^{\eta_k}$ için $d_G(\beta_k, \beta'_k) = w_G(\beta_k - \beta'_k)$ şeklinde tanımlı d_G fonksiyonuna “Gray uzaklığı” denir. C_k kodunun minimum Gray uzaklığı

$$d_G(C_k) = \min\{d_G(\beta_k, \beta'_k) | \forall \beta_k, \beta'_k \in C_k, \beta_k \neq \beta'_k\}$$

şeklinde tanımlanır (Avcı G. vd., 2025).

5.1.7. Önerme:

$k \geq 3$ olmak üzere $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir C_k lineer kodu,

$$C_{k,1} = \{b_{k,1} \in F_q^{\eta_k} | \exists b_{k,2}, \dots, b_{k,k+2} \in F_q^{\eta_k}, \alpha_1 b_{k,1} + \dots + \alpha_{k+2} b_{k,k+2} \in C_k\}$$

$$C_{k,2} = \{b_{k,2} \in F_q^{\eta_k} | \exists b_{k,1}, b_{k,3}, \dots, b_{k,k+2} \in F_q^{\eta_k}, \alpha_1 b_{k,1} + \dots + \alpha_{k+2} b_{k,k+2} \in C_k\}$$

...

...

$$C_{k,k+2} = \{b_{k,k+2} \in F_q^{\eta_k} | \exists b_{k,1}, b_{k,2}, \dots, b_{k,k+1} \in F_q^{\eta_k}, \alpha_1 b_{k,1} + \dots + \alpha_{k+2} b_{k,k+2} \in C_k\}$$

F_q üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda lineer kodlar olmak üzere $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$ biçiminde teklikle ifade edilir (Avcı G. vd., 2025).

5.1.8. Teorem:

$k \geq 3$ için $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$, $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir lineer kod ise bu kodun duali $C_k^\perp = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}^\perp$ de $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir lineer koddur (Avcı G. vd., 2025).

5.1.9. Önerme:

ψ_k Gray dönüşüm F_q - lineer ve uzaklık koruyan bir dönüşümdür (Avcı G. vd., 2025).

5.1.10. Önerme:

$k \geq 3$ için $C_k, S_{q,k}$ üzerinde tanımlı (η_k, M, d_G) parametrelerine sahip bir lineer kod ise $d_G = d_H$ olmak üzere $\psi_k(C_k), F_q$ üzerinde tanımlı $(\eta_k(k+2), M, d_H)$ parametrelerine sahip bir lineer koddur (Avcı G. vd., 2025).

5.2. $S_{q,k}$ Halka Ailesi Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Gray Görüntüleri

Bu bölümde (Avcı G. vd., 2025) makalesinde yer alan tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir.

5.2.1. Teorem:

$\theta \in \text{Aut}(F_q)$ olsun. Herhangi bir $\beta_k \in S_{q,k}$ için

$$\Theta_k: S_{q,k} \rightarrow S_{q,k}$$

$$\beta_k = a_{k,0} + \sum_{e=1}^k a_{k,e} w_e + a_{k,k+1} w_1 w_2 \mapsto \theta(a_{k,0}) + \sum_{e=1}^k \theta(a_{k,e}) w_e + \theta(a_{k,k+1}) w_1 w_2$$

şeklinde tanımlanan Θ_k dönüşümü $k \geq 3$ için $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı aşıkâr olmayan bir otomorfizmadır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.2. Lemma:

$k \geq 3$ için herhangi bir $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}$ elemanının birimsel eleman olması için gerekli ve yeterli koşul $s = 1, 2, \dots, k+2$ olmak üzere $\gamma_{k,s}$ 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde birimsel eleman olmasıdır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.3. Lemma:

$k \geq 3$ için $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$ olsun. $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olması için gerekli ve yeterli koşul $s = 1, 2, \dots, k+2$ olmak üzere $\theta(\gamma_{k,s}) = \gamma_{k,s}$ olmasıdır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.4. Tanım:

$k \geq 3$ için $\Theta_k, S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı aşıkâr olmayan bir otomorfizma ve $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ da birimsel bir eleman olsun. $C_k \subset S_{q,k}^{\eta_k}$ alt kümesi,

- i) $C_k, S_{q,k}^{\eta_k}$ modülünün bir $S_{q,k}$ - alt modülü,
- ii) Her $\beta_k = (\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in C_k$ iken $\tau_{\Gamma_k}^{\Theta_k}(\beta_k) = (\Gamma_k \Theta_k(\beta_{k,\eta_k}),$

$$\Theta_k(\beta_{k,1}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1}) \in C_k$$

koşullarını sağlıyorsa C_k ' ya $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda “*skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod*” denir (Avcı G. vd., 2025).

5.2.5. Teorem:

$S_{q,k}$ halka ailesi, $\Theta_k \in \text{Aut}(S_{q,k})$ aşık ar olmayan bir otomorfizma olsun. Bu durumda $S_{q,k}[x, \Theta_k] = \{\beta_{k,0} + \beta_{k,1}x + \dots + \beta_{k,n-1}x^{n-1} \mid \beta_{k,i} \in S_{q,k}, n \in \mathbb{N}\}$ kümesi bilinen polinom toplaması ve $(a_k x^i)(b_k x^j) = a_k \Theta_k^i(b_k) x^{i+j}$ şeklinde tanımlı çarpma işlemi ile değişmeli olmayan bir halkadır.

Bu halkaya “*skew polinom halkası*” denir (Avcı G. vd., 2025).

Polinom temsili için;

5.2.6. Önerme:

$$\begin{aligned} \Omega_k: S_{q,k}^{\eta_k} &\longrightarrow S_{q,k}[x, \Theta_k] / \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle \\ (\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) &\longmapsto \beta_{k,1} + \beta_{k,2}x + \dots + \beta_{k,\eta_k}x^{\eta_k-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir $S_{q,k}$ - modül izomorfizmasıdır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.7. Not:

$t = \text{ord}(\Theta_k)$ ve $t \mid \eta_k$ olsun. Bu durumda $S_{q,k}[x, \Theta_k] / \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ bir bölüm halkasıdır.

5.2.8. Teorem:

C_k lineer kodunun $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\Omega_k(C_k)$ kümesinin $S_{q,k}[x, \Theta_k] / \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ bölüm halkasının bir sol ideali olmasıdır (Avcı G. vd., 2025)

5.2.9. Not:

Eğer $t \nmid \eta_k$ ise o zaman $S_{q,k}[x, \Theta_k] / \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ kümesi bilinen toplama ve her $r(x) \in S_{q,k}[x, \Theta_k], s(x) + \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle \in S_{q,k}[x, \Theta_k] / \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ için $r(x)(s(x) + \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle) = r(x)s(x) + \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ şeklindeki skaler çarpma ile bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ -modüldür.

5.2.10. Teorem:

η_k uzunluğunda bir $S_{q,k}$ -lineer kodun skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olması için gerek ve yeter koşul $\Omega_k(C_k)$ kümesinin bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ - alt modül olmasıdır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.11. Teorem:

$k \geq 3$ için $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$, $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir lineer kod, $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$ birimsel bir eleman, $ord(\Theta_k) \mid \eta_k$ ve $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olsun. C_k kodunun $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olması için gerekli ve yeterli koşul $k \geq 3$ için $s = 1, 2, \dots, k+2$ olmak üzere $C_{k,s}$ 'lerin F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew θ - $\gamma_{k,s}$ constacyclic kod olmasıdır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.12. Teorem:

$ord(\Theta_k) \mid \eta_k$, $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ birimsel bir eleman ve $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olmak üzere $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$, $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olsun. $k \geq 3$ ve $s = 1, 2, \dots, k+2$ için $f_{k,s}(x)$, $C_{k,s}$ skew θ - $\gamma_{k,s}$ constacyclic kodların monik üreteç polinomları olmak üzere $\Omega_k(C_k) = \langle \alpha_1 f_{k,1}(x) + \dots + \alpha_{k+2} f_{k,k+2}(x) \rangle$ olacak şekilde $x^{\eta_k} - \Gamma_k$ polinomunun sağ böleni olan bir $\alpha_1 f_{k,1}(x) + \dots + \alpha_{k+2} f_{k,k+2}(x) \in S_{q,k}[x, \Theta_k]$ polinomu vardır (Avcı G. vd., 2025).

5.2.13. Sonuç:

$k \geq 3$ için $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$, $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod ve $ord(\Theta_k) \mid \eta_k$, $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$ birimsel bir eleman, $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olsun. Bu durumda $k \geq 3$ için $C_k^\perp = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}^\perp$, $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew Θ_k - Γ_k^{-1} constacyclic koddur ve $\Gamma_k^{-1} = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s}^{-1}$ olmak üzere $s = 1, 2, \dots, k+2$ için $C_{k,s}^\perp$, F_q cismi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew θ - $\gamma_{k,s}^{-1}$ constacyclic koddur (Avcı G. vd., 2025).

5.2.14. Sonuç:

$k \geq 3$ için $C_k = \bigoplus_{s=1}^{k+2} \alpha_s C_{k,s}$, $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod, $\text{ord}(\Theta_k) \mid \eta_k$, $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$, $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olsun. Bu durumda $k \geq 3$ ve $s = 1, 2, \dots, k+2$ için $x^{\eta_k} - \gamma_{k,s} = f_{k,s}(x)g_{k,s}(x)$ olmak üzere $f_{k,s}(x) = a_{0,k,s} + a_{1,k,s}x + \dots + a_{\eta_k-r,k,s}x^{\eta_k-r} \in F_q[\theta]$ polinomlarından elde edilen $f_{k,s}^*(x) = a_{\eta_k-r,k,s} + \theta(a_{\eta_k-r-1,k,s})x + \dots + \theta^{\eta_k-r}(a_{0,k,s})x^{\eta_k-r}$ polinomları $C_{k,s}^\perp$ skew θ - $\gamma_{k,s}^{-1}$ constacyclic kodların üreteç polinomları olmak üzere $\Omega_k(C_k^\perp) = \langle \alpha_1 f_{k,1}^*(x), \alpha_2 f_{k,2}^*(x), \dots, \alpha_{k+2} f_{k,k+2}^*(x) \rangle$ ve $|C_k^\perp| = q^{\sum_{s=1}^{k+2} \deg(g_{k,s}(x))}$ dir (Avcı G. vd., 2025).

5.3. $F_q S_{q,k}$ Üzerinde Tanımlı Skew Constacyclic Kodların Tanımı, Polinom Temsilleri, Dualleri ve Ayrılabilir Kodlar

Bu bölümde, F_q sonlu bir cisim, $k \geq 3$ için $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 3, 4, \dots, k$ ve $i \neq j$ olacak şekilde $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k] / \langle w_j^2 - w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ bir halka ailesi olmak üzere yeni bir $F_q S_{q,k}$ mix alfabe oluşturuldu. Bu mix alfabe üzerinde lineer kodlar ve skew constacyclic kodların cebirsel yapısı belirlenerek bu kodların dualleri belirlenmiştir. Ayrıca mix alfabe üzerinde ayrılabilir kod kavramı verilmiştir.

5.3.1. Önerme:

$k \geq 3$ için $F_q S_{q,k} = \{(r, \beta_k) \mid r \in F_q, \beta_k \in S_{q,k}\}$ kümesi, bilinen toplama ve herhangi bir $v_k = a_{k,0} + \sum_{e=1}^k a_{k,e} w_e + a_{k,k+1} w_1 w_2 \in S_{q,k}$ için

$$\rho_k: S_{q,k} \rightarrow F_q$$

$$a_{k,0} + \sum_{e=1}^k a_{k,e} w_e + a_{k,k+1} w_1 w_2 \mapsto a_{k,0}$$

biçiminde verilen bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$\therefore S_{q,k} \times F_q S_{q,k} \rightarrow F_q S_{q,k}$$

$$(v_k, (r, \beta_k)) \mapsto (\rho_k(v_k)r, v_k \beta_k)$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre bir $S_{q,k}$ -modüldür.

Kanıt:

$$\forall (r, \beta_k), (r', \beta'_k) \in F_q S_{q,k}, \forall v_k \in S_{q,k} \text{ için}$$

$$+: F_q S_{q,k} \times F_q S_{q,k} \rightarrow F_q S_{q,k}$$

$$((r, \beta_k), (r', \beta'_k)) \mapsto (r + r', \beta_k + \beta'_k)$$

$$\therefore S_{q,k} \times F_q S_{q,k} \rightarrow F_q S_{q,k}$$

$$(v_k, (r, \beta_k)) \mapsto (\rho_k(v_k)r, v_k \beta_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile $F_q S_{q,k}$ 'nin bir $S_{q,k}$ -modül olduğu kolaylıkla görülür.

5.3.2. Önerme:

$k \geq 3$ için $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} = \{(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \mid r_0 = r_1, \dots, r_{\eta_0} \in F_q^{\eta_0}, \beta_k = \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k} \in S_{q,k}^{\eta_k}\}$ olmak üzere her $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}), (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k}) \in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ ve herhangi bir $v_k \in S_{q,k}$ için

$$+: F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \times F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \rightarrow F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$$

$$((r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}), (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k}))$$

$$\mapsto (r_1 + r'_1, \dots, r_{\eta_0} + r'_{\eta_0}, \beta_{k,1} + \beta'_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k} + \beta'_{k,\eta_k})$$

ve

$$\therefore S_{q,k} \times F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \rightarrow F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$$

$$(v_k, (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})) \mapsto (\rho_k(v_k)r_1, \dots, \rho_k(v_k)r_{\eta_0}, v_k \beta_{k,1}, \dots, v_k \beta_{k,\eta_k})$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpma işlemine göre $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ bir $S_{q,k}$ -modüldür.

5.3.3. Tanım:

$k \geq 3$ olmak üzere $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ 'nin boş kümeden farklı bir $\mathbf{C}_k$ alt kümesi, $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ 'nin bir $S_{q,k}$ - alt modülü ise $\mathbf{C}_k$ 'ya (η_0, η_k) uzunluğunda bir " $F_q S_{q,k}$ -lineer kod" denir.

Bölüm 2, 2.3.3 Tanım da verilen, mertebesi η_0 'ı bölen aşikâr olmayan bir $\theta \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ve $\theta(\gamma) = \gamma$ olacak şekildeki herhangi bir $\gamma \in F_q^*$ birimseli için, F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda skew θ - γ constacyclic kod tanımı ve

Bölüm 5, 5.2.4 Tanım da verilen, $k \geq 3$ için mertebesi η_k 'yı bölen aşikâr olmayan bir $\Theta_k \in \text{Aut}(S_{q,k})$ otomorfizması ve $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olacak şekilde herhangi bir $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ birimseli için $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod tanımları kullanılarak $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

5.3.4. Tanım:

$\theta \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizmasının mertebesi y olmak üzere $y \mid \eta_0$, $\gamma \in F_q^*$ birimsel elemanı için $\theta(\gamma) = \gamma$ ve $k \geq 3$ için $\Theta_k \in \text{Aut}(S_{q,k})$ otomorfizmasının mertebesi b olmak üzere $b \mid \eta_k$, $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ birimsel elemanı için $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olsun.

$\mathbf{C}_k$, (η_0, η_k) uzunluğunda bir $F_q S_{q,k}$ -lineer kod olmak üzere her $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathbf{C}_k$ iken $\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) = (\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \Gamma_k\Theta_k(\beta_{k,\eta_k}), \Theta_k(\beta_{k,1}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) \in \mathbf{C}_k$ oluyorsa $\mathbf{C}_k$ lineer koduna “skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod” adı verilir.

$\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}$, ye skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic shift (skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) sabit devirli öteleme) denir.

Özel olarak $\gamma = \Gamma_k = 1$ ve θ, Θ_k otomorfizmaları aşikâr otomorfizma alınırsa bu kod, cyclic, γ, Γ_k birimsel eleman, θ, Θ_k aşikâr otomorfizma alınırsa constacyclic, $\gamma = \Gamma_k = 1$ ve θ, Θ_k aşikâr olmayan otomorfizma alınırsa skew cyclic kod tanımı ile çakışır.

5.3.5. Önerme:

$\Pi = F_q[x, \theta]/\langle x^{\eta_0} - \gamma \rangle \times S_{q,k}[x, \Theta_k]/\langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ olsun.

$$\Delta: F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \rightarrow \Pi$$

$$(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \mapsto (r_1 + r_2x + \dots + r_{\eta_0}x^{\eta_0-1} + \langle x^{\eta_0} - \gamma \rangle, \beta_{k,1} + \beta_{k,2}x + \dots + \beta_{k,\eta_k}x^{\eta_k-1} + \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir izomorfizmadır.

Bu dönüşüm yardımıyla $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})$ elemanını $r_0(x) = r_1 + r_2x + \dots + r_{\eta_0}x^{\eta_0-1} + \langle x^{\eta_0} - \gamma \rangle$, $\beta_k(x) = \beta_{k,1} + \beta_{k,2}x + \dots + \beta_{k,\eta_k}x^{\eta_k-1} + \langle x^{\eta_k} - \Gamma_k \rangle$ olmak üzere $(r_0(x), \beta_k(x))$ ile göstereceğiz.

5.3.6. Teorem:

$k \geq 3$ için Π kümesi bilinen toplama ve her $v_k(x) = v_{k,1} + v_{k,2}x + \dots + v_{k,t}x^{t-1} \in S_{q,k}[x, \Theta_k]$, her $(r_0(x), \beta_k(x)) \in \Pi$ ve $\rho_k(v_k(x)) = \rho_k(v_{k,1}) + \rho_k(v_{k,2})x + \dots + \rho_k(v_{k,t})x^{t-1} \in F_q[x, \theta]$ olmak üzere

$$\therefore S_{q,k}[x, \Theta_k] \times \Pi \rightarrow \Pi$$

$$(v_k(x), (r_0(x), \beta_k(x))) \mapsto (\rho_k(v_k(x))r_0(x), v_k(x)\beta_k(x))$$

şeklinde tanımlanan soldan çarpma işlemine göre bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ -modüldür.

Kanıt:

Her $(r_0(x), \beta_k(x)), (r'_0(x), \beta'_k(x)) \in \Pi$ ve her $v_k(x) \in S_{q,k}[x, \Theta_k]$ için

$$+: \Pi \times \Pi \rightarrow \Pi$$

$$(r_0(x), \beta_k(x)), (r'_0(x), \beta'_k(x)) \mapsto (r_0(x) + r'_0(x), \beta_k(x) + \beta'_k(x))$$

$$\therefore S_{q,k}[x, \Theta_k] \times \Pi \rightarrow \Pi$$

$$(v_k(x), (r_0(x), \beta_k(x))) \mapsto (\rho_k(v_k(x))r_0(x), v_k(x)\beta_k(x))$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile Π kümesinin bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ -modül olduğu kolaylıkla görülür.

5.3.7. Teorem:

$k \geq 3$ olmak üzere (η_0, η_k) uzunluğunda bir $F_q S_{q,k}$ -lineer kodun skew (θ, Θ_k) - (γ, Γ_k) constacyclic kod olması için gerek ve yeter koşul $\Delta(\mathbf{C}_k)$ kümesinin Π 'nin bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ - alt modül olmasıdır.

Kanıt:

$\mathbf{C}_k$, (η_0, η_k) uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) - (γ, Γ_k) constacyclic kod olsun. Bu durumda $x.(r_0(x), \beta_k(x)) = (\theta(r_1)x + \theta(r_2)x^2 + \dots + \gamma\theta(r_{\eta_0}), \Theta_k(\beta_{k,1})x + \Theta_k(\beta_{k,2})x^2 +$

$\dots + \Gamma_k \Theta_k(\beta_{k,\eta_k})) \in \Delta(\mathbf{C}_k)$ elde edilir. $\mathbf{C}_k$ 'nin lineerliğinden en az bir $v_k(x) \in S_{q,k}[x, \Theta_k]$ için $v_k(x) \cdot (r_0(x), \beta_k(x)) \in \Delta(\mathbf{C}_k)$ 'dır.

Tersine $\Delta(\mathbf{C}_k)$, Π 'nin bir sol $S_{q,k}[x, \Theta_k]$ -alt modülü olsun. Bu durumda $x \cdot (r_0(x), \beta_k(x)) \in \Delta(\mathbf{C}_k)$ olur ki bu da $\mathbf{C}_k$ kodunun bir skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod olduğu anlamına gelir.

5.3.8. Tanım:

$\mathbf{C}_k$, (η_0, η_k) uzunluğunda bir $F_q S_{q,k}$ -lineer kod olsun. Herhangi $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})$, $\mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k})$ elemanlarının iç çarpımı

$$\mathbf{r}\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^{\eta_0} r_i r'_i + \sum_{j=1}^{\eta_k} \beta_{k,j} \beta'_{k,j}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\mathbf{C}^\perp = \{\mathbf{r}' \in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \mid \mathbf{r}\mathbf{r}' = 0, \forall \mathbf{r} \in \mathbf{C}\}$$

kümesine $\mathbf{C}_k$ lineer kodunun “*duali*” adı verilir.

Mertebesi η_0 'ı bölen ve $\gamma \in F_q^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\theta \in \text{Aut}(F_q)$ otomorfizması ile tanımlanabilen F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğundaki bir skew θ - γ constacyclic kodun dualinin de bir skew θ - γ^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 2, 2.3.5 Önerme de verildi. Mertebesi η_k 'yı bölen ve $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ birimselini sabit bırakan herhangi bir aşikâr olmayan $\Theta_k \in \text{Aut}(R_k)$ otomorfizması ile tanımlanabilen $S_{q,k}$ halka ailesi üzerinde tanımlı η_k uzunluğundaki bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic kodun dualinin de bir skew Θ_k - Γ_k^{-1} constacyclic kod olduğu Bölüm 5, 5.2.13 Sonuç da verildi.

Bu bilgiler kullanılarak skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kodun duali aşağıdaki gibi verilebilir.

5.3.9. Önerme:

$k \geq 3$ için a_0, a_1 sırasıyla θ, Θ_k aşikâr olmayan otomorfizmalarının mertebesi olmak üzere $a_0 \mid \eta_0$, $a_1 \mid \eta_k$ ve $\theta(\gamma) = \gamma$, $\Theta_k(\Gamma_k) = \Gamma_k$, $\gamma \in F_q^*$, $\Gamma_k \in S_{q,k}^*$ olsun. Bu durumda $\mathbf{C}_k$ (η_0, η_k) uzunluğunda bir $F_q S_{q,k}$ -lineer kodu skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k)

constacyclic kod ise $\mathcal{C}_k^\perp$ lineer kodu (η_0, η_k) uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) -($\gamma^{-1}, \Gamma_k^{-1}$) constacyclic koddur.

Kanıt:

Herhangi bir $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k$ olsun. Her $\mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k^\perp$ için $\tau_{\gamma^{-1}, \Gamma_k^{-1}}^{\theta, \Theta_k}(r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k}) = (\gamma^{-1}\theta(r'_{\eta_0}), \theta(r'_1), \dots, \theta(r'_{\eta_0-1}), \Gamma_k^{-1}\Theta_k(\beta'_{k,\eta_k}), \Theta_k(\beta'_{k,1}), \dots, \Theta_k(\beta'_{k,\eta_k-1})) \in \mathcal{C}_k^\perp$ olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla bunun için

$$\mathbf{r} \tau_{\gamma^{-1}, \Gamma_k^{-1}}^{\theta, \Theta_k}(\mathbf{r}') = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Yani,

$$[\gamma^{-1}r_1\theta(r'_{\eta_0}) + r_2\theta(r'_1) + \dots + r_{\eta_0}\theta(r'_{\eta_0-1})] + [\Gamma_k^{-1}\beta_{k,1}\Theta_k(\beta'_{k,\eta_k}) + \beta_{k,2}\Theta_k(\beta'_{k,1}) + \dots + \beta_{k,\eta_k}\Theta_k(\beta'_{k,\eta_k-1})] = 0.$$

b_γ, F_q 'da γ birimselinin mertebesi ve $b_{\Gamma_k}, S_{q,k}$ 'da Γ_k birimselinin mertebesi olsun. Bu durumda $\gamma^{b_\gamma} = 1$ ve $\Gamma_k^{b_{\Gamma_k}} = 1$ 'dir. $h = b_\gamma b_{\Gamma_k} \eta_0 \eta_k$ olsun. $K = b_\gamma b_{\Gamma_k} \eta_0$ ve $N = b_\gamma b_{\Gamma_k} \eta_k$ alalım. Herhangi bir $\mathbf{r} \in \mathcal{C}_k$ için $\mathcal{C}_k$ skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod olduğu için

$$(\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k})^{h-1}(\mathbf{r}) = (\gamma^K \theta^{h-1}(r_2), \dots, \gamma^K \theta^{h-1}(r_{\eta_0}), \gamma^{K-1} \theta^{h-1}(r_1), \Gamma_k^N \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,2}), \dots, \Gamma_k^N \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,\eta_k}),$$

$\Gamma_k^{N-1} \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,1})) \in \mathcal{C}_k$ 'dır. Dolayısıyla

$$(\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k})^{h-1}(\mathbf{r}) \mathbf{r}' = [\theta^{h-1}(r_2)r'_1 + \theta^{h-1}(r_3)r'_2 + \dots + \theta^{h-1}(r_{\eta_0})r'_{\eta_0-1} + \gamma^{-1}\theta^{h-1}(r_1)r'_{\eta_0}]$$

$$+ [\Theta_k^{h-1}(\beta_{k,2})\beta'_{k,1} + \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,3})\beta'_{k,2} + \dots + \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,\eta_k})\beta'_{k,\eta_k-1} + \Gamma_k^{-1}\Theta_k^{h-1}(\beta_{k,1})\beta'_{k,\eta_k}] = 0$$

dır. Başka bir deyişle

$$[\gamma^{-1}\theta^{h-1}(r_1)r'_{\eta_0} + \theta^{h-1}(r_2)r'_1 + \theta^{h-1}(r_3)r'_2 + \dots + \theta^{h-1}(r_{\eta_0})r'_{\eta_0-1}] + [\Gamma_k^{-1}\Theta_k^{h-1}(\beta_{k,1})\beta'_{k,\eta_k} + \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,2})\beta'_{k,1} + \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,3})\beta'_{k,2} + \dots + \Theta_k^{h-1}(\beta_{k,\eta_k})\beta'_{k,\eta_k-1}] = 0 \text{ dır.}$$

$a_0 \mid \eta_0, a_1 \mid \eta_k$ olduğundan bu durumda θ^h, Θ_k^h aşikâr otomorfizmalardır. $\Theta_k|_{F_q} = \theta$ olduğu kullanılır ve yukarıdaki denklemde her iki tarafa Θ_k uygulanırsa,

$$[\gamma^{-1}r_1\theta(r'_{\eta_0}) + r_2\theta(r'_1) + \dots + r_{\eta_0}\theta(r'_{\eta_0-1})] + [\Gamma_k^{-1}\beta_{k,1}\Theta_k(\beta'_{\eta_k}) + \beta_{k,2}\Theta_k(\beta'_{k,1}) + \dots + \beta_{\eta_k}\Theta_k(\beta'_{\eta_k-1})]$$

ifadesi 0'a eşit olur. Bu durumda $\mathcal{C}_k^\perp$ lineer kodu (η_0, η_k) uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) - $(\gamma^{-1}, \Gamma_k^{-1})$ constacyclic koddur.

5.3.10. Tanım:

$\mathcal{C}_k$, bir $F_q S_{q,k}$ -lineer kod olsun. $\mathcal{C}_0$, η_0 uzunluğunda F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı ve $\mathcal{C}_1$, η_k uzunluğunda $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı, sırasıyla η_0 , η_k koordinatları silinerek $\mathcal{C}_k$ kodundan koparılarak elde edilen kodlar olmak üzere $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_1$ ise $\mathcal{C}_k$ koduna “ayrılabilir kod” denir.

5.3.11. Teorem:

$\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_k$ sırasıyla $F_q, S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_0, η_k uzunluklarında lineer kodlar olmak üzere $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_k$ kodu (η_0, η_k) uzunluğunda $F_q S_{q,k}$ -lineer kod olsun. $\mathcal{C}_k$ lineer kodunun skew (θ, Θ_k) - (γ, Γ_k) constacyclic kod olması için gerek ve yeterli koşul $\mathcal{C}_0$ kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda bir skew θ - γ constacyclic kod ve $\mathcal{C}_k$ kodunun $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olmasıdır.

Kanıt:

$\mathcal{C}_k$, (η_0, η_k) uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) - (γ, Γ_k) constacyclic kod olsun. $(r_1, r_2, \dots, r_{\eta_0}) \in \mathcal{C}_0$ ve $(\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k$ olmak üzere herhangi bir $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k$ elemanı için $\mathcal{C}_k$ skew (θ, Θ_k) - (γ, Γ_k) constacyclic kod olduğundan $(\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \Gamma_k\Theta_k(\beta_{k,\eta_k}), \Theta_k(\beta_{k,1}), \Theta_k(\beta_{k,2}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) \in \mathcal{C}_k$ dir. Dolayısıyla $(\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1})) \in \mathcal{C}_0$ ve $(\Gamma_k\Theta_k(\beta_{k,\eta_k}), \Theta_k(\beta_{k,1}), \Theta_k(\beta_{k,2}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) \in \mathcal{C}_k$ dir. Bu nedenle $\mathcal{C}_0$ lineer kodu F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda bir skew θ - γ constacyclic kod ve $\mathcal{C}_k$ lineer kodu $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic koddur.

Tersine $\mathcal{C}_0$ lineer kodu F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda bir skew θ - γ constacyclic kod ve $\mathcal{C}_k$ lineer kodu $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olsun. $(r_1, r_2, \dots, r_{\eta_0}) \in \mathcal{C}_0$ ve $(\beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k$ olmak üzere herhangi bir $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in \mathcal{C}_k$ için $\mathcal{C}_0, F_q$ sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda bir skew θ - γ constacyclic kod olduğundan $(\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1})) \in$

C_0 dır. Benzer şekilde C_k , $S_{q,k}$ üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda bir skew Θ_k - Γ_k constacyclic kod olduğundan $(\Gamma_k \Theta_k(\beta_{k,\eta_k}) \Theta_k(\beta_{k,1}), \Theta_k(\beta_{k,2}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) \in C_k$ dir. O halde,

$(\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \Gamma_k \Theta_k(\beta_{k,\eta_k}) \Theta_k(\beta_{k,1}), \Theta_k(\beta_{k,2}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) \in C_k$ olur. Dolayısıyla C_k , (η_0, η_k) uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod olur.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki verilebilir.

5.3.12. Sonuç:

C_k bir $F_q S_{q,k}$ -lineer ayrılabilir kod olsun. C_k kodunun skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod olması için gerek ve yeterli koşul C_0 kodunun F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_0 uzunluğunda bir skew θ - γ constacyclic kod ve $k \geq 3, s = 1, 2, \dots, k+2$ olmak üzere $C_{k,s}$ kodlarının F_q sonlu cismi üzerinde tanımlı η_k uzunluğunda skew θ - $\gamma_{k,s}$ constacyclic kod olmasıdır.

5.4. ψ_k Gray Dönüşüm ve Skew Constacyclic Kodların Gray Görüntüleri

Bölüm 5, 5.1.4 Tanım da $k \geq 3$ için $B = \{1, 2, \dots, k+2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_k: S_{q,k} &\rightarrow F_q^{k+2} \\ \beta_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s} &\mapsto (b_{k,s})_{s \in B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm verildi.

Bu dönüşüm yardımı ile aşağıdaki tanım verilebilir.

5.4.1. Tanım:

$k \geq 3$ olmak üzere herhangi bir $(r_0, \beta_k) \in F_q S_{q,k}$ elemanı için

$$\begin{aligned} \Psi_k: F_q S_{q,k} &\rightarrow F_q^{k+3} \\ (r_0, \beta_k) &\mapsto (r_0, \psi_k(\beta_k)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme “Gray dönüşüm” denir.

Bu dönüşüm $k \geq 3$ için $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ üzerine aşağıdaki gibi genişletilir. Herhangi bir $(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}_k) = (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ elemanı için $z = 1, \dots, \eta_k$ için $\beta_{k,z} = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s,z}$ olmak üzere

$$\Psi_k: F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k} \rightarrow F_q^{\eta_0 + (k+2)\eta_k}$$

$$(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}_k) \mapsto (r_1, \dots, r_{\eta_0}, b_{k,1,1}, \dots, b_{k,1,\eta_k}, \dots, b_{k,k+2,1}, \dots, b_{k,k+2,\eta_k})$$

dir.

5.4.2. Tanım:

$w_H, F_q^{\eta_0}$ üzerinde tanımlı Hamming ağırlık ve $w_G, S_{q,k}^{\eta_k}$ üzerinde tanımlı Gray ağırlık olmak üzere $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}_k) \in \mathbf{C}_k$ kod sözcüğünün Gray ağırlığı

$$w_G(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}_k) = w_H(\mathbf{r}_0) + w_G(\boldsymbol{\beta}_k)$$

şeklinde tanımlanır.

Her $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbf{C}_k$ için $d_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = w_G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = w_H(\Psi_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ şeklinde tanımlanan d_G fonksiyonuna “Gray uzaklık” denir. $\mathbf{C}_k$ kodunun minimum Gray uzaklığı ise

$$d_G(\mathbf{C}_k) = \min\{d_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mid \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbf{C}_k, \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'\}$$

şeklinde tanımlanır.

5.4.3. Teorem:

Ψ_k Gray dönüşümü uzaklık koruyan, F_q -lineer bir dönüşümdür.

Kanıt:

$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})$ ve $\mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1}, \dots, \beta'_{k,\eta_k})$ olmak üzere her $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ ve $\mu \in F_q$ olsun.

$$\begin{aligned} \Psi_k(\mathbf{r} + \mathbf{r}') &= (r_1 + r'_1, \dots, r_{\eta_0} + r'_{\eta_0}, \beta_{k,1,1} + \beta'_{k,1,1}, \dots, \beta_{k,k+2,\eta_k} + \beta'_{k,k+2,\eta_k}) \\ &= (r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1,1}, \dots, \beta_{k,k+2,\eta_k}) + (r'_1, \dots, r'_{\eta_0}, \beta'_{k,1,1}, \dots, \beta'_{k,k+2,\eta_k}) \\ &= \Psi_k(\mathbf{r}) + \Psi_k(\mathbf{r}') \text{ ve} \end{aligned}$$

$\Psi_k(\mu \mathbf{r}) = (\mu r_1, \dots, \mu r_{\eta_0}, \mu \beta_{k,1}, \dots, \mu \beta_{k,\eta_k}) = \mu \Psi_k(\mathbf{r})$ olduğundan Ψ_k F_q -lineer bir dönüşümdür.

Ψ_k 'nın F_q -lineer dönüşüm olduğunu kullanarak her $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\beta}_k)$, $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_0, \boldsymbol{\beta}'_k)$ $\in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ için $d_G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = w_G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = w_H(\Psi_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = d_H(\Psi_k(\mathbf{r}), \Psi_k(\mathbf{r}'))$ elde edilir. Dolayısıyla Ψ_k uzaklık koruyan bir dönüşümdür.

5.4.4. Önerme:

$k \geq 3$ için $\mathbf{C}_k$, $F_q S_{q,k}$ üzerinde tanımlı $(\eta_0 + \eta_k, M, d_G)$ parametrelerine sahip bir lineer kod ise $d_G = d_H$ olmak üzere $\Psi_k(\mathbf{C}_k)$, F_q üzerinde tanımlı $(\eta_0 + (k + 2)\eta_k, k, d_H = d_G)$ parametrelerine sahip bir lineer koddur.

5.4.5. Tanım:

$i = 1, 2, \dots, y_1$ için $\mathbf{a}_i \in F_q^{\eta_0}$, $j = 1, 2, \dots, y_2$ için $\mathbf{b}_j \in F_q^{\eta_k}$ olmak üzere $\mathbf{c} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{y_1}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{y_2}) \in F_q^{\eta_0 y_1} F_q^{\eta_k y_2}$ olsun.

$m = (\tau_Y^\theta(\mathbf{a}_1), \tau_Y^\theta(\mathbf{a}_2), \dots, \tau_Y^\theta(\mathbf{a}_{y_1}), \tau_{Y_{k,1}}^\theta(\mathbf{b}_1), \tau_{Y_{k,2}}^\theta(\mathbf{b}_2), \dots, \tau_{Y_{k,k+2}}^\theta(\mathbf{b}_{y_2}))$ olmak üzere

$$\Xi: F_q^{\eta_0 y_1} F_q^{\eta_k y_2} \rightarrow F_q^{\eta_0 y_1} F_q^{\eta_k y_2}$$

$$\mathbf{c} \mapsto m$$

dönüşümü tanımlansın. $k \geq 3$ ve $s = 1, 2, \dots, k + 2$ olmak üzere E , $(\eta_0 y_1, \eta_k y_2)$ uzunluğunda $F_q^{\eta_0 y_1} F_q^{\eta_k y_2}$ üzerinde tanımlı bir kod ve $\Xi(E) = E$ ise bu koda (y_1, y_2) indeksli “genelleştirilmiş mix skew quasi $(\theta, \theta) - (\gamma, \gamma_{k,s})$ constacyclic” kod denir.

Eğer $y_1 = y_2$ ise, E koduna indeksi (y_1, y_2) olan mix skew quasi $(\theta, \theta) - (\gamma, \gamma_{k,s})$ constacyclic kod denir.

5.4.6. Önerme:

Ψ_k Gray dönüşüm, $\tau_{Y, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}$, $F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ de skew $(\theta, \Theta_k) - (\gamma, \Gamma_k)$ constacyclic shift, Ξ yukarıdaki gibi bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\Psi_k \tau_{Y, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k} = \Xi \Psi_k$ eşitliği sağlanır.

Kanıt:

$k \geq 3$ ve $z = 1, 2, \dots, \eta_k$ için $\beta_{k,z} = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s b_{k,s,z}$, $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$ olmak üzere $(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k}) \in F_q^{\eta_0} S_{q,k}^{\eta_k}$ olsun.

$$\Psi_k(\tau_{Y, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})) = \Psi_k(\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \Gamma_k \Theta_k(\beta_{k,\eta_k}))$$

$$, \Theta_k(\beta_{k,1}), \dots, \Theta_k(\beta_{k,\eta_k-1})) = (\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \gamma_{k,1}\theta(b_{k,1,\eta_k}), \theta(b_{k,1,1}), \\ \dots, \theta(b_{k,1,\eta_k-1}), \gamma_{k,2}\theta(b_{k,2,\eta_k}), \theta(b_{k,2,1}), \dots, \theta(b_{k,2,\eta_k-1}), \dots, \gamma_{k,k+2}\theta(b_{k,k+2,\eta_k}), \\ \theta(b_{k,k+2,1}), \dots, \theta(b_{k,k+2,\eta_k-1})) \dots (1) \text{ ve}$$

$$\Xi(\Psi_k(r_1, \dots, r_{\eta_0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,\eta_k})) = \Xi(r_1, \dots, r_{\eta_0}, b_{k,1,1}, b_{k,1,2}, \dots, b_{k,1,\eta_k}, b_{k,2,1}, b_{k,2,2}, \\ \dots, b_{k,2,\eta_k}, \dots, b_{k,k+2,1}, b_{k,k+2,2}, \dots, b_{k,k+2,\eta_k}) = (\gamma\theta(r_{\eta_0}), \theta(r_1), \dots, \theta(r_{\eta_0-1}), \\ \gamma_{k,1}\theta(b_{k,1,\eta_k}), \theta(b_{k,1,1}), \dots, \theta(b_{k,1,\eta_k-1}), \gamma_{k,2}\theta(b_{k,2,\eta_k}), \theta(b_{k,2,1}), \dots, \theta(b_{k,2,\eta_k-1}), \dots, \\ \gamma_{k,k+2}\theta(b_{k,k+2,\eta_k}), \theta(b_{k,k+2,1}), \dots, \theta(b_{k,k+2,\eta_k-1})) \dots (2)$$

(1) = (2) olduğundan, $\Psi_k \tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k} = \Xi \Psi_k$ dir.

5.4.7. Teorem:

$k \geq 3$ için $s = 1, 2, \dots, k+2$ ve $\Gamma_k = \sum_{s=1}^{k+2} \alpha_s \gamma_{k,s} \in S_{q,k}^*$ olmak üzere $\mathbf{C}_k, (\eta_0, \eta_k)$ uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod ise $\Psi_k(\mathbf{C}_k)$, indeksi $(1, k+2)$ olan bir genelleştirilmiş mix skew quasi (θ, θ) -($\gamma, \gamma_{k,s}$) constacyclic koddur.

Kanıt:

$\mathbf{C}_k, (\eta_0, \eta_k)$ uzunluğunda bir skew (θ, Θ_k) -(γ, Γ_k) constacyclic kod olsun. Yani $\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}(\mathbf{C}_k) = \mathbf{C}_k$ dir. $\Psi_k(\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}(\mathbf{C}_k)) = \Psi_k(\mathbf{C}_k)$ olduğunu biliyoruz. Önerme 5.4.6 kullanılırsa $\Psi_k(\tau_{\gamma, \Gamma_k}^{\theta, \Theta_k}(\mathbf{C}_k)) = \Xi(\Psi_k(\mathbf{C}_k)) = \Psi_k(\mathbf{C}_k)$ elde edilir. Dolayısıyla $\Psi_k(\mathbf{C}_k)$, indeksi $(1, k+2)$ olan bir genelleştirilmiş mix skew quasi (θ, θ) -($\gamma, \gamma_{k,s}$) constacyclic koddur.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

6.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, literatürde var olan halka aileleri bir araya getirilerek literatürde var olmayan yeni mix alfabeler elde edilmiştir. Elde edilen mix alfabeler üzerinde skew constacyclic kodların cebirsel yapısı incelenerek bu kodların dualleri belirlenmiştir. Ayrıca bir Gray dönüşüm tanımlanarak skew constacyclic kodların Gray görüntüleri elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının orijinal kısımlarından olan üçüncü bölümünde F_q sonlu bir cisim, $B = F_q[v]/\langle v^3 - v \rangle$ bir halka ailesi olmak üzere yeni bir $\Delta = F_q B$ alfabeti oluşturulmuştur. Bu mix alfabe üzerinde skew constacyclic kodlar, dualleri ve Gray görüntüleri elde edilmiştir.

Tezin orijinal kısımlarından olan dördüncü bölümde $R_0 = F_q$ sonlu bir cisim, $\beta_1, \beta_2 \in F_q^*$ için $u_1^2 = \beta_1 u_1$ olmak üzere $R_1 = F_q + u_1 F_q$ ve $u_1^2 = \beta_1 u_1$, $u_2^2 = \beta_2 u_2$, $u_1 u_2 = u_2 u_1 = 0$ olmak üzere $R_2 = F_q + u_1 F_q + u_2 F_q$ halka aileleri olmak üzere yeni bir $F_q R_1 R_2$ alfabeti oluşturulmuştur. Bu alfabe üzerinde skew constacyclic kodlar, dualleri ve Gray görüntüleri elde edilmiştir.

Tezin orijinal kısımlarından olan beşinci bölümde Rabia Dertli vd. tanımlanan $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı, $j = 1, 2, \dots, 5$, $i = 3, 4, 5$ ve $i \neq j$ olmak üzere $S_{q,5} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_5]/\langle w_j^2 - w_j, w_i = w_j, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ şeklindeki halka ailesi Dertli A. vd. tarafından $k \geq 3$ için $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı, $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 3, 4, \dots, k$ ve $i \neq j$ olmak üzere $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k]/\langle w_j^2 - w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ halka ailesine genişletilmiş Bölüm 5.1 ve 5.2 de bu çalışmalardan

elde edilen teorem, sonuç ve önermelere yer verilmiştir. Bölüm 5.3 ve 5.4 de $q = p^m$, p tek asal, m pozitif tamsayı olmak üzere F_q sonlu bir cisim, $k \geq 3$ için $j = 1, 2, \dots, k$, $i = 3, 4, \dots, k$ ve $i \neq j$ olacak şekilde $S_{q,k} = F_q[w_1, w_2, \dots, w_k] / \langle w_j^2 - w_j, w_i w_j = w_j w_i, w_1 w_2 - w_2 w_1 \rangle$ bir halka ailesi olmak üzere yeni bir $F_q S_{q,k}$ mix alfabe oluşturulmuştur. Bu alfabe üzerinde skew constacyclic kodlar, dualleri ve Gray görüntüleri elde edilmiştir.

6.2. Gelecek Çalışma

Bu tez çalışmasında oluşturulan mix alfabeler kullanılarak Magma yardımı ile DNA kodlar ve kuantum kodlar elde edilebilir. Gray görüntülerden elde edilebilecek var olan parametrelerden daha iyi parametrelere sahip optimal kodlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

- Abualrub, T., Ghrayeb, A., Aydin, N., & Siap, I. (2010). On the construction of skew quasi-cyclic codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(5), 2081–2090.
- Arıkan, A., Acar, O. A., & Arıkan, A. (2022). *Cebir*. Palme Yayınevi.
- Boucher, D., Geiselmann, W., & Ulmer, F. (2007). Skew-cyclic codes. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 18, 379–389.
- Çallıalp, F. (2013). *Örneklerle Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi.
- Çallıalp, F., & Kuruoğlu, N. (1996). *Lineer Cebir*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları.
- Dertli, R. *Halkalar üzerinde tanımlı macDonald kodlar* (2024). (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Dinh, H. Q., Nguyen, B. T., & Sriboonchitta, S. (2016). Skew constacyclic codes over finite fields and finite chain rings. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Hammons, A. R., Kumar, P. V., Calderbank, A. R., Sloane, N. J., & Solé, P. (1994). The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(2), 301–319.
- Hill, R. (1986). *First Course in Coding Theory*. Clarendon Press.
- Huffman, W. C., Cary, W., & Pless, V. (2003). *Fundamentals of Error-Correcting Codes*. Cambridge University Press.
- Hungerford, T. (1973). *Algebra*. Springer-Verlag.
- Jensen, J. M. (1994). A class of constacyclic codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(3), 951–954.
- Jitman, S., Ling, S., & Udomkavanich, P. (2010). Skew constacyclic codes over finite chain rings. *arXiv preprint arXiv:1008.0327*.

- Karakaş, H. İ. (2012). *Cebir Dersleri*. Tüba Yayınları.
- Kong, B., Zheng, X., Liu, J., & Jiang, H. (2023). Quantum codes obtained from skew q - λ -constacyclic codes over R_k . *Quantum Engineering*.
- Lidl, R., & Niederreiter, H. (1994). *Introduction to Finite Fields and Their Applications*. Cambridge University Press.
- Ling, S., & Xing, C. (2004). *Coding Theory: A First Course*. Cambridge University Press.
- Ma, F., Gao, J., & Fu, F. W. (2018). Constacyclic codes over the ring $F_q + vF_q + v^2F_q$ and their applications of constructing new non-binary quantum codes. *Quantum Information Processing*, 17(6).
- Prange, E. (1957). Cyclic error-correcting codes in two symbols. *Air Force Cambridge Research Center*.
- Rifa, J., & Pujol, J. (1997). Translation-invariant propelinear codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 43(2), 590–598.
- Roman, S. (1992). *Coding and Information Theory*. Springer.
- Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3), 379–423.
- Taşçı, D. (2007). *Soyut Cebir*. Alp Yayınevi.
- Verma, R. K., Prakash, O., & Singh, A. (2020, October). Quantum codes from skew constacyclic codes over $F_{p^m} + vF_{p^m} + v^2F_{p^m}$. In *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)* (pp. 156–161). IEEE.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Adı Soyadı : Gamze AVCI

Eğitim Bilgileri:

Lise : Final Temel Lisesi, Denizli 2018
Lisans : Matematik Bölümü, Trakya Üniversitesi, Edirne 2022
Yüksek Lisans : Matematik Bölümü, Trakya Üniversitesi, Edirne 2025

Yayımlanmış Çalışmalar:

- 1) Avcı, G., Dertli, A., & Çengellenmiş, Y. (2024). $F_q R_1 R_2$ Skew Constacyclic Codes & Their Gray Images. *Prespacetime Journal*, 15(3).
- 2) Avcı, G., Dertli, A., & Çengellenmiş, Y. (2024). “On The Structure Of Skew Constacyclic Codes Over A Mixed Alphabet” 5th INTERNATIONAL ISTANBUL CURRENT SCIENTIFIC RESEARCH CONGRESS, İSTANBUL
- 3) Avcı, G., Dertli, A., & Çengellenmiş, Y. (2024). “On The Structure Of Skew Constacyclic Codes Over A Mixed Alphabet” 2.INTERNATIONAL BLACK SEA SCIENTIFIC RESEARCH AND INNOVATION CONGRESS, TRABZON