Obaidullah Jaihon

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

2025

T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan

Obaidullah JAİHON

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Haziran, 2025

KAYSERİ

T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan

Obaidullah JAİHON

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Yüksek Lisans Tezi

Haziran, 2025

KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Obaidullah JAIHON

“Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları” adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan	**Danışman**
Obaidullah JAIHON	Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSALAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin tamamlanmasında, birçok kişi ve kuruluşun desteği olmadan başarıya ulaşmak mümkün olmazdı. Bu nedenle, bu önemli çalışmayı gerçekleştirmemde katkıları bulunan herkese içten teşekkürlerimi sunmak isterim.

İlk olarak, tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Pakize TEMTEK'e mütevazı rehberliği ve sürekli teşvikleri için minnettarım. İlgisi, uzmanlığı ve cesaret verici sözleri sayesinde bu tezi başarıyla tamamlamak için gerekli olan yon ve ilhamı sağladı.

Aynı şekilde, kesirli diferansiyel denklemlerdeki bilgilerimin temelini oluşturan Prof. Dr. M. Tamer ŞENEL hocama teşekkür ederim. Önerileri ve eleştirileri sayesinde çalışmamı daha kapsamlı ve nitelikli hale getirmeme yardımcı oldu.

Son olarak, Annem ve Kardeşim'e beni her adımda destekleyen ve cesaretlendiren güçlü bir destek sağladıkları için teşekkürlerimi sunarım. Onların sevgisi ve inancı, bu tezi tamamlamam için bana güç ve ilham verdi.

Obaidullah JAİHON

Haziran 2025, KAYSERİ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

Obaidullah JAİHON
Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2025
Danışman: Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

Bu çalışmada, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin salınımlı çözümlerinin varlığı incelenecektir. Çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm tezin temelini oluşturmak amacıyla ilgili bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler sunulacaktır. İkinci bölümde, kesirli mertebeden türevler, örnekleri ve bazı temel özellikleri verilecektir. Üçüncü bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü için Laplace ve Sumudu dönüşümleri ve onlara ait olan bazı temel özellikleri incelenecektir. Daha sonra dördüncü bölümde, lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri Laplace ve Sumudu dönüşümleri ile çözümleri verilecektir. Son olarak, beşinci bölümde, sabit nokta teoremi kullanılarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin salınımlı çözümlerinin varlığı ve tekliliği üzerine analiz yapılacaktır. Genel olarak, bu tez önceki araştırma makalelerin bulgularını inceleyerek ve sentezleyerek, kesirli mertebeden diferansiyel denklemer için salınımlı çözümlerin varlığına katkıda bulunmaktadır. Bu çalışmada verilen bulgular, kesirli mertebeden diferansiyel denklemerin salınımlı çözümlerinin varlığını daha iyi anlamamıza yardımcı olmakta ve bu alanda daha fazla araştırmak yapma imkânı sunmaktadır.

Anahtar kelimeler: kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, Laplace ve Sumudu dönüşümleri, lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri, sabit nokta teoremi, salınımlı çözüm

FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS AND IT'S APPLICATIONS

Obaidullah JAIHON

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Science

Master thesis, July 2025

Supervisor: Dr. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

This study will examine fractional order differential equations and the existence of their oscillatory solutions. The work consists of five chapters. The first chapter will provide the fundamental definitions, concepts, and theorems that will be used in the relevant sections to establish the foundation of the thesis. The second chapter will present fractional order derivatives, along with examples and some basic properties. In the third chapter, the Laplace and Sumudu transforms and some of their fundamental properties will be examined for solving fractional order differential equations. Then, in the fourth chapter, solutions to linear fractional order differential equations using the Laplace and Sumudu transforms will be given. Finally, the fifth chapter will analyze the existence and uniqueness of oscillatory solutions of fractional order differential equations using the fixed-point theorem. Overall, this thesis contributes to the existence of oscillatory solutions for fractional order differential equations by reviewing and synthesizing findings from previous research articles. The findings obtained in this study help us better understand the existence of oscillatory solutions in fractional order differential equations and provide opportunities for further research in this field

Keywords: fractional order differential equations, Laplace and Sumudu transforms, linear fractional order differential equations, fixed point theorem, oscillatory solution.

İÇİNDEKİLER

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE UYGULAMALARI

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

2. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE İNTEGRAL

3. BÖLÜM

LAPLACE VE SUMUDU DÖNÜŞÜMLERİ

4. BÖLÜM

LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

5. BÖLÜM

KESİRLİ MERYTEBD DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN UYGULAMASI

KISALTMALAR

C_r^n	: Kombinasyon (Combination)
$\Gamma(.)$	: Gamma Fonksiyonu (Gamma Function)
γ	: Euler'in Sabiti (Euler's Constant)
$\Psi(.)$	: Psi Fonksiyonu (Psi Function)
$B(\alpha,\beta)$	: Beta Fonksiyonu (Beta Function)
$\gamma(a;b)$	: Genelleştirmemiş Gamma (Incomplete Gamma)
$({}_aD_t^{-\alpha}, {}_aI_t^{\alpha})$	: Reimann-Liouvile Integrali (Reimann Integral)
$(ergf(.), erfcf(.))$	: Hata Fonksiyonu (Error Function)
$({}_0D_t^{\alpha}$	: Caputo Türevi (Caputo Derivative)
$(E_\alpha(.), E_{\alpha,\beta}(.))$	: Mittag-Leffler Fonksiyonu (Mittag-Leffler Function)
$F(s) = L\{f(t)\}$	: Laplace Dönüşümü (Laplace Transform)
$L^{-1}\{f(s);\ t\}$	: Ters Laplace Dönüşümü (Inverse Laplace Transform)
$E_t(v,\alpha)$	: Mellin-Rose Fonksiyonu (Mellin-Rose Function)

ŞEKİL LİSTESİ

GİRİŞ

Kesirli mertebeden türev ve integral (Fractional Differentiation), Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen, klasik türev ve integral kavramlarının bir genellemesidir. Kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen, aslında herhangi bir mertebeden türevdir. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları tamsayı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eski olup, kesirli türev ifadesi birçok kaynakta da belirtildiği gibi, ilk olarak 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektupta bahsettiği bilinmektedir[1]. Leibniz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi de aynı konu üzerine çalışmışlardır[2]. Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov kesirli türevidir. Ancak, kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türevin mertebesi tamsayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade tam sayı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmalıdır. Yapılan bazı çalışmalarda belirli şartlar altında bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Birbirleri arasında geçişler olmasına rağmen, tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları farklılık gösterir [3-4]. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olması, problemin türüne göre en uygun olanının kullanılmasını ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Bilindiği üzere içerisinde türev bulunduran denklemler diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Adi diferansiyel denklemler uygulamalı bilim dallarında büyük öneme sahiptir. Bu nedenle diferansiyel denklemler çözümlerinin bilinmesi önemlidir. Ancak belli formdaki diferansiyel denklemler hariç genelde diferansiyel denklemin açık çözümleri elde edilememektedir. Bu durum araştırmacıları çözümleri elde etmeden çözümlerin davranışını araştırmaya yöneltmiştir. Dolayısıyla yapılan çalışmalarda, çözümü analitik olarak bulunmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sınırlılık, kararlılık, asimptotik davranış, salınım ve salınımsızlık gibi nitel(kalitatif) özellikleri incelemektedir. Kalitatif teorinin önemli bir konusu da salınım teorisidir. Salınım teorisinin temeli 1838'da Storum tarafından yayınlanan, ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. O zamandan beri farklı tipteki lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmıştır. Adi diferansiyel denklemler benzer şekilde kesirli diferansiyel denklemler de tanımlanabilir. Kesirli diferansiyel denklemler, akışkanlar mekaniği, kimyasal fizik, elektronik devreler, dinamik sistem kontrol teorisi, akışkan dinamiği, ekonomi ve çok çeşitli alanları kapsayan geniş ve çok yönlü uygulamaları da dâhil olmak üzere, farklı alanlardaki yaygın kullanımları nedeniyle önemli bir ilgi görmüştür[5-7]. Son yıllarda kesirli (adi ve kısmı) diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesine yönelik çalışmalar artmıştır. Kesirli diferansiyel denklemlerin bir kısmının analitik çözümü için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin kesirli diferansiyel denklemlere uygulamalarında, kesirli integral ve türev operatörleri etkili bir şekilde kullanılmaktadır[8]. Ayrıca bilim adamları, kesirli mertebeden fonksiyonel diferansiyel denklemlerin salınım teorisine yönelik eğilimlerini, bu teorinin hem temel teorik önemini hem de pratik uygulamalardaki geniş kapsamlı katkılarını dikkat alarak ortaya koymuşlardır[9-12]. Kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili son gelişmeler, Kil bas [6] ve Diethelm'in [5] çalışmalarında ve [13-17] makalelerinde ve bunlarda verilen referanslarda bulunabilir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımına ilişkin artan bir ilgi vardır. Son yıllardaki çalışmalarda, Grace ve diğerleri [18], Harikrishnan ve arkadaşları [14], Raheem ve diğerleri [19], Zhou ve arkadaşları [20] ile Feng ve diğerleri [21], kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler için salınım ve zorlanmış salınım özelliklerini incelemiştir. Kesirli diferansiyel denklemler için yalıtımsızlık teorisi ise, Zhou ve diğerleri [22], Sun ve arkadaşları [23] ile Grace ve arkadaşları [12] gibi araştırmacılar tarafından daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmıştır. Bu tez, kesirli mertebeden diferansiyel denklemeri inceleyerek kesirli mertebeden diferansiyel denklemerin salınımlı çözümlerin varlığını daha iyi anlamamızı amaçlamaktadır.

1. Bölüm

TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu tez, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin ve uygulamaları üzerine yapılan bir araştırma olduğundan, bu bölümde, çalışmamızın temel kavramlarına, tanımlarına ve teoremlere yer verilecektir.

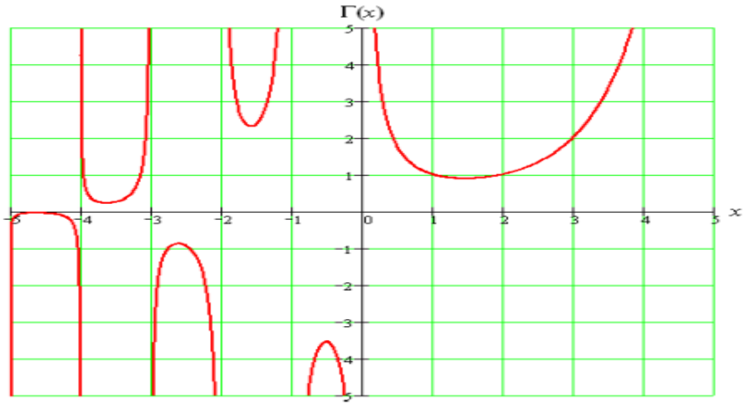
1.1 Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu birçok farklı şekilde tanımlanabilir. $\Gamma(z)$ Fonksiyonu, $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ gibi negatif tam sayı değerlerinde tanımsızdır. Bunun dışında, pozitif reel ve karmaşık **z** değerleri için iyi tanımlıdır. Örneğin, $\Gamma(5)$, $\Gamma(-\frac{1}{3})$, $\Gamma(\frac{2}{5})$ ve $\Gamma(-\frac{7}{2})$ tanımlıdır. Γ (0), $\Gamma(-3)$ ve $\Gamma(-5)$ tanımısızdır. Ayrıca, $\Gamma(z)$ fonksiyonu, $\Re(z) > 0$ (yani, z'nin reel kısmı pozitif olan) durumlarda aşağıdaki şekillerde yazılabilir[24].

Tanım 1.1 [25]. Gamma fonksiyonu ya da Euler'in ikinci tür integraliyle

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt \qquad , \qquad (z > 0, z \in \mathbb{R}, \mathbb{Z}), \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Gamma fonksiyonun grafığı aşağıdaki şekilde gösterebiliri



Şekil 1. Gamma Fonksiyonu

Tanım 1.2 [25].

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}. \tag{1.2}$$

Tanım 1.3 [25].

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \frac{1}{\mathrm{z}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{z} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}. \tag{1.3}$$

Tanım 1.4 [25].

$$\frac{1}{\Gamma(\mathrm{z})} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}. \tag{1.4}$$

burada γ Euler sabiti olup

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\right\} \approx 0.57721566\ldots \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Gamma Fonksiyonunun Bazı Temel Özellikleri:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

- $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)! = n!$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(x) = \int_0^1 (-logz)^{x-1}\, dz$
- $\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \quad , \quad x'in\ negatif\ değerleri\ için$
- $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$
- $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}(lnt)^n dt\ , x > 0$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \pi sec\pi z$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

şeklinde yazılabilir[24].

1.2 Eksik(incomplete) Gamma Fonksiyonu

Tanım 1.5 [26]. Her x, $Re(z) > 0\ için$

$$\Gamma(z,x) = \int_x^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.6}$$

ve

$$\gamma(z,x) = \int_0^x e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.7}$$

şeklindedir.

$\Gamma(\mathrm{z},\mathrm{x}), \gamma(\mathrm{z},\mathrm{x})$ sırasıyla x ile ilişkili eksik(incomplete) gamma fonksiyonları olarak adlandırılır.

Bilinmelidir ki

$$\Gamma(z,x)+\gamma(z,x)=\Gamma(\mathrm{z}) \tag{1.8}$$

dır.

Tanım 1.6 [27]. $Re(z) > 0$ için eksik(incomplete) Gamma fonksiyonu

$$\gamma*(z,x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{z})\mathrm{x}^{\mathrm{z}}}\gamma(z,x)=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{z})\mathrm{x}^{\mathrm{z}}}\int_0^x e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanan özel fonksiyonlardır.

1.3 Digamma Fonksiyonu

Digamma fonksiyonu, gamma fonksiyonunun logaritmik türevi olarak tanımlanan özel bir fonksiyondur. Buna göre,

$$\Psi(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln\big(\Gamma(x)\big)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{1.10}$$

şeklindedir[27]. Ayrıca[28]

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{v-1}lnxdx=\beta(\mu,v)[\Psi(\mu)-\Psi(\mu+v)]. \tag{1.11}$$

1.4 Beta Fonksiyonu

Tanım 1.7 [25]. Beta fonksiyonu Euler’in birinci tür integrali ile

$$\beta(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds \quad Re(x) > 0\,, \quad Re(y) > 0 \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlanır.

Beta Fonksiyonun Bazı Özellikleri:

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x,y \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,\dots\} \tag{1.13}$$

- $\beta(x,y) = \frac{q-1}{p+q-1}\,\beta(x,y-1)$
- $\beta(x,y) = \beta(y,x)$
- $\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sint)^{2x-1}\,(cost)^{2y-1}dt\,;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
- $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$
- $\beta(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$
- $\beta(x,1) = \frac{1}{x}$

şeklinde yazılabilir[29].

1.5 Mittag- Lefler Fonksiyonu

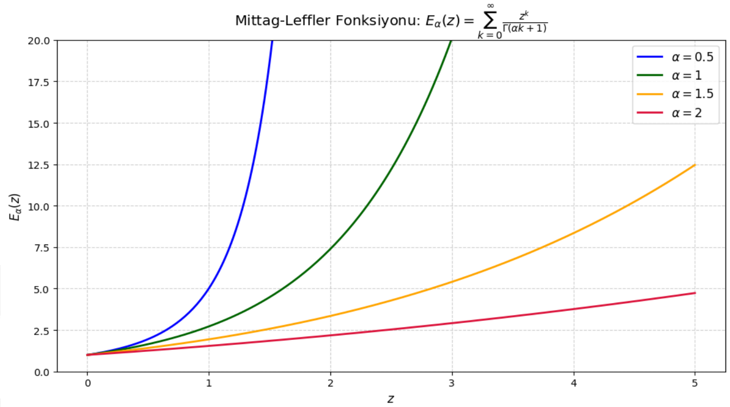
1902 yılında İsveçli matematikçi Gösta Mittag–Lefler, Mittag–Lefler fonksiyonunu tanımladı. Bu fonksiyon, üstel fonksiyonun basit bir genellemesidir. Son yıllarda Mittag–Lefler fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemlerin araştırılmasında oynadığı rol nedeniyle araştırmacıların büyük ilgisini çekmiştir. Bu fonksiyon, kesirli diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinde sıkça karşımıza çıkar.

Tanım 1.8 [30]. Tek parametreli Mittag–Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad Req(\alpha) > 0 \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $0 < \alpha < 1$ için tek parametreli Mittag–Leffler fonksiyonu, üstel fonksiyon e^x ile hipergeometrik fonksiyon $\frac{1}{1-x}$ arasında bir geçiş sağlar.

Tek parametreli Mittag–Leffler fonksiyonun grafiğini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

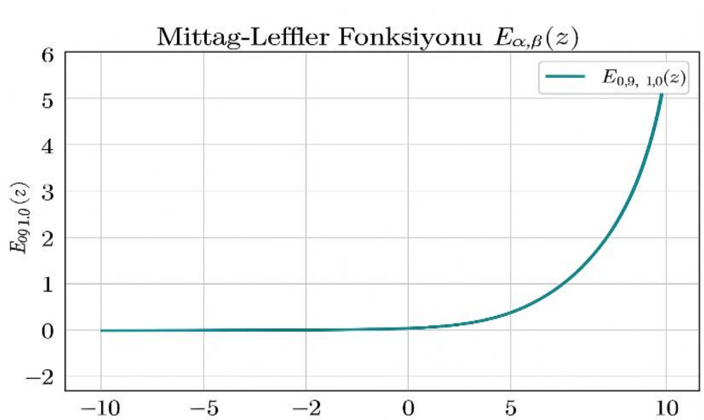


Şekil 2. Mıttag-Liffler Tek Parametreli Fonksiyonu

Tanım 1.9 [6]. İki parametreli Mittag–Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad , \quad Req(\alpha), Req(\beta) > 0 \ , \quad \beta \in \mathbb{C} \tag{1.15}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İki parametreli Mittag–Leffler fonksiyonu grafiğini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Şekil 3. Mıttag-Liffler İki Parametreli Fonksiyonu

Teorem 1.1 [31]. $\alpha > 0, \beta > 0$ için iki parametreli Mettag–Leffler Fonksiyonun k-inci türevi

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!\, y^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}\ , \qquad (k = 0,1,2,3 \ldots) \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlanır.

Mittag–Leffler Fonksiyonunun Bazı Özellikleri:

- $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$
- $E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{0!} = \frac{1}{z-1}$
- $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\mathrm{k}!} = e^z$
- $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\mathrm{k}!} = \frac{e^z-1}{z}$
- $E_{1,3}(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\mathrm{k}!} = \frac{e^z-z-1}{z^2}$
- $E_{1,0}(z) = z\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = ze^z$
- $E_{1,\frac{1}{2}}(az) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + e^{az}\sqrt{az}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{az}\right)$
- $E_{1,\frac{3}{2}}(az) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \frac{e^{az}}{\sqrt{az}}\mathrm{erf}\left(\sqrt{az}\right)$
- $E_{1,\frac{5}{2}}(az) = \frac{1}{az}\left[\frac{e^{az}}{\sqrt{az}}\mathrm{erf}\left(\sqrt{az}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$
- $E_{1,-\frac{1}{2}}(az) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + (az)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{az}e^{az}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{az}\right)\right]$
- $E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(z)$
- $E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right\}$
- $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2\mathrm{k})!} = \cosh(z)$

- $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$

şeklinde yazılabilir[7].

1.6 Mellin-Ross Fonksiyonu

Tanım 1.10 [24]. Mellin-Ross fonksiyonu, bir üstel fonksiyonun kesirli türevini bulurken ortaya çıkar. Fonksiyon hem eksik Gamma hem de Mittag-Leffler fonksiyonları ile yakından ilişkilidir ve

$$E_t(z,a) = t^z e^{at} \gamma * (z,t) \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu fonksiyon

$$E_t(z,a) = t^z \sum_{0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+z+1)} = t^z E_{1,z+1}(at) \tag{1.18}$$

şeklinde de yazılabilir.

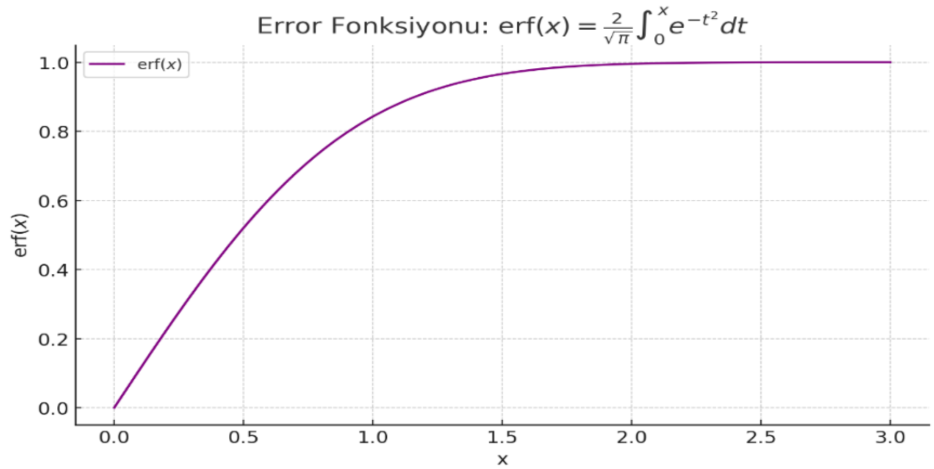
1.7 Hata Fonksiyonu

Gauss hata fonksiyonu olarak adlandırılan hata fonksiyonu, istatistik, olasılık teorisi ve difüzyonu tanımlayan kısmi diferansiyel denklemlerde yer almaktadır.

Tanım 1.11 [32]. Hata fonksiyonu

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2}\,dx \ , \qquad x \geq 0 \tag{1.19}$$

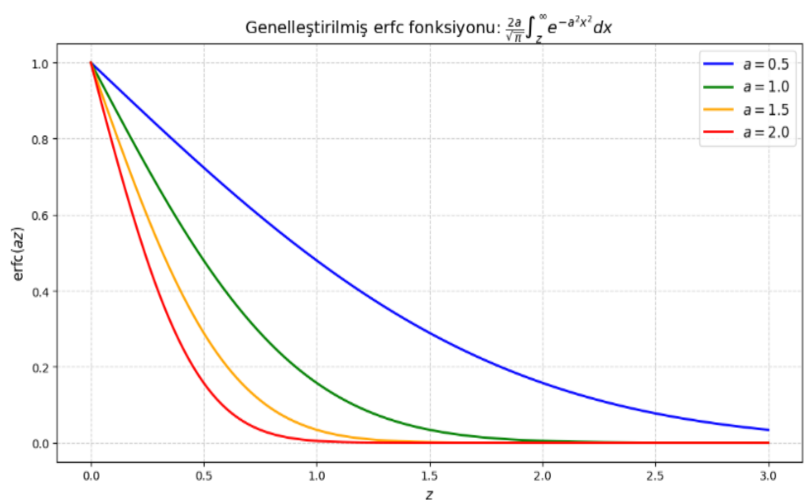
şeklinde tanımlanır.



Şekil 4. Hata Fonksiyonu

Tanım 1.12 [32]. Geneleştirilmiş hata fonksiyonu

$$erfc(az) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} e^{-a^2x^2}\,dx \qquad (1.20)$$



Şekil 5. Geneleştirilmiş Hata Fonksiyonu

2. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV VE İNTEGRAL

Bu bölümde, kesirli mertebeden integrasyon ve kesirli türev tanımları ve özellikleri ele alınarak incelenecektir.

2.1 Giriş

Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integralin bir genellemesidir. Aynı zamanda, integral ve türev operatörlerinin geleneksel tanımlarından türeyen bir matematiksel çalışma alanıdır. Bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında sıklıkla kullanılmıştır. [1, 33].

Kesirli mertebeden türev ve integral, n pozitif sayı olmak üzere $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevlerinin yerine n herhangi bir reel, irrasyonel, kesirli veya karmaşık sayı olduğunda genişletilebilir mi? Sorusundan ortaya çıkmıştır.

Bu soru ilk kez L'Hopital tarafından 30 Eylül 1695 tarihli bir mektubunda ileri sürülmüştür. L'Hopital, Leibniz'e yazdığı mektupta, "$n = \frac{1}{2}$ olursa ne sonuç çıkar?" diye sormuştur. Leibniz ise, "Bu bir paradoksa yol açar" diye yanıtlamış ve de "Bu görünüşteki paradokstan bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacaktır" şeklinde eklemiştir [33].

Bundan sonra, yıllar içinde birçok tanınmış matematikçi, mertebeden türev ve integral teorisine katkıda bulunmuştur. Bunlar arasında Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann ve Liouville, Weyl, Leibniz, Grünwald ve Letnikov bulunmaktadır [[1], [34], [27], [35], [33], [7]]. Her biri kendi notasyonunu kullanarak, tam sayı olmayan dereceli integral veya türev

kavramlarını vermişlerdir. Kesirli Kalkülüs alanı, birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [[27], [36], [35], [7], [7]].
1730 yılında Euler, türevin integral dereceleri arasında interpolasyonundan bahsetmiştir. 1812'de Laplace, bir integral aracılığıyla kesirli bir türev tanımlamıştır ve kesirli dereceli bir türev hakkındaki ilk çalışma, 1819'da Lacroix tarafından yazılan bir kalkülüste yer almıştır [34].

Tanım 2.1 [37]. Lacroix, x^m fonksiyonunun n'inci türevini kesirli mertebeden türev için formüle etmek amacıyla, m pozitif bir tam sayı olmak üzere, türev işlemini indüksiyonla geliştirir yani $y = x^m$ in birinci türev $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere n mertebeden türev

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n$$

şeklindedir. Burada faktöriyel yerine gamma fonksiyonları kullanıldığında

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+1)} x^{m-n}$$

şeklinde yazılabilir.
Özel olarak, $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ için $y = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevi

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.2 [27]. Fourier, herhangi bir kesirli mertebeden türevi incelemiştir. Fourier'in $f(x)$ fonksiyonunun integral temsili

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}]dp$$

şeklindedir. Fourier

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos[p(x-\alpha)] = p^n \cos[p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}]$$

Bu formülden kesirli operatör tanımını elde etmiştir.
n yerine u konulup, u herhangi bir değer (pozitif veya negatif) olmak üzere şekilde

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{p^u}\cos[p(x-\alpha)+\frac{n\pi}{2}]dp$$

yazılabilir.

Tanım 2.3 [27]. Abel, 1823 yılında kesirli mertebeden işlemleri ilk kullanan kişiydi ve kesirli mertebeden türev ve integral, Tautohron problemine yönelik bir integral denkleminin çözümünde uygulamıştır [36]. Tautohron problemini şöyle açıklar: "Tautohron problemi, bir eğride sürtünmesiz bir nokta kütlesinin eğri boyunca yerçekimi etkisiyle kayarak inme süresinin başlangıç noktasından bağımsız olan eğrinin şeklini belirleme problemidir" [36]. Bu problemde, kayma süresi, k adı verilen bilinen bir sabittir, öyle ki

$$\begin{aligned} \mathrm{k} &= \int_0^{\mathrm{x}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \\ &= \sqrt{\pi}\int_0^{\mathrm{x}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}(x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\pi}\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}}f(x)$$

dir. Denklemin her iki tarafını $\frac{1}{2}$ merteben türevini alarak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}k = \sqrt{\pi}\,\mathrm{f(x)}$$

sonucu elde etti.

Tanımı 2.4 [27, 37]. Liouville, kesirli mertebeden türev ve integrali ilk büyük çalışmasını yapmış ve bu alanda iki tanım elde etmiştir. Tanımları, teori üzerindeki problemlere uygulamasında başarılı olmuştur. Liouville ilk tanımı

$$D^n(e^{ax}) = a^n e^{ax}\ , n \in \mathbb{Z}^+,$$

olmak üzere keyfi herhangi bir mertebeden v inci türevi olan

$$D^v(e^{ax}) = a^v e^{ax},$$

Genelleştirilmesinden ortaya çıkarmıştır. Böylece herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x} \quad , burada\ Re(a_n) > 0, \forall n$$

şeklinde bir seri halinde ifade edilebilir. Fonksiyonun kesirli mertebeden türevi ise

$$D^v f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a_n)^v e^{a_n x}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanımı2.5 [27, 37]. Liouville'in ikinci tanımı, Gamma integrali ile ilişkili olan

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} u^{a-1}\, e^{-xu} du\,, \qquad x > 0, a > 0$$

integrali üzerine kurulmuştur.

Bu integralda $t = xu$ değişken değişme yapılırsa, $dt = xdu$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{a-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{x} du \\ &= x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \\ &= x^{-a} \Gamma(a) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-xu} du$$

olur. Böylece $a > 0$ için x^{-a} fonksiyonunun kesirli mertebeden türevi bulunur. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının D^v türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} D^v x^{-a} &= \frac{1}{\Gamma(a)} D^v \left(\int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-xu} du \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} (-1)^v u^v e^{-xu} du \\ &= \frac{(-1)^v}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+v-1} e^{-xu} du \end{aligned}$$

dir. Tekrar $t = xu$ dönüşümü yapılırsa, $dt = xdu$ olmak üzere

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{a+v-1} e^{-t} \cdot \frac{dt}{x}$$

ve buradan

$$D^v x^{-a} = \frac{(-1)^v \Gamma(v+a)}{\Gamma(a)} x^{-a-v}, \qquad a > 0, x > 0$$

elde edilir.

Liouville'in ilk tanımının yalnızca trigonometrik seri olarak ifade edilebilen fonksiyonlar için geçerli olduğunu ve ikinci tanımın ise $a > 0$ için x^{-a} tipi fonksiyonlar için faydalı olduğunu vurgulayalım. Her iki tanımında kesirli mertebeden türev tanımlamaları olduğunu dikkate alalım.

Tanım 2.6 [[27],[37]]. Rieman, kesirli mertebeden integrali tanımını

$$D^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t)dt + \psi(x) \quad , Re(x) > 0$$

şeklinde vermiştir. Burada $\Psi(x)$ tamamlayıcı fonksiyondur. Integralin c alt sınırındaki belirsizlik için, Riemann bu fonksiyonu eklemiştir. "Tamamlayıcı fonksiyon, esasen üstel yasadan sapmanın bir ölçüsünü sağlama çabasıdır. Örneğin, bu yasa daha sonra belirtileceği gibi, ${}_c^R D_x^{-\mu} {}_c^R D_x^{-v} f(x) = {}_c^R D_x^{\mu-v} f(x)$ şeklindedir ve alt limitler c eşit olduğunda geçerlidir. Riemann, $c \neq c_0$ iken ${}_c^R D_x^{-\mu} {}_{c_0}^R D_x^{-v} f(x)$ durumu için sapmanın bir ölçüsüyle ilgilenmiştir [36].

Tanım 2.7 [27]. Kesirli mertebeden integralin Riemann-Liouville tanımının ilk hesaplaması 1869 yılında N. Ya. Sonin, " On differentiation with arbitrary " başlıklı bir makale yayımlamıştır [38]. Tanım, n-inci integral için Cauchy formülüne dayanmaktadır ve

$$ {}_{c}^{R}D_{x}^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{c}^{x} (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad , Re(x) > 0 $$

şeklinde verilir. Eğer bunu Riemann tanımıyla karşılaştırırsak, tamamlayıcı fonksiyon $\Psi(x)$ hariç, aynı olduğunu görürüz. Riemann-Liouville tanımı, kesirli kalkülüsün en popüler tanımı olduğu için daha sonra detaylı bir şekilde incelenecektir.

Kesirli Mertebeden Türev İle Klasik Türev Arasındaki İlişki:

Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integralin bir genellemesi olduğundan, klasik türev ve integral, Kesirli mertebeden türev ve integralin bir parçası olarak kabul edilir, çünkü reel mertebeli operatör (türev veya integral gibi) ilgilendiğimizde, bu işlemler zaten tam sayı mertebeli operatörleri(işlemleri) de kapsar.
Bilindiği üzere klasik türev ve integraline, türev ve integral benzersiz bir şekilde tanımlanmıştır. Bu durum kesirli mertebeden integral için de geçerlidir. Ancak kesirli mertebeden türev için birkaç farklı tanım bulunmaktadır ve bunlar birbirleriyle tutarsızdır. Çoğu zaman, bazı tanımlar birbirine eşdeğer değildir, bu da durumu daha karmaşık hale getirir[39].

Kesirli Mertebeden İntegrasyon ve Kesirli Türevler

Bu kesimde, kesirli mertebeden integrasyonlar arasında yer alan Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali ve özellikleri ele alınacaktır. Bu konu [[40], [27] , [41]] çalışmalarında kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

2.2 Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Integrali

Burada ilk olarak tekrarlı integrasyon için Cauchy formülünü verelim.

Teorem 2.1[41]. (Tekrarlı İntegrasyon için Cauchy Formülü) f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun

$$f^{(-n)}(x)=\int_a^x\int_a^{\tau_1}\dots\int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_{n-1})d\tau d\tau_{n-1}\dots d\tau_2 d\tau_1$$

a noktasında n-inci mertebeden tekrarlı integrali

$$f^{(-n)}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

şeklinde tek bir integral ile ifade edilir.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için tümevarım metodunu uygulayalım.
İlk olarak $n=1$ için

$$\int_a^x f(\tau_1)d\tau_1=\frac{1}{(0)!}\int_a^x (x-t)^0 f(t)dt$$

olur. Böylece ifade $n=1$ durumu için geçerlidir. İfadenin herhangi bir n için doğru olduğunu varsayalım. Şimdi bunu $n+1$ için doğruluğunu ispatlayalım. Yukarıdaki integral $n+1$ için

$$f^{-(n+1)}(x)=\int_a^x\int_a^{\tau_1}\dots\int_a^{\tau_n} f(\tau_{n+1})d\tau_{n+1}d\tau_n\dots d\tau_2 d\tau_1$$

şeklinde yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} f^{-(n+1)}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\int_a^x (\tau_1-t)^{n-1}f(t)dtd\tau_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\int_t^x (\tau_1-t)^{n-1}f(t)d\tau_1 dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x ((x-t)^n - (t-t)^n) f(t) dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt$$

bulunur. Bu formülden kesirli integralin tanımı elde edilir. Böylece herhangi bir reel mertebeye sahip bir integral alabiliriz. Burada $(n-1)!$ yerine $\Gamma(n)$ ve integraldeki n kuvveti yerine $\alpha \in R^+$ alınırsa, Riemann-Liouville kesirli integralini elde edilir.

Tanım 2.8[41].(Riemann-Liouville Operatörü). $f, \alpha \in R^+$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon ve ve $x \in R$ olsun. α mertebeli kesirli mertebeden integral

$$\mathrm{D}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlıdır.

Riemann-Liouville Kesirli mertebeden İntegrasyonunun Örnekleri

Burada kuvvet fonksiyonu, sabit fonksiyon ve üstel fonksiyonu gibi fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli mertebeden İntegralarını hesap edelim.

Örnek 2.1 [39].$m \in N$ olmak üzere $f(x) = x^m$ kuvvet fonksiyon için kesirli mertebeden integrali hesap edelim.

Çözüm: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$\mathrm{D}^{-\alpha} x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^m dt$$

şeklinde yazılılabilir. Bu integralde $0 \leq u \leq 1$ için $t = xu$ değişken değiştirme yapılırsa, $dt = xdu$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{-\alpha}x^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-ux)^{\alpha-1}(ux)^m x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x^{\alpha+m}(1-u)^{\alpha-1}u^m du \\
&= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^m du \\
&= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha, \mathrm{m}+1) \\
&= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\alpha+\mathrm{m}+1)}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{D}^{-\alpha}x^m = \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\alpha+\mathrm{m}+1)}x^{\alpha+m} \tag{2.2}$$

elde edilir.

Örnek 2.2 [39]. Örnek 3.1 de $\alpha = 1$ olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonunun kesirli mertebeden integralini bulalım.

Çözüm: (2.2) formülü kullanarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{-1}x^2 &= \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1+2+1)}x^{1+2} \\
&= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)}x^3 \\
&= \frac{\Gamma(3)}{3\Gamma(3)}x^3 \\
&= \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.3 [39]. Herhangi bir k sabit fonksiyonu için kesirli mertebeden integrali bulalım.

Çözüm: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{-\alpha}k &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}k\,dt \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

dir. Bu integralde $t = xu\ (0 \leq u \leq 1)$ değişken değişmişi yapılırsa, $dt = xdu$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{-\alpha}k &= \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-xu)^{\alpha-1}x\,du \\
&= \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}du \\
&= \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\beta(1,\alpha) \\
&= \frac{kx^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre herhangi bir sabit fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali

$$\mathrm{D}^{-\alpha}k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha} \tag{2.3}$$

şeklinde verilir.

Örnek 2.4 [39]. (2.3) den $\alpha = 1$ için

$$\mathrm{D}^{-1}k = \int_0^x k\,dt = \frac{k}{\Gamma(1+1)}x^1 = kx$$

bulunur.

Örnek 2.5 [39]. e^{ax} üstel fonksiyonu için kesirli mertebeden integrali bulalım.

Çözüm: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$\mathrm{D}^{-\alpha} e^{ax} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{at} dt$$

dir. Burada $0 \leq u \leq 1$ için $t = x(1-u)$ değişken değiştirme yapılırsa $dt = -xdu$ olmak üzere

$$\mathrm{D}^{-\alpha} e^{ax} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 \big(x - x(1-u)\big)^{\alpha-1} e^{ax(1-u)} (-x) du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha} u^{\alpha-1} e^{ax} e^{-\alpha x u} du$$

$$= \frac{x^{\alpha} e^{ax}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} e^{-\alpha x u} du$$

ve burada $r = axu\ ve\ \ dr = axdu$ değişken değişimi uygulanırsa

$$\mathrm{D}^{-\alpha} e^{ax} = \frac{x^{\alpha} e^{ax}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{ax} \left(\frac{r}{ax}\right)^{\alpha-1} e^{-\mathrm{r}} \cdot \frac{1}{ax} du$$

$$= \frac{x^{\alpha} e^{ax}}{\Gamma(\alpha)(ax)^{\alpha}} \int_0^{ax} r^{\alpha-1} e^{-\mathrm{r}} du$$

olur. (1.9) dan

$$\mathrm{D}^{-\alpha} e^{ax} = x^{\alpha} e^{ax} \gamma * (\alpha, ax)$$

ve (1,17) den

$$\mathrm{D}^{-\alpha} e^{ax} = E_x(\alpha, a) \tag{2.4}$$

şekilde elde ederiz.

Örnek 2.6 [39].(2.4)'te $\alpha = 2$ için

$$\mathrm{D}^{-2}e^{ax} = \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^x (x-t)^{2-1}e^{at}dt$$
$$= \frac{e^{ax}}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}$$

elde edilir.

Örnek 2.7 [39]. $ln(x)$ Fonksiyonunun Kesirli mertebeden İntegralini bulalım.

Çözüm: Kesirli mertebeden integral tanımını kullanarak

$$\mathrm{D}^{-\alpha}lnx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}lntdt$$

yazılabilir. Bu integralda $t = xu$ $(0 \le u \le 1)$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $dt = xdu$ olmak üzere

$$\mathrm{D}^{-\alpha}lnx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1}\ln(xu)\,xdu$$
$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\ln(xu)\,xdu$$
$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 s(1-u)^{\alpha-1}\ln(x)\,xdu + \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\ln(u)\,xdu\right]$$
$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}lnx\beta(1,\alpha) + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\ln(u)\,xdu$$

bulunur. Logaritmanın özelliği (2.5) ve (1.11) denklemlerden yararlanarak

$$\mathrm{D}^{-\alpha}lnx = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}lnx + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\beta(1,\alpha)[\Psi(1) - \Psi(\alpha+1)]$$
$$= \frac{x^{\ \alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}lnx + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}[-\gamma - \Psi(\alpha+1)]$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} lnx + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [-\gamma - \Psi(\alpha+1)]$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [lnx - \gamma - \Psi(\alpha+1)]$$

elde edilir.

Örnek 2.8 [39]. $g(x) = xf(x)$ biçimindeki fonksiyonların kesirli mertebeden integrallerini bulalım.

İspat: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$\begin{aligned}
D^{-\alpha} xg(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t g(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (x-(x-t)) g(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} x g(t) dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} g(t) dt \\
&= xD^{-\alpha} g(x) - \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} g(t) dt \\
D^{-\alpha} xg(x) &= xD^{-\alpha} g(x) - \alpha D^{-(\alpha+1)} f(x)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden İntegralin Özellikleri:

Lemma 2.1 [41](Lineerlik özelliği). $\alpha > 0$ olmak üzere $C, K \in R$, ve f ve g iki kesirli mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$D^{-\alpha}[Cf(x) + Kg(x)] = CD^{-\alpha} f(x) + KD^{-\alpha} g(x) \tag{2.5}$$

dir.

İspat: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$D^{-\alpha}[Cf(x)+Kg(x)]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[Cf(t)+Kg(t)]dt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}D^{-\alpha}[Cf(x)+Kg(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[Cf(t)]dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[Kg(t)]dt\\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt+\frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt\\ &= CD^{-\alpha}f(x)+KD^{-\alpha}g(x)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Lemma 2.2 [40](Kesirli Mertebeden İntegrallerde Üstel İfadesi). f sürekli ve kesirli mertebeden integrallenebilir bir fonksiyon ve α, μ > 0 sabitler olmak üzere

$$D^{-\mu}[D^{-\alpha}f(x)]=D^{-(\mu+\alpha)}f(x)=D^{-\alpha}[D^{-\mu}f(x)] \tag{2.6}$$

dir. İspatı vermeden önce ispatta kullanacağımız Dirichlet formülünü ifade edelim.

Dirichlet formülü [40] h fonksiyonu Öklid düzleminde sürekli bir fonksiyon ve μ, α pozitif sayılar olmak üzere

$$\int_0^t\int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\alpha-1}h(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^t\int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\alpha-1}h(x,y)dxdy \tag{2.7}$$

dir. $h(x,y)=f(y)$ olduğunda (2.7) denklemi

$$\int_0^t\int_0^x (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\alpha-1}f(y)dxdy=\beta(\mu,\alpha)\int_0^t (t-y)^{\mu+\alpha+1}f(y)dy \tag{2.8}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

İspat: Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına göre

$$D^{-\mu}[D^{-\alpha}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}[D^{-\alpha}f(t)]dt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{-\mu}[D^{-\alpha}f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)\right]dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha)}\int_0^x\int_0^t (x-y)^{\mu-1}(t-y)^{\alpha-1}f(y)dydt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\alpha)}\beta(\mu,\alpha)\int_0^x (x-y)^{\mu+\alpha-1} f(y)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+\alpha)}\int_0^x (x-y)^{\mu+\alpha-1}f(y)dy \\ &= D^{-(\mu+\alpha)}f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Kesirli İntegralin Türevleri ve Türevlerin Kesirli İntegrali

Burada α inci mertebeden kesirli mertebeden integralin türevini alma işlemi ile birinci türev üzerinde $\alpha + 1$ inci kesirli mertebeden integralin uygulanması durumları incelenecektir. Bu durumlarla ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2 [27]. $\alpha > 0$ ve f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere Df, $[0,\infty)$ aralığındaki herhangi bir alt aralık üzerinde integrallenebilir ise,

$$D^{-\alpha-1}[Df(x)] = D^{-\alpha}f(x) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha} \tag{2.9}$$

dir. Df, $[0,\infty)$ aralığında sürekli olmak üzere $x > 0$ için

$$D[D^{-\alpha}f(x)] = D^{-\alpha}[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \tag{2.10}$$

dir.

İspat: Kesirli mertebeden integral tanıma göre

$$D^{-\alpha-1}[Df(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} Df(t)dt$$

dir. Kısmi integral metoduna göre

$$u = (x-t)^{\alpha} \quad , \quad dv = Df(t)dt$$
$$du = -\alpha(x-t)^{\alpha-1}dt \ , \quad v = f(t)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{-\alpha-1}[Df(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\{[(x-t)^{\alpha}f(t)]_0^x + \int_0^x \alpha(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[-x^{\alpha}f(0) + \alpha[\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt] \\ &= D^{-\alpha}f(x) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat: Kesirli mertebeden integral tanıma göre

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

bu integralde $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ için $t = x - u^{\lambda}$ ($0 \leq u \leq x^{\alpha}$) dönüşümü uygulanırsa $dt = -\lambda u^{\lambda-1}\, du$ olmak üzere

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x^\alpha}^{0} \left(y^\lambda\right)^{\alpha-1} f\left(x - u^\lambda\right)(-\lambda u^{\lambda-1})\,du$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x^\alpha} u^{\lambda(\alpha-1)}\, u^{\lambda-1} f\left(x - u^\lambda\right)du$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{x^\alpha} f\left(x - u^\lambda\right)du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{x^\alpha} f\left(x - u^\lambda\right)du$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafına D operatörü uygulanırsa,

$$D[D^{-\alpha}f(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{x^\alpha} f\left(x - u^\lambda\right)du\right]$$

dir. Burada

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{b(x)} f(x,t)dt\right] = f(x, b(x)b'(x) + \int_0^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt \tag{2.11}$$

şeklindeki Leibnitz İntegral Kuralı kullanılırsa,

$$D[D^{-\alpha}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}[f(x - (x^\alpha)^\lambda)\alpha x^{\alpha-1} + \int_0^{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} f\left(x - u^\lambda\right)du\,]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(0)\alpha x^{\alpha-1} + \int_0^{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} f\left(x - u^\lambda\right)du\right]$$

elde edilir. Burada $x - u^\lambda = t$ değişken değişimi yapılırsa

$$D[D^{-\alpha}f(x)] = \frac{\alpha f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} f(t)\left(-\frac{1}{\lambda}u^{1-\lambda}\right)dt$$

$$= \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x} f(t) dt$$

$$= \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (x-t)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x} f(t) dt$$

$$= \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + D^{-\alpha}[Df(x)]$$

$$D[D^{-\alpha} f(x)] = D^{-\alpha}[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}$$

(3.10) ifadesi elde edilir. Buradan sonuç olarak

$$D[D^{-\alpha} f(x)] \neq D^{-\alpha}[Df(x)] \tag{2.12}$$

olduğu görülür.

Örnek: f(x) = k ve $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$D\left[D^{-\frac{1}{2}}(k)\right] = D^{-\alpha}[D(k)]$$

$$D^{\frac{1}{2}}(k) = 0$$

$$D^{\frac{1}{2}}(k) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-u)^{-\frac{1}{2}} k du$$

$$= \frac{kt^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} du \quad = \frac{kt^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-r)^{-\frac{1}{2}} r du$$

$$= \frac{kt^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{5}{2})} kt^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} kt^{-\frac{1}{2}}$$

Kesirli mertebeden türevler

Kesim 2.1 de bir $f(x)$ fonksiyonunun kesirli mertebeden integrali tanımlandı. Kesirli mertebeden türevlerin tanımı, kesirli mertebeden integralin tanımına bağlı olduğunduğu için kesirli mertebeden türevlerden önce kesirli integrali tanımı ele alınmıştır. Bu kesimde, Riemann-Liouville, Caputo ve Grunwald-Letnikov Kesirli mertebeden türevlerin tanımı, bazı özellikleri ve örnekleri verilecektir. Daha fazla bilgi için [[42], [43], [33]] kaynaklarına bakılabilir.

2.3 Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türevi

Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi, Riemann-Liouville kesirli mertebeden integralinin tanımına bağlı olarak ifade edilebilir. Bu türev, kesirli mertebeden integralin klasik türevini almak suretiyle tanımlanır[39]. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\left[\mathrm{D}^{-(1-\alpha)} f(x)\right] &= D\left[D^{-1} D^{-(1-\alpha-1)} f(x)\right] \\ &= \mathrm{D}[\mathrm{D}^{-1} D^{\alpha} f(x)] \end{aligned}$$

ve

$$\mathrm{D}\left[\mathrm{D}^{-(1-\alpha)} f(x)\right] = D^{\alpha} f(x)$$

bulunur. Şimdi kesirli mertebeden integralin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \end{aligned}$$

eğer n kez fraktal integral alınırsa,

$$D^{\alpha} f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx}}_{n} D^{-(n-\alpha)} f(x)$$

bulunur. Böylece

$$D^{\alpha} f(x) = D^{n}\left[D^{-(n-\alpha)} f(x)\right], \qquad n-1 \leq \alpha < n \tag{2.13}$$

elde edilir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin tanımını verelim.

Tanım 2.9 [33]. $f: R \to R$ sürekli bir f fonksiyonunun α ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \dfrac{d^{n}}{dx^{n}} \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad , & n-1 \leq \alpha < 1 \\ \dfrac{d^{n}}{dx^{n}} f(x) \quad , & a = n \in N \end{cases} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlıdır, burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonudur.

Riemann-Liouville Kesirli mertebeden türev Örnekleri

Örnek 2.9[39]. $f(x) = k$ sabit bir fonksiyon olmak üzere $D^{\alpha} f(x) = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$ dir.

İspat: Riemann-Liouville Kesirli mertebeden Türevinin tanımına göre

$$D^{\alpha} K = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{K}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

yazılabilir. Bu integralde $t = xu \ (0 \leq u < 1)$ $değişken\ değişimi\ yapılırsa\ , dt = xdu$ olmak üzere

$$D^{\alpha} K = \frac{K}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} (x-xu)^{n-\alpha-1} x du$$

$$= \frac{K}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha} \int_0^x (1-u)^{n-\alpha-1} du$$
$$= \frac{K}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha} \beta(1, n-\alpha)$$
$$= \frac{K}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}$$
$$= \frac{K}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha}$$
$$= \frac{K}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{n-\alpha}$$
$$= \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} x^{n-\alpha}$$

ve sonuç olarak

$$D^\alpha f(x) = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \tag{2.15}$$

elde edilir.

Bu örnekten, k sabit fonksiyonun kesirli mertebeden türevinin Riemann-Liouville tanımına göre sıfır olmadığı söylenebilir.

Örnek 2.10 [39]. $m \geq 0$ olmak üzere $f(x) = x^m$ kuvvet fonksiyonunun kesirli mertebeden türevini hesap edelim.

Çözüm: Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi tanımına göre

$$D^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{t^m}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

dir. Bu integralde $0 \leq u < 1$ için $t = xu$ değişken değişimi yapılırsa $dt = xdu$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}x^{m} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (xu)^m\ \big(x(1-u)\big)^{n-\alpha-1}xdu\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{m+n-\alpha}\int_0^x u^m\ (1-u)^{n-\alpha-1}du\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{m+n-\alpha}\beta(m+1,n-\alpha)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}x^{m+n-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)}{\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\alpha+1)}\\
&= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}x^{m+n-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(\mathrm{m}+\mathrm{n}-\alpha+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha+1)}x^{m-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
D^{\alpha}x^{m} = \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha+1)}x^{m-\alpha}\ ,\qquad m\geq 0 \tag{2.16}
$$

elde edilir. Bu formül ile herhangi bir polinomun kesirli mertebeden türevi, her bir terimin ayrı ayrı kesirli mertebeden türevi alınarak bulanabilir.

Örnek 2.11[39]. (2.16) ifadesinde $\alpha = 2$ olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonun kesirli mertebeden türevini bulalım.

Çözüm: (2.16) formülü kullanarak

$$
D^2x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-2+1)}x^{2-2} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)}x^0 = \Gamma(3) = 2! = 2
$$

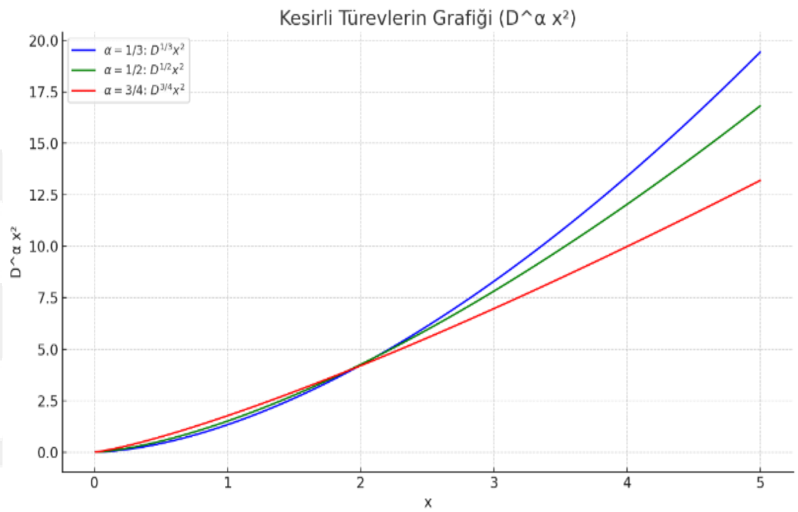
elde edilir. Aşağıda α nın farklı değerleri için kesirli türevler;

$\alpha = \frac{1}{3}$ için $\qquad D^{\frac{1}{3}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{8}{3})}x^{\frac{5}{3}}$

$\alpha = \frac{1}{2}$ için $\qquad D^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}$

$\alpha = \frac{3}{4}$ için $\qquad D^{\frac{3}{4}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}x^{\frac{5}{4}}$

şeklindedir. Bu değerler için fonksiyonun grafığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Şekil 6. Kesirli üstel fonksiyonu

Örnek 2.12[39]. e^{ax} üstel fonksiyon için kesirli türevi elde edelim.

Çözüm: e^{ax} fonksiyon için (3.13) denklemi kullaılarak

$$\begin{aligned} D^{\alpha}e^{ax} &= D^{n}\left[D^{-(n-\alpha)}e^{ax}\right] \\ &= D^{n}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{e^{at}}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\,] \\ &= D^{n}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x e^{at}(x-t)^{n-\alpha-1}dt\,] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integralde $0 \leq u \leq 1$ için $t = x(1-u)$, değişken değişimi yapılırsa $dt = -xdu$ olmak üzere

$$D^{\alpha}e^{ax} = D^{n}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 \big(x - x(1-u)\big)^{n-\alpha-1} e^{ax(1-u)}du\ ]$$
$$= D^{n}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 x^{n-\alpha}u^{n-\alpha-1}e^{-axu}e^{ax}du\ ]$$
$$= D^{n}\left[\frac{e^{ax}x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 u^{n-\alpha-1}e^{-axu}du\right]$$

bulunur. Burada $r = axu$ ve $dr = axdu$ değişken değişimi uygulanırsa

$$D^{\alpha}e^{ax} = D^{n}\left[\frac{e^{ax}x^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 \left(\frac{r}{ax}\right)^{n-\alpha-1} e^{-r}axdu\right]$$

olur. (1,19) dan

$$D^{\alpha}e^{ax} = D^{n}[e^{ax}x^{n-\alpha}\gamma * (n-\alpha, ax)]$$

ve (1,17) den

$$D^{\alpha}e^{ax} = D^{n}[E_x(n-\alpha, a)]$$

şekilde elde edilir. Teorem 2.2 den

$$D^{-\alpha-1}[Df(x)] = D^{-\alpha}f(x) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}$$

ve

$$D[D^{-\alpha}f(x)] = D^{-\alpha}[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$D^{-\alpha-1}[De^{ax}] = D^{-\alpha-1}[ae^{ax}] = D^{-\alpha}e^{ax} - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}$$

ve

$$D[D^{-\alpha}e^{ax}] = D^{-\alpha}[ae^{ax}] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

yazılabilir. Burada

$$aE_x(\alpha+1,a) = E_x(\alpha,a) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}$$

$$D[E_x(\alpha,a)] = aE_x(\alpha,a) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

üstel fonksiyonun kesirli integrali kullanılır. Eğer yukarıdaki denklemlerin birincisinde α yerine $\alpha - 1$ yazılırsa

$$[E_x(\alpha,a)] = aE_x(1-\alpha,a) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

elde ederiz. Bu $aE_x(\alpha,a)$ ifadesi yukarıdaki ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$D[E_x(\alpha,a)] = aE_x(1-\alpha,a) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

bulunur. Buradan

$$D[E_x(\alpha,a)] = E_x(\alpha-1,a)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$D^n[E_x(n-\alpha,a)] = E_x(n-\alpha-n,a) = E_x(-\alpha,a)$$

yazılabilir.

Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türevinin Bazı Temel Özellikleri

Bu kesimde, Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevinin tanım ve örneklerinden sonra, bazı temel özellikleri ve bunların ispatı incelenecektir.

. $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in N$ ve $D^{\alpha}f(x)$ türev $f(x)$ fonksiyonun kesirli mertebeden türevi olmak üzere

$$D^{\alpha}f(x) = D^{n}\left[D^{-(n-\alpha)}f(x)\right] \tag{2.17}$$

dir. Bu eşitlik, $f(x)$ fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevinin, $(n-\alpha)$ kesirli mertebeden integralinden sonra n inci türevinin alınması anlamına gelir.

Lemma 2.3 [33](Lineerlik Özelliği). $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in \mathbb{Z}^{+},\ \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ ve $D^{\alpha}f(x), D^{\alpha}g(x)$, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların kesirli türevleri mevcut olsun. Bu durumda Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^{\alpha}[\lambda f(x) + \alpha g(x)] = \lambda D^{\alpha}f(x) + \alpha D^{\alpha}g(x) \tag{2.18}$$

şeklinde lineer bir operatördür.

İspat: Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}[\lambda f(x) + \alpha g(x)] \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{\lambda f(t) + \alpha g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{\lambda f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{\alpha g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&\qquad = \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt + \frac{\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{0}^{x} \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\
&\qquad = \lambda D^{\alpha}f(x) + \alpha D^{\alpha}g(x)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 2.4 [42](Enterpolasyon özelliği). $n-1 \leq \alpha < n,\ \ n \in N$ ve $D^{\alpha} f(x)$, $f(x)$ fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi olmak üzere

$$\lim_{\alpha \to n} D^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x) \tag{2.19}$$

$$\lim_{\alpha \to n-1} D^{\alpha} f(x) = f^{(n-1)}(x) \tag{2.20}$$

dir.

İspat: Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımından

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

yazılabilir. Burada kısmi integral metodu kullanılırsa

$$u = f(t) \qquad , \qquad dv = (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$du = f'(t) dt \qquad , \qquad v = \frac{-(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

olmak üzere

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [\left(\frac{-f(t)}{(n-\alpha)} (x-t)^{n-\alpha} \right)_0^x + \int_0^x \frac{f'(t)}{(n-\alpha)(x-t)^{n-\alpha}} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[f(0) x^{n-\alpha} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{n-\alpha}} dt \right]$$

bulunur. Burada $\alpha \to n$ ve $\alpha \to n-1$ durumları için

$$\lim_{\alpha\to n} D^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(0) + f(t)]_0^x$$
$$= f^{(n)}(x)$$

ve

$$\lim_{\alpha\to n-1} D^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}[f(0)x + f(t)(x-t)]_0^x + \int_0^x f(t)dt$$
$$= \frac{d^n}{dx^n}\int_0^x f(t)dt$$
$$= f^{(n-1)}(x)$$

elde edilir.

Lemma 2.5 [42](Değişme Özeliği). Kabul edelim ki $n-1 < \alpha < n,\ n \in N$ ve $f(x)$ fonksiyonunun $D^{\alpha} f(x)$ kesirli türevi mevcut olsun. Bu durumda

$$D^m D^{\alpha} f(x) = D^{m+\alpha} f(x) \neq D^{\alpha} D^m f(x) \tag{2.21}$$

şeklindedir.

İspat: (2.13) ifadesinden

$$D^m D^{\alpha} f(x) = D^m D^n \left[D^{-(n-\alpha)} f(x)\right]$$

dir. Buradan

$$D^m D^{\alpha} f(x) = D^n D^m \left[D^{-(n-\alpha)} f(x)\right]$$
$$= D^n D^m D^{-m}[D^{-(n-\alpha-m)} f(x)]$$
$$= D^{\alpha+m} f(x)$$

elde edilir.

Örnek 2.13 (2.21) ifadesinde $m = 2\ ve\ \ \alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere $f(x) = x$ fonksiyonun kesirli türevi

$$D^{\frac{1}{2}}D^2 f(x) = D^{\frac{1}{2}}D^2(x) = 0$$

şeklindedir. Ayrıca

$$D^2 D^{\frac{1}{2}}x = \frac{\Gamma(`1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{3}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}x^{-\frac{4}{3}}$$

olduğundan Riemann-Liouville türevi değişme özelliğine sahip değildir.

Lemma 2.6 [43](Türev ile integarlin arasındaki ilişkı). $n-1 \leq \alpha < n,\ \ m-1 \leq \beta < m$, $n, m \in N$ ve $D^{\alpha}f(x)$, $f(x)$ fonksiyonun kesirli türevi olmak üzere
$\beta \geq \alpha \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{-\beta}f(x)\right] &= D^{\alpha}\left[D^{-\alpha}D^{-(\beta-\alpha)}f(x)\right] \\ &= \mathrm{D}^{\alpha-\beta}f(x) \end{aligned}$$

dir.
$\alpha\ > \beta\ \geq\ 0$ için

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{-\beta}f(x)\right] &= \frac{d^n}{dx^n}[D^{-(\beta-\alpha)}\left(D^{-\beta}f(x)\right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left[D^{\alpha-\beta-n}f(x)\right] \\ &= D^{\alpha-\beta}f(x) \end{aligned}$$

dir. Her iki durumda aynı olduğu için

$$\mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{-\beta}f(x)\right] = D^{\alpha-\beta}f(x), \qquad \alpha, \beta > 0 \tag{2.22}$$

yazılabilir.

Lemma 2.7(Aynı mertebeden kesirli integralin kesirli türevi). $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in N$, $f(x)$ fonksiyonun $D^{\alpha} f(x)$ kesirli türevi mevcut olsun. Bu durumda

$$\mathrm{D}^{\alpha}[D^{-\alpha} f(x)] = f(x) \tag{2.23}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\alpha}[D^{-\alpha} f(x)] &= D^{n}[D^{-(n-\alpha)}(D^{-\alpha} f(x)] \\ &= D^{n}[D^{-n} f(x)] \\ &= \mathrm{f(x)} \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.8 [43](Kesirli türevin kesirli integrali). $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$, $n \in N$ ve $D^{\alpha} f(x)$, $f(x)$ fonksiyonun kesirli türevi mevcut olmak üzere $\beta \geq \alpha \geq 0$ ve $\alpha > \beta \geq 0$ için

$$D^{-\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] = D^{-\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{2.24}$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] &= D^{-(\alpha-\beta)} D^{-\beta}\left[D^{\beta} f(x)\right] \\ &= D^{(\alpha-\beta)}\left[D^{-\beta} D^{\beta} f(x)\right] \\ &= D^{(\alpha-\beta)}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\beta-1} D^{\beta} f(t) dt\right] \\ &= D^{(\alpha-\beta)}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} (x-t)^{\beta-1} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} D^{-(n-\beta)} f(t) dt\right] \end{aligned}$$

bulunur. Kısmi integral metoduna göre

$$u = (x-t)^{\beta} \qquad , \qquad dv = \frac{d^n}{dx^n} D^{-(n-\beta)} f(t)$$

$$du = -\beta (x-t)^{\beta-1} dt \qquad , \qquad v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} D^{-(n-\beta)} f(t)$$

şeklinde olmak üzere bu metod n kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] &= \frac{d}{dx} D^{-(\beta+1-n)}\left[D^{-(n-\beta)} f(x)\right] - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \\ &= f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] &= D^{\beta-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\right] \\ &= D^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0)\, D^{\beta-\alpha} \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \end{aligned}$$

dir. Kuvvet fonksiyonu kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] &= D^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \frac{\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(\alpha-\mathrm{k}+1)} \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-\mathrm{k}+1)} \\ &= D^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-\mathrm{k}+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.9 [43](Aynı mertebedeki kesirli türevin kesirli integrali). $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in N$ ve $f(x)$ fonksiyonun $D^{\alpha} f(x)$ kesirli türevi mevcut olsun. Bu takdirde

$$\mathrm{D}^{-\alpha} D^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha-k} f(0) \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{2.25}$$

dir.

Lemma 2.10 [43](Kesirli türevin kesirli türevi). $n-1 \leq \alpha < n,\ n-1 \leq \beta < n,\ n, m \in N$ ve $f(x)$ fonksiyonun $D^{\alpha} f(x)$ kesirli türevi olmak üzere

$$\mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] = D^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{n} D^{\beta-\alpha} f(0) \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)} \tag{2.26}$$

dir.

İspat:

$$\mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] = D^{n}[D^{-(n-\alpha)}\left(D^{\beta} f(x)\right]$$

olmak üzere denklem (3,12) uygulanılrsa,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\alpha}\left[D^{\beta} f(x)\right] &= D^{n}[D^{-(n-\alpha)+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \frac{x^{n-\alpha-k}}{\Gamma(n-\alpha-k+1)} \\
&= D^{\alpha+\beta} f(x) + \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \frac{\Gamma(n-\alpha-k+1)}{\Gamma(n-\alpha-k+1)} \cdot \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} \\
&= D^{\alpha+\beta} f(x) + \sum_{k=1}^{m} D^{\beta-k} f(0) \cdot \frac{x^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

2.4 Caputo Kesirli Mertebeden Türev

Bu kesimde, Caputo kesirli mertebeden türevin tanımı, örnekleri ve bazı özellikleri incelenecektir. Daha fazla bilgi [[42], [33]] çalışmalarında bulunabilir.

Caputo Kesirli Mertebeden Türevin Tanımı

Caputo kesirli mertebeden türevi, Riemann-Liouville kesirli mertebeden integraliyle tanımlanır. Buradaki temel fikir, bir fonksiyonun kendisini değil türevini kesirli olarak integre etmektir. Yani

$$\mathrm{D}^{-(1-\alpha)}[Df(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} f(t)dt$$

dir. Aynı zamanda

$$\mathrm{D}^{-(2-\alpha)}[Df(x)] = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha} \cdot \frac{d^2}{dt^2} f(t)dt$$

şeklindedir. Bu işlem n kez uygulanırsa,

$$\mathrm{D}_*^{\alpha} f(x) = D^{-(n-\alpha)} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{n} f(x)$$

olur. Böylece

$$\mathrm{D}_*^{\alpha} f(x) = \mathrm{D}^{-(n-\alpha)}[D^n f(x)] \tag{2.27}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.10 [33]. $f: R \to R$ sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonun α ıncı mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_*^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \,, & n-1 \leq \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) \,, & a = n \in N \end{cases} \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlıdır.

Caputo Kesirli Mertebeden Türevin Örnekleri

Örnek 2.14. $f(x) = K$ sabit bir fonksiyonu için Caputo kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: Caputo kesirli türev tanımı kullaılarak

$$D_*^\alpha K = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{K^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = 0$$

$$D_*^\alpha K = 0 \quad (2.29)$$

elde edilir.

Caputo kesirli türev tanımına göre herhangi bir sabit fonksiyonun kesirli türevini sıfıra eşittir.

Örnek 2.15. $m \geq 0$ olmak üzere $f(x) = x^m$ fonksiyonun Caputo kesirli mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm: Caputo kesirli türevi tanımına göre

$$D_*^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(t^m)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt$$

yazılabilir. Fakat biliyoruz ki

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}$$

şeklindedir. Böylece Caputo kesirli mertebeden türevi

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x^m &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \cdot \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)} t^{m-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{m-n} dt \end{aligned}$$

olur. Burada $t = xu$, $0 \leq u \leq 1$ değişken değişimi yapılırsa $dt = xdu$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x^m &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}\int_0^1 (x-xt)^{n-\alpha-1}\,(xu)^{m-n} x du \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}\int_0^1 x^{n-\alpha-1}(1-u)^{n-\alpha-1}\,u^{m-n}x^{m-n+1} du \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}\int_0^x x^{m-n}(1-u)^{n-\alpha-1}\,u^{m-n} du \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}x^{m-n}\int_0^x (1-u)^{n-\alpha-1}\,u^{m-n} du \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)}x^{m-n} \cdot \frac{\Gamma(\mathrm{m}-\mathrm{n}+1)\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha+1)}x^{m-n} \end{aligned}$$

buradan

$$D_*^\alpha x^m = \frac{\Gamma(\mathrm{m}+1)}{\Gamma(\mathrm{m}-\alpha+1)}x^{m-n} \tag{2.30}$$

bulunur. Bu denklemi kullanarak herhangi bir polinomun Caputo kesirli türevini bulabiliriz.

Örnek. $\alpha = 2$ olmak üzere $f(x) = x^3$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: (2.30) formülü kullanarak

$$D_*^2 x^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-2+1)} x^{3-2}$$

olur. Gamma fonksiyonun özelliklerine göre

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)} x^{3-2} = \frac{3!}{1} x$$
$$= 6x$$

elde edilir.

Örnek 2.16. e^{ax} üstel fonksiyon için Caputo türevini bulunuz.

Çözüm: Caputo kesirli türevin tanımına göre

$$D_*^\alpha e^{ax} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{(e^{at})^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$$= \frac{a^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{e^{at}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

olur. Burada Mittag-Lefler fonksiyonu kullanılarak

$$D_*^\alpha e^{ax} = a^n E_x(n-\alpha, a)$$

şeklinde yazılabilir.

Caputo Kesirli Mertebeden Türevinin Özellikleri

Bu kesimde Caputo kesirli türevinin tanım ve örneklerinden sonra, bazı temel özellikleri ve bunların ispatı incelenecektir.

Lemma 2.11 [33]. $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in N$ ve $D_*^{\alpha} f(x)$, $f(x)$ fonksiyonun kesirli Caputo türevi olmak üzere

$$D_*^{\alpha} f(x) = D_*^{-(n-\alpha)}[D^n f(x)] \tag{2.31}$$

dir.

Lemma 2.12 [33] (Lineerlik Özelliği). $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in \mathbb{Z}^+, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ ve $D_*^{\alpha} f(x)$, $D_*^{\alpha} g(x)$ sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kesirli Caputo türevi mevcut olsun. Bu durumda kesirli Caputo türevi

$$D_*^{\alpha}[\lambda f(x) + \alpha g(x)] = \lambda D_*^{\alpha} f(x) + \alpha D_*^{\alpha} g(x) \tag{2.32}$$

şeklinde lineer bir operatördür.

İspat: Caputo kesirli türev tanımına göre

$$D_*^{\alpha}[\lambda f(x) + \alpha g(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\big(\lambda f(t) + \alpha g(t)\big)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha}[\lambda f(x) + \alpha g(x)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\big(\lambda f(t)\big)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\big(\alpha g(t)\big)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\big(f(t)\big)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt + \frac{\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\big(g(t)\big)^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt \end{aligned}$$

$$= \lambda D_*^\alpha f(x) + \alpha D_*^\alpha g(x)$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 2.13 [33](Enterpolasyon Özelliği). $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in N$ ve $D_*^\alpha f(x)$, $f(x)$ fonksiyonun Caputo kesirli türevi olmak üzere

$$\lim_{\alpha \to n} D_*^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \tag{2.33}$$

$$\lim_{\alpha \to n-1} D_*^\alpha f(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) \tag{2.34}$$

şeklindedir.

İspat: Caputo kesirli türev tanımından

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n-1}} dt$$

dir. Burada kısmi integral metodu kullanılırsa

$$\mathrm{u} = \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{t}) \qquad , \qquad \mathrm{dv} = (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\alpha-1}$$

$$\mathrm{du} = \mathrm{f}^{(\mathrm{n}+1)}(\mathrm{t})\mathrm{dt} \qquad , \qquad \mathrm{v} = \frac{-(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\alpha}}{(\mathrm{n}-\alpha)}$$

olmak üzere

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} [(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-\alpha)}(x-t)^{n-\alpha})|_0^x + \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-\alpha)(x-t)^{\alpha-n}} dt]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[f^{(n)}(0) x^{n-\alpha} + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n}} dt \right]$$

bulunur. Burada $\alpha \to n$ ve $\alpha \to n-1$ durumları için

$$\lim_{\alpha \to n} D_*^{\alpha} f(x) = \left(f^{(n)}(0) + f^{(n)}(t)\right)|_0^x = f^{(n)}(x)$$

ve

$$\lim_{\alpha \to n-1} D_*^{\alpha} f(x) = \left(f^{(n)}(0)x + f^{(n)}(t)(x-t)\right)|_0^x + \int_0^x f^{(n)}(t)dt$$
$$= \left(f^{(n-1)}(t)\right)|_0^x$$
$$= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)$$

elde edilir.

2.5 Riemann-Liouville ve Caputo Kesirli Türevleri Arasındaki İlişki

Teorem 2.2 [42]. $x > 0,\ \alpha \in R$ ve $n-1 \leq \alpha < n \in N$ olmak üzere Riemann-Liouville ve Caputo türevleri arasında

$$D_*^{\alpha} f(x) = D^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0) \tag{2.35}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat: Riemann-Liouville türev tanımında

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

kısmi integral metodu kullanılırsa

$$u = f(t) \qquad , \qquad dv = (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$du = f'(t)dt \qquad , \qquad v = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)}$$

olmak üzere

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(-\frac{(x-t)^{n-\alpha}f(t)}{(n-\alpha)}\right)_0^x+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-\alpha}f'(t)}{(n-\alpha)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[-\frac{x^{n-\alpha}f(0)}{(n-\alpha)}+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-\alpha}f'^{(t)}}{(n-\alpha)}dt\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu metod $n-1$ kez uygulanırsa

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{n+k-\alpha}f^{(k)}(0)}{\Gamma(n+k-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(2n-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{2n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0)+D_*^{\alpha}f(t)$$

ve buradan

$$D_*^{\alpha}f(t)=D^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(0)$$

elde edilir.

2.6 Grunwald-Letnikov Kesirli Türevleri

Teorem 2.4 [44]. $f(t)$ sürekli bir fonksiyon ve α ve t'ler bu fonksiyonun limit değerleri olmak üzere

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, C(p,r) f(t-rh) $$

eşitliğinde p = m ise, m inci mertebeden türev ve eğer $p = -m$ ise, m katlı integral olur.

İspat: Kesirli mertebeden türev ve kesirli mertebeden integral için bir yaklaşım tanımlanmıştır. Bunlar klasik analizden bağımsız olarak verilmiştir. n tam sayılı mertebeden türev ve n katlı integraller olarak alınmıştır.
$y = f(t)$ sürekli fonksiyonun birinci türevi

$$ f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.36} $$

dır. (2.36) ifadesi f fonksiyonu iki kez uygulanırsa

$$ \begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{2.37} $$

ikinci mertebeden türevi elde edilir. (3.36) ve (3.37) kullanılarak

$$ f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.38} $$

bulunur. Bu indiksiyonla genelleme yapılırsa

$$ f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, C(p.r) f(t-2h) \tag{2.39} $$

olur, burada

$$C(p.r) = \frac{p!}{r!\,(p-r)!} \tag{2.40}$$

dir. (2.39) - (2.40) daki ifadelerden kesirlerin genel şekli

$$f_h^p(t) = \frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\, C(p.r)f(t-2h) \tag{2.41}$$

olarak göz önüne alalım, burada p keyfi bir tam sayı ve n de bir tam sayıdır. Açıkca $p \leq n$ için

$$\lim_{h\to 0} f_h^p(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}$$

elde edilir. p nin negatif değeri alınırsa

$$C(p.r) = \frac{(p+r+1)!}{r!}$$

ile ifade edilir. Buradan

$$C(-p.r) = (-1)^r C(p.r)$$

dır. (2.41) deki p , $-p$ ile değiştirilirse

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^{n} C(p.r)f(t-rh)$$

olur, burada p pozitif bir tam sayıdır.

Eğer n sabit ise, $h \to 0$ iken $f_h^{(-p)}(t)$ nin limitinin 0'a gitmesi doğaldır. Sıfır olmayan bir limite ulaşmak $h \to 0$ iken $n \to \infty$ olarak kabul etmeliyiz. a bir reel sabit olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ alalım ve $f_h^{(-p)}(t)$ nin sonlu veya sonsuz olan limit değerini

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{-p} f\,(t)$$

şeklinde gösterelim. Aslında burada ${}_aD_t^{-p} f\,(t)$, $f(t)$ fonksiyonu üzerinde bir işlem gösterir ve a ve t uçları (terminals), bu işlemle ilgili limitlerdir.
Şimdi birkaç özel durumu inceleyelim.

$p = 1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = \frac{1}{h}\sum_{r=0}^{n} f(t - rh)$$

yazılabilir. Burada ve $f(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kabul edip $t - nh = a$ alınırsa

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-1)}(t) = D_t^{-p}\, f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z)dz = \int_0^{t} f(\tau)d\tau$$

olur.p nin p= 2, 3, ... gibi değerleri göz önüne alınır ve gerekli ara işlemler yapılırsa aşağıdaki genel durum

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} C(p,r) f(t - rh) \\ &= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{2.42}$$

elde edilir.

Tümevarım metoduna göre (2.42) nin $(p+1)$ içinde sağlandığını göstermeliyiz.

şimdi $f_1(a)=0$ olmak üzere $f_1(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (2.42) de p yerine $(p+1)$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p-1} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p+1}\sum_{r=0}^{n} C(p+1,r)f(t-rh) \\
&= \lim_{h\to 0} h^{p}\sum_{r=0}^{n} C(p+1,r)f_1(t-rh) \\
&\quad - \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, C(p+1,r)f_1(t-(r+1)h)
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

olur. Burada

$$
(p+1,r)=(p,r)+(p+1,r-1) \tag{2.44}
$$

olduğundan $C(p+1,-1)=0$ olmalıdır.

(2.43) daki birinci toplamda (2.44) kullanılırsa ve ikinci toplamda r yerine $r-1$ yer alınırsa

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p-1} f(t) = &\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n} C(p,r)f_1(t-rh) \\
&+ \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n} C(p+1,r-1)f_1(t-rh) \\
&- \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{p}\sum_{r=0}^{n+1} (-1)^r\, C(p+1,r-1)f_1(t-(r+1)h) \\
&= {}_aD_t^{-p-1} f(t) - (t-a)^p \lim_{n\to\infty} C(p+1.n) \;\cdot \frac{1}{h^p} f_1\left(a-\frac{t-a}{n}\right)
\end{aligned}
$$

olur.$f_1(t)$ fonksiyonun tanımından

$$\lim_{n\to\infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

dır. (1.2) ifadesinden

$$\lim_{n\to\infty} C(p+1.n)\cdot\frac{1}{h^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{h^p\ n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{-p-1} f(t) = {}_aD_t^{-p} f_1(t) &= \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)d\tau \\ &= -\frac{(t-\tau)^p f_1(t)}{p!}\Big|_a^t + \frac{1}{p!}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{pi}\int_a^t (t-\tau)^p f(\tau)d\tau\end{aligned}$$

olur. Bu ise, (2.42) ifadesinin tümevarım metoduyla doğruluğunu gösterir.
Şimdi (2.42) formülünün bir p-katlı integral temsil olduğunu gösterelim.
(2.42) ifadesinden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) &= \frac{1}{(p-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)d\tau \\ &= {}_aD_t^{-p+1} f(t)\end{aligned}$$

olup a dan t' ye integre edilirse

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+1} f(t)\right) dt$$

$${}_aD_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right) dt$$

elde edilir ve böylece

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t (\left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right) dt \\
&= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right) dt \\
&= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \ldots \int_a^t f(t) dt}_{p\ kez}
\end{aligned}
$$

olur. Görülür ki n inci mertebeden (2.39) türevi ve $f(t)$ sürekli fonksiyonunun p-katlı integrali olan (2.42) ifadesi

$$
{}_aD_t^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, C(p,r) f(t - rh) \tag{2.45}
$$

ifadesinin özel halleridir, eğer $p = m$ ise, m inci mertebeden türev ve eğer $p = -m$ ise, m katlı integrali temsil eder. Burada p, reel değereler ile sınırlanacaktır.

3. BÖLÜM

LAPLACE VE SUMUDU DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde tezimizde kullanılacak olan Laplace ve Sumudu dönüşümü tanımları ve bunların bazı temel özellikleri kısaca incelenecektir.

3.1 Laplace dönüşümü

Laplace Dönüşümü, belirli türde bir integral dönüşümü olup genellikle zamana bağlı (domenindeki) bir fonksiyonun frekansa (domenine) dönüştürülmesi amacıyla kullanılır. Zamanın bir fonksiyonu olan $\mathrm{f(t)}$ için Laplace Dönüşümü $\mathrm{L[f(t)]}$ şeklinde gösterilir, burada L ilgili dönüşüm operatörünü ifade etmektedir. Bu dönüşüm sonucunda elde edilen fonksiyon karmaşık frekans değişkeni s'e bağlı yeni bir fonksiyondur.

Laplace Dönüşümü belirli türde bir integral dönüşümü olup diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri çözmek için çok yararlı bir araçtır, çünkü lineer diferansiyel denklemleri lineer cebirsel denklemlere dönüştürür ve bu denklemler kolaylıkla çözülebilir. Burada Laplace dönüşümünün tanımı, özellikleri ve bazı örnekleri ele alınacaktır[45].

Tanım 3.1 [39]. f , $t \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt \tag{3.1}$$

integrali yakınsak ise, (3.1) ifadesine $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Tanım 3.2 [39]. Bir $f(t)$ fonksiyonuna $t \geq M$ için $|f(t)| \leq ke^{at}$ olacak şekilde negatif olmayan k, a ve M sayıları mevcutsa, üstel sınırlıdır veya üstel mertebeden sınırlıdır denir.

Tanım 3.3[39]. Bir f fonksiyonuna sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip ve her bir süreksizlik noktasında sağ ve sol limitler mevcut ise parçalı sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu her sınırlı $I \subset [0, \infty]$ alt aralığı üzerinde parçalı sürekli ise, $[0, \infty]$ aralığında parçalı süreklidir denir.

Teorem 3.1[39]. Kabul edelim ki f, $[0, \infty]$ aralığında parçalı sürekli ve üstel sınırlı olsun. Bu takdirde her $s > a$ için $L\{f\} = F(s)$ dönüşümü mevcuttur.

Laplace Dönüşümü Bazı Özellikleri:

Burada Laplace dönşümün en çok kullanılan bazı özelliklerini verelim[29].

Lineerlik Özelliği:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = c_1 L\{f_1(t) + c_2 L\{f_2(t).$$

Frekans Kaydırma Özelliği:

$$L\{e^{at}\, f(t)\} = F(s-a).$$

Bir $\mathbf{f}(\boldsymbol{t})$ fonksiyonunun n inci mertebeden türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

şeklindedir.

İntegralin Laplace dönüşümü:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\}.$$

Özel bir çarpım fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}.$$

Özel bir bölme fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du.$$

Konvolüsyon özelliği:

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\} \cdot L\{g(t)\}.$$

Laplace dönüşümün bazı örnekleri:

Örnek 3.1 [46]. $\mathrm{f(x)} = 1$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesap edelelim.

Çözüm: Laplace dönüşümü tanımı kullanılarak

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1-e^{-st}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}$$

elde edilir.

Örnek 3.2 [46]. f(x) $= e^{ax}$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Laplace dönüşümü tanımına göre

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

yazılabilir. Burada $(s-a)t = u$ değişken değişimi yapılırsa, $t = \frac{u}{s-a}$ ve $dt = \frac{du}{s-a}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)} \int_0^\infty e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{(s-a)} [0-1] = \frac{1}{(s-a)}$$

bulunur.

Örnek 3.3 [46]. f(x) $= \sin(ax)$ ve $g(x) = coss(ax)$ fonksiyonlarin Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Üstel fonksiyonların Laplace dönüşümüne göre

$$\mathcal{L}\{e^{-iat}\} = \frac{1}{(s+ia)} \cdot \frac{(s-ia)}{(s-ia)} = \frac{s-ia}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2} + i \frac{a}{s^2 + a^2}$$

dir. Burada Euler formölü kullanılarak

$$f(t) = sinat \ , \qquad L\{sinat\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$g(t) = cosat \ , \qquad L\{cosat\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

elde edilir.

Örnek 3.4 [46].$f(t) = t^n$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Laplace dönüşümün tanımı kullanılarak

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt$$

dir. Burada $st = u$ değişken değişimi yaplılırsa $dt = \frac{du}{s}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{s} \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^{(n+1)-1} e^{-u} du$$

bulunur. Burada gamma fonksiyonun tanımından

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{\mathrm{n}!}{s^{n+1}}$$

elde edilir.

Örnek 3.5 [46]. $f(t) = \text{erf}\ (z)$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Laplace dönüşümü tanımı ve $\text{erf}(z)$ hata fonksiyonun tanımı kullanılarak

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(z)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{erf}(z)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx\,dt$$

olur. Buradan

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(z)\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot\int_x^\infty e^{-st}dt\,dx = \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(x^2+sx)}\,dx$$

$$= \frac{2}{s\sqrt{\pi}}e^{\frac{s^2}{4}}\int_0^\infty e^{-\left(x+\frac{s}{2}\right)^2}\,dx$$

dir. Eğer $x + \frac{s}{2} = u$ değişken değişimi yaplırsa $dx = du$ omak üzere

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(z)\} = \frac{2}{s\sqrt{\pi}}e^{\frac{s^2}{4}}\int_{\frac{s}{2}}^\infty e^{-u^2}\,du$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(z)\} = \frac{2}{s\sqrt{\pi}}e^{\frac{s^2}{4}}erfc\left(\frac{s}{2}\right)$$

bulunur.

Ters Laplace Dönüşümü:

Toplama, çarpma ve türev operatorları gibi Laplace dönüşümününde tersi mevcuttur. Diferansiyel denklemlerle temsil edilen Fiziksel problemleri çözme sürecinde Laplace dönüşümünün tersine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle ters Laplace dönüşümü kısaca incelenecektir[46].

Tanım3.4[47]. Kabul edelim ki $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü $F(s)$ olsun, yani

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olsun. Bu takdirde $f(t)$ fonksiyonu $F(s)$ fonksiyonun ters Laplace dönüşümü olarak adlandırılır ve $t \geq 0$ için

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{L}^{-1}$ dönüşümü ters Laplace operatör olarak adlandırılır. Ayrıca ters Laplace dönüşümü

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma-iT} e^{st}F(s)\,ds = \sum_{k=1}^{n} Res(z_k) \tag{3.2}$$

şeklinde verilir

Aşağıda Laplace dönüşümü verilen fonksiyonların ters Laplace dönüşümünü yazalım. Yani

$$\mathcal{L}\{sinat\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \ , \qquad \mathcal{L}\{cosat\} = \frac{s}{s^2 + a^2},$$
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad , \qquad \mathcal{L}\{h(t-a)\} = \frac{e^{-sa}}{s},$$
$$\mathcal{L}\{coshat\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad ve \qquad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

olmak üzere bunların ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = sinat \qquad , \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-sa}}{s}\right\} = H(t-a)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = cosat \qquad , \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - a^2}\right\} = coshat$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \qquad , \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$$

şekilde yazılabilir.

Örnek 4.6 [46]. (3.2) ifadesini kullanarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \quad F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\ , \qquad s>0$$

şeklinde verilen ters Laplace dönüşümünü hesap edelim.

Çözüm: Burada $s = \pm\, i\omega$ için F fonksiyonu iki basit kutup noktasına sahiptir. Ters Laplace dönüşüm formülü kullanılarak.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma-iT} e^{st}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) ds$$

$$= \frac{\omega}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma-i\infty}\frac{e^{st}}{s^2+\omega^2} ds$$

dir. Buradan

$$Res(i\omega) = \lim_{s\to -i\omega}(s-i\omega)e^{st}F(s) = \lim_{s\to -i\omega}\frac{e^{st}}{s+i\omega} = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega}$$

$$Res(-i\omega) = \lim_{s\to i\omega}(s+i\omega)e^{st}F(s) = \lim_{s\to i\omega}\frac{e^{st}}{s-i\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i\omega} = sin\omega t$$

elde edilir.

Kesirli Mertebeden Türevlerin Laplace Dönüşümü

Şimdi tezimizde kullanacağımız Mittag-Leffler, Rıemann-Liouville ve Caputo kesirli türevi gibi kesirli türevlerin Laplace dönüşümünü verelim.

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Dönüşümü

Mittag-Leffler fonksiyonu çok önemli bir fonksiyondur. Bu fonksiyonla ilgili aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.2 [48].

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}), \quad |a| < |s^{\alpha}|$$

şeklindedir.

İspat: Laplace dönüşümün tanımına göre

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\} = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})dt$$

dir. Burada (2.14) ifadesinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\mathcal{L}\{t^{\alpha k+\beta-1}\}\end{aligned}$$

bulunur. Laplace dönüşümünün $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ özelliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\mathcal{L}\{t^{\alpha k+\beta-1}\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}} \\ &= \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^k\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada bir geometrik seri elde edilir ve bu seri $|\frac{a}{s^{\alpha}}| < 1$ için yakınsaktır. Bu takdirde geometrik seri özelliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\mathcal{L}\{t^{\alpha k+\beta-1}\} = \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^k = \frac{1}{s^{\beta}}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{s^{\alpha}}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}$$

olur. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}\right]=t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}) \tag{3.3}$$

elde edilir.

Teorem 4.3 [43].

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha m+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{m}(at^{\alpha})\right\}=\frac{m!\,s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{m+1}}$$

dir.

İspat: Laplace dönüşüm tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^{\alpha m+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{m}(at^{\alpha})\right\}&=\mathcal{L}\{t^{\alpha m+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}\cdot\frac{a^{k}t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!\,a^{k}}{k!\,\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\alpha m+\beta-1}\right\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!\,a^{k}}{k!\,\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}{s^{\alpha k+\alpha m+\beta}}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}\cdot\frac{a^{k}}{s^{\alpha k+\alpha m+\beta}}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^{\alpha m+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{m}(at^{\alpha})\right\}&=s^{-\alpha m-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}\left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^{k}\\&=s^{-\alpha m-\beta}\cdot\frac{m!}{\left(1-\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^{m+1}}\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha m+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{m}(at^{\alpha})\right\}=\frac{m!\,s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{m+1}} \tag{3.4}$$

elde edilir.

Teorem 3.4 [24].

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right\}=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a} \quad , \qquad \mathcal{R}e(s)>|a|^{\frac{1}{\alpha}}$$

şeklindedir.

İspat: Laplace dönüşüm tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right\}&=\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})dt\\&=\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}\,dt\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1}\right\}\end{aligned}$$

dir. Burada Laplace dönüşümün özelliğinden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right\}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-a)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}}\\&=\frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{s^{\alpha}}\right)^k\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada bir geometrik seri elde edilir ve bu seri $\left|-\frac{a}{s^{\alpha}}\right|<1$ için yakınsaktır. Bu takdirde geometrik seri özelliğinden

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right\} = \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-a}{s^{\alpha}}\right)^{k} = \frac{1}{s^{\beta}}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{s^{\alpha}}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}$$

dir. Buradan

$$\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a} \qquad (3.5)$$

elde edilir.

Şimdi Mittag-Leflar fonksiyonu için ters Laplace dönüşüm ile ilgili özellikleri veren teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.5 [29].

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^{\beta}-a}\right\} = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\beta}\right), \qquad \alpha,\beta > 0\ , \qquad s^{\alpha} > |a|$$

şeklindedir.

İspat: Laplace dönüşüm tanımına göre

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\beta}\right)\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\beta}\right)dt$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\beta}\right)\right\} &= \sum_{0}^{\infty}\frac{a^{k}}{\Gamma(k\beta+\alpha)}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\, t^{k\beta+\alpha-1}dt \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{a^{k}}{\Gamma(k\beta+\alpha)}\mathcal{L}\left\{t^{k\beta+\alpha-1}\right\} \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{a^{k}}{\Gamma(k\beta+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(k\beta+\alpha)}{s^{k\beta+\alpha}} \\
&= \frac{1}{s^{\alpha}}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{a}{s^{\beta}}\right)^{k} = \frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^{\beta}-a}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-(\alpha-\beta)}}{s^{\beta}-a}\right\}=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\beta}\left(at^{\beta}\right),\quad \alpha,\beta>0\quad ,s^{\alpha}>|a| \tag{3.6}$$

elde edilir.

Teorem 3.6 [29].

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^{-(\alpha-1)}}{s-a}\}=t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(at)=E(t,\alpha-1,a)$$

dir.

İspat: Laplace dönüşüm tanımına göre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(at)dt \\
&= \sum_0^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\mathrm{k}+\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{k+\alpha-1}dt \\
&= \sum_0^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\mathrm{k}+\alpha)}\mathcal{L}\{t^{k+\alpha-1}\} \\
&= \sum_0^{\infty}\frac{a^k}{\Gamma(\mathrm{k}+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\mathrm{k}+\alpha)}{s^{\mathrm{k}+\alpha}} \\
&= \frac{1}{s^{\alpha}}\sum_0^{\infty}\left(\frac{a}{s}\right)^k = \frac{s^{-\alpha}}{1-\frac{a}{s}} = \frac{s^{-(\alpha-1)}}{s-a}
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-(\alpha-1)}}{s-a}\right\}=t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(at)=E(t,\alpha-1,a) \tag{3.7}$$

elde edilir.

Teorem 3.7 [29].

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-\alpha}}{(s-a)^2}\right\} = t\,E(t,\alpha,a) - \alpha E(t,\alpha+1,a) \tag{3.8}$$

şeklindedir.

İspat: Laplace dönüşüm tanımına göre

$$\mathcal{L}\{t\,E(t,\alpha,a)\} - \alpha\mathcal{L}\{E(t,\alpha+1,a)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[E(t,\alpha,a)] - a\mathcal{L}[E(t,\alpha+1,a)]$$

dir. Buradan

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{s^{-\alpha}}{s-a}\right] - \alpha\left[\frac{s^{-(\alpha+1)}}{s-a}\right] = \frac{1}{s^{\alpha}(s-a)^2}$$

bulunur.

Teorem 3.8 [29].

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{-\alpha}}{(s-a)^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t^2E(t,\alpha,a) - \alpha E(t,\alpha+1,a) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}E(t,\alpha+2,a) \tag{3.9}$$

dir.

İspat: Laplace dönüşümünün tanımı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2E(t,\alpha,a) - \alpha E(t,\alpha+1,a) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}E(t,\alpha+2,a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s^{-\alpha}}{s-a}\right) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{-(\alpha+1)}}{s-a}\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\left(\frac{s^{-(\alpha+2)}}{s-a}\right)$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha}(s-a)^3}$$

elde edilir.

Burada Riemann-Liouville kesirli türevi ve kesirli integralinin Laplace dönüşümünü verelim.

Riemann-Liouville Kesirli Mertebeden Türevlerinin Laplace Dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}(s) = s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^{n-1} s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0) \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlıdır[49].

Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}[D^{\alpha}f(t)]\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{t}\frac{f^{(n)}(z)}{(t-z)^{\alpha-n+1}}\,dtdz\end{aligned}$$

olur. Fobini teoremini kullanılarak integrallerin sırası değiştirilse,

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}(s) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot\frac{f^{(n)}(z)}{(t-z)^{\alpha-n+1}}\,dtdz$$

yazılabilir. Burada $t-z=u$ değişken değişimi yapılırsa, $t=u+z\,, dt=du$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}(s) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} f^{(n)}(z)\int_0^{\infty} e^{-s(u+z)}\,u^{n-\alpha-1}dudz \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-sz}f^{(n)}(z)\int_0^{\infty} e^{-su}u^{n-\alpha-1}\,dudz \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-sz}f^{(n)}(z)\cdot\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}\,dz \\ &= s^{\alpha-n}\int_0^{\infty} e^{-sz}f^{(n)}(z)\,dz\end{aligned}$$

bulunur. $f^{(n)}(t)$'nin Laplace dönüşümünden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}(s) &= s^{\alpha-n}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)\\ &= s^{\alpha-n}\left(s^{n}\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\right)\\ &= s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - s^{\alpha-1}f(0) - s^{\alpha-2}f'(0) - \cdots - s^{\alpha-n}f^{(n-1)}(0)\\ &= s^{\alpha}\mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^{n-1} s^{\alpha-k}\, f^{(k-1)}(0)\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli integralinin Laplace dönüşümünü inceleyelim.
Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün $\alpha > 0$ mertebesindeki Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{I^{\alpha}f(t)\} = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}$$

şekilinde tanımlıdır. Riemann-Liouville kesirli integralinin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanılırsa

$$\mathcal{L}\{I_t^{\alpha}f(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}f(u)du\}$$

dir. Kesirli integral

$$(h * g)(t) = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

şeklindeki konvolüsyon tanımında $h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ve $g(t) = f(t)$ olmak üzere

$$I_t^{\alpha}f(t) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) * f(t)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\mathcal{L}\{(h*g)\}(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

konvolüsyon teoremine göre

$$\mathcal{L}\{I_t^{\alpha}f(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}(s)\cdot\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{L}\{I_t^{\alpha}f(t)\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}F(s)=\frac{F(s)}{s^{\alpha}}$$

elde edilir[29].

Şimdi de Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümünü ele alalım.

Tanım 3.10 [50]. Caputo kesirli türevinin α inci mertebeden Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{{}_a^C D_t^{\alpha}f(t)\}(s)=s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\}-\sum_{k=1}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0) \qquad (3.11)$$

şeklinde tanımlıdır.

Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümünü hesap etmek için bu türevin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alınırsa,

$$\mathcal{L}\{D_t^{\alpha}f(t)\}=\mathcal{L}\{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau\}$$

$$=\int_0^{\infty}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau]e^{-st}dt$$

yazılabilir. Fobini teoremi kullanılarak integrallerin sırası değiştirilirse,

$$\mathcal{L}\{D_t^{\alpha}f(t)\}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}f^{(n)}(\tau)\left[\int_{\tau}^{\infty}(t-\tau)^{n-\alpha-1}e^{-st}dt\right]d\tau$$

olur. Burada $t-\tau=u$ değişken değişimi yapılırsa, $t=u+\tau, dt=du$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty f^{(n)}(\tau)\left[\int_\tau^\infty u^{n-\alpha-1}\,e^{-s(u+\tau)}du\right]d\tau$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty f^{(n)}(\tau)\,e^{-s\tau}\left[\int_\tau^\infty u^{n-\alpha-1}\,e^{-su}du\right]d\tau$$

bulunur. Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\int_\tau^\infty u^{n-\alpha-1}\,e^{-su}du = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}$$

Olduğu için

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty f^{(n)}(\tau)\,e^{-s\tau}\,\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}d\tau$$
$$= \frac{1}{s^{n-\alpha}}\int_0^\infty f^{(n)}(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau$$

dir. $f^{(n)}(t)$' nin Laplace dönüşümünden yani

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

ifadesinden

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t)\} = \frac{s^nF(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=1}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\,f^{(k)}(0)$$

elde edilir.

Laplace Dönüşümün Bazı Uygulamaları:

Burada Laplace dönüşümün birkaç uygulamasını ele alalım.

Örnek 3.7 [46]. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$ integralini hesap edelim.

Çözüm: Laplace dönüşüm 6. Özelliği uygulanılırsa

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}\{e^{-t}-e^{-3t}\}du$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+3}\right]du \\ &= [\ln(u+1)-\ln(u+3)]_0^\infty \\ &= ln\left[\frac{u+1}{u+3}\right]_0^\infty \\ &= \ln\left[\lim_{u\to\infty}\frac{u+1}{u+3}\right]-\ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \ln(3)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.8 [46]. $\int_0^\infty \frac{sint}{t}dt$ integralini hesap edelim.

Çözüm: Laplace dönüşüm 6. Özelliği uygulanılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{sint}{t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}\{sinu\}du &= \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}du \\ &= [\arctan(u)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

şekilde elde edilir.

Örnek 3.9 [46]. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\mathrm{tcos(t)dt}$ integralinin çözümünü bulalım.

Çözüm: Laplace dönüşümünün 3. Özelliğinden

$$L\{tcos(t)\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{1+s^2}\right\} = \frac{s^2-1}{[(1+s^2)]^2}$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\mathrm{tcos(t)dt} = \left\{\frac{s^2-1}{[(1+s^2)]^2}\right\}_{s=2} = \frac{3}{25}$$

bulunur.

Son olarak bu kesimde, Laplace dönüşümünün sabit katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlere uygulnamasını bir örnekle inceleyelim.

Örnek 3.10 [46].

$$y''(t) + k^2 y(t) = 0$$

$$y(0) = A \;, y'(0) = B$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: Diferansiyel denklemi her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L[y''(t)] + k^2 L[y(t)] = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + k^2 Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2+k^2) = As + B$$

$$Y(s) = A\,\frac{s}{s^2+k^2} + \frac{B}{k}\frac{k}{s^2+k^2}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = Acoskt + \frac{B}{k}sinkt$$

elde edilir.

3.2 Sumudu Dönüşümü:

Watugala [51], 90'ların başında yeni bir integral dönüşümü olan Sumudu dönüşümünü tanıttı ve bunu kontrol mühendisliği problemlerindeki adi diferansiyel denklemlerin çözümüne uyguladı. Sumudu dönüşümü, fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanmıştır. Daha fazla bilgi için [52]-[53]-[54]-[55] çalışmalarına bakılabilir.
[51]'de, üstel mertebeden fonksiyonlar için tanımlanan yeni bir integral dönüşümü olan Sumudu dönüşümü verilmiştir. Burada A kümesinde tanımlanan fonksiyonlar ele alınmıştır. Yani

$$A = \{f(t)| \;\; eğer\ t \in (-1)^i \times [0.\infty)\ ise$$
$$|f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_i}}\ olacak\ şekilde\ \exists M, \tau_1\ ve\ /\ veya\ \ \tau_2 > 0\}$$

şeklinde tanımlıdır. Verilen bir fonksiyon için A kümesinde, M sabitinin sonlu olması gerekir, ancak τ_1 ve τ_2 aynı anda mevcut olmak zorunda değildir ve her biri sonsuzda olabilir. Laplace dönüşümündeki gibi üstel bir kuvvet olarak kullanılmak yerine, Sumudu dönüşümündeki u değişkeni, f fonksiyonun argümanındaki t değişkenini faktor olarak kullanır. Özellikle, $f(t), A$ kümesinde ise, Sumudu dönüşümü

$$G(u) = S[f(t)] = \begin{cases} \int_0^\infty f(ut)e^{-t}\,dt, & 0 \le u < \tau_2 \\ \int_0^\infty f(ut)e^{-t}\,dt, & -\tau_1 \le u \le 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır[56]. Ayrıca

$$F(u) = S[f(t)] = \int_0^\infty f(ut)\,e^{-t}dt.\ \ u \in (-\tau_1, \tau_2) \tag{3.13}$$

şeklindedir[57].

Teorem 3.9 [56]. $f(t) \in A$ ve $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü olsun. Bu takdirde $f(t)$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$G(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \tag{3.14}$$

dir.

İspat: $f(t) \in A$ olsun. Bu takdirde $-\tau_1 < u < \tau_2$ için

$$G(u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut) dt$$

dir. Burada $w = ut$ değişken değişimi yapılırsa, $dt = \frac{dw}{u}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} f(w) \frac{dw}{u} \\ &= \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} f(w)\, dw \\ &= \frac{1}{u} F\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.10 [56]. $F_1(u)$ ve $G_1(u)$, $f(t) \in A$ fonksiyonunun türevinin Laplace ve Sumudu dönüşümleri olsun. Bu takdirde

$$G_1(u) = \frac{\mathrm{G(u) - f(0)}}{u} \tag{3.15}$$

dir

İspat. $f(t)$ fonksiyonunun türevinin Laplace dönüşümü

$$F_1(s) = sF(s) - f(0)$$

şeklinde olduğunda bu durumda

$$G_1(u) = \frac{F_1\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \frac{\frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} - f(0)}{u}$$

ya da

$$G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u}$$

dir.

Teorem 3.11 [56]. $n \geq 1$ ve $G_n(u)$ ve $F_n(u)$ sırasıyla $f(t)$ fonksiyonunun $f^{(n)}(t)$ n inci mertebeden türevinin Laplace ve Sumudu dönüşümleri olsun. Bu takdirde

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-(k+1)}} \tag{3.16}$$

dir.

İspat. $f^{(n)}(t)$ için Laplace dönüşümü tanımından

$$F_n(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{n-(k+1)} f^{(k)}(0)$$

yazılabilir. Böylece

$$F_n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{F(\frac{1}{u})}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-(k+1)}}$$

dir. Şimdi $0 \leq k \leq m$ için $G_k(u) = \frac{F_k\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$ olduğundan

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}} = \frac{1}{u^n}[G(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k f^{(k)}(0)]$$

bulunur. Özel olarak f fonksiyonunun ikinci türevinin Sumudu dönüşümü

$$G_2(u) = S\big(f''(t)\big) = \frac{1}{u^2}\left[G(u) - \sum_{k=0}^{2-1} u^k f^{(k)}(0)\right]$$
$$= \frac{1}{u^2}[G(u) - f(0) - f'(0)]$$

ve

$$G_2(u) = S\big(f''(t)\big) = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u} \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilir.

Sumudu dönüşümün bazı özellikleri:

Burada Sumudu dönüşümün bazı önemli özellikleri incelenecektir.

1. Ters dönüşüm özelliği[58].

$$f(t) = S^{-1}[F(u)] = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} F(u)e^{-tu}du.$$

2. Lineerlik özelliği[56]:

$$S[af(t) + bg(t)] = aS[f(t] + bS[g(t)].$$

3. Fonksiyon Türevlerinin Sumudu Dönüşümü[56]:

$$G_1(u) = S[f'(t)] = \frac{G(u) - f(0)}{u} = \frac{G(u)}{u} - \frac{f(0)}{u}$$
$$G_2(u) = S[f''(t)] = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u}$$
$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \frac{f(0)}{u^n} - \cdots - \frac{f^{n-1}(0)}{u}$$

4. Bir Fonksiyonun İntegralinin Sumudu Dönüşümü[56].

$$S\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = uG(u)$$

şeklindedir.

Kesirli Mertebeden integral ve kesirli Mertebeden türevin Sumudu dönüşümü:

Bu kesimde Rimann-Liouville kesirli mertebeden integral ve türevinin ve de Caputo kesirli mertebeden türevin Sumudu dönüşümü verilecektir.

Teorem3.11 [59]. $G(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü ise, bu takdirde $f(t)$ fonksiyonunun α inci mertebeden $D^{-\alpha}(f(t))$ kesirli integralinin Sumudu dönüşümü

$$\mathrm{S}\left[D^{-\alpha}\big(f(t)\big)\right] = S[I_a^\alpha f(t)] = u^\alpha G(u), \qquad Re\alpha > 0 \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. α inci mertebeden Rıemann-Liouville kesirli integrali ile konvolusyon arasındaki bilinen ilişkiden yani $D^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} * f(t)$ ifadesinden

$$\mathrm{S}[\mathrm{D}^{-\alpha}f(t)] = \frac{u}{\Gamma(\alpha)}S[t^{\alpha-1}]S[f(t)] = u^\alpha S[f(t)] = u^\alpha G(u)$$

elde edilir.

Teorem 3.12 [60]. Bir $f(t)$ fonksiyon için

$$S[D^\alpha f(t)](u) = u^{-\alpha}S[f(t)] - \sum_{k=0}^{n} u^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0) \tag{3.19}$$

dir.

İspat. İntegral dönüşüm tekniği ve Sumudu dönüşümü tanımından

$$S[D^{\alpha}f(t)](u)=\int_0^{\infty}e^{-t}\,[D^{\alpha}f(ut)]dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{t}\frac{f^{(n)}(x)}{(ut-x)^{\alpha-n+1}}dxdt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}e^{-t}\frac{f^{(n)}(x)}{(ut-x)^{\alpha-n+1}}dxdt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}e^{-\frac{z+x}{u}}f^{(n)}(x)z^{n-\alpha+1}\frac{1}{\mathrm{u}}dzdx$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{\mathrm{u}}e^{-\frac{x}{u}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{u}}z^{n-\alpha+1}dzdx$$
$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{\mathrm{u}}e^{-\frac{x}{u}}\mathrm{u}^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)dx$$
$$=\mathrm{u}^{n-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{u}e^{-\frac{x}{u}}dx$$
$$=\mathrm{u}^{n-\alpha}\left[\frac{Sf(t)}{u^{n}}-\frac{f(0)}{u^{n}}-\frac{f'(0)}{u^{n-1}}\cdots\frac{f^{(n-1)}(0)}{u^{n-\alpha}}\right]$$

olur. Buradan

$$S[D^{\alpha}f(t)](u)=u^{-\alpha}S[f(t)]-\sum_{k=0}^{n-1}u^{\alpha-k}f^{(k-1)}(0)$$

elde edilir.

Teorem 3.13 [61]. $n-1<\alpha\leq n$ olacak şekilde $n\in N$ ve $\alpha>0$ olsun ve $F(u)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olsun. Bu takdirde $f(t)$ fonksiyonunun α-inci mertebeden Caputo kesirli mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü

$$S[{}_0^cD_t^{\alpha}f(t)]=$$
$$u^{-\alpha}\left[F(u)-\sum_{k=0}^{n-1}u^{k}\left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}\right],\qquad -1<n-1<\alpha\leq n \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat[61]: $g(t)=f^{n}(t)$ olarak alalım. Caputo kesirli türevinin tanımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}_{0}^{c}D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{g(t)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\
&= D_t^{-(n-\alpha)} g(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanır ve (3.18) ifadesi kullanılırsa,

$$
S[{}_{0}^{c}D_t^{\alpha} f(t)] = S\left[D_t^{-(n-\alpha)} g(t)\right] = u^{(n-\alpha)} G(u) \qquad (*)
$$

yazılabilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
S[g(t)] &= S\left[f^{(n)}(t)\right] \\
G_n(u) &= \frac{F(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}
\end{aligned}
$$

olduğundan $(*)$ ifadesi

$$
\begin{aligned}
S[{}_{0}^{c}D_t^{\alpha} f(t)] &= u^{(n-\alpha)} \left[\frac{F(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left[\frac{f^{(k)}(t)}{u^{n-k}}\right]_{t=0}\right] \\
&= u^{\alpha} F(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k-\alpha} \left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
S[{}_{0}^{c}D_t^{\alpha} f(t)] = F_{\alpha}^{c}(u) = u^{-\alpha} \left[F(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left[f^{(k)}(t)\right]_{t=0}\right], -1 < n-1 < \alpha \leq n.
$$

Elde edilir.

Burada Sumudu dönüşümüne ait bazı örneklerini verelim:

Örnek3.1. $\mathrm{f(t)} = \frac{\mathrm{t^n}}{\Gamma(n+1)}$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü bulalım

Çözüm: Sumudu dönüşümü tanımını kullanılarak

$$S[t^n] = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty [ut]^n \, e^{-t} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)} u^n \int_0^\infty t^n \, e^{-t} dt$$

bulunur. Bu integrali Gamma fonksiyon tanımıyla

$$S[t^n] = \frac{1}{\Gamma(n+1)} u^n \int_0^\infty t^{(n+1)-1} \, e^{-t} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)} u^n \Gamma(n+1)$$
$$= u^n$$

elde edilir.

Örnek3.2. $\mathrm{f(t)} = e^{at}$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü bulalım

Çözüm: Sumudu dönüşümün tanımından

$$S[e^{at}] = \int_0^\infty e^{aut} \, e^{-t} dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-t(au+1)} \, dt$$
$$= -\frac{1}{au+1} \lim_{b\to\infty} \left[e^{-t(au+1)}\right]_0^b$$
$$= -\frac{1}{au+1} [0-1]$$
$$= \frac{1}{au+1}$$

elde edilir.

Örnek3.3. $\mathrm{f(t)} = \cos{(at)}$ fonksiyonun Sumudu dönüşümü bulalım.

Çözüm: Sumudu dönüşümün tanımınından

$$S[\cos{(at)}] = \int_0^\infty \cos{(aut)}\, e^{-t} dt$$

dir. Burada kısmi ıntegral metoduna göre

$$S[\cos{(at)}] = 1 - (au)^2 \int_0^\infty \cos{(aut)}\, e^{-t} dt$$

$$= 1 - (au)^2 S[\cos(at)]$$

bulunur. Buradan

$$S[\cos(at)] = \frac{1}{1 + (au)^2}$$

elde edilir.

Bazı fonksiyonlara ait Laplace ve Sumudu dönüşümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir[56].

Tablo 1. Laplace ve Sumudu dönüşümü örnekler

No:	Fonksiyon	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$S\{f(t)\}$
1	t	$\frac{1}{s^2}$	u
2	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1,2, \dots$	$\frac{1}{s^n}$	u^{n-1}
3	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}$
4	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}, a > 0$	$\frac{1}{s^a}$	u^{a-1}
5	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{1-au}$
6	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{u}{(1-au)^2}$
7	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n = 1,2, \dots$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
8	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{at}, \quad k > 0$	$\frac{1}{(s-a)^k}$	$\frac{u^{k-1}}{(1-au)^k}$
9	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt}), a \neq b$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{u}{(1-au)(1-bu)}$
10	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt}), a \neq b$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{(1-au)(1-bu)}$
11	$\frac{1}{\alpha} sin\alpha t$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{u}{1+\alpha^2u^2}$
12	$cos\alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{1+\alpha^2u^2}$
13	$\frac{1}{\alpha} sinh\alpha t$	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$	$\frac{u}{1-\alpha^2u^2}$
14	$cosh\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\frac{1}{1-\alpha^2u^2}$

4. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Adi diferansiyel denklemlerde farklı yapıdaki denklemleri çözmek için bilinen birçok yöntem vardır. Bu bölümde, kesirli mertebeden türevleri içeren belli tipteki kesirli diferansiyel denklemler (KDD) ele alınacaktır ve bu denklemleri çözmeye yönelik Laplace ve Sumudu dönüşüm yöntemleri verilecektir.

Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem içeren aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım,

$$\mathrm{D}^{\alpha_{\mathrm{m}}} y(t) + \sum_{k=1}^{m-1} p_k(t)\, D^{\alpha_{\mathrm{m}}-k} y(t) + p_m y(t) = f(t)\,, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{D}^{\alpha_{\mathrm{m}}-r} y(0) = b_k \quad , \tag{4.2}$$

burada $n-1 \le \alpha < n,\ \ \alpha_{\mathrm{m}} > \alpha_{\mathrm{m}-1} > \cdots > \alpha_1 > 0,\ \ \mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{m},\ \ 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T} < \infty$ ve $r = [\alpha_k]$ şeklindedir. Ayrıca $f(t) \in L^{-1}(0,T)$ yani $\int_0^T |F(t)| dt < \infty$ dir.

Probleme ait varlık ve teklik teoremini ispatsız olarak verelim

Teorem 4.1[33]. $f(t) \in L^1(0,T)$ ve $p_j(t)$, $(j = 1,\ldots,n)$, $[0,T]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise, bu takdirde (4.1)-(4.2) başlangıç değeri problemi $y(t) \in L^1(0,T)$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir.
Teoremin ispatı için kaynak [33]sayfa 124'e bakılabilir.

Tanım 4.1 [27]. Kesirli mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem,

$$\mathrm{D}^{\alpha_\mathrm{m}} y(t) + b_1 D^{\alpha_\mathrm{m}-1} y(t) + b_2 D^{\alpha_\mathrm{m}-2} y(t) + \cdots + b_m D^{\alpha_0} y(t) = 0 \tag{4.3}$$

şekilde ifade edilen bir denklemdir, burada α_i'ler, $\alpha_m > \alpha_{m-1} > \alpha_{m-2} > \cdots > \alpha_0$ olan reel sayılardır ve b_i'ler sabitlerdir.

Tanım 4.2. Kesirli mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklem,

$$\mathrm{D}^{\alpha_\mathrm{m}} y(t) + b_1 D^{\alpha_\mathrm{m}-1} y(t) + b_2 D^{\alpha_\mathrm{m}-2} y(t) + \cdots + b_m D^{\alpha_0} y(t) = h(t) \tag{4.4}$$

şekilde ifade edilir, burada α_i'ler, $\alpha_m > \alpha_{m-1} > \alpha_{m-2} > \cdots > \alpha_0$ olan reel sayılardır ve b_i 'ler sabitlerdir.
Şimdi belli tipteki kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü, örnekler üzerinde Laplace ve Sumudu dönüşüm yöntemleri kullanılarak bulunacaktır.

4.1 Laplace dönüşüm yöntemi

Burada bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü kullanılarak çözümü ile ilgili örnekler verelim.

Örnek 4.1 [39]. Aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım,

$$D^{\alpha} y(t) = 0, \quad (t > 0) \tag{4.5}$$

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k\,, \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{4.6}$$

burada $n-1 \leq \alpha < n$ dir.

Çözüm: Problemin çözümü için (4.5) denkelminin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

ve türevin Laplace dönüşümünden

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{k-1}\,[D^{\alpha-k}y(0)] = 0$$

yazılabilir. Buradan

$$Y(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha}}\, b_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{s^{\alpha-k+1}}\, b_k$$

olur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanılırsa,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\, b_k \tag{4.7}$$

elde edilir.

Örnek 4.2 [39]. $D^{\frac{4}{3}}y(t) = 0$ kesirli mertebeden diferansiyel denkleminin $D^{\frac{1}{3}}y(0) = b_1$, $D^{-\frac{2}{3}}y(0) = b_2$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{D^{\frac{4}{3}}y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

ve

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) - \sum_{k=1}^{2-1} s^{k-1}\left[D^{\frac{4}{3}-k-1}y(0)\right] = 0$$

$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) - D^{\frac{1}{3}}y(0) - sD^{-\frac{2}{3}}y(0) = 0$$
$$s^{\frac{4}{3}}Y(s) = D^{\frac{1}{3}}y(0) + sD^{-\frac{2}{3}}y(0)$$

bulunur. Buradan $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{D^{\frac{1}{3}}y(0) + sD^{-\frac{2}{3}}y(0)}{s^{\frac{4}{3}}}$$
$$= \frac{b_1}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{b_2 s}{s^{\frac{4}{3}}}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_1}{s^{\frac{4}{3}}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b_2 s}{s^{\frac{4}{3}}}\right\}$$
$$= b_1 \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{4}{3})} + b_2 \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

elde edilir.

Örnek 4.3 [39]. Aşağıdaki homojen kesirli mertebeden diferansiyel denkleme ait başlangıç değeri problemini ele alalım,

$$D^{\alpha}y(t) - \lambda y(t) = 0, \quad (t > 0) \tag{4.8}$$
$$D^{\alpha-k}y(0) = b_k, \quad (k = 1,2,\dots,n) \tag{4.9}$$

burada $n - 1 \leq \alpha < n$ dir.

Çözüm: Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha}y(t)\} - \mathcal{L}\{\lambda y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

bulunur. Buradan

$$s^{\alpha}Y(s)-\sum_{k=1}^{n-1}s^{k-1}\,[D^{\alpha-k-1}y(0)]-\lambda Y(s)=0$$

$$s^{\alpha}Y(s)-\sum_{k=1}^{n-1}s^{k-1}\,b_k-\lambda Y(s)=0$$

$$Y(s)(s^{\alpha}-\lambda)=\sum_{k=1}^{n-1}s^{k-1}\,b_k$$

olur. Böylece $Y(s)$,

$$Y(s)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{s^{k-1}}{s^{\alpha}-1}b_k$$

şeklinde elde edilir. Ters Laplace dönüşümü kullanılarak

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n-1}b_k\,t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) \tag{4.10}$$

çözümü bulunur. Bilindiği üzere burada E Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Örnek 4.4 [39]. Verilen başlangıç değeri probleminin çözümünü bulalım.

$$D^{\frac{2}{5}}y(t)-5y(t)=0,$$
$$D^{\frac{2}{5}-1}y(0)=b_1.$$

Çözüm: Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\left\{D^{\frac{2}{5}}y(t)\right\}-5\mathcal{L}\{y(t)\}=\mathcal{L}\{0\}$$

ve

$$s^{\frac{2}{5}}Y(s)-\sum_{k=0}^{1-1}s^{k-1}\left[D^{\frac{2}{5}-k-1}y(0)\right]-\lambda Y(s)=0$$

$$s^{\frac{2}{5}}Y(s) - D^{\frac{2}{5}-1}y(0) - \lambda Y(s) = 0$$

olur. Buradan

$$Y(s) = \frac{b_1}{s^{\frac{2}{5}} - 5}$$

şeklindedir. Şimdi her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(t) = b_1 t^{-\frac{3}{5}} E_{\frac{2}{5},\frac{2}{5}}(5t^{\frac{2}{5}})$$

elde edilir.

Örnek 4.5 [62]. Caputo kesirli mertebeden diferansiyel denklem içeren aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözelim.

$${}_0^C D_x^\alpha y(x) + ay(x) = 0 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad y(0) = c. \tag{4.11}$$

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L\{{}_0^C D_x^\alpha y(x)\} + aL\{y(x)\} = 0$$

dir. Burada

$$L\{{}_0^C D_x^\alpha y(x)\} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^{(k)}(0)$$

olduğundan

$$s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{1-1} s^{\alpha-k-1}\, y(0) + aY(s) = 0$$

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) + aY(s) = 0$$

$$Y(s)(s^\alpha + a) = cs^{\alpha-1}$$

$$Y(s) = c \cdot \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}$$

elde edilir.

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}\right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)$$

olduğundan $Y(s)$ in her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = cL^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+a}\right\}$$
$$y(x) = ct^{1-1}E_{\alpha,1}(-at^{\alpha})$$
$$y(x) = cE_{\alpha,1}(-ax^{\alpha}) \tag{4.12}$$

bulunur.

Örnek 4.6 [62]. Caputo kesirli mertebeden diferansiyel denklem bulunduran aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

$${}_a^C D_t^{\alpha} y(x) + {}_a^C D_t^{\beta} y(x) = h(x) \quad , \quad y(0) = c. \tag{4.13}$$

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır ve Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği göz önüne alınırsa,

$$L\{{}_a^C D_t^{\alpha} y(x)\} + L\left\{{}_a^C D_t^{\beta} y(x)\right\} = L\{h(x)\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$L\{{}_0^C D_x^{\alpha} y(x)\} = s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} D^{(k)}(0)$$

olduğundan son eşitlik

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}\, y^{k}(0) + s^{\beta}Y(s) - \sum_{k=0}^{\infty} s^{\beta-k-1}\, y^{k}(0) = H(s)$$
$$Y(s)\left(s^{\alpha} + s^{\beta}\right) - \left(s^{\alpha-1} + s^{\beta-1}\right)c = H(s)$$
$$Y(s) = \frac{c}{s} \cdot \frac{s^{\alpha} + s^{\beta}}{s^{\alpha} + s^{\beta}} + H(s) \cdot \frac{1}{s^{\alpha} + s^{\beta}}$$
$$Y(s) = \frac{c}{s} + H(s) \cdot \frac{1}{s^{\alpha} + s^{\beta}}$$

veya

$$Y(s) = \frac{c}{s} + H(s) \cdot \frac{s^{-\alpha}}{(s^{\beta-\alpha} + 1)}$$

şeklinde bulunur. Buradan her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{\frac{c}{s}\} + L^{-1}\{H(s) \cdot \frac{s^{-\alpha}}{(s^{\beta-\alpha} + 1)}\}$$

olur. Burada konvolusyon tanımından $y(t)$ çözümü

$$y(t) = c + \int_0^t (t-u)^{2\alpha-1} E_{a,2\alpha}(\lambda(t-u)^{\alpha})\, h(u)du \qquad (4.14)$$

şeklinde elde edilir.

4.2 Sumudu dönüşüm yöntemi

Bazi kesirsel mertebeden homogan olmayan kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlere Sumudu dönüşümü uygulayarak çözelim[57].

Örnek 4.7 [57]. Aşağıda verilen kesirli diferansiyel denklemi

$$D^{\alpha}[U(t)] = -U(t) + \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + t^2 - t, \ \ t > 0, \qquad 0 < \alpha \leq 1 \qquad (4.15)$$

ve buna ait

$$U(0) = 0$$

başlangıç şartını göz önüne alalım.

Çözüm: Sumudu dönüşümünü kullanarak (4.15) denklemini çözmek için (4.15)'in her iki tarafının sumudu dönüşümü alınırsa,

$$S\left[D^{\alpha}[U(t)]\right] + S[U(t)] = S\left[\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{\,1-\alpha} + t^2 - t\right]$$

olur. Buradan

$$S\left[D^{\alpha}[U(t)]\right] + F(u) = S\left[\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\right] - S\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}\right] + S[t^2] - S[t]$$

$$\frac{F(u)}{u^{\alpha}} - \frac{D^{\alpha-1}[U(t)]}{u}|_{t=0} + F(u) = \frac{2}{\Gamma(3-)}S[t^{2-\alpha}] - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}S[t^{1-\alpha}] + S[t^2] - S[t]$$

$$\frac{F(u)}{u^{\alpha}} + F(u) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}u^{2-\alpha}\Gamma(3-\alpha) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}u^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha) + 2u^2 - u$$

$$\left(1 + \frac{1}{u^{\alpha}}\right)F(u) = 2u^{2-\alpha} - u^{1-\alpha} + 2u^2 - u$$

$$(1 + u^2)F(u) = 2u^2 - u + 2u^{\alpha+2} - u^{\alpha+1}$$

$$(1 + u^2)F(u) = u(2u - 1) + uu^{\alpha}(2u - 1)$$

$$(1 + u^2)F(u) = (2u - 1)u(1 + u^2)$$

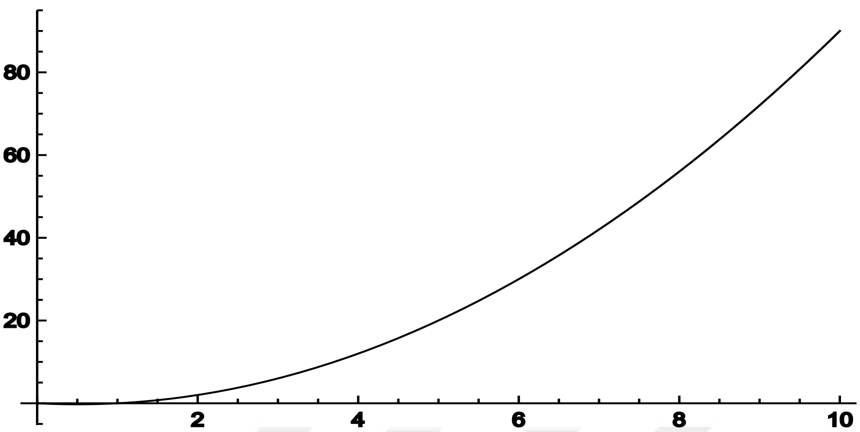
$$F(u) = u(2u - 1)$$

$$F(u) = 2u^2 - u$$

bulunur. Sumudu ters dönüşümü uygulandiktan sonra

$$U(t) = t^2 - t$$

çözümü elde edilir.



Şekil 7. $U(t) = t^2 - t$ grafığı

Örnek 5.7[63]. Aşağıda verilen homogan olmayan kesirli diferansiyel denklemi

$$D^{0.5}U(t) + U(t) = t^2 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2,5)}t^{1,5}, \quad t > 0 \tag{4.16}$$

ve buna ait

$$U(0) = 0$$

başlangıç şartını göz önüne alalım.

Çözüm: Sumudu dönüşümünü kullanarak (4.16) denklemini çözmek için (4.16)'nın her iki tarafının sumudu dönüşümü alınırsa,

$$S[D^{0.5}U(t)] + S[U(t)] = S[t^2] + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2,5)}S[t^{1,5}]$$

$$\frac{F(u)}{u^{0,5}} - \frac{D^{\alpha-1}[U(t)]}{u}|_{t=0} + F(u) = 2u^2 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2,5)}u^{1,5}\Gamma(2,5)$$

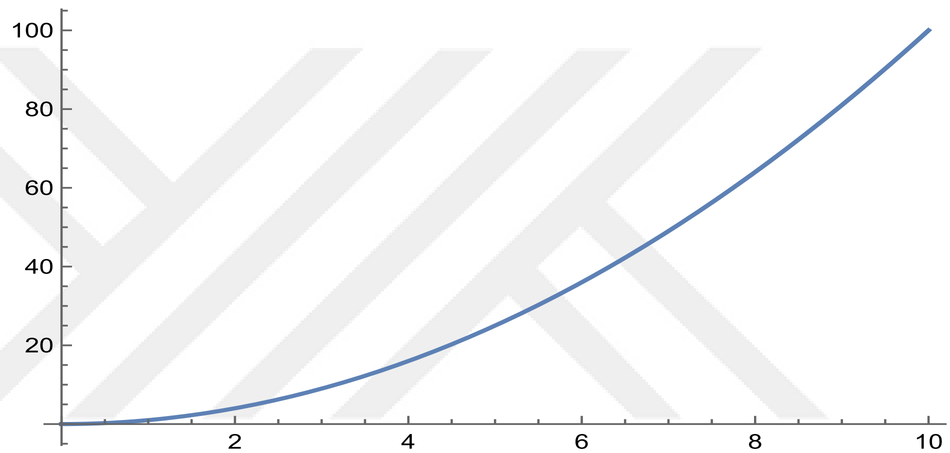
$$\frac{F(u)}{u^{0,5}} + F(u) = 2u^2 + 2u^{1,5}$$

$$\left(1+\frac{1}{u^{0,5}}\right)F(u) = 2u^2(1+u^{0,5})$$
$$F(u) = 2u^2$$

bulunur. Sumudu ters dönüşümü uygulandiktan sonra başlangıç değer problemini çözümü

$$U(t) = t^2$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 8. $U(t) = t^2$ *grafığı*

5. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN UYGULAMASI

5.1 Giriş

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, akışkanlar mekaniği, kimyasal fizik, elektronik devreler, dinamik sistem kontrol teorisi, akışkan dinamiği, ekonomi ve çok yönlü uygulamalara sahip diğer birçok alan da dâhil olmak üzere çeşitli disiplinlerdeki yaygın kullanımları nedeniyle önemli ölçüde ilgi görmüştür (5, 6 , 64).

Araştırmacılar, integral mertebeden fonksiyonel diferansiyel denklemlerin salınım teorisine öncelik vermişlerdir; bu yaklaşımın hem kuramsal açıdan taşıdığı büyük önem hem de pratikteki anlamlı etkisi, bu alanda kayda değer ilerlemelere yol açmıştır ([65, 66 ,11 , 12]). Son dönem çalışmalarda Duan ve arkadaşları [18], Harikrishnan ve arkadaşları [14], Raheem ve arkadaşları [19], Zhou ve arkadaşları [20]ile Feng ve arkadaşları [67], kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler için salınım ve zorlanmış salınım özelliklerini incelemişlerdir. Kesirli diferansiyel denklemler için salınımsızlık teorisi ise Zhou ve arkadaşları [22], Sun ve arkadaşları [23] ile Grace ve arkadaşları[65] gibi araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Bununla birlikte, dağıtılmış gecikmeler içeren kesirli fonksiyonel diferansiyel denklemlerde salınımlı çözümlerin varlığı konusu sınırlı ölçüde araştırılmıştır. Aşağıdaki bölümde bu konuyu ele alacağız.

Burada zorlanma terimi içeren aşağıdaki

$$D_t^{\alpha}\left[r(t)\phi\big(\acute{x}(t)\big)\right] + \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\big(g_i(t)\big)\right) = q(t) \quad , t \geq t_0 \tag{5.1}$$

gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için salınımlı çözümlerin varlığı incelenecektir, burada D_t^{α}, $\alpha \geq 0$ yarı eksende α inci mertebeden Liouville kesirli türividir, $r \in C([t_0,\infty), R^+)$, $g_i \in ([t_0,\infty),\ R)$, $f_i \in C([t_0,\infty) \times R,\ R)$ ve $g_i(t) \leq t$, $\lim_{t\to\infty} g_i(t) = \infty$, $i = 1,2,3,\ldots,m$ ve $\phi(\mathrm{u})$, R üzerinde tanımlı olan u'ya göre sürekli artan reel bir fonksiyondur ve $\phi^{-1}(\mathrm{u})$ yerel (local) Lipschitz koşulunu sağlar[68].

Şimdi kullanacağımız gerekli tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 5.1[68]. Denklem (5.1)'in bir çözümü, her $t_1 > T$ için $x(t)\ ve\ r(\phi\big(\acute{x}(t)\big)$, $[\ t_1,\infty)$ mevcut ve (6.1) denkelemine sağlayack şekilde $[T,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı bir $x(t)$ fonksiyonudur.

Tanım 5.2 [11]. Denklem (5.1)`in aşikar(belirgin) olmayan çözümü keyfi çoklukta sıfırlara sahipse, bu x çözümüne salınımlıdır veya salınım yapar denir. Aksi takdirde çözüme salınımsız denir.

Tanım 5.3 [22]**.** Yarı eksende Liouville kesirli integrali

$$(I_x^{-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \ , \ \ (x > a; \Re(\alpha > 0)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$, $t \in R$, $\quad ve\ \ \alpha \in [0,\infty)$ dir.

Tanım 5.4 [22]. Yarı eksende Liouville kesirli türevi

$$D_t^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_t^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt\,, \qquad n-1 \leq \alpha < 1$$

şeklinde tanımlıdır, Burada n=[α]+1 ve [ ] işareti, α sayısının tam kısmını göstermektedir. Özellikle, $\alpha = n \in N$ olduğunda, $D_t^n f(t) = f^{(n)}(t)$ olup, bu ifade $f(t)$ fonksiyonunun klasik anlamdaki n. türevine karşılık gelir.

Özellik 5.1 [22]. $\alpha > 0$ için

$$D_t^{\alpha}[D_t^{-\alpha} f(t)] = f(t)$$

dir.

Burada herhangi bir $\sigma \geq t_0$ için $T = \min_{1\leq i\leq m} inf\, g_i(t)$ olsun ayrıca herhangi $\gamma > 0$, $p_i(t)_{\gamma} = \max_{|x|\leq\gamma} \frac{1}{\gamma} |f_i(t,x)|, t \geq t_0,\ i = 1,2,3, \dots m,\quad L_{\gamma}, \phi^{-1}$(u) fonksiyonun yerel(local) Lipschitz sabitlerini göstersin.

Ayrıca vereceğimiz teoremin ispatında kullanılacak olan Arzela Ascoli teoremini ifade edelim.

Teorem 5.1 [69]. Φ, [0,1] aralığında tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonların uzayı olan $C(I)$'nin bir alt kümesi olsun. Bu uzay, aşağıdaki şartaları sağlıyorsa supremum metriğiyle donatılmıştır. Yani

(a) Φ'deki tüm fonksiyonlar için $|\ \varphi(x)\ | \leq L$ olacak şekilde bir $L > 0$ bulunabiliyorsa (yani, Φ noktadan noktaya sınırlıdır) ise

(b) $|\ x - y\ | < \delta$ ve $x, y \in I$ olduğunda $\varphi \in \Phi$ için $|\ \varphi(x) - \varphi(y)\ | < \epsilon$ olacak şekilde her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa (yani, Φ uniform eşsürekli ise).

Lemma 5.1 [68]. S, yerel konveks bir topolojik uzay olsun. Boş olmayan herhangi bir kompakt konveks $K \subset S$ kümesi için herhangi bir $F: K \to K$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi vereceğimiz temel teoremi ifade ve ispat edelim.

5.2 Belli Tipteki Kesirli Diferansiyel Denklemlerinin Salınımlı Çözümlerinin Varlığı

Bu bölümde, gecikmeli kesirli diferansiyel denklemler için salınımlı çözümlerin global varlığına ilişkin yeterli şartlar vermek amacıyla Schauder-Tychonoff teoremi kullanılacaktır.

Teorem 5.2 [68]. Kabul edelim ki $r(t) > \eta$,

$$\frac{1}{\mathrm{r(t)}} \int_t^\infty s^{\alpha-1}\, q(s) ds \quad , [t_0, \infty), \text{ integrenebilir.} \tag{5.2}$$

ve

$$\frac{1}{\mathrm{r(t)}} \int_t^\infty s^{\alpha-1} \sum_{i=1}^m q(s)_\gamma \, ds \quad , [t_0, \infty), \text{ integrenebilir.} \tag{5.3}$$

olacak şekilde $\eta, \gamma > 0$ var olsun. Ayrıca

$$\int_{t_n}^\infty (\phi^{-1} \left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)} \int_s^\infty ((u-t)^{\alpha-1} \left(q(u) - \gamma \sum_{i=1}^m p_i(u)_\gamma \right) du \right) ds < 0 \tag{5.4}$$

$$\int_{s_n}^\infty (\phi^{-1} \left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)} \int_s^\infty ((u-t)^{\alpha-1} \left(q(u) - \gamma \sum_{i=1}^m p_i(u)_\gamma \right) du \right) ds > 0 \tag{5.5}$$

olacak şekilde iki artan ıraksak $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ dizileri mevcut olsun. Bu takdirde (5.1) diferansiyel denklemi $|x| \le \gamma$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı, salınımlı bir $x(t)$ çözümüne sahiptir ve $\lim\limits_{x \to \infty} x(t) = 0$ dır.

İspat: Teorem 5.1 ispatı, Schauder-Tychonoff sabit nokta teoreminin bir uygulamasına dayanmaktadır.

Denklem (5.1)'in her iki tarafına $D_t^{-\alpha}$ uygulanırsa,

$$D_t^{-\alpha}\left(D_t^{\alpha}\left[r(t)\phi\left(\acute{x}(t)\right)\right]\right) = D_t^{-\alpha}(q(t) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right))$$

ve

$$r(t)\phi\left(\acute{x}(t)\right) = D_t^{-\alpha}(q(t) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)$$

elde edilir. Liouville kesirli integrali kullanılarak

$$r(t)\phi\left(\acute{x}(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} ((s-t)^{\alpha-1}\left(q(s) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)\right)ds$$

yazılabilir. Buradan

$$\phi\left(\acute{x}(t)\right) = \frac{1}{r(t)\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} ((s-t)^{\alpha-1}\left(q(s) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)\right)ds$$

dır. Her iki tarafa ϕ^{-1} uygulanılırsa,

$$\acute{x}(t) = \phi^{-1}(\frac{1}{r(t)\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty} ((s-t)^{\alpha-1}\left(q(s) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)\right)ds)$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$x(t) = \int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty} ((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)\right)du\right)ds$$

bulunur. (6.2) ve (6.3)'ten, herhangi bir $\gamma > 0$ için

$$\int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty} ((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) + \gamma\sum_{i=1}^{m} p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \leq \gamma \tag{5.6}$$

$$\int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty} ((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) - \gamma\sum_{i=1}^{m} p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \geq -\gamma \tag{5.7}$$

olacak şekilde her $t \geq T_\gamma \geq T$ için T_γ gibi büyük bir sayı seçilebilir.

$C[T,\infty)$, $[T,\infty)$'un kompakt alt kümeler üzerinde düzgün yakınsama topolojisine sahip tüm sürekli fonksiyonların yerel konveks uzayını göstersin. Burada $S = \{x \in C[T,\infty) : | x(t) | \leq \gamma\}$ olsun açıkça S, $C[T,\infty)$'un kapalı konveks bir alt kümesidir.

Aşağıdaki şekilde bir F operatörünü tanımlayalım. Yani

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) - \sum_{i=1}^{m} f_i\left(t, x\left(g_i(t)\right)\right)\right)du\right)ds & , t > T_\gamma \\ Fx\left(T_\gamma\right) & , \quad T \leq t \leq T_\gamma \end{cases}$$

alalım. Herhangi bir $x \in S$ için $(Fx)(t)$'nin $[T,\infty)$ üzerinde sürekli olarak iyi tanımlı olduğu kolaylıkla görülebilir. (5.6) ve (5.7)'den

$$(Fx)(t) \leq \int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \leq \gamma, t \geq T$$

ve

$$(Fx)(t) \geq \int_t^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u) - \sum_{i=1}^{m} p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \geq -\gamma, t \geq T$$

elde edilir.

Böylece $| (Fx)(t) | \leq \gamma$ olduğundan $FS \subset S$ ve Fx'in S üzerinde düzgün sınırlıdır.

$\sum_{i=1}^{\infty} x_n \in S$, herhangi bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olmak üzere $x_0 \in S$ olsun. T_1, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)} \int_s^{\infty} ((t-u)^{\alpha-1}(\sum_{i=1}^{m} p_i\,(u)_\gamma du)\,ds \leq \frac{\epsilon}{3\gamma L_\gamma} \tag{5.8}$$

olmak üzere $T_1 > T$ olan bir büyük sabit olsun. f_i fonksiyonun tanım kümesinin kompaktlarından, $|x_n - x_0| < \delta(\epsilon)$ iken

$$\max_{1\leq i\leq m}\left|f_i\left(t,x_n\big(g_i(t)\big)\right)-f_i\left(t,x_0\big(g_i(t)\big)\right)\right|\leq\frac{\epsilon}{3mML_\gamma}\tag{5.9}$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)>0$ ve $\delta(\varepsilon)>0$ bir sabiti vardır, burada $t\in[T,T_1]$ ve $n\geq N$ olsun, burada $M=\int_T^{T_1}\frac{(s-T)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)r(s)}ds$ dir.

Böylece (5.2) ve (5.9) den herhangi $t\geq T\ ve\ |x_n-x_0|<\delta$ için

$$\begin{aligned}
&|(Fx_n)(\mathrm{t})-(Fx_0)(t)|\\
&=\left|\int_t^\infty\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^m f_i\left(u,x_n\big(g_i(u)\big)\right)\right)du\right)\right.\\
&\quad-\int_t^\infty\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t-u)^{\alpha-1}(q(u)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.-\sum_{i=1}^m f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)\right)du\right)\right|ds\\
&\leq\left|\int_\mathrm{t}^\infty\phi^{-1}\,(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t-u)^{\alpha-1}\,q(u)du\right.\\
&\quad-\int_\mathrm{t}^\infty\phi^{-1}\,(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^m f_i\left(u,x_\mathrm{n}\big(g_i(u)\big)\right)du\\
&\quad-\int_\mathrm{t}^\infty\phi^{-1}\,(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t-u)^{\alpha-1}\,q(u)du\\
&\quad+\int_\mathrm{t}^\infty\phi^{-1}\,(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t-u)^{\alpha-1}\int_\mathrm{t}^\infty\phi^{-1}\,(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^\infty(t\\
&\quad\left.-u)^{\alpha-1}\,du\right|ds\\
&\leq\phi^{-1}(\int_t^\infty\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^m\left|f_i\left(u,x_\mathrm{n}\big(g_i(u)\big)\right)-f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)du\right|ds
\end{aligned}$$

bulunur. $L_\gamma,\ \phi^{-1}$ fonksiyonlarının yerel Lipschitz sabiti olmak üzere

$$|(Fx_n)(\mathrm{t})-(Fx_0)(t)|$$
$$\leq (\int_{T}^{T_1}\frac{L_\gamma}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(u,x_{\mathrm{n}}\big(g_i(u)\big)\right)-f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)du\right|ds$$
$$+(\int_{T_1}^{\infty}\frac{L_\gamma}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(u,x_{\mathrm{n}}\big(g_i(u)\big)\right)-f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)du\right|ds$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte birinci terimden

$$\int_{T}^{T_1}\frac{L_\gamma}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(u,x_{\mathrm{n}}\big(g_i(u)\big)\right)-f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)du\right|ds\leq\frac{\epsilon}{3ML_\gamma}=\frac{\epsilon}{3}$$

ve ikinci terimden ayrı ayrı

$$\int_{T_1}^{\infty}\frac{L_\gamma}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(u,x_{\mathrm{n}}\big(g_i(u)\big)\right)duds\leq\frac{\epsilon}{3\gamma L_\gamma}=\frac{\epsilon}{3}$$
$$\int_{T_1}^{\infty}\frac{L_\gamma}{r(s)\Gamma(\alpha)}(t-u)^{\alpha-1}\sum_{i=1}^{m}f_i\left(u,x_0\big(g_i(u)\big)\right)duds\leq\frac{\epsilon}{3\gamma L_\gamma}=\frac{\epsilon}{3}$$

yazılabilir. Böylece

$$|(Fx_n)(\mathrm{t})-(Fx_0)(t)|\leq\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

olur. Dolayısıyla F fonksiyonun S üzerinde sürekli olduğu ispatlanmış olur.

Ayrıca, tüm $t_2,t_1>T$ için

$$(Fx)(t_2)-(Fx)(t_1)$$
$$=\int_{t_1}^{\mathrm{t}_2}\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_{s}^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m}f_i\left(u,\mathrm{x}\big(g_i(u)\big)\right)\right)du\right)ds$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2}\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m} p_i\,(u)_\gamma\right)du\right)ds$$
$$\leq k_1(t_2-t_1)$$

olur, burada $k_1 = \sup_{t\geq t_0} \phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m} p_i\,(u)_\gamma\right) du$ şeklindedir.

$$(Fx)(t_2)-(Fx)(t_1)$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m} f_i\left(u,\mathrm{x}\big(g_i(u)\big)\right)\right)du\right)ds$$
$$\geq \int_{t_1}^{t_2}\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m} p_i\,(u)_\gamma\right)du\right)ds$$
$$\geq k_2(t_2-t_1)$$

olur burada $k_2 = \inf_{t\geq t_0} \phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}(t-u)^{\alpha-1}(q(u)-\sum_{i=1}^{m} p_i\,(u)_\gamma\right) du$ şeklindedir.

Dolasıyla

$$|(Fx)(t_2)-(Fx)(t_1)| \leq k|t_2-t_1|$$

elde edilir. Burada $k = max\{|\,k_1\,|,|\,k_2\,|\}$ dır. Bu da Fx'in eşdüzgün sürekli olduğunu gösterir. böyelec Ascoli-Arzelà teoremi'ne göre operatör S üzerinde tamamen sürekli bir operatördür. Lemma 5.1 den $\tilde{x}(t) = (F\tilde{x})(t)$ sağlayan $\tilde{x} \in S$ vardır,

$$\tilde{x}(t) = \int_t^{\infty}(\phi^{-1}\frac{1}{r(t)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u)-\sum_{i=1}^{m} f_i\left(s,\tilde{x}\big(g_i(u)\big)\right)\right)du,$$
$$r(t)\phi\left(\tilde{x}\acute{}(t)(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty}((s-t)^{\alpha-1}\left(q(s)-\sum_{i=1}^{m} \mathrm{f_i}(s,\tilde{x}\big(g_i(s)\big)\right)ds,$$

Özellik 5.1'den, $\tilde{x}(t)$'nin Denklem (5.1)'in bir çözümü olduğu kolaylıkla görülebilir

Diğer taraftan, (5.4) ve (6.5)'ten

$$\tilde{x}(t_n) \leq \int_{t_n}^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u)-\gamma\sum_{i=1}^{m}p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \leq \gamma$$

ve

$$\tilde{x}(s_n) \leq \int_{s_n}^{\infty} (\phi^{-1}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u)-\gamma\sum_{i=1}^{m}p_i(u)_\gamma\right)du\right)ds \geq -\gamma$$

yazılabilir. Bu da $\tilde{x}(t)$'nin (6.1) denkleminin sınırlı salınımlı bir çözümü olduğunu ve $\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t)=0$ olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamalar.

Sonuç

Teoremin (5.2) ve (5.3) koşullarının sağlandığını ve özel olarak $\Phi(u)=u^{\lambda}$olduğunu varsayalım, burada $\lambda \geq 1$, iki pozitif tek tam sayının oranıdır. Ayrıca

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u)+\gamma\sum_{i=1}^{m}p_i(u)_\gamma\right)du\right)^{\frac{1}{\lambda}}ds<0$$

ve

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r(s)\Gamma(\alpha)}\int_s^{\infty}((u-t)^{\alpha-1}\left(q(u)-\gamma\sum_{i=1}^{m}p_i(u)_\gamma\right)du\right)^{\frac{1}{\lambda}}ds>0$$

özelliklere sahip artan ıraksak $\{t_n\} ve \{s_n\}$ dizilerinin var olduğunu kabul edelim.

Bu durumda (5.1) denkleminin $|\ x\ |\leq \gamma$ için $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı, salınımlı bir $x(t)$ çözümü vardır ve $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ dır.

KAYNAKÇA

[1] Dalir, M. and M. Bashour. 2010. *Applications of fractional calculus.* **Applied Mathematical Sciences.** 4(21): p. 1021-1032.

[2] Loverro, A. 2004. *Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer.* Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: **Department of Aerospace and Mechanical Engineering**,: p. 1-28.

[3] Podlubny, I. 1999. *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering*. **Academic press New York**.

[4] Hilfer, R. 2000. *Applications of fractional calculus in physics*. **World scientific.**

[5] Diethelm, K. and N. Ford. 2010.*The analysis of fractional differential equations.* **Lecture notes in mathematics.**

[6] Kilbas, A.A., H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. 2006. *Theory and applications of fractional differential equations*. Vol. 204.: elsevier.

[6] Podlubny, I. 1998. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, **fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications***. elsevier.

[8] Kumar, P. and O.P. Agrawal. 2006. *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations.* **Signal processing,**. 86(10): p. 2602-2610.

[9] Agarwal, R.P., et al. 2012. *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications*.: **Springer Science & Business Media.**

[10] Agarwal, R. 2004. *Nonoscillation and Oscillation: **Theory for Functional Differential Equations***., Marcel Dekker.

[11] Erbe, L. 2017. *Oscillation theory for functional differential equations*. Routledge.

[12] Gopalsamy, K. 2013. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Vol. 74.: **Springer Science & Business Media.**

[13] Bolat, Y. 2014. *On the oscillation of fractional-order delay differential equations with constant coefficients.* **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,**. 19(11): p. 3988-3993.

[14] Harikrishnan, S., P. Prakash, and J.J. Nieto. 2015. *Forced oscillation of solutions of a nonlinear fractional partial differential equation.* **Applied Mathematics and computation,.** 254: p. 14-19.

[15] Zhou, Y. and L. Peng. 2017. *On the time-fractional Navier–Stokes equations.* Computers & Mathematics with Applications,. 73(6): p. 874-891.

[16] Zhou, Y. and L. Peng. 2017. *Weak solutions of the time-fractional Navier–Stokes equations and optimal control.* **Computers & Mathematics with Applications.** 73(6): p. 1016-1027.

[17] Zhou, Y. and L. Zhang. 2017. *Existence and multiplicity results of homoclinic solutions for fractional Hamiltonian systems.* Computers & Mathematics with Applications,. 73(6): p. 1325-1345.

[18] Grace, S.R. 2015. *On the oscillatory behavior of solutions of nonlinear fractional differential equations.* **Applied Mathematics and Computation.** 266: p. 259-266.

[19] Raheem, A. and M. Maqbul. 2017. *Oscillation criteria for impulsive partial fractional differential equations.* **Computers & Mathematics with Applications,**. 73(8): p. 1781-1788.

[20] Zhou, Y., et al. 2019. *Oscillation for fractional partial differential equations.* Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,. 42: p. 449-465.

[21] Feng, L. and Z. Han. 2020. *Oscillation behavior of solution of impulsive fractional differential equation.* **Journal of Applied analysis and Computation**,. 10(1): p. 223-233.

[22] Zhou, Y., B. Ahmad, and A. Alsaedi. 2017. *Existence of nonoscillatory solutions for fractional neutral differential equations.* **Applied Mathematics Letters,.** 72: p. 70-74.

[23] Sun, Y. and Y. Zhao. 2018. *Oscillation and asymptotic behavior of third-order nonlinear neutral delay differential equations with distributed deviating arguments.* J. Appl. Anal. Comput,. 8(6): p. 1796-1810.

[24] Mathai, A.M. and H.J. Haubold. 2008. *Special functions for applied scientists*. Vol. 4.: Springer.

[25] Rehman, M.u. 2011. *Fractional Differential Equactions*, in *Center for Advance Mathematics and Physics*. **National University of sciences and Technology,: islamabad.**

[26] Freeden, W. and M. Gutting. 2013. *Special functions of mathematical (geo-) physics*. **Springer.**

[27] Miller, D. 2004. *Fractional Calculus, Minor Thesis Part of PHD*. **West Virginia University.**

[28] Gradshteyn, I.S. and I.M. Ryzhik. 2014. *Table of integrals, series, and products*.: Academic press.

[29] Milici, C., G. Drăgănescu, and J.T. Machado. 2018. *Introduction to fractional differential equations*. Vol. 25.: **Springer.**

[30] Mainardi, F. 2022.*Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*.: **World Scientific.**

[31] Köse, Z.S. 2007. *Methods for solving fractional differential equations*., **Fen Bilimleri Enstitüsü.**

[32] Alchikh, R.A.S. 2019 *Solution of Fractional Differential Equations:* ***Transform and Iterative Methods Approach*****.**

[33] Pandey, V. 2016. *Physical and geometrical interpretation of fractional derivatives in viscoelasticity and transport phenomena.*.

[34] David, S.A., J.L. Linares, and E.M.d.J.A. Pallone. 2011. *Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications.* **Revista Brasileira de Ensino de Física**. 33: p. 4302-4302.

[35] Oldham, K. and J. Spanier. 1974. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*.: Elsevier.

[36] Miller, K.S. and B. Ross. 1993. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* (No Title).

[37] Ross, B. 1977. *The development of fractional calculus 1695–1900.* Historia mathematica, 4(1): p. 75-89.

[38] Ross, B. *1974*. *A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus*. in *Fractional calculus and its applications:* ***proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June*** **Springer.**

[39] Fakhouri, W. 2017. *Fractional Differentiation.*

[40] Kimeu, J.M. 2009. *Fractional calculus: Definitions and applications.*

[41] Sonin, N.Y. 1869. *On differentiation with arbitrary index.* **Moscow Matem. Sbornik**,. 6(1): p. 1-38.

[42] Ishteva, M. 2005. *Properties and applications of the Caputo fractional operator.* **Department of Mathematics, University of Karlsruhe, Karlsruhe**, 5.

[43] Kisela, T. 2008. *Fractional differential equations and their applications.* **Faculty of Mechanical Engineering Institute of Mathematics,**

[44] Soytaş, C. 2006. *Kesirli diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleri.*

[45] Asher, K. 2013. *An introduction to laplace transform.* Int. J. Sci. Res, 2(1): p. 2319-7064.

[46] Ram, B. 2010. *Engineering Mathematics-I: For WBUT*.: Pearson Education India.

[47] Debnath, L. 2007. ***Transforms and Their Applications*.**

[48] Vance, D. 2014. *Fractional derivatives and fractional mechanics.* Seattle, WA, USA: University of Washington,

[49] Lin, S.-D. and C.-H. Lu. 2013. *Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications.* **Advances in Difference Equations,** p. 1-9.

[50] Gkrekas, N. 2024. *Applying Laplace Transformation on Epidemiological Models as Caputo Derivatives.* **Mathematical Biology**, 19(1): p. 61-76.

[51] Watugala, G.K. 1993. *Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems.* **Integrated Education,** 24(1): p. 35-43.

[52] Asiru, M.A. 2001. *Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type.* **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, 32(6): p. 906-910.

[53] Belgacem, F.B.M. and A.A. 2006. Karaballi, *Sumudu transform fundamental properties investigations and applications.* **International Journal of Stochastic Analysis**, (1): p. 091083.

[54] Goswami, P., F. Belgacem, and S. Sivasundaram. 2012. *Solving special fractional differential equations by Sumudu transform*. **In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics*.**

[55] Belgacem, F.B.M. 2007. *Applications of Sumudu transform to indefinite periodic parabolic equations*. **In *Proceedings of the 6th International Conference on Mathematical Problems & Aerospace Sciences,(ICNPAA 06)*. Cambridge Scientific Publishers Cambridge, UK.**

[56] Belgacem, F.B.M., A.A. Karaballi, and S.L. Kalla. 2003. *Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations.* **Mathematical problems in Engineering,** (3): p. 103-118.

[57] Bulut, H., H.M. Baskonus, and F.B.M. Belgacem. 2013.*The analytical solution of some fractional ordinary differential equations by the Sumudu transform method*. **In *Abstract and Applied Analysis*. Wiley Online Library.**

[58] Jeevitha, S., et al., 2021. *An introduction of Sumudu transform.* **Journal of Emerging Technologies and Innovative Research (JETIR)**, 8(7): p. 771-778.

[59] Katatbeh, Q.D. and F.B.M. Belgacem. 2011. *Applications of the Sumudu transform to fractional differential equations.* Nonlinear Studies, 18(1): p. 99-112.

[60] Mechee, M.S. and A.J.2008. Naeemah, *Sumudu transform for solving some classes of fractional differential equations.* **Italian Journal of Pure and Applied Mathematics:** p. 740.

[61] Bodkhe, D. and S. Panchal. 2016. *On Sumudu transform of fractional derivatives and its applications to fractional differential equations.* Asian J. Math. Comput. Res, 11(1): p. 69-77.

[62] Podlubny, I. 1997. *The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order.* arXiv preprint funct-an/9710005,

[63] Ford, N.J. and A.C. 2001. Simpson, *The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy.* **Numerical Algorithms**, 26: p. 333-346.

[64] Petrás, I. 2011. *Fractional derivatives, fractional integrals, and fractional differential equations in Matlab*.: IntechOpen London, UK.

[65] Grace, S.R., J.R. Graef, and E. Tunç. 2019. *On the boundedness of nonoscillatory solutions of certain fractional differential equations with positive and negative terms.* **Applied Mathematics Letters,** 97: p. 114-120.

[66] Agarwal, R.P., M. Bohner, and W.-T. Li. 2004. *Nonoscillation and oscillation theory for functional differential equations*.: CRC Press.

[67] Feng, L. and Z. Han. 2020. ***Oscillation behavior of solution of impulsive fractional differential equation***. 10(1): p. 223-233.

[68] Zhao, H., Y. Liu, and S. Kang. 2024. *exıstence of oscıllatory solutıons of fractıonal dıfferentıal equatıons.* **Journal of Applied Analysis & Computation**, 14(3): p. 1771-1777.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLLER

Ad Soyad : Obaidullah JAIHON

Uyruğu : Afganistan

Doğun Tarihi ve Yeri

Medeni Durumu

Email

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2025
Lisans	Badakhshan Üniversitesi	2019

İŞ DENEYİMLERİ

YIL	Kurum	Görev
2020-devam..	Badakhshan Üniversitesi	ÖĞRETMEN

YABANCİ DİLLER

Türkçe, İnglizce, Farsçe, Özbekçe