

**BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN ARALIK DEĞERLİ
FONKSİYONLAR YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMESİ**

ÖMER USTAOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. HÜSEYİN BUDAK**

DÜZCE, 2025

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN ARALIK DEĞERLİ
FONKSİYONLAR YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMESİ

Ömer USTAOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Hüseyin BUDAK
Kocaeli Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hüseyin BUDAK
Kocaeli Üniversitesi

Doç. Dr. Fatih HEZENCİ
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜMÜŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 16/06/2025

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

16 Haziran 2025

Ömer USTAOĞLU

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin Budak'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmamda katkılarını esirgemeyen değerli hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Hasan Kara'ya ve Doç. Dr. Fatih Hezenci'ye şükranlarımı sunarım. Tecrübe ve yardımlarını esirgemeyen Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine saygılarımı arz ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca 2210/A Programından yararlandığım tübitak bursu için bilime ve bilim insanına önem veren Tübitak kurumuna teşekkür ederim.

16 Haziran 2025

Ömer USTAOĞLU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. REEL DEĞERLİ FONKSİYONLAR	4
2.1.1. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Temel Kavramlar	4
2.1.2. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Teoremler	6
2.2. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR	9
2.2.1. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Teoremler	12
3. ARALIK DEĞERLİ LR -KONVEKS FONKSİYONLAR KULLANILARAK ELDE EDİLEN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER	18
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	31
5. KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	36

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1. Örnek 3.11 için sol uçların karşılaştırması.....	24
Şekil 3.2. Örnek 3.11 için sağ uçların karşılaştırması.....	24
Şekil 3.3. Örnek 3.22 için sol uçların karşılaştırması.....	30
Şekil 3.4. Örnek 3.22 için sağ uçların karşılaştırması.....	30



SİMGELER

$J_{\sigma+}^{\beta}$	Reel Değerli Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegral
$J_{\varpi-}^{\beta}$	Reel Değerli Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegral
${}^{\beta}\Upsilon_{\sigma+}^{\alpha}$	Reel Değerli Sol Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
${}^{\beta}\Upsilon_{\varpi-}^{\alpha}$	Reel Değerli Sağ Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$\mathcal{J}_{\sigma+}^{\beta}$	Aralık Değerli Riemann-Liouville Sol Taraflı Kesirli İntegrali
$\mathcal{J}_{\varpi-}^{\beta}$	Aralık Değerli Riemann-Liouville Sağ Taraflı Kesirli İntegrali
${}^{\beta}\Psi_{\sigma+}^{\alpha}$	Aralık Değerli Sol Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
${}^{\beta}\Psi_{\varpi-}^{\alpha}$	Aralık Değerli Sağ Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$L[\sigma, \varpi]$	(σ, ϖ) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+)$	$[\sigma, \varpi]$ Aralığında İntegrallenebilen Aralık Değerli Fonksiyonlar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar
$\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$	\mathbb{R} 'nin Kapalı ve Sınırlı Tüm Alt Aralıklarının Kümesi
Γ	Gamma Fonksiyonu
\mathcal{B}	Beta Fonksiyonu

ÖZET

BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMESİ

Ömer USTAOĞLU

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

Haziran 2025, 35 sayfa

Bu tez çalışmasında, aralık değerli LR-konveks fonksiyonlar ele alınmış ve bu fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral operatörlerine dayalı, yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde eşitsizliklerin, konveks küme ve fonksiyonların, kesirli integral tanımlarının, aralık analizinin ve aralık değerli LR-konveks fonksiyonların tarihsel gelişim süreci anlatılmıştır. İkinci bölümde, tezde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiş, hem reel değerli hem de aralık değerli fonksiyonlar için gerekli ön bilgiler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, aralık değerli LR-konveks fonksiyonlara ilişkin olarak uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilmiş ve uygun seçimler yapıldığında yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca parametrelerin özel seçimleri ile literatürdeki bazı çalışmaların genelleştirildiği görülmektedir. Dördüncü ve son bölümde ise tez boyunca ulaşılan sonuçlar özetlenmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalara yönelik bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: konveks fonksiyon, aralık analizi, LR-konvekslik, uyumlu kesirli integral, Riemann-Liouville kesirli integral.

ABSTRACT

GENERALIZATION OF SOME INTEGRAL INEQUALITIES VIA INTERVAL-VALUED FUNCTIONS

Ömer USTAOĞLU

Düzce University
Graduate School, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin BUDAK

June 2025, 35 pages

In this thesis, LR-convex interval-valued functions are examined, and new inequalities based on conformable fractional integral operators are obtained for these functions. The thesis consists of four chapters. In the first chapter, the historical developments of inequalities, convex sets and functions, definitions of fractional integrals, interval analysis, and LR-convex interval-valued functions are discussed. The second chapter presents the fundamental definitions and theorems to be used throughout the thesis, providing essential background information for both real-valued and interval-valued functions. In the third chapter, new inequalities are obtained for LR-convex interval-valued functions using conformable fractional integral operators, and new results are reached through appropriate selections. Additionally, it is observed that some studies in the literature have been generalized through special choices of parameters. Finally, the fourth chapter summarizes the results obtained throughout the thesis and offers suggestions for future research.

Keywords: convex function, interval analysis, LR-convexity, conformable fractional integral, Riemann-Liouville fractional integral.

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler, matematiksel ifadeler arasında büyüklük, küçüklük veya eşit olmama durumlarını tanımlayan temel kavramlardır. Sadece sayısal karşılaştırmalarla sınırlı kalmayıp, sistemlerin sınırlarını belirleme, ilişkileri açıklama ve çeşitli problemlerde çözüm aracı olarak kullanılma gibi çok yönlü işlevlere sahiptir. Matematiğin analiz, cebir ve geometri gibi birçok alanında olduğu gibi, optimizasyon problemlerinde en küçük ya da en büyük değerlerin bulunmasında da önemli bir rol oynar. Ayrıca fonksiyonların belirli aralıklardaki davranışlarını analiz ederek uygulamalı çalışmalarda yol gösterici olur. Eşitsizlikler, teorik matematiğin dışında ekonomi, istatistik, fizik ve finans gibi disiplinlerde de sıkça karşımıza çıkar. Her ne kadar başlangıçta bağımsız bir araştırma konusu olarak ele alınmamış olsa da, 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve J. Polya tarafından yayımlanan eser [1] bu alanda önemli bir dönüm noktası olmuştur. Daha sonra Beckenbach, Bellman ve Mitrinovic'in katkılarıyla eşitsizlikler sistematik bir matematiksel alan haline gelmiş, zamanla geniş bir literatür oluşmuştur. Günümüzde ise modern matematik analizinin vazgeçilmez bir parçası olarak kabul edilmekte ve araştırmacılar için hâlâ zengin bir çalışma alanı sunmaktadır.

Konveks analiz, konveks kümeler ve fonksiyonlar üzerinde yoğunlaşan matematiksel bir alan olup, matematiğin birçok farklı dalında, özellikle eşitsizlikler teorisinde kritik bir yer tutmaktadır. Konveks bir küme, içerisindeki herhangi iki nokta arasındaki doğru parçasının tümünün küme içinde bulunmasıyla tanımlanır. Benzer şekilde, bir fonksiyonun konveks olması, fonksiyonun grafiğinin altındaki bölgenin her zaman eğrisel ya da doğrusal bir çizgiyle sınırlanabilmesiyle ilişkilidir. Bu tür fonksiyonlar, türevleriyle olan bağlantıları ve optimizasyon problemlerindeki kullanımları sayesinde konveks analizin önemli bir aracı haline gelir. İlk olarak 19. yüzyılda incelenmeye başlanan konveks fonksiyonlar, 20. yüzyılın ortalarına doğru matematiğin önemli bir konusu haline gelmiştir. Konvekslik ve eşitsizlikler teorisi arasındaki güçlü ilişki, bu alandaki araştırmaların daha da derinleşmesine yol açmış ve konveks fonksiyonların incelenmesi bu sayede önemli bir ivme kazanmıştır. Konveks fonksiyonlardan türetilen Hermite–Hadamard eşitsizlikleri,

yıllardır birçok çalışmaya ilham kaynağı olmuş ve bu konu üzerindeki araştırmalar hala devam etmektedir. Bahsi geçen Hermite–Hadamard eşitsizlikleri $f : [\sigma, \varpi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olacak şekilde

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} f(\varphi) d\varphi \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [2].

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları, ilk kez Joseph Liouville tarafından ortaya konmuş olup, türev ve integral işlemlerinin yalnızca tam sayı mertebeleriyle sınırlı kalıp kalmadığına yönelik teorik sorgulamalar sonucunda geliştirilmiştir. Bu bağlamda, kesirli analiz alanının kuramsal temelleri; Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange, Niels Henrik Abel ve Joseph Liouville gibi matematik tarihine yön veren bilim insanlarının katkılarıyla şekillenmiştir. Zaman içerisinde klasik diferansiyasyon ve integrasyon kavramlarının geliştirilmesiyle ortaya çıkan kesirli analiz, özellikle zamanla beliren bellek etkileri gibi karmaşık dinamik süreçlerin modellenmesinde önemli bir araç haline gelmiştir. Konvansiyonel türev ve integral işlemlerine kıyasla daha esnek ve geniş kapsamlı bir uygulama alanı sunan bu yaklaşım, mühendislikten fiziğe, biyolojiden ekonomiğe kadar pek çok disiplin tarafından benimsenmiştir. Öte yandan, 1661 yılında veba salgınından korunmak amacıyla ailesiyle birlikte kırsal bir bölgeye çekilen Isaac Newton, burada geçirdiği iki yıl boyunca diferansiyel ve integral hesaplamalar üzerine öncü çalışmalar yürütmüş; ancak bu bulgularını derhal yayımlamamıştır. Newton'dan bağımsız olarak hareket eden Leibniz ise, bu alandaki teorik katkılarını 1684 ve 1686 yıllarında yayımlayarak bilim camiasına kazandırmıştır.

Aralık analizi, sayısal hesaplamalarda değişkenlerin belirsizliklerini aralıklarla temsil ederek hesaplama hatalarını sınırlandırmayı hedefleyen matematiksel bir yöntemdir. Benzer yaklaşımlar Antik dönemde de görülmüş olmasına rağmen, modern aralık analizinin kurucusu olarak kabul edilen Ramon E. Moore 1960'larda Interval Analysis adlı eserinde bu yaklaşımı sistematik hâle getirmiştir [3]. Bu yöntemde her niceliğin olası değeri bir aralık olarak tanımlanır ve aritmetik işlemler bu aralıklar üzerinden gerçekleştirilir. Böylece hesaplanan sonuç aralığı gerçek değerlerin bulunduğu aralığı kesin olarak kapsar ve yuvarlama

ya da ölçüm kaynaklı hatalar aralık sınırları içerisinde güvence altına alınır. Nitekim aralık analizi, küresel optimizasyon, doğrulanmış hesaplamalar ve kontrol sistemleri gibi ileri matematiksel problemlerde güvenilir çözüm garantisi sağlayan önemli avantajlar sunar. Basit bir fikre dayanmasına karşın güçlü bir yöntem olarak kabul edilen aralık analizi, matematik, bilgisayar bilimi ve mühendislik gibi birçok disiplinde geniş uygulama alanı bulmuştur.

Aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar, klasik konvekslik kavramını belirsizlik içeren veriler için genelleyerek, güvenilir matematiksel modellemeler yapılmasına olanak tanır. Bu yaklaşım, özellikle verilerin belirsiz olduğu durumlarda, değişkenlerin alt ve üst sınırlarla ifade edilmesini sağlayan aralık analizine dayanır. Aralık analizi, belirsizlikleri kontrol altına alarak, çözümler için güvenilir sınırlar elde edilmesini mümkün kılar. Mühendislik gibi uygulamalı alanlarda bu tür analizler, pratikte karşılaşılan belirsizliklerin modellenmesinde etkili çözümler sunar. Nitekim Zhang ve ark. bu bağlamda önemli bir katkı sunmuş ve aralık değerli LR -konveks fonksiyonları tanımlamıştır [4]. [5] çalışmasında aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar için yeni bir Hermite–Hadamard eşitsizliği sınıfı olan aralık değerli LR -konveks Hermite–Hadamard eşitsizliği, pseudo-order ilişkisi (\leq_p) aracılığıyla tanıtıldı. [6] çalışmasında pseudo-order ilişkisi (\leq_p) aracılığıyla tanımlanan yeni bir genelleştirilmiş konveks fonksiyon sınıfı olan aralık değerli LR - h -konveks fonksiyonlar tanıtıldı. [7] çalışmasında pseudo-order ilişkisi aracılığıyla tanımlanan farklı bir aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar sınıfı tanıtıldı. Khan ve ark. aralık değerli LR -konveks iki fonksiyonun çarpımı için yeni bir kesirli integral eşitsizliği tanımlamıştır [8]. Bu tezde ise tek değişkenli aralık değerli LR -konveks iki fonksiyonun çarpımı için farklı tipte uyumlu kesirli integral eşitsizlikleri elde edilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölüm reel değerli ve aralık değerli fonksiyonlar için genel bilgileri barındırır. Tezi daha anlaşılır kılmak için literatürde yer alan temel tanım ve teoremler ele alınır.

2.1. REEL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

Bu alt bölümde reel değerli fonksiyonlar için temel kavramlara, kesirli integrallere ve bazı elde edilmiş teoremlere yer verilecektir.

2.1.1. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Temel Kavramlar

Reel değerli fonksiyonlar düşünüldüğünde, literatürdeki birçok çalışmanın araştırıldığı, geliştirildiği ve yürütüldüğü bir çerçeveye söz konusudur. Bu çerçevede tezin içeriğine uygun olacak bazı spesifik kavramlar bu başlık altında incelenecektir.

Tanım 2.1. [9] $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinden seçilen herhangi iki nokta arasındaki doğru parçası, eğer tamamen A kümesi içerisinde yer alıyorsa, bu tür kümelere konveks küme denir. Diğer bir deyişle, $\varphi, \rho \in A$ olmak üzere $\{\lambda \in [0, 1] : \lambda\varphi + (1 - \lambda)\rho\} \in A$ koşulu sağlanıyorsa A kümesi konvektir.

Tanım 2.2. [10] $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\lambda \in [0, 1]$ ve $\varphi, \rho \in A$ olmak üzere

$$f(\lambda\varphi + (1 - \lambda)\rho) \leq \lambda f(\varphi) + (1 - \lambda)f(\rho)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu konveks fonksiyondur. Eşitsizliğin yön değiştirme durumunda f fonksiyonu konkav fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. [11] $\forall \varphi, \rho \in \mathbb{R}$ için

$$|\varphi + \rho| \leq |\varphi| + |\rho|,$$

biçimindeki eşitsizlik üçgen eşitsizliği ile adlandırılır.

Tanım 2.4. [11] f fonksiyonu, $[\sigma, \varpi]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left| \int_{\sigma}^{\varpi} f(\varphi) d\varphi \right| \leq \int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)| d\varphi$$

eşitsizliği, integraller için üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.5. [12] $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan p ve q için, f ve g fonksiyonları $[\sigma, \varpi]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, ayrıca $|f|^p$ ve $|g|^q$ ifadeleri $[\sigma, \varpi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)g(\varphi)| \leq \left(\int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)|^p d\varphi \right)^{1/p} \left(\int_{\sigma}^{\varpi} |g(\varphi)|^q d\varphi \right)^{1/q}$$

eşitsizliği, integraller için Hölder eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.6. [13] $q \geq 1$ olsun. Ayrıca f ve g , $[\sigma, \varpi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer $f \in L[\sigma, \varpi]$ ve $g \in L_q[\sigma, \varpi]$ ise

$$\int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)g(\varphi)| \leq \left(\int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)| d\varphi \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\sigma}^{\varpi} |f(\varphi)||g(\varphi)|^q d\varphi \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlik Power Mean Eşitsizliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.7. [14] $\eta > 0$ için

$$\Gamma(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{-\eta} \eta^{\varphi-1} d\eta,$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma Euler fonksiyonu adı verilir.

Tez içerisinde sık sık kullanılacak Gamma Euler fonksiyonunun bazı özellikleri şunlardır:

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, n > 0,$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$
3. $\int_0^{\infty} \frac{\varphi^p}{1+\varphi} d\varphi = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1,$

$$4. 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n).$$

Tanım 2.8. [15] $\sigma, \varpi > 0$ için

$$\mathcal{B}(\sigma, \varpi) = \int_0^1 \eta^{\sigma-1} (1-\eta)^{\varpi-1} d\eta$$

ile tanımlanan \mathcal{B} fonksiyonu Beta fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca Beta ve Gamma fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki şekildedir:

$$\mathcal{B}(\sigma, \varpi) = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\varpi)}{\Gamma(\sigma + \varpi)}.$$

2.1.2. Reel Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Teoremler

Teorem 2.9. [2] $f : [\sigma, \varpi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} f(\eta) d\eta \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Bu eşitsizlikler Hermite–Hadamard eşitsizliği olarak isimlendirilir.

Teorem 2.10. [16] $f \in L_1[\sigma, \varpi]$ ve $\beta > 0$ olmak üzere sol ve sağ taraflı Riemann–Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$J_{\sigma+}^{\beta} f(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\sigma}^{\varphi} (\varphi - \eta)^{\beta-1} f(\eta) d\eta, \quad \varphi > \sigma,$$

ve

$$J_{\varpi-}^{\beta} f(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varphi}^{\varpi} (\eta - \varphi)^{\beta-1} f(\eta) d\eta, \quad \varphi < \varpi,$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.11. [17] $f : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L[\sigma, \varpi]$ olmak üzere f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $\beta > 0$ için

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2(\varpi - \sigma)^{\beta}} \left[J_{\sigma+}^{\beta} f(\varpi) + J_{\varpi-}^{\beta} f(\sigma) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri mümkündür. Bu eşitsizlikler Riemann-Liouville Kesirli integralleri için Hermite–Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 2.12. [18] $f : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f \in L[\sigma, \varpi]$ olmak üzere eğer f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $\beta > 0$ ise

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{2^{\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta f(\varpi) + J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta f(\sigma) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.13. [19] $f : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f \in L[\sigma, \varpi]$ olmak üzere eğer f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $\beta > 0$ ise

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{2^{\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[J_{\sigma+}^\beta f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) + J_{\varpi-}^\beta f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 2.14. [20] $f \in L[\sigma, \varpi]$, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Sol ve sağ taraflı uyumlu kesirli integral operatörleri sırasıyla

$$\begin{aligned} {}^\beta \Upsilon_{\sigma+}^\alpha f(\varphi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\sigma}^{\varphi} \left(\frac{(\varphi - \sigma)^\alpha - (\eta - \sigma)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(\eta)}{(\eta - \sigma)^{1-\alpha}} d\eta \\ {}^\beta \Upsilon_{\varpi-}^\alpha f(\varphi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varphi}^{\varpi} \left(\frac{(\varpi - \varphi)^\alpha - (\varpi - \eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(\eta)}{(\varpi - \eta)^{1-\alpha}} d\eta \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.15. [21] f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{2(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[{}^\beta \Upsilon_{\sigma+}^\alpha f(\varpi) + {}^\beta \Upsilon_{\varpi-}^\alpha f(\sigma) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Teorem 2.16. [22] f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\
& \leq \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha f(\varpi) + \beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha f(\sigma) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Teorem 2.17. [23] f fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ aralığında konveks, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\
& \leq \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Upsilon_{\sigma+}^\alpha f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) + \beta \Upsilon_{\varpi-}^\alpha f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \right] \leq \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Teorem 2.18. [24] f ve g fonksiyonları, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde reel değerli ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar olsun. O halde

$$\frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} f(\varphi)g(\varphi)d\varphi \leq \frac{1}{3}C(\sigma, \varpi) + \frac{1}{6}D(\sigma, \varpi) \quad (2.2)$$

ve

$$2f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right)g\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} f(\varphi)g(\varphi)d\varphi + \frac{1}{3}C(\sigma, \varpi) + \frac{1}{6}D(\sigma, \varpi) \quad (2.3)$$

eşitsizlikleri sağlar. Burada

$$C(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\sigma) + f(\varpi)g(\varpi),$$

$$D(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\varpi) + f(\varpi)g(\sigma)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.19. [25] f ve g fonksiyonları $[\sigma, \varpi]$ üzerinde reel değerli ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar olsun. O halde

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2(\varpi - \sigma)^\beta} \left[J_{\sigma+}^\beta f(\varpi)g(\varpi) + J_{\varpi-}^\beta f(\sigma)g(\sigma) \right] \\ & \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) C(\sigma, \varpi) + \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} D(\sigma, \varpi) \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $\beta > 0$, $C(\sigma, \varpi)$ ve $D(\sigma, \varpi)$

$$C(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\sigma) + f(\varpi)g(\varpi),$$

$$D(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\varpi) + f(\varpi)g(\sigma)$$

biçiminde tanımlanır.

2.2. ARALIK DEĞERLİ FONKSİYONLAR

$\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$, \mathbb{R} 'nin kapalı ve sınırlı tüm alt aralıklarının kümesidir. U , $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralığının bir elemanı olsun. $\underline{u}, \bar{u} \in \mathbb{R}$ ve $\underline{u} \leq \bar{u}$ olmak üzere,

$$U = [\underline{u}, \bar{u}] = \{ \kappa \in \mathbb{R} : \underline{u} \leq \kappa \leq \bar{u} \}$$

şeklinde tanımlanır. Burada \underline{u} ve \bar{u} sayıları U aralığının sırasıyla sol ve sağ uç noktaları olarak isimlendirilir. Eğer $\underline{u} = \bar{u}$ ise U aralığı dejenere olarak adlandırılır ve $U = u = [u, u]$ biçiminde tanımlanır. Eğer $\underline{u} > 0$ ise U pozitif, $\bar{u} < 0$ ise U negatif olarak adlandırılır. \mathbb{R}

nin tüm kapalı aralıklarının kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve pozitif kapalı aralıklarının kümesi ve negatif kapalı aralıklarının kümesi sırasıyla $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ ve $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}^-$ gösterilir. U ve V aralıkları için temel aralık analizi işlemleri

$$U + V = [\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v}],$$

$$U - V = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}],$$

$$\Lambda = \{\underline{u} \underline{v}, \underline{u} \bar{v}, \bar{u} \underline{v}, \bar{u} \bar{v}\} \text{ olmak üzere } U \cdot V = [\min \Lambda, \max \Lambda],$$

$$\Delta = \{\underline{u}/\underline{v}, \underline{u}/\bar{v}, \bar{u}/\underline{v}, \bar{u}/\bar{v}\} \text{ ve } 0 \notin V \text{ olmak üzere } U/V = [\min \Delta, \max \Delta]$$

biçiminde tanımlanır. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, U aralığının skaler çarpımı

$$\theta U = \theta [\underline{u}, \bar{u}] = \begin{cases} [\theta \underline{u}, \theta \bar{u}], & \theta > 0, \\ \{0\}, & \theta = 0, \\ [\theta \bar{u}, \theta \underline{u}], & \theta < 0. \end{cases}$$

biçiminde gösterilir. U aralığının tersi, $\delta = -1$ için

$$-U := (-1)U = [-\bar{u}, -\underline{u}]$$

dur. Çıkarma işlemi

$$U - V = U + (-V) = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}]$$

biçiminde ifade edilir. Genel olarak, U için $-U$ tersi değildir, örneğin $U - U \neq 0$.

İşlemlerin tanımları, $\mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ 'nin yarı doğrusal uzay olmasına izin veren çok sayıda cebirsel özelliğe neden olur [26]. Bu özellikler aşağıdaki gibi yazılabilir. ([27],[26],[3],[28]).

(1) (Toplamanın birleşme özelliği) $\forall U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $(U + V) + W = U + (V + W)$,

- (2) (Yutan eleman özelliği) $\forall U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U + 0 = 0 + U = 0$,
- (3) (Toplamanın değişme özelliği) $\forall U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için, $U + V = V + U$,
- (4) (Sadeleştirme kuralı) $\forall U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U + W = V + W \implies U = V$,
- (5) (Çarpmanın birleşme özelliği) $\forall U, V, W \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $(U.V).W = U.(V.W)$,
- (6) (Çarpmanın değişme özelliği) $\forall U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U.V = V.U$,
- (7) (Birim eleman özelliği) $\forall U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ için $U.1 = 1.U$,
- (8) (Eşlenik kuralı) $\forall U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve $\forall \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $\theta(\gamma U) = (\theta\gamma)U$,
- (9) (Skalerle çarpmanın birinci dağılma özelliği) $\forall U, V \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve $\forall \theta \in \mathbb{R}$ için $\theta(U + V) = \theta U + \theta V$,
- (10) (Skalerle Çarpmanın ikinci dağılma özelliği) $\forall U \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ ve $\forall \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $(\theta + \gamma)U = \theta U + \gamma U$.

Küme özelliklerinden kapsama işlemi " \subseteq "

$$U \subseteq V \iff \underline{v} \leq \underline{u} \text{ ve } \bar{u} \leq \bar{v}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Ek olarak pseudo-order bağıntısı " \leq_p "

$$U \leq_p V \iff \underline{u} \leq \underline{v} \text{ ve } \bar{u} \leq \bar{v}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [8]. Ayrıca $[\sigma, \omega]$ aralığında integrallenebilen aralık değerli fonksiyonlar kümesi $F \in L([\sigma, \omega], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+)$ şeklinde gösterilecektir.

2.2.1. Aralık Değerli Fonksiyonlar İçin Bazı Teoremler

Teorem 2.20. [3] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ aralık değerli fonksiyon ve $F(\eta) = [\underline{F}(\eta), \overline{F}(\eta)]$ olsun. $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+)$ olması ancak ve ancak $\underline{F}(\eta), \overline{F}(\eta) \in L[\sigma, \varpi]$ ve

$$({IR}) \int_{\sigma}^{\varpi} F(\eta) d\eta = \left[(R) \int_{\sigma}^{\varpi} \underline{F}(\eta) d\eta, (R) \int_{\sigma}^{\varpi} \overline{F}(\eta) d\eta \right]$$

şartları sağlanıyorsa mevcuttur.

Teorem 2.21. [4] I kümesi bir konveks küme ve $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ bir aralık değerli fonksiyon olmak üzere

$$F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)], \quad \forall \varphi \in I$$

eşitliği mevcuttur. F, I üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyon ise ancak ve ancak $\underline{F}(\varphi)$ ve $\overline{F}(\varphi)$ her ikisi de konveks fonksiyonlardır. Eğer $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ ve $G(\varphi) = [\underline{G}(\varphi), \overline{G}(\varphi)]$ fonksiyonları LR -konveks ise, $F(\varphi) \leq_p G(\varphi)$ ilişkisi sağlanır ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$cF(\varphi) \leq_p cG(\varphi)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.22. [4] $F : I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^+$ biçiminde tanımlı aralık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\sigma, \varpi \in I$ ve $\eta \in [0, 1]$ için

$$F(\eta\sigma + (1 - \eta)\varpi) \leq_p \eta F(\sigma) + (1 - \eta)F(\varpi)$$

koşulu sağlanıyorsa F fonksiyonu konveks bir küme olan I üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Eğer (2.22) eşitsizliği ters yönde sağlanıyorsa, bu durumda F, I üzerinde LR -konkav bir fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 2.23. $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}$ bir aralık değerli fonksiyon ve $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca $\beta > 0$ olsun. F fonksiyonunun sol taraflı Riemann–Liouville

kesirli integrali

$$\mathcal{J}_{\sigma+}^{\beta} F(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\sigma}^{\varphi} (\varphi - \eta)^{\beta-1} F(\eta) d\eta, \quad \varphi > \sigma$$

biçiminde tanımlanır. Burada, Γ Euler Gamma fonksiyonudur.

Lupulescu'nun tanımına dayanarak Budak ve ark. [29] tarafından elde edilen çalışmada F fonksiyonunun sağ taraflı Riemann–Liouville kesirli integralini

$$\mathcal{J}_{\varpi-}^{\beta} F(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varphi}^{\varpi} (\eta - \varphi)^{\beta-1} F(\eta) d\eta, \quad \varphi < \varpi$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada, Γ Euler Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir.

Teorem 2.24. [30] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$, $[\sigma, \varpi]$ aralığında tanımlı aralık değerli LR -konveks fonksiyon olsun ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ şeklinde verilsin. Eğer $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ ise

$$F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} F(\varphi) d\varphi \leq_p \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2} \quad (2.4)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.25. [31] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$ fonksiyonu aralık değerli LR -konveks fonksiyon ve her $\eta \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\eta) = [\underline{F}(\eta), \overline{F}(\eta)]$ olsun. $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ ise

$$F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2(\varpi - \sigma)^{\beta}} \left[\mathcal{J}_{\sigma+}^{\beta} F(\varpi) + \mathcal{J}_{\varpi-}^{\beta} F(\sigma) \right] \leq_p \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Teorem 2.26. [32] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+}$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyon olsun ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ biçiminde tanımlansın. Eğer $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_{\mathcal{I}}^{+})$ ise, o halde

$$F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{2^{\beta-1} \Gamma(\beta + 1)}{(\varpi - \sigma)^{\beta}} \left[\mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^{\beta} F(\sigma) + \mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^{\beta} F(\varpi) \right] \leq_p \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2} \quad (2.5)$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Tanım 2.27. [33] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli fonksiyon olsun ve $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ olarak verilsin. Eğer $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_I^+)$ ise, $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere aralık değerli fonksiyonların uyumlu kesirli integral operatörleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\beta \Psi_{\sigma+}^{\alpha} F(\varphi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\sigma}^{\varphi} \left(\frac{(\varphi - \sigma)^{\alpha} - (\eta - \sigma)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{F(\eta)}{(\eta - \sigma)^{1-\alpha}} d\eta \\ \beta \Psi_{\varpi-}^{\alpha} F(\varphi) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varphi}^{\varpi} \left(\frac{(\varpi - \varphi)^{\alpha} - (\varpi - \eta)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{F(\eta)}{(\varpi - \eta)^{1-\alpha}} d\eta\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.28. [34] $F : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$ fonksiyonu $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks bir fonksiyon olsun ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ şeklinde verilsin. Eğer $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_I^+)$ ise

$$\begin{aligned}F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\ \leq_p \frac{2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1) \alpha^{\beta}}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^{\alpha} F(\varpi) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^{\alpha} F(\sigma) \right] \leq_p \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat. F aralık değerli LR -konveks bir fonksiyon olduğundan

$$2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) + F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\frac{1-(1-\eta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılıp, elde edilen eşitsizliğin η 'ye göre $[0, 1]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta) d\eta \\ \leq_p \int_0^1 F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ + \int_0^1 F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{\varpi - \sigma}\right)^{\alpha\beta} \int_{\frac{\sigma+\varpi}{2}}^{\varpi} \left(\frac{\left(\frac{\varpi-\sigma}{2}\right)^\alpha - \left(u - \frac{\sigma+\varpi}{2}\right)^\alpha}{\alpha}\right) \left(u - \frac{\sigma+\varpi}{2}\right)^{\alpha-1} F(u) du \\
&\quad + \left(\frac{2}{\varpi - \sigma}\right)^{\alpha\beta} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\varpi}{2}} \left(\frac{\left(\frac{\varpi-\sigma}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{\sigma+\varpi}{2} - v\right)^\alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{\sigma+\varpi}{2} - v\right)^{\alpha-1} F(v) dv \\
&= \left(\frac{2}{\varpi - \sigma}\right)^{\alpha\beta} \Gamma(\beta) \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma) \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{1-(1-\eta)}{\alpha} \right)^\alpha \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta = \frac{1}{\beta\alpha^\beta}$$

integral sonucu kullanılarak ilk eşitsizlik ispatlanır. F fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{\eta}{2}F(\sigma) + \frac{2-\eta}{2}F(\varpi) \quad (2.7)$$

ve

$$F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{2-\eta}{2}F(\sigma) + \frac{\eta}{2}F(\varpi) \quad (2.8)$$

yazılabilir. Benzer şekilde, (2.7) ve (2.8) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak, ortaya çıkan eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\frac{1-(1-\eta)}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1}$ ile çarpılsın. Ayrıca $[0, 1]$ üzerinde η 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) + F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \right] \left(\frac{1-(1-\eta)}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
&\leq_p [F(\sigma) + F(\varpi)] \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) + F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \right] \left(\frac{1-(1-\eta)}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
&= \left(\frac{2}{\varpi - \sigma}\right)^{\alpha\beta} \Gamma(\beta) \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma) \right] \\
&\leq_p \frac{1}{\beta\alpha^\beta} [F(\sigma) + F(\varpi)]
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç 2.29. Teorem 2.28 ifadesinde $\alpha = 1$ alınırsa, (2.6) eşitsizlikleri (2.5) eşitsizliklerine dönüşür.

Sonuç 2.30. Teorem 2.28 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ seçilirse, (2.6) eşitsizlikleri (2.4) eşitsizliklerine dönüşür.

Teorem 2.31. [30] $F, G : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyon ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ ve $G(\varphi) = [\underline{G}(\varphi), \overline{G}(\varphi)]$ ise

$$\frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} F(\varphi)G(\varphi) d\varphi \leq_p \frac{1}{3}M(\sigma, \varpi) + \frac{1}{6}N(\sigma, \varpi) \quad (2.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & 2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right)G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\ & \leq_p \frac{1}{\varpi - \sigma} \int_{\sigma}^{\varpi} F(\varphi)G(\varphi) d\varphi + \frac{1}{6}M(\sigma, \varpi) + \frac{1}{3}N(\sigma, \varpi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Burada $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$

$$M(\sigma, \varpi) = F(\sigma)G(\sigma) + F(\varpi)G(\varpi),$$

$$N(\sigma, \varpi) = F(\sigma)G(\varpi) + F(\varpi)G(\sigma)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.32. [31] $F, G : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyon ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [\underline{F}(\varphi), \overline{F}(\varphi)]$ ve $G(\varphi) = [\underline{G}(\varphi), \overline{G}(\varphi)]$ olsun. $F \in L([\sigma, \varpi], \mathbb{R}_T^+)$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta + 1)}{2(\varpi - \sigma)^\beta} \left(\mathcal{J}_{\sigma+}^\beta F(\varpi)G(\varpi) + \mathcal{J}_{\varpi-}^\beta F(\sigma)G(\sigma) \right) \\ & \leq_p \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) M(\sigma, \varpi) + \left(\frac{\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) N(\sigma, \varpi) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right)G\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right) \\ \leq & \frac{\Gamma(\beta+1)}{4(\varpi-\sigma)^\beta} \left(\mathcal{J}_{\sigma+}^\beta F(\varpi)G(\varpi) + \mathcal{J}_{\varpi-}^\beta F(\sigma)G(\sigma) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) M(\sigma, \varpi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) N(\sigma, \varpi) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri mevcuttur.



3. ARALIK DEĞERLİ LR -KONVEKS FONKSİYONLAR KULLANILARAK ELDE EDİLEN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Teorem 3.1. $F, G : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_I^+$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [F(\varphi), \bar{F}(\varphi)]$ ve $G(\varphi) = [G(\varphi), \bar{G}(\varphi)]$ olsun. O halde uyumlu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi-\sigma)^{\alpha\beta}} \left(\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \right) \\ & \leq_p \frac{\beta}{4} \left[M(\sigma, \varpi) \left(\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{1}{\beta} \right) + N(\sigma, \varpi) \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada $\beta > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ 'dir. $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$

$$\begin{aligned} M(\sigma, \varpi) &= F(\sigma)G(\sigma) + F(\varpi)G(\varpi), \\ N(\sigma, \varpi) &= F(\sigma)G(\varpi) + F(\varpi)G(\sigma) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

İspat. F ve G fonksiyonları aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{2-\eta}{2}F(\sigma) + \frac{\eta}{2}F(\varpi)$$

ve

$$G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{2-\eta}{2}G(\sigma) + \frac{\eta}{2}G(\varpi)$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \\ & \leq_p \frac{1}{4} \left[(2-\eta)^2 F(\sigma)G(\sigma) + \eta^2 F(\varpi)G(\varpi) \right] \end{aligned}$$

$$+ (2 - \eta)\eta(F(\sigma)G(\varpi) + F(\varpi)G(\sigma))] \quad (3.2)$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde

$$F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{\eta}{2}F(\sigma) + \frac{2-\eta}{2}F(\varpi)$$

ve

$$G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \leq_p \frac{\eta}{2}G(\sigma) + \frac{2-\eta}{2}G(\varpi)$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \\ & \leq_p \frac{1}{4}[\eta^2 F(\sigma)G(\sigma) + (2-\eta)^2 F(\varpi)G(\varpi) \\ & + (2-\eta)\eta(F(\sigma)G(\varpi) + F(\varpi)G(\sigma))]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \\ & + F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \\ & \leq_p \frac{1}{4}[(\eta^2 + (2-\eta)^2)M(\sigma, \varpi) + 2\eta(2-\eta)N(\sigma, \varpi)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4) ifadesinde her iki taraf $\left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılıp $[0, 1]$ üzerinde integrali alındığında

$$\begin{aligned} & \int_0^1 F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ & + \int_0^1 F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ & \leq_p \frac{1}{4}M(\sigma, \varpi) \int_0^1 (\eta^2 + (2-\eta)^2) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4} N(\sigma, \varpi) \int_0^1 2\eta(2-\eta) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \quad (3.5)$$

bulunur. Değişken değişimi ve Tanım 2.27 kullanıldığında

$$\begin{aligned} & \int_0^1 F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ &= \left(\frac{2}{\varpi-\sigma} \right)^{\alpha\beta} \Gamma(\beta) {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ &= \left(\frac{2}{\varpi-\sigma} \right)^{\alpha\beta} \Gamma(\beta) {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

sonuçları bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\eta^2 + (2-\eta)^2) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ &= \frac{2}{\alpha^\beta} \left[\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{1}{\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 2\eta(2-\eta) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\ &= \frac{2}{\alpha^\beta} \left[\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.6)-(3.9) ifadeleri (3.5) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\varpi-\sigma} \right)^{\alpha\beta} \Gamma(\beta) \left({}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) + {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \right) \\ & \leq_p \frac{1}{2\alpha^\beta} \left[M(\sigma, \varpi) \left(\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{1}{\beta} \right) + N(\sigma, \varpi) \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right) \right] \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç 3.2. Teorem 3.1 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $G(\varphi) = [1, 1]$ seçilirse, (3.1) eşitsizliği (2.6) eşitsizliğinin sağ tarafına dönüşür.

Sonuç 3.3. Teorem 3.1 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse, aralık değerli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integral operatörlerine ait eşitsizlik

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\varpi-\sigma)^\beta} \left(\mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta F(\sigma)G(\sigma) + \mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta F(\varpi)G(\varpi) \right) \\ & \leq_p M(\sigma, \varpi) \left(\frac{2 + (\beta+1)(\beta+2)}{4(\beta+1)(\beta+2)} \right) + N(\sigma, \varpi) \left(\frac{(\beta+1)(\beta+2)-2}{4(\beta+1)(\beta+2)} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklini alır. Burada $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$ Teorem 3.1 ifadesindeki gibi tanımlanır.

Sonuç 3.4. Sonuç 3.3 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $G(\varphi) = [1, 1]$ alınsın, (3.10) eşitsizliği, (2.5) eşitsizliğinin sağ tarafına döner.

Sonuç 3.5. Teorem 3.1 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ seçilirse, (3.1) eşitsizliği (2.9) eşitsizliğine döner.

Sonuç 3.6. Teorem 3.1 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $\underline{F}(\varphi) = \overline{F}(\varphi) = f(\varphi)$ ve $\underline{G}(\varphi) = \overline{G}(\varphi) = g(\varphi)$ seçilirse, reel değerli fonksiyonların uyumlu kesirli integrallerinin Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\varpi-\sigma)^{\alpha\beta}} \left[{}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha f(\varpi)g(\varpi) + {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha f(\sigma)g(\sigma) \right] \\ & \leq \frac{\beta}{4} \left[C(\sigma, \varpi) \left(\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{1}{\beta} \right) + D(\sigma, \varpi) \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada

$$C(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\sigma) + f(\varpi)g(\varpi),$$

$$D(\sigma, \varpi) = f(\sigma)g(\varpi) + f(\varpi)g(\sigma)$$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 3.7. Sonuç 3.6 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $g(\varphi) = 1$ seçilirse, (3.11) eşitsizliği (2.1) eşitsizliğinin sağ tarafına dönüşür.

Sonuç 3.8. Sonuç 3.6 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse, reel değerli fonksiyonların Riemann-Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\varpi-\sigma)^\beta} \left[\mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta f(\varpi)g(\varpi) + \mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta f(\sigma)g(\sigma) \right] \\ & \leq C(\sigma, \varpi) \left(\frac{2+(\beta+1)(\beta+2)}{4(\beta+1)(\beta+2)} \right) + D(\sigma, \varpi) \left(\frac{(\beta+1)(\beta+2)-2}{4(\beta+1)(\beta+2)} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Sonuç 3.9. Sonuç 3.8 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $g(\varphi) = 1$ seçilirse, (3.12) eşitsizliği (2.1) eşitsizliğinin sağ tarafına dönüşür.

Sonuç 3.10. Sonuç 3.6 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ alınırsa, (3.11) eşitsizliği (2.2) eşitsizliğine döner.

Örnek 3.11. Aralık değerli $F, G : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$ fonksiyonları $F(\varphi) = \left[\frac{\varphi^2}{2}, 5 \right]$ ve $G(\varphi) = [\varphi, \varphi^2]$ olarak tanımlansın. F ve G fonksiyonlarının, LR -konveks fonksiyonlar olduğu açıktır. 2.27 ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} & {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) \\ & = {}^\beta\Psi_{\frac{3}{2}-}^\alpha F(1)G(1) \\ & = \frac{1}{\alpha^{\beta-1}\Gamma(\beta)} \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^\alpha - \left(\frac{3}{2} - \eta \right)^\alpha \right)^{\beta-1} \left(\frac{3}{2} - \eta \right)^{\alpha-1} \left[\frac{\eta^2}{2}, 5 \right] [\eta, \eta^2] d\eta \\ & = \frac{1}{\alpha^{\beta-1}\Gamma(\beta)} \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^\alpha - \left(\frac{3}{2} - \eta \right)^\alpha \right)^{\beta-1} \left(\frac{3}{2} - \eta \right)^{\alpha-1} \left[\frac{\eta^3}{2}, 5\eta^2 \right] d\eta \\ & = \frac{1}{\alpha^\beta\Gamma(\beta)2^{\alpha\beta+4}} \left[-\mathcal{B}\left(\beta, \frac{3}{\alpha} + 1\right) + 9\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) - 27\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha} + 1\right) + \frac{27}{\beta}, \right. \\ & \quad \left. 20\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) - 120\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha} + 1\right) + \frac{180}{\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

hesaplanır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} & {}^\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \\ & = {}^\beta\Psi_{\frac{3}{2}+}^\alpha F(2)G(2) \\ & = \frac{1}{\alpha^\beta\Gamma(\beta)2^{\alpha\beta+4}} \left[\mathcal{B}\left(\beta, \frac{3}{\alpha} + 1\right) + 9\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + 27\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha} + 1\right) + \frac{27}{\beta}, \right. \end{aligned}$$

$$20\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + 120\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha} + 1\right) + \frac{180}{\beta} \quad (3.14)$$

hesaplanır. (3.13) ve (3.14) birleştirilerek, (3.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi-\sigma)\alpha\beta} \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) \right] \\ &= \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(2-1)\alpha\beta} \left[\beta \Psi_{\frac{3}{2}+}^\alpha F(2)G(2) + \beta \Psi_{\frac{3}{2}-}^\alpha F(1)G(1) \right] \\ &= \alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \beta \Gamma(\beta) \frac{1}{\alpha \beta \Gamma(\beta) 2^{\alpha\beta+4}} \left[18\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{54}{\beta}, 40\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{360}{\beta} \right] \\ &= \frac{\beta}{2^5} \left[18\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{54}{\beta}, 40\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{360}{\beta} \right] \\ &= \left[\frac{9}{16} \beta \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{27}{16}, \frac{5}{4} \beta \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{45}{4} \right] \\ &= [\Omega_3(\alpha, \beta), \Omega_4(\alpha, \beta)]. \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Omega_3(\alpha, \beta) &= \frac{9}{16} \beta \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{27}{16}, \\ \Omega_4(\alpha, \beta) &= \frac{5}{4} \beta \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan, $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$ değerleri

$$\begin{aligned} M(\sigma, \varpi) &= \left[\frac{9}{2}, 25 \right], \\ N(\sigma, \varpi) &= [3, 25] \end{aligned} \quad (3.15)$$

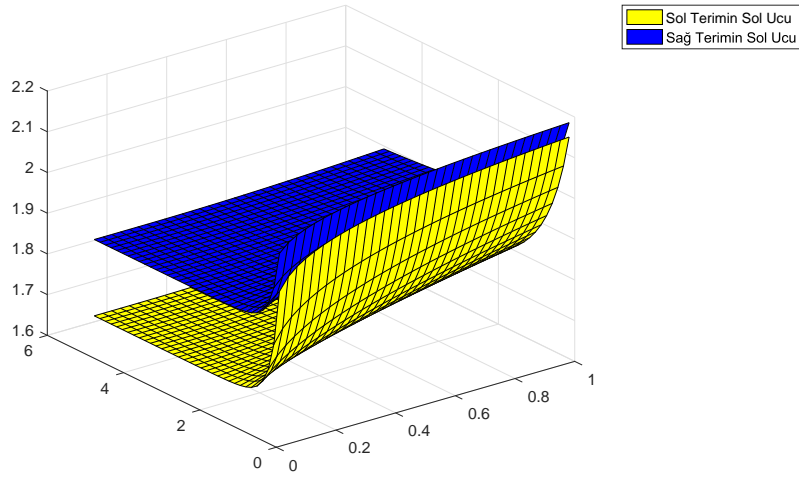
şeklindedir. Bu değerler (3.1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{4} \left[M(\sigma, \varpi) \left(\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{1}{\beta} \right) + N(\sigma, \varpi) \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right) \right] \\ &= \left[\frac{3\beta}{8} \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) + \frac{15}{8}, \frac{25}{2} \right] \end{aligned}$$

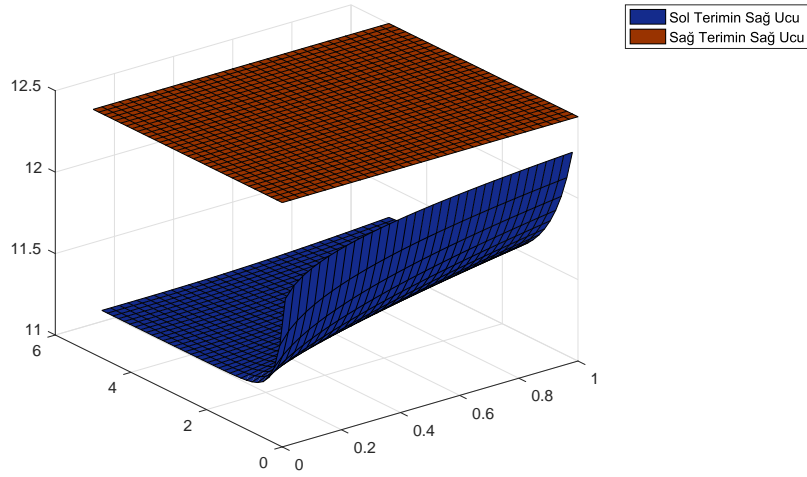
elde edilir. Böylece, (3.1) eşitsizliği aşağıdaki

$$[\Omega_3(\alpha, \beta), \Omega_4(\alpha, \beta)] \leq_p \left[\frac{3\beta}{8} \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{15}{8}, \frac{25}{2} \right] \quad (3.16)$$

eşitsizliği biçimini alır. (3.16) eşitsizliğinin sağlanması $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 5]$ aralıkları için Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Örnek 3.11 için sol uçların karşılaştırması



Şekil 3.2. Örnek 3.11 için sağ uçların karşılaştırması

Teorem 3.12. $F, G : [\sigma, \varpi] \rightarrow \mathbb{R}_T^+$, $[\sigma, \varpi]$ üzerinde aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar ve her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $F(\varphi) = [F(\varphi), \bar{F}(\varphi)]$ ve $G(\varphi) = [G(\varphi), \bar{G}(\varphi)]$ olsun. Aralık değerli fonksiyonların uyumlu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta \alpha^\beta} F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\
& \leq_p \frac{2^{\alpha\beta} \Gamma(\beta)}{4(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \right] \\
& \quad + \left[\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right] \frac{M(\sigma, \varpi)}{8\alpha^\beta} \\
& \quad + \left[\frac{1}{\beta} + \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right] \frac{N(\sigma, \varpi)}{8\alpha^\beta} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\beta > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$, Teorem 3.1 ifadesinde tanımlanmıştır.

İspat. F ve G fonksiyonları aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar olduğundan aşağıdaki

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) & = F\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right)\right) \\
& \leq_p \frac{1}{2} \left[F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) + F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği ve benzer şekilde

$$G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{1}{2} \left[G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) + G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak aşağıdaki

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) & \leq_p \frac{1}{4} \left[F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \right. \\
& \quad + F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \\
& \quad + F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \\
& \quad \left. + F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \right]
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. F ve G fonksiyonlarının LR -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right)G\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right) \leq_p \frac{1}{4} & \left[F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right)G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \right. \\
& + F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right)G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \\
& \left. + \frac{\eta(2-\eta)}{2}M(\sigma, \varpi) + \frac{\eta^2 + (2-\eta)^2}{4}N(\sigma, \varpi) \right] \quad (3.18)
\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. (3.18) ifadesinin her iki tarafı $\left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılıp, η 'ya göre $[0, 1]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& F\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right)G\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right) \int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \quad (3.19) \\
& \leq_p \frac{1}{4} \left[\int_0^1 F\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right)G\left(\frac{2-\eta}{2}\sigma + \frac{\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \right. \\
& \quad + \int_0^1 F\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right)G\left(\frac{\eta}{2}\sigma + \frac{2-\eta}{2}\varpi\right) \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
& \quad + M(\sigma, \varpi) \int_0^1 \frac{\eta(2-\eta)}{2} \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \\
& \quad \left. + N(\sigma, \varpi) \int_0^1 \frac{\eta^2 + (2-\eta)^2}{4} \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\eta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1-\eta)^{\alpha-1} d\eta = \frac{1}{\beta\alpha^\beta}$$

özdeşliği kullanılarak ve (3.8), (3.9), (3.19), $M(\sigma, \varpi)$ ve $N(\sigma, \varpi)$ ifadeleri birleştirilerek aşağıdaki

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta\alpha^\beta} F\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right)G\left(\frac{\sigma+\varpi}{2}\right) \\
& \leq_p \frac{2^{\alpha\beta}\Gamma(\beta)}{4(\varpi-\sigma)\alpha^\beta} \left[\beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma)G(\sigma) + \beta\Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi)G(\varpi) \right] \\
& \quad + \frac{M(\sigma, \varpi)}{8\alpha^\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right) \\
& \quad + \frac{N(\sigma, \varpi)}{8\alpha^\beta} \left(\frac{1}{\beta} + \mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1\right) \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç 3.13. Teorem 3.12 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $G(\varphi) = [1, 1]$ seçilirse aşağıdaki

$$2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha F(\sigma) + \beta \Psi_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha F(\varpi) \right] + \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Sonuç 3.14. Teorem 3.12 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse, aralık değerli fonksiyonlar için Riemann–Liouville kesirli integral operatörlerine ait eşitsizlik

$$2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{2^{\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[\mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta F(\sigma)G(\sigma) + \mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta F(\varpi)G(\varpi) \right] \\ + \left[\frac{(\beta+2)(\beta+1)-2}{4(\beta+2)(\beta+1)} \right] M(\sigma, \varpi) \\ + \left[\frac{(\beta+2)(\beta+1)+2}{4(\beta+2)(\beta+1)} \right] N(\sigma, \varpi)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3.15. Sonuç 3.14 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $G(\varphi) = [1, 1]$ olarak seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik

$$2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{2^{\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[\mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta F(\sigma) + \mathcal{J}_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta F(\varpi) \right] + \frac{F(\sigma) + F(\varpi)}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.16. Teorem 3.12 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ seçilirse, (3.17) eşitsizliği (2.10) eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 3.17. Teorem 3.12 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $\underline{F}(\varphi) = \overline{F}(\varphi) = f(\varphi)$ ve $\underline{G}(\varphi) = \overline{G}(\varphi) = g(\varphi)$ olarak seçilirse, reel değerli fonksiyonların uyumlu kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$2f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \\ \leq_p \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta+1)}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[\beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha f(\sigma)g(\sigma) + \beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha f(\varpi)g(\varpi) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right) \frac{C(\sigma, \varpi)}{4} \\
& + \beta \left(\frac{1}{\beta} + \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right) \frac{D(\sigma, \varpi)}{4}
\end{aligned}$$

biçiminde verilir. Burada $C(\sigma, \varpi)$ ve $D(\sigma, \varpi)$, Sonuç 3.6 ifadesinde tanımlanmıştır.

Sonuç 3.18. Sonuç 3.17 ifadesinde her $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $g(\varphi) = 1$ seçilirse, aşağıdaki

$$2f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq \frac{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta-1} \Gamma(\beta + 1)}{(\varpi - \sigma)^{\alpha\beta}} \left[{}^\beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\alpha f(\sigma) + {}^\beta \Upsilon_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\alpha f(\varpi) \right] + \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.19. Sonuç 3.17 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse, reel değerli fonksiyonların Riemann–Liouville kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$\begin{aligned}
2f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) g\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) & \leq_p \frac{2^{\beta-1} \Gamma(\beta + 1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta f(\sigma) g(\sigma) + J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta f(\varpi) g(\varpi) \right] \\
& + \left[\frac{(\beta + 2)(\beta + 1) - 2}{4(\beta + 2)(\beta + 1)} \right] C(\sigma, \varpi) \\
& + \left[\frac{(\beta + 2)(\beta + 1) + 2}{4(\beta + 2)(\beta + 1)} \right] D(\sigma, \varpi)
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.20. Sonuç 3.19 ifadesinde $\varphi \in [\sigma, \varpi]$ için $g(\varphi) = 1$ seçilirse, eşitsizlik

$$2f\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) \leq_p \frac{2^{\beta-1} \Gamma(\beta + 1)}{(\varpi - \sigma)^\beta} \left[J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}-}^\beta f(\sigma) + J_{\frac{\sigma+\varpi}{2}+}^\beta f(\varpi) \right] + \frac{f(\sigma) + f(\varpi)}{2} \quad (3.20)$$

biçimini alır.

Sonuç 3.21. $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ değerleri Sonuç 3.17 ifadesinde yerine yazıldığında, (3.20) eşitsizliği (2.3) eşitsizliğine döner.

Örnek 3.22. F ve G fonksiyonları Örnek 3.11 ifadesindeki gibi tanımlansın. Bu fonksiyonlar için aşağıdaki

$$2F\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) G\left(\frac{\sigma + \varpi}{2}\right) = 2F\left(\frac{3}{2}\right) G\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\frac{9}{8}, 5 \right] \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right] \\
&= \left[\frac{27}{8}, \frac{45}{2} \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ifadesi hesap edilebilir. (3.13), (3.14), (3.15), ve (3.21) ifadelerinin sonuçları (3.17) eşitsizliğinde kullanıldığında aşağıdaki

$$\begin{aligned}
&2^{\alpha\beta-1} \beta \Gamma(\beta) \alpha^\beta \left[{}^\beta\Psi_{\frac{3}{2}+}^\alpha F(2)G(2) + {}^\beta\Psi_{\frac{3}{2}-}^\alpha F(1)G(1) \right] \\
&+ \frac{M(1,2)}{4} \left(1 - \beta \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right) + \frac{N(1,2)}{4} \left(1 + \beta \mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) \right) \\
&= \frac{\beta}{2^5} \left[18\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{54}{\beta}, 40\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{360}{\alpha} \right] \\
&+ \left[\frac{15}{8} - \frac{3}{8}\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right), \frac{25}{2} \right] \\
&= \left[\frac{3}{16}\beta\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{57}{16}, \frac{5}{4}\beta\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{95}{4} \right] \\
&= [\Omega_5(\alpha, \beta), \Omega_6(\alpha, \beta)]
\end{aligned}$$

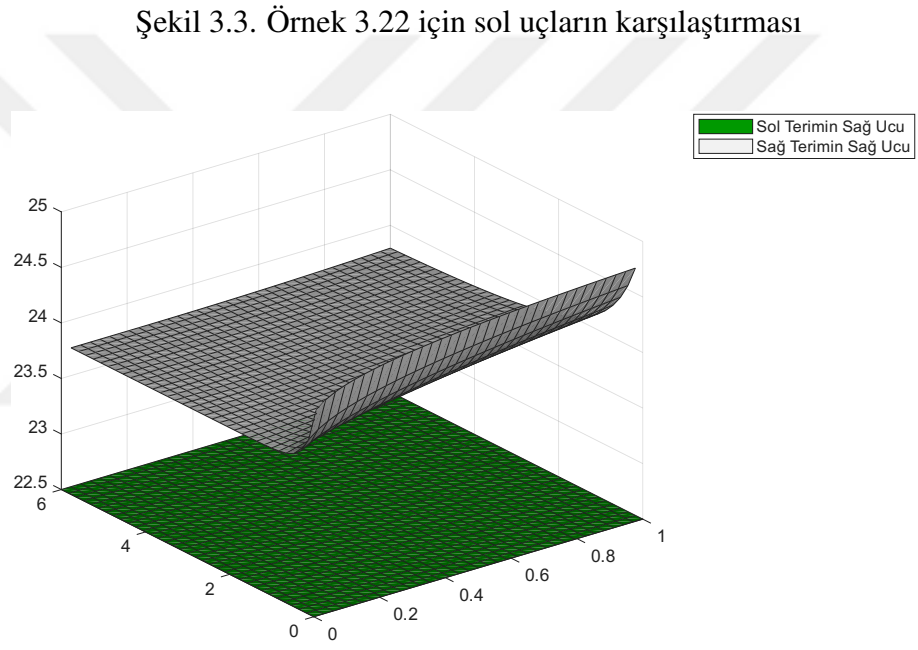
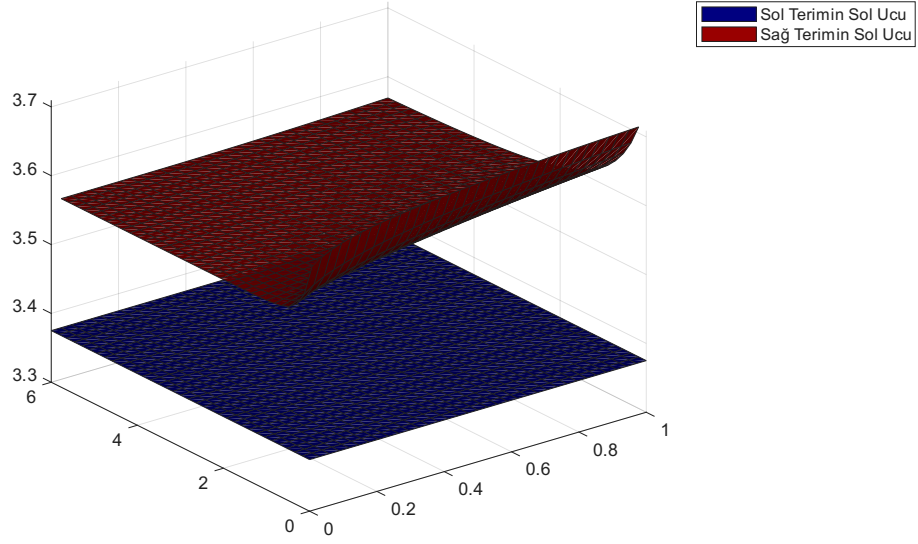
eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\left[\frac{27}{8}, \frac{45}{2} \right] \leq_p [\Omega_5(\alpha, \beta), \Omega_6(\alpha, \beta)] \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\Omega_5(\alpha, \beta) &= \frac{3}{16}\beta\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{57}{16}, \\
\Omega_6(\alpha, \beta) &= \frac{5}{4}\beta\mathcal{B} \left(\beta, \frac{2}{\alpha} + 1 \right) + \frac{95}{4}.
\end{aligned}$$

dir. (3.22) eşitsizliğinin sağlanması $\alpha \in [0, 1]$ ve $\beta \in [0, 5]$ için Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'de gösterilmiştir .



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, aralık değerli LR -konveks fonksiyonlar incelenmiş ve bu fonksiyonlar için literatürde bulunmayan, yeni bir uyumlu kesirli integral operatörü eşitsizliği elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitsizlik, LR -konveks fonksiyonların yapısal özellikleri dikkate alınarak geliştirilmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, parametrelerin özel seçimleri ile literatürdeki bazı çalışmaların genelleştirildiği görülmektedir. Bu yönüyle çalışma, aralık değerli konvekslik teorisine katkı sağlamak ve ileride yapılacak araştırmalar için bir temel oluşturmaktadır.

Bu tezde elde edilen eşitsizlikler, yalnızca aralık değerli LR -konveks fonksiyonlarla sınırlı kalmayıp, farklı konvekslik türleri için de uygulanabilir bir yapı sunmaktadır. Özellikle LR -konvekslik çerçevesinde geliştirilen bu yaklaşımın, h -konvekslik, g -konvekslik gibi diğer yaygın konvekslik türlerine de uyarlanabileceği düşünülmektedir. Son yıllarda ilgi gören CR -konvekslik gibi daha yeni fonksiyon sınıfları açısından da benzer eşitsizliklerin türetilmesi mümkündür. Bu durum, tezde sunulan yöntemin yalnızca belirli bir konvekslik türüyle sınırlı olmadığını, daha geniş bir yelpazeye hitap edebilecek potansiyele sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, çalışmada geliştirilen eşitsizliklerin, farklı konveks fonksiyon sınıfları üzerinde de incelenmesi, konvekslik kuramı açısından yeni ve anlamlı sonuçlara ulaşılmasına katkı sağlayabilir.

Çalışmada elde edilen sonuçlar, sadece kullanılan integral türüyle sınırlı kalmamakta, aynı zamanda farklı kesirli integral tanımları açısından da genişletilebilecek bir yapıya sahiptir. Literatürde aralık değerli fonksiyonlar için Riemann–Liouville, Aumann tipi, Caputo ve Hadamard gibi çeşitli kesirli integral türleri bulunmaktadır. Bu integral tanımları, farklı yaklaşımlar sunmaları bakımından, benzer eşitsizliklerin farklı biçimlerde elde edilmesine olanak tanımaktadır. Bu tezde geliştirilen yöntemlerin ve elde edilen eşitsizliğin, bu farklı kesirli integral türlerine uyarlanarak yeni sonuçlara ulaşılması mümkündür.

Son yıllarda aralık değerli fonksiyonlar, kuantum analiz alanında ilgi görmeye başlamıştır. Bu fonksiyonlar, kuantum sistemlerindeki ölçüm belirsizlikleri, operatör genelleştirmeleri ve hassaslık analizleri gibi problemlerde kullanılabilir. Elde edilen eşitsizliklerin kuantum analizde yeni yaklaşımlar geliştirilmesine katkı sağlayabileceği düşünülmektedir ve bu alandaki mevcut problemlere çözüm önerileri sunabilir. Bu yönüyle, çalışma kuantum analizde değerlendirilebilecek potansiyel bir katkı sağlayabilir.



5. KAYNAKLAR

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*, 2. Baskı, Cambridge, İngiltere: Cambridge University Press, 1942.
- [2] J. Hadamard, “Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d’une fonction considérée par Riemann,” *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ss. 171-216, 1893.
- [3] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Englewood Cliffs, ABD: Prentice-Hall, 1966.
- [4] D. Zhang, G. C. Guo, D. Chen ve G. Wang, “Jensen’s inequalities for set-valued and fuzzy set-valued functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, c. 404, ss. 178-204, 2021.
- [5] M. B. Khan, S. Treanță, M. S. Soliman, K. Nonlaopon ve H. G. Zaini, “Some Hadamard–Fejér type inequalities for LR-convex interval-valued functions,” *Fractal and Fractional*, c. 6, sayı 1, ss. 6, 2021.
- [6] M. B. Khan, M. A. Noor, M. M. Al-Shomrani ve L. Abdullah, “Some novel inequalities for LR- h -convex interval-valued functions by means of pseudo-order relation,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, c. 45, sayı 3, ss. 1310–1340, 2022.
- [7] M. B. Khan, M. A. Noor, K. I. Noor, K. S. Nisar, K. A. Ismail ve A. Elfasakhany, “Some inequalities for LR- (h_1, h_2) -convex interval-valued functions by means of pseudo order relation,” *International Journal of Computational Intelligence Systems*, cilt 14, ss. 1–15, 2021.
- [8] M. B. Khan, P. O. Mohammed, M. A. Noor, D. Baleanu ve J. L. G. Guirao, “Some new fractional estimates of inequalities for LR- p -convex interval-valued functions by means of pseudo order relation,” *Axioms*, c. 10, sayı 3, ss. 175, 2021.
- [9] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, Ankara, Türkiye: Gazi Kitabevi, 2018.
- [10] J. E. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, *Convex Functions, “Partial Orderings and Statistical Applications,” Academic Press, Boston, 1992.*
- [11] M. Balcı, *Matematik Analiz*, 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları, 2012.
- [12] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić ve A. M. Fink, “Classical and New Inequalities in Analysis,” *Kluwer Academic Publishers*, c. 740, UK, 1993.
- [13] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić ve A. M. Fink, “Classical and New Inequalities in Analysis,” *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 1993.
- [14] P. Kannapan, “Functional Equations and Inequalities with Applications,” *Springer*, 2009.
- [15] D. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin, Almanya: Springer-Verlag, 1970.

- [16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, “Theory and Applications of Fractional Differential Equations,” *North-Holland Mathematics Studies*, c. 204, Elsevier Sci. B.V., Amsterdam, 2006.
- [17] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yıldız ve N. Başak, “Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities,” *Mathematical and Computer Modelling*, c. 57, sayı 9–10, ss. 2403–2407, 2013.
- [18] M. Z. Sarikaya ve H. Yıldırım, “On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals,” *Miskolc Mathematical Notes*, c. 17, sayı 2, ss. 1049–1059, 2016.
- [19] S. S. Dragomir, “Some inequalities of Hermite-Hadamard type for symmetrized convex functions and Riemann-Liouville fractional integrals,” *RGMIA Research Report Collection*, c. 20, sayı 15, 2017.
- [20] F. Jarad, E. Uğurlu, T. Abdeljawad ve D. Baleanu, “On a new class of fractional operators,” *Advances in Difference Equations*, c. 2017, sayı 1, ss. 247, 2017.
- [21] E. Set, J. Choi ve A. Gözpinar, “Hermite-Hadamard type inequalities for new conformable fractional integral operator,” *ResearchGate Preprint*, 2018.
- [22] A. Gözpinar, “Some Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via new fractional conformable integrals and related inequalities,” *AIP Conference Proceedings*, c. 1991, sayı 1, 2018.
- [23] A. A. Hyder, A. A. Almoneef, H. Budak ve M. A. Barakat, “On new fractional version of Generalized Hermite-Hadamard Inequalities,” *Mathematics*, c. 10, sayı 18, ss. 3337, 2022.
- [24] B. G. Pachpatte, “On some inequalities for convex functions,” *RGMIA Research Report Collection*, c. 6, 2003.
- [25] F. Chen, “A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals,” *Ital. J. Pure Appl. Math.*, c. 33, ss. 299–306, 2014.
- [26] S. Markov, “On the algebraic properties of convex bodies and some applications,” *Journal of Convex Analysis*, c. 7, sayı 1, ss. 129–166, 2000.
- [27] V. Lupulescu, “Fractional calculus for interval-valued functions,” *Fuzzy Sets and Systems*, c. 265, ss. 63-85, 2015.
- [28] R. E. Moore, R. B. Kearfott ve M. J. Cloud, “Introduction to Interval Analysis,” *SIAM*, Philadelphia, P.A., 2009.
- [29] H. Budak, T. Tunc ve M. Z. Sarikaya, “Fractional Hermite-Hadamard-type inequalities for interval-valued functions,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, c. 148, ss. 705-718, 2020.
- [30] M. B. Khan, S. Treanță, M. S. Soliman, K. Nonlaopon ve H. G. Zaini, “Some Hadamard-Fejér type inequalities for LR-convex interval-valued functions,” *Fractal and Fractional*, c. 6, sayı 1, ss. 6, 2021.

- [31] M. B. Khan, H. G. Zaini, J. E. Macías-Díaz, S. Treanță ve M. S. Soliman, “Some integral inequalities in interval fractional calculus for left and right coordinated interval-valued functions,” *AIMS Mathematics*, c. 7, sayı 6, ss. 10454–10482, 2022.
- [32] H. M. Srivastava, S. K. Sahoo, P. O. Mohammed, B. Kodamasingh ve Y. S. Hamed, “New Riemann–Liouville fractional-order inclusions for convex functions via interval-valued settings associated with pseudo-order relations,” *Fractal and Fractional*, c. 6, sayı 4, ss. 212, 2022.
- [33] L. Zhang, M. Feng, R. P. Agarwal ve G. Wang, “Concept and application of interval-valued fractional conformable calculus,” *Alexandria Engineering Journal*, c. 61, sayı 12, ss. 11959-11977, 2022.
- [34] Kara, H., Budak, H. ve Hezenci, F. (2024). Hermite–Hadamard type Inequalities *LR*-convex Interval-Valued Functions via Fractional Conformable Integrals. *The 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications – COIA 2024*, İstanbul, Türkiye: İstanbul Üniversitesi Cerrahpaşa.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ömer USTAOĞLU
Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2025
Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2022
Lise		Plevne Anadolu Lisesi	2018

TEZDEN ÇIKAN YAYINLAR Ö. Ustaoglu, H. Kara, H. Budak, "Hermite-Hadamard Inequalities Involving Fractional Conformable Integral Operators for Product of Two Interval-Valued LR -Convex Functions," *Communications in Advanced Mathematical Sciences*, Kabul Edildi.