

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATSAYILARI YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ SAYILARI OLAN
KUATERNİYONLAR VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAMSON TIANKUM YACHANI

MAYIS 2025

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATSAYILARI YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ SAYILARI OLAN
KUATERNİYONLAR VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Samson Tiankum YACHANI

DANIŞMAN: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

ZONGULDAK

Mayıs 2025

KABUL:

Samson Tiankum YACHANI tarafından hazırlanan “Katsayıları Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Sayıları olan Kuaterniyonlar ve Onların Özellikleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir.
29/05/2025

Danışman: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Emrah POLATLI
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Semra KUŞ
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Mucur Meslek Yüksekokulu, Finans Bankacılık
ve Sigortacılık Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./..../2025

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklamayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Samson Tiankum YACHANI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KATSAYILARI YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ SAYILARI OLAN KUATERNİYONLAR VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

Samson Tiankum YACHANI

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

Mayıs 2025, 43 sayfa

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konuyla ilgili literatürde yer alan araştırmalar incelenmiş ve bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları tanımlanmış, ayrıca bu kuaterniyonlar ile ilgili Binet formülü, rekürans bağıntısı, toplam formülleri ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları ile ilgili üreteç fonksiyonları ve üstel üreteç fonksiyonu verilmiştir. Ayrıca matrisler yardımıyla da bazı eşitlikler elde edilmiştir. Beşinci ve son bölümde de sonuçlar kısmı yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gauss Fibonacci kuaterniyonları, yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları, rekürans bağıntısı, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları

Bilim Kodu: 403.01.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

QUATERNIONS WITH COEFFICIENTS OF HIGHER-ORDER GAUSSIAN FIBONACCI NUMBERS AND THEIR PROPERTIES

Samson Tiankum YACHANI

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Prof. Dr. Can KIZILATEŞ

Mayıs 2025, 43 pages

The thesis consists of five chapters. The first chapter contains the introduction part. In the second chapter, preliminaries, some basic definitions and some properties which will be used in the next sections were given. In the third chapter, the definition of higher-order Gaussian Fibonacci quaternions is given and the Binet-like formula is derived. Moreover, the recurrence relation, some properties and the summation formulae of higher-order Gaussian Fibonacci quaternions are provided. In the fourth chapter, the generating functions for higher-order Gaussian Fibonacci quaternions are given and we have obtained some numerous identities by using some matrix representation. The fifth and last section contains the conclusions.

Keywords: Gaussian Fibonacci quaternion, higher-order Gaussian Fibonacci quaternions, recurrence relation, summation formulae, generating functions

Science Code: 403.01.01



TEŞEKKÜR

Tezin tüm aŐamalarında değerli vaktini, bilgi birikimini, deneyimlerini benimle paylaŐmaktan hiç kaçınmayan, gürüŐ ve önerileriyle her zaman yol gsterici olan çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Can KIZILATEŞ'e (ZBEÜ) iŐtenlikle teşekkür ederim.

Bu alıŐma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen aileme ve çalışma arkadaŐlarıma sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1 KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
BÖLÜM 2 ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI TANIMI	5
2.2 YÜKSEK MERTEBEDEN FİBONACCİ SAYI TANIMI.....	7
2.3 KARMAŞIK SAYI TANIMI	8
2.4 GAUSS FİBONACCI SAYI TANIMI	9
2.5 YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCI SAYI TANIMI	10
2.6 KUATERNİYON TANIMI	10
2.7 FİBONACCİ KUATERNİYON TANIMI	12
2.8 LUCAS KUATERNİYON TANIMI	12
2.9 YÜKSEK MERTEBEDEN FİBONACCİ KUATERNİYON TANIMI	13
2.10 GAUSS FİBONACCİ KUATERNİYON TANIMI	13
BÖLÜM 3 YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE BAZI ÖZELLİKLERİ	15

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 4 YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ KUATERNİYONLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE YENİ MATRİS GÖSTERİMLERİ.....	29
4.1 ÜRETEÇ FONKSİYON.....	29
4.2 ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYON	34
4.3 BAZI MATRİS GÖSTERİMLERİ	35
BÖLÜM 5 SONUÇ	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 İlk 15 Fibonacci sayısı	5
Çizelge 2.2 İlk 15 Lucas sayısı.....	7
Çizelge 2.3 Bazı yüksek mertebeden Fibonacci sayıları.....	8
Çizelge 2.4 Kuarterniyon birimlerinin çarpımı	10





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

F_n	: Fibonacci Dizisi
$F(t)$: Fibonacci Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$f(t)$: Bir Dizinin Üreteç Fonksiyonu
$E(t)$: Bir Dizinin Üstel Üreteç Fonksiyonu
L_n	: Lucas Dizisi
$L(t)$: Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
GF_n	: Gauss Fibonacci Sayısı
$GF(t)$: Gauss Fibonacci Sayısının Üreteç Fonksiyonu
z	: Karmaşık Sayı
q	: Kuaterniyon
$F_n^{(r)}$: Yüksek Mertebeden Fibonacci Dizisi
$F^{(r)}(t)$: Yüksek Mertebeden Fibonacci Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$GF_n^{(r)}$: Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Sayısı
$GF^{(r)}(t)$: Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
GFq_n	: Gauss Fibonacci Kuaterniyonu
$GFq_n^{(r)}$: Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Kuaterniyonu
$GFq^{(r)}(t)$: Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Kuaterniyonunun Üreteç Fonksiyonu
$E^{(r)}(t)$ fonksiyonu	: Yüksek Mertebeden Gauss Fibonacci Kuaterniyonunun Üstel Üreteç fonksiyonu
\mathbb{N}	: Doğal Sayı
\mathbb{N}_0	: Sıfırdan Başlayan Doğal Sayı
\mathbb{Z}	: Tam Sayı

KISALTMALAR

$\text{Im}(z)$: Karmaşık sayının sanal kısmı
$\text{Re}(z)$: Karmaşık sayının reel kısmı



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Fibonacci sayısı adını, 1202 yılında Liber Abaci adlı kitabıyla bu diziyi Batı Avrupa matematiğine tanıtan İtalyan matematikçi Pisa'lı Leonardo'dan alır. Fibonacci dizisinde her terim, kendisinden önceki iki terimin toplamıdır. Fibonacci sayıları genellikle F_n olarak gösterilir. Aslında Hint kaynaklarında bu dizinin M.Ö. 200'lü yıllara dayandığı görülmektedir. Liber Abaci esas olarak aritmetik ve temel cebire odaklanmıştır ve aslında kitabında o dönemdeki diğer tüm matematiksel çalışmalardan daha enerjik bir şekilde Hint sayı sisteminin gücünü ortaya koymuştur [24], [25]. Lucas dizisi, Fibonacci dizisine benzer biçimde tanımlanan matematikçi François Édouard Anatole Lucas'ın adını taşıyan bir tam sayı dizisidir. Lucas sayıları L_n ile gösterilir. Matematik literatüründe Fibonacci ve Lucas sayıları hakkında çok sayıda araştırmacının dikkatini çeken muazzam bir bilgi zenginliği bulunmaktadır. Bu sayıların çok sayıda olağanüstü özelliği ve uygulamaları mevcuttur [18].

Karmaşık sayılar $x + iy$ biçiminde ifade edilir. Burada x ve y reel sayılardır ve i sanal sayıdır. Karmaşık sayılar, reel sayıların yapamadığı negatif sayıların köklerini ifade etme ihtiyacından kaynaklanır. Bu nedenle polinomların tüm köklerini yansıtır. Matematik, mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında bu sayılar sıklıkla kullanılır.

Cebirde kuaterniyon, iki boyutlu karmaşık sayıların dört boyuta genelleştirilmesidir. Kuaterniyonlar ve bunlar üzerindeki temel cebirsel işlem özellikleri, 1843 yılında İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından çalışılmıştır [8]. Kuaterniyonlar genellikle \mathbb{H} sembolü ile gösterilir. Teorik ve uygulamalı matematik, bilgisayar bilimi, kuantum fiziği, analiz ve fizik gibi çeşitli alanlarda akademisyenler kuaterniyonları kullanırlar.

Bu tezin temel amacı bileşenleri yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayıları olan kuaterniyonlar tanımlayarak bu sayıların temel özelliklerini araştırmaktır. Yani yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları tanımlayıp, bu kuaterniyonlar için Binet formülünü,

rekürans bağıntısı, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları, üstel üreteç fonksiyonu ve özel matrislerini kullanarak Cassini eşitliklerini araştırmaktır.

1.1 KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

Koshy (2001) "Fibonacci and Lucas numbers with applications" isimli kitabında Fibonacci ve Lucas sayıları hakkında bilinmesi gereken her şeyi en kapsamlı biçimde ele almıştır [18].

Pashaev ve Nalci (2012) "Golden quantum oscillator and Binet–Fibonacci calculus" adlı çalışmasında yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının tanımını verip, bu sayıların bazı özelliklerini sunmuşlardır [20].

Oktay Pashaev danışmanlığındaki yüksek lisans tezinde Özvatan (2018) "Generalized Golden-Fibonacci Calculus and applications" isimli çalışmasında yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı ve üreteç fonksiyonu gibi özelliklerini incelemiştir [19].

Gauss (1832) "Theoria Residuorum Biquadraticorum" isimli çalışmasında Gauss sayılarının tanımını ve bazı özelliklerini vermiştir [3].

Horadam (1963) "Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions" isimli çalışmasında bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayıları olan Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları tanımlamış ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini vermiştir [9].

Halici (2013) "On Complex Fibonacci Quaternions" isimli çalışmasında bileşenleri kompleks Fibonacci sayıları olan kompleks Fibonacci kuaterniyonları tanımlamış ve bu kuaterniyonların rekürans bağıntısını, Binet formülünü, toplam formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bazı özelliklerini vermiştir [7].

Kızılateş ve Kone (2021) "On Higher Order Fibonacci Quaternions" isimli çalışmasında bileşenleri yüksek mertebeden Fibonacci sayıları olan kuaterniyonları tanımlamış ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini elde etmiştir [13].

Halici ve Cerda-Morales (2021) "On Quaternion-Gaussian Fibonacci Numbers and Their Properties" adlı çalışmasında bileşenleri Gauss Fibonacci sayıları olan kuaterniyonları tanımlayıp, bu kuaterniyonların bazı özelliklerini ele almıştır [5].

Kızılateş (2024) "A Different Approach To Gauss Fibonacci Polynomials" isimli çalışmasında bileşenleri yüksek mertebeden Fibonacci sayıları olan yüksek mertebeden Gauss

Fibonacci sayılarının tanımını, rekürans bağıntısını, üretic fonksiyonunu ve bazı matris temsillerini ele almıştır [16].





BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz. Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları, Gauss Fibonacci sayılarının tanımı, karmaşık sayıların tanımı, kuaterniyon tanımı, yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının tanımı, yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının tanımı ve bu sayıların bazı özellikleri verilecektir.

2.1 FIBONACCI VE LUCAS SAYILARI

Tanım 2.1 *Fibonacci dizisi $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, $n \geq 0$ için ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır [18].

Çizelge 2.1 İlk 15 Fibonacci sayısı

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

şeklindedir.

Fibonacci dizisi, ikinci mertebeden lineer rekürans bağıntısıdır. Bu reküransın çözümü için,

$$F_n = Ax^n$$

seçelim. Burada A ve x sıfır olmayan sabittir. Bunu Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısında yerine yazarsak,

$$Ax^n = Ax^{n-1} + Ax^{n-2} \tag{2.1}$$

elde edilir. (2.1)'de her iki taraf Ax^{n-2} ile bölünürse $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemi elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\vartheta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Ayrıca kökler arasında

$$\theta + \vartheta = 1$$

$$\theta - \vartheta = \sqrt{5}$$

$$\theta\vartheta = -1$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece

$$F_n = A_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + A_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

dir. Başlangıç şartları kullanarak, $A_1 = \frac{1}{\theta - \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $A_2 = -\frac{1}{\theta - \vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ değerlerini bulabiliriz. Son olarak, n 'inci Fibonacci sayısı için Binet formülü:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\theta^n - \vartheta^n}{\theta - \vartheta}$$

elde edilir.

Hemen belirtelim ki $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran (Golden ratio) olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.2 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$f(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots + \lambda_n t^n + \dots$$

ifadesine (λ_n) dizisinin üreteç fonksiyonu denir. Yani

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n t^n$$

dir [18].

Tanım 2.3 (λ_n) dizisinin üstel üreteç fonksiyonu

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{t^n}{n!}$$

dir [18].

Tanım 2.4 Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1 - t - t^2}$$

dir [18].

Tanım 2.5 Lucas dizisi $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, $n \geq 0$ için ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır [18].

Çizelge 2.2 İlk 15 Lucas sayısı

L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

şeklindedir.

Lucas sayısının Binet formülü

$$L_n = \theta^n + \vartheta^n$$

biçimindedir [18].

Tanım 2.6 Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n = \frac{2-t}{1-t-t^2}$$

dir [18].

2.2 YÜKSEK MERTEBEDEN FİBONACCİ SAYISI

Literatürde, Fibonacci sayılarının farklı genellemeleri mevcuttur. Bunlardan bir tanesi de ilk kez 2012 yılında Pashaev ve Nalci tarafından tanımlanan yüksek mertebeden Fibonacci sayılarıdır [20]. Yazarlar ayrıca yüksek mertebeden Fibonacci sayılarını Fibonacci bölenleri olarak da adlandırmışlardır. Bununla birlikte Prof. Dr. Oktay Pashaev danışmanlığında, Özvatan yüksek lisans tezinde, yüksek mertebeden Fibonacci sayılarının detaylı özelliklerini incelemiştir [19].

Tanım 2.7 $r \geq 1$ tam sayısı ve F_n , n 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_n^{(r)} = \frac{F_{nr}}{F_r}$$

oranına yüksek mertebeden Fibonacci sayıları denir.

Farklı n ve r değerleri için yüksek mertebeden Fibonacci sayılarını aşağıdaki çizelge ile verebiliriz.

Çizelge 2.3 Bazı yüksek mertebeden Fibonacci sayıları

$n \setminus r$	1	2	3	4
1	$F_1^{(1)} = 1$	$F_1^{(2)} = 1$	$F_1^{(3)} = 1$	$F_1^{(4)} = 1$
2	$F_2^{(1)} = 1$	$F_2^{(2)} = 3$	$F_2^{(3)} = 4$	$F_2^{(4)} = 7$
3	$F_3^{(1)} = 2$	$F_3^{(2)} = 8$	$F_3^{(3)} = 17$	$F_3^{(4)} = 48$
4	$F_4^{(1)} = 3$	$F_4^{(2)} = 21$	$F_4^{(3)} = 72$	$F_4^{(4)} = 329$

Ayrıca, F_{nr} , F_r ile bölünebildiği için $\frac{F_{nr}}{F_r}$ oranı bir tam sayıdır. Bu nedenle her yüksek mertebeden Fibonacci sayısı bir tam sayıdır. Klasik Fibonacci dizisinin $r = 1$ için yüksek mertebeden Fibonacci dizisinden elde edilebileceği açıktır.

Yüksek mertebeli Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı

$$F_{n+1}^{(r)} = F_n^{(r)} + (-1)^{r+1} F_{n-1}^{(r)}$$

şeklindedir [19].

Yüksek mertebeli Fibonacci sayılarının Binet formülü

$$F_n^{(r)} = \frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r}$$

şeklindedir [19].

Tanım 2.8 Yüksek mertebeden Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(r)} t^n = \frac{t}{1 - L_r t - (-1)^r t^2}$$

dir [19].

2.3 KARMAŞIK SAYI

Tanım 2.9 x, y reel sayılar ve $\mathbf{i}^2 = -1$ olmak üzere $x + \mathbf{i}y$ biçimindeki sayılara karmaşık sayılar denir [11]. Karmaşık sayılar kümesi genellikle \mathbb{C} sembolüyle gösterilir.

Burada, karmaşık sayı $z \in \mathbb{C}$ için $z = x + \mathbf{i}y$ ifadesinde, $x \in \text{Re}(z)$ reel kısım ve $y \in \text{Im}(z)$ de sanal kısım olarak adlandırılır. z nin eşleşimini $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ dir.

Karmaşık sayıları $z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için ve λ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathbf{i}(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathbf{i}(y_1 - y_2),$$

$$\lambda z_1 = \lambda x_1 + \mathbf{i}(\lambda y_1),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) \mathbf{i},$$

z ile \bar{z} eşleniğinin çarpımı

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z, \bar{z} \in \mathbb{C}$$

biçimindedir [11].

Karmaşık sayılar iki boyutlu değişmeli ve birleşmeli cebir yapısındadır [11].

2.4 GAUSS FİBONACCİ SAYISI

Tanım 2.10 *Gauss tam sayıları, katsayıları tam sayılar olan*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + \mathbf{i}b : a, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{i}^2 = -1\}$$

biçiminde ifade edilen cebirsel tam sayılar kümesidir [3].

Gauss tam sayıları ilk olarak 1832 yılında Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss [3] tarafından çalışılmıştır. Gauss sayıları sıradan toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Carl Friedrich Gauss, özellikle cebir ve sayılar teorisi olmak üzere matematiğin birçok alanına önemli katkılarda bulunmuştur.

A.F. Horadam bileşenleri Fibonacci sayıları olan Gauss Fibonacci sayılarını tanımlamıştır [9]. 1965'te J.H. Jordan [10] tarafından Gauss Fibonacci sayıları daha da kapsamlı biçimde ele alınmıştır.

Tanım 2.11 *Gauss Fibonacci sayıları $\{GF_n\}_{n=0}^{\infty}$, $n \geq 0$ için ve $GF_0 = \mathbf{i}$, $GF_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere*

$$GF_{n+2} = GF_{n+1} + GF_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır [7], [9].

Gauss Fibonacci dizisi için Binet formülü ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$GF_n = \frac{1}{\theta - \vartheta} \{ \theta^{n-1} (\theta + \mathbf{i}) - \vartheta^{n-1} (\vartheta + \mathbf{i}) \}$$

biçiminde yazılır [7].

Gauss Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GF_n t^n = \frac{(1-t)GF_0 + GF_1 t}{1-t-t^2}$$

dir [7].

2.5 YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ SAYISI

Kızılateş [16] tarafından yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayısı ve polinomu tanımlanmıştır. Ayrıca bu sayının rekürans bağıntısı, çeşitli toplam formülleri ve üreteç fonksiyonları gibi özellikleri incelenmiştir.

Tanım 2.12 $n, r \geq 1$ tam sayıları için, $F_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Fibonacci sayısı olmak üzere Gauss Fibonacci sayısı

$$GF_n^{(r)} = F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)} \quad (2.2)$$

ile tanımlanır.

$r \in \mathbb{N}$ için yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayılarının Binet formülü

$$GF_n^{(r)} = \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \{ (\theta^r)^{n-1} (\theta^r + \mathbf{i}) - (\vartheta^r)^{n-1} (\vartheta^r + \mathbf{i}) \}$$

şeklindedir.

Gauss Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GF_n^{(r)} t^n = \frac{(-1)^r (-\mathbf{i} + \mathbf{i}L_r t + (-1)^r t)}{1 - L_r t - (-1)^r t^2}$$

biçimindedir [16].

2.6 REEL KUATERNİYON

Tanım 2.13 Bir q kuaterniyonu,

$$q = \mu + \nu \mathbf{i} + \rho \mathbf{j} + \sigma \mathbf{k} = (\mu, \nu, \rho, \sigma)$$

biçiminde ifade edilir; burada μ, ν, ρ ve σ reel sayılar ve $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ temel kuaterniyon birimleridir [8].

Bu kuaterniyon birimleri aşağıdaki çizelgede verilen çarpım kurallarını sağlarlar.

Çizelge 2.4. Kuaterniyon birimlerinin çarpımı (2.3)

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Çizelge 2.4. deki $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kuaterniyon birimlerinin kendi aralarındaki çarpımları değişme özelliğini sağlamazlar.

Herhangi bir q kuaterniyonunun eşleniği \bar{q} , üç sanal birimin negatiflemeyle elde edilebilir. Yani,

$$\bar{q} = \mu - \nu\mathbf{i} - \rho\mathbf{j} - \sigma\mathbf{k}.$$

Şimdi reel kuaterniyonların sağladığı bazı basit aritmetik işlemleri verelim.

$$q_1 = \mu_1 + \nu_1\mathbf{i} + \rho_1\mathbf{j} + \sigma_1\mathbf{k},$$

$$q_2 = \mu_2 + \nu_2\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \sigma_2\mathbf{k},$$

ve λ bir reel sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$q_1 + q_2 = (\mu_1 + \mu_2) + (\nu_1 + \nu_2)\mathbf{i} + (\rho_1 + \rho_2)\mathbf{j} + (\sigma_1 + \sigma_2)\mathbf{k},$$

$$q_1 - q_2 = (\mu_1 - \mu_2) + (\nu_1 - \nu_2)\mathbf{i} + (\rho_1 - \rho_2)\mathbf{j} + (\sigma_1 - \sigma_2)\mathbf{k},$$

$$\lambda q_1 = \lambda\mu_1 + (\lambda\nu_1)\mathbf{i} + (\lambda\rho_1)\mathbf{j} + (\lambda\sigma_1)\mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (\mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2 - \rho_1\rho_2 - \sigma_1\sigma_2) + (\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \rho_1\sigma_2 - \sigma_1\rho_2)\mathbf{i} \\ &\quad + (\mu_1\rho_2 - \nu_1\sigma_2 + \rho_1\mu_2 + \sigma_1\nu_2)\mathbf{j} + (\mu_1\sigma_2 + \nu_1\rho_2 - \rho_1\nu_2 + \sigma_1\mu_2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki aritmetik işlemler göz önüne alınırsa, $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ için

1. $q_1 + q_2 = q_2 + q_1,$

2. $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3,$

$$3. q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3,$$

$$4. (q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3),$$

özellikleri sağlar.

q ve \bar{q} eşleniğinin çarpımı;

$$q\bar{q} = (\mu + \nu\mathbf{i} + \rho\mathbf{j} + \sigma\mathbf{k})(\mu - \nu\mathbf{i} - \rho\mathbf{j} - \sigma\mathbf{k}) = \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 + \sigma^2 = |q|^2, \quad (2.4)$$

dir. Elde edilen $|q|$ reel sayısına q nun normu adı verilir.

Kuaterniyonlar 4 boyutlu toplama işlemine göre birleşmeli ve değişmeli, çarpma işlemine göre birleşmeli fakat değişmeli olmayan cebir yapısındadır [8].

Kuaterniyonlar, geçmişten günümüze matematikçiler tarafından ilgiyle araştırılmıştır. Horadam 1963'te kompleks Fibonacci sayıları ve Fibonacci kuaterniyonlarını incelemiştir [9]. Bu nedenle, Fibonacci kuaterniyonları için bazı özellikler Horadam tarafından verilmiştir. Daha sonra da Halici [4], [7] tarafından Fibonacci kuaterniyonlarının bazı özellikleri incelenmiştir.

2.7 FİBONACCİ KUATERNİYON

Tanım 2.14 *Fibonacci kuaterniyonları $\{Fq_n\}_{n=0}^{\infty}$, n doğal sayısı için*

$$Fq_n = F_n + F_{n+1}\mathbf{i} + F_{n+2}\mathbf{j} + F_{n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır [4], [9].

$n \geq 2$, $Fq_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $Fq_1 = 1 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ başlangıç şartları için Fibonacci kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı

$$Fq_n = Fq_{n-1} + Fq_{n-2}$$

dir.

$\bar{\theta} = 1 + \theta\mathbf{i} + \theta^2\mathbf{j} + \theta^3\mathbf{k}$ ve $\bar{\vartheta} = 1 + \vartheta\mathbf{i} + \vartheta^2\mathbf{j} + \vartheta^3\mathbf{k}$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyonlarının

Binet formülü

$$Fq_n = \frac{\bar{\theta}\theta^n - \bar{\vartheta}\vartheta^n}{\theta - \vartheta}$$

biçimindedir.

Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$Fq(t) = \frac{t + \mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}}{1 - t - t^2}$$

dir [4].

2.8 LUCAS KUATERNİYON

Tanım 2.15 n doğal sayısı için Lucas kuaterniyonları $\{Lq_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$Lq_n = L_n + L_{n+1}\mathbf{i} + L_{n+2}\mathbf{j} + L_{n+3}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır [4].

$n \geq 2$, $Lq_0 = 2 + \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ve $Lq_1 = 1 + 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ başlangıç şartları için Lucas kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı

$$Lq_n = Lq_{n-1} + Lq_{n-2}$$

biçimindedir.

$\bar{\theta} = 1 + \theta\mathbf{i} + \theta^2\mathbf{j} + \theta^3\mathbf{k}$ ve $\bar{\vartheta} = 1 + \vartheta\mathbf{i} + \vartheta^2\mathbf{j} + \vartheta^3\mathbf{k}$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü

$$Lq_n = \bar{\theta}\theta^n + \bar{\vartheta}\vartheta^n$$

dir.

[22]'de Polatlı ve Kesim tarafından yürütülen farklı çalışmalarda, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı bileşenlerine sahip kuaterniyonlar detaylı olarak incelenmiştir.

[13]'de Kızılateş ve Kone, Horadam ve Halıcı tarafından incelenen Fibonacci kuaterniyonlarını genelleştiren yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonlarını tanımlamış ve bu kuaterniyonların birçok cebirsel özelliğini elde etmişlerdir.

2.9 YÜKSEK MERTEBEDEN FİBONACCİ KUATERNİYON

Tanım 2.16 Yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonları $Fq_n^{(r)}$, $n, r \in \mathbb{N}$ için

$$Fq_n^{(r)} = F_n^{(r)} + F_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + F_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + F_{n+3}^{(r)}\mathbf{k}$$

ile tanımlanır [13].

Yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonları $n, r \in \mathbb{N}$ için rekürans bağıntısı

$$Fq_{n+1}^{(r)} = Fq_n^{(r)} + (-1)^{r+1} Fq_{n-1}^{(r)}$$

şeklindedir.

$\bar{\alpha} = 1 + \theta^r \mathbf{i} + \theta^{2r} \mathbf{j} + \theta^{3r} \mathbf{k}$ ve $\bar{\beta} = 1 + \vartheta^r \mathbf{i} + \vartheta^{2r} \mathbf{j} + \vartheta^{3r} \mathbf{k}$ olmak üzere yüksek mertebeli Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü

$$Fq_n^{(r)} = \frac{\bar{\alpha} (\theta^r)^n - \bar{\beta} (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r}$$

dir [13].

Yüksek mertebeden Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

$$Fq^{(r)}(t) = \frac{(\mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k}) + (-1)^{r+1} ((-1)^{r+1} + \mathbf{j} + L_r \mathbf{k}) t}{1 - L_r t - (-1)^r t^2}$$

dir [13].

Halıcı ve Cerda-Moreles, [5]'de katsayıları Gauss Fibonacci sayıları olan kuaterniyonlar tanımlamış ve bu tür kuaterniyonlar için bazı temel özellikler sağlamıştır.

2.10 GAUSS FİBONACCİ KUATERNİYON

Tanım 2.17 *Gauss Fibonacci kuaterniyonları $\{GFq_n\}_{n=0}^{\infty}$, n doğal sayısı için ve GF_n Gauss Fibonacci sayısı olmak üzere*

$$GFq_n = GF_n + GF_{n+1} \mathbf{i} + GF_{n+2} \mathbf{j} + GF_{n+3} \mathbf{k}$$

ile tanımlanır [5].

$\bar{\theta} = 1 + \theta \mathbf{i} + \theta^2 \mathbf{j} + \theta^3 \mathbf{k}$, $\bar{\vartheta} = 1 + \vartheta \mathbf{i} + \vartheta^2 \mathbf{j} + \vartheta^3 \mathbf{k}$, $\alpha = \theta^{-1} + \mathbf{i} + \theta \mathbf{j} + \theta^2 \mathbf{k}$ ve $\beta = \vartheta^{-1} + \mathbf{i} + \vartheta \mathbf{j} + \vartheta^2 \mathbf{k}$ olmak üzere Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü

$$GFq_n^{(r)} = \frac{(\bar{\theta} \theta^n - \bar{\vartheta} \vartheta^n) + (\alpha \theta^n - \beta \vartheta^n) \mathbf{i}}{\theta - \vartheta}$$

dir [5].

BÖLÜM 3

YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCİ KUATERNİYONLARI

Bu bölümde yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyon tanımı verilecektir. Daha sonra bu kuaterniyonlar için Binet formülleri, rekürans bağıntısı, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları, üstel üreteç fonksiyonları ve bazı özdeşlikler verilecektir. Bu bölümdeki sonuçlar Kızılateş ve Yachani tarafından [17] elde edilmiştir.

Tanım 3.1 *Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonu, $r \in \mathbb{N}$ için*

$$GFq_n^{(r)} = GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \quad (3.1)$$

ile tanımlanır.

Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun eşleniği

$$GFq_n^{(r)*} = GF_n^{(r)} - GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} - GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} - GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanır.

Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun karmaşık eşleniği

$$\overline{GFq_n^{(r)}} = \overline{GF_n^{(r)}} + \overline{GF_{n+1}^{(r)}}\mathbf{i} + \overline{GF_{n+2}^{(r)}}\mathbf{j} + \overline{GF_{n+3}^{(r)}}\mathbf{k} \quad (3.3)$$

şeklindedir.

$GFq_n^{(r)}$ normu

$$\|GFq_n^{(r)}\| = GFq_n^{(r)}GFq_n^{(r)*} = (GF_n^{(r)})^2 + (GF_{n+1}^{(r)})^2 + (GF_{n+2}^{(r)})^2 + (GF_{n+3}^{(r)})^2 \quad (3.4)$$

biçimindedir.

Önerme 3.1 $GF_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayısı olmak üzere ve $Fq_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Fibonacci sayısı olmak üzere, $r \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyon özdeşlikleri,

$$GFq_n^{(r)} + GFq_n^{(r)*} = 2GF_n^{(r)} \quad (3.5)$$

ve

$$GFq_n^{(r)} + \overline{GFq_n^{(r)}} = 2Fq_n^{(r)} \quad (3.6)$$

sağlanır.

İspat. (3.1) ve (3.2) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} GFq_n^{(r)} + GFq_n^{(r)*} &= \left(GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &\quad + \left(GF_n^{(r)} - GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} - GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} - GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &= \left(GF_n^{(r)} + GF_n^{(r)} \right) + \left(GF_{n+1}^{(r)} - GF_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(GF_{n+2}^{(r)} - GF_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(GF_{n+3}^{(r)} - GF_{n+3}^{(r)} \right) \mathbf{k} \\ GFq_n^{(r)} + GFq_n^{(r)*} &= 2GF_n^{(r)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$GFq_n^{(r)} = \left(F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)} \right) + \left(F_{n+1}^{(r)} + \mathbf{i}F_n^{(r)} \right) \mathbf{i} + \left(F_{n+2}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{k} \quad (3.7)$$

ve

$$\overline{GFq_n^{(r)}} = \left(F_n^{(r)} - \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)} \right) + \left(F_{n+1}^{(r)} - \mathbf{i}F_n^{(r)} \right) \mathbf{i} + \left(F_{n+2}^{(r)} - \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} - \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

olmak üzere, (3.1) ve (3.3) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} GFq_n^{(r)} + \overline{GFq_n^{(r)}} &= \left(GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &\quad + \left(\overline{GF_n^{(r)}} + \overline{GF_{n+1}^{(r)}}\mathbf{i} + \overline{GF_{n+2}^{(r)}}\mathbf{j} + \overline{GF_{n+3}^{(r)}}\mathbf{k} \right) \\ &= \left(F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)} \right) + \left(F_{n+1}^{(r)} + \mathbf{i}F_n^{(r)} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(F_{n+2}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{k} \\ &\quad + \left(F_n^{(r)} - \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)} \right) + \left(F_{n+1}^{(r)} - \mathbf{i}F_n^{(r)} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(F_{n+2}^{(r)} - \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} - \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GFq_n^{(r)} + \overline{GFq_n^{(r)}} &= \left(F_n^{(r)} + F_n^{(r)} \right) + \left(F_{n-1}^{(r)} - F_{n-1}^{(r)} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(F_{n+1}^{(r)} + F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{i} + \left(F_n^{(r)} - F_n^{(r)} \right) \mathbf{i}^2 \\ &\quad + \left(F_{n+2}^{(r)} + F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{j} + \left(F_{n+1}^{(r)} - F_{n+1}^{(r)} \right) \mathbf{ij} \\ &\quad + \left(F_{n+3}^{(r)} + F_{n+3}^{(r)} \right) \mathbf{k} + \left(F_{n+2}^{(r)} - F_{n+2}^{(r)} \right) \mathbf{ik} \\ &= 2F_n^{(r)} + 2F_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + 2F_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + 2F_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \\ &= 2 \left(F_n^{(r)} + F_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + F_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + F_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &= 2Fq_n^{(r)} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde ispatlar gösterilmiş olur. ■

Teorem 3.2 $r \in \mathbb{N}$ için yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları aşağıdaki özdeşliği sağlar:

$$(GFq_n^{(r)})^2 = 2GF_n^{(r)}GFq_n^{(r)} - GFq_n^{(r)}GFq_n^{(r)*}. \quad (3.9)$$

İspat. (3.1) ve (3.2) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} (GFq_n^{(r)})^2 &= \left(GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &\quad \times \left(GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &= \left(GF_n^{(r)} \right)^2 + GF_n^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_n^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_n^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \\ &\quad + GF_{n+1}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{i} + \left(GF_{n+1}^{(r)} \right)^2 \mathbf{i}^2 + GF_{n+1}^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}(\mathbf{ij}) + GF_{n+1}^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}(\mathbf{ik}) \\ &\quad + GF_{n+2}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+2}^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}(\mathbf{ji}) + \left(GF_{n+2}^{(r)} \right)^2 \mathbf{j}^2 + GF_{n+2}^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}(\mathbf{jk}) \\ &\quad + GF_{n+3}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{k} + GF_{n+3}^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}(\mathbf{ki}) + GF_{n+3}^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}(\mathbf{kj}) + \left(GF_{n+3}^{(r)} \right)^2 \mathbf{k}^2 \\ &= \left(GF_n^{(r)} \right)^2 + GF_n^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_n^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_n^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \\ &\quad + GF_{n+1}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{i} - \left(GF_{n+1}^{(r)} \right)^2 + GF_{n+1}^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{k} - GF_{n+1}^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{j} \\ &\quad + GF_{n+2}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{j} - GF_{n+2}^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{k} - \left(GF_{n+2}^{(r)} \right)^2 + GF_{n+2}^{(r)}GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{i} \\ &\quad + GF_{n+3}^{(r)}GF_n^{(r)}\mathbf{k} + GF_{n+3}^{(r)}GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{j} - GF_{n+3}^{(r)}GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{i} - \left(GF_{n+3}^{(r)} \right)^2 \\ &= \left(GF_n^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+1}^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+2}^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+3}^{(r)} \right)^2 \\ &\quad + 2GF_n^{(r)} \left(GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &= - \left(GF_n^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+1}^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+2}^{(r)} \right)^2 - \left(GF_{n+3}^{(r)} \right)^2 \\ &\quad + 2GF_n^{(r)} \left(GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \right) \\ &= 2GF_n^{(r)}GFq_n^{(r)} - \left(\left(GF_n^{(r)} \right)^2 + \left(GF_{n+1}^{(r)} \right)^2 + \left(GF_{n+2}^{(r)} \right)^2 + \left(GF_{n+3}^{(r)} \right)^2 \right) \\ &= 2GF_n^{(r)}GFq_n^{(r)} - GFq_n^{(r)}GFq_n^{(r)*} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece sonuçlar elde edilir. ■

Teorem 3.3 $r \in \mathbb{N}$ için, $a = \mathbf{1} + \theta^r\mathbf{i} + \theta^{2r}\mathbf{j} + \theta^{3r}\mathbf{k}$, $b = \mathbf{1} + \vartheta^r\mathbf{i} + \vartheta^{2r}\mathbf{j} + \vartheta^{3r}\mathbf{k}$, $c = \theta^{-r} + \mathbf{i} + \theta^r\mathbf{j} + \theta^{2r}\mathbf{k}$ ve $d = \vartheta^{-r} + \mathbf{i} + \vartheta^r\mathbf{j} + \vartheta^{2r}\mathbf{k}$ olmak üzere yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü

$$GFq_n^{(r)} = \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b + \mathbf{i}((\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d)}{\theta^r - \vartheta^r} \quad (3.10)$$

şeklinde verilir.

İspat. Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun tanımından

$$GFq_n^{(r)} = GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k}$$

olduğunu biliyoruz. $GFq_n^{(r)}$ 'yi şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$GFq_n^{(r)} = \left(F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)}\right) + \left(F_{n+1}^{(r)} + \mathbf{i}F_n^{(r)}\right)\mathbf{i} + \left(F_{n+2}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)}\right)\mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)}\right)\mathbf{k}.$$

Buradan,

$$\begin{aligned} GFq_n^{(r)} &= \left(F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)}\right) + \left(F_{n+1}^{(r)} + \mathbf{i}F_n^{(r)}\right)\mathbf{i} + \left(F_{n+2}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)}\right)\mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)}\right)\mathbf{k} \\ &= \frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{n-1} - (\vartheta^r)^{n-1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{(\theta^r)^{n+3} - (\vartheta^r)^{n+3}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \mathbf{k} \\ &= \frac{(\theta^r)^n (1 + \theta^r \mathbf{i} + \theta^{2r} \mathbf{j} + \theta^{3r} \mathbf{k}) - (\vartheta^r)^n (1 + \vartheta^r \mathbf{i} + \vartheta^{2r} \mathbf{j} + \vartheta^{3r} \mathbf{k})}{\theta^r - \vartheta^r} \\ &\quad + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n (\theta^{-r} + \mathbf{i} + \theta^r \mathbf{j} + \theta^{2r} \mathbf{k}) - (\vartheta^r)^n (\vartheta^{-r} + \mathbf{i} + \vartheta^r \mathbf{j} + \vartheta^{2r} \mathbf{k})}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\ &= \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b + \mathbf{i}((\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d)}{\theta^r - \vartheta^r} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur. ■

Teorem 3.4 $r \in \mathbb{N}$ ve $GFq_n^{(r)}$ elemanları için

$$GFq_n^{(r)} = \left(F_{n+1}^{(r)} + F_{n-1}^{(r)}\right)\mathbf{i} + \left(F_{n+1}^{(r)} + F_{n+3}^{(r)}\right)\mathbf{k} \quad (3.11)$$

biçimindedir.

İspat. (2.2), (3.1), (3.7) ve (3.10) denklemlerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
GFq_n^{(r)} &= GF_n^{(r)} + GF_{n+1}^{(r)}\mathbf{i} + GF_{n+2}^{(r)}\mathbf{j} + GF_{n+3}^{(r)}\mathbf{k} \\
&= \left(F_n^{(r)} + \mathbf{i}F_{n-1}^{(r)}\right) + \left(F_{n+1}^{(r)} + \mathbf{i}F_n^{(r)}\right)\mathbf{i} + \left(F_{n+2}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+1}^{(r)}\right)\mathbf{j} + \left(F_{n+3}^{(r)} + \mathbf{i}F_{n+2}^{(r)}\right)\mathbf{k} \\
&= \frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \frac{(\theta^r)^{n-1} - (\vartheta^r)^{n-1}}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&\quad + \frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left(\frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{(\theta^r)^{n+3} - (\vartheta^r)^{n+3}}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{k} \\
&= \frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \frac{(\theta^r)^{n-1} - (\vartheta^r)^{n-1}}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&\quad + \frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \mathbf{i} - \left(\frac{(\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&\quad + \frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} \mathbf{j} + \frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \mathbf{k} \\
&\quad + \frac{(\theta^r)^{n+3} - (\vartheta^r)^{n+3}}{\theta^r - \vartheta^r} \mathbf{k} - \frac{(\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2}}{\theta^r - \vartheta^r} \mathbf{j} \\
&= \left(\left(\frac{(\theta^r)^{n-1} - (\vartheta^r)^{n-1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) + \frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left(\left(\frac{(\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) + \frac{(\theta^r)^{n+3} - (\vartheta^r)^{n+3}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{k} \\
&= \left(F_{n-1}^{(r)} + F_{n+1}^{(r)}\right)\mathbf{i} + \left(F_{n+1}^{(r)} + F_{n+3}^{(r)}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.1 GFq_n kuaterniyonunu, Lucas sayılar cinsinden

$$GFq_n = L_n\mathbf{i} + L_{n+2}\mathbf{k} \quad (3.12)$$

biçiminde ifade edilir.

İspat. Denklem (3.11)'de $r = 1$ alınırsa, ispat tamamlanır. ■

GFq_n 'yi aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz:

$$GFq_n = L_n \mathbf{i} + (F_n + 3F_{n+1}) \mathbf{k}. \quad (3.13)$$

Gerçekten,

$$\begin{aligned} GFq_n^{(1)} &= \left(F_{n+1}^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} \right) \mathbf{i} + \left(F_{n+1}^{(1)} + F_{n+3}^{(1)} \right) \mathbf{k} \\ GFq_n &= (F_{n+1} + F_{n-1}) \mathbf{i} + (F_{n+1} + F_{n+3}) \mathbf{k} \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1}) \mathbf{i} + (F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+1}) \mathbf{k} \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1}) \mathbf{i} + (F_{n+1} + F_{n+1} + F_{n+1} + F_n) \mathbf{k} \\ &= L_n \mathbf{i} + (F_n + 3F_{n+1}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.5 $r \in \mathbb{N}$ ve yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun elemanları için rekürans bağıntısı

$$GFq_{n+1}^{(r)} = L_r GFq_n^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{n-1}^{(r)} \quad (3.14)$$

dir.

İspat. Denklem (3.10)'u uygulayarak

$$\begin{aligned} GFq_{n+1}^{(r)} &= \frac{(\theta^r)^{n+1} a - (\vartheta^r)^{n+1} b + \mathbf{i} \left((\theta^r)^{n+1} c - (\vartheta^r)^{n+1} d \right)}{\theta^r - \vartheta^r} \\ &= \frac{(\theta^r)^n \theta^r a - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n \theta^r c - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\ &= \frac{(\theta^r)^n \theta^r a - (\vartheta^r)^n \theta^r b + (\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b}{\theta^r - \vartheta^r} \\ &\quad + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n \theta^r c - (\vartheta^r)^n \theta^r d + (\vartheta^r)^n \theta^r d - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\ &= \frac{\theta^r \left((\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b \right) + (\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b}{\theta^r - \vartheta^r} \\ &\quad + \mathbf{i} \left(\frac{\theta^r \left((\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d \right) + (\vartheta^r)^n \theta^r d - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta^r \left(\frac{((\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b) + \mathbf{i}((\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d)}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&\quad + \frac{((\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b + \mathbf{i}((\vartheta^r)^n \theta^r d - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d))}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= \theta^r GFq_n^{(r)} + \vartheta^r GFq_n^{(r)} - \vartheta^r GFq_n^{(r)} \\
&\quad + \frac{((\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b + \mathbf{i}((\vartheta^r)^n \theta^r d - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d))}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= (\theta^r + \vartheta^r) GFq_n^{(r)} - \vartheta^r \left(\frac{((\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b) + \mathbf{i}((\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d)}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&\quad + \frac{((\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b + \mathbf{i}((\vartheta^r)^n \theta^r d - (\vartheta^r)^n \vartheta^r d))}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= L_r GFq_n^{(r)} + \frac{(\vartheta^r)^n \vartheta^r b - (\theta^r)^n \vartheta^r a - \mathbf{i}(\theta^r)^n \vartheta^r c + \mathbf{i}(\vartheta^r)^n \vartheta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&\quad + \frac{(\vartheta^r)^n \theta^r b - (\vartheta^r)^n \vartheta^r b + \mathbf{i}(\vartheta^r)^n \theta^r d - \mathbf{i}(\vartheta^r)^n \vartheta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= L_r GFq_n^{(r)} + \frac{- (\theta^r)^n \vartheta^r a + (\vartheta^r)^n \theta^r b - \mathbf{i}(\theta^r)^n \vartheta^r c + \mathbf{i}(\vartheta^r)^n \theta^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= L_r GFq_n^{(r)} \\
&\quad + \frac{- (\theta^r)^n (-\theta^{-1})^r a + (\vartheta^r)^n (-\vartheta^{-1})^r b - \mathbf{i}(\theta^r)^n (-\theta^{-1})^r c + \mathbf{i}(\vartheta^r)^n (-\vartheta^{-1})^r d}{\theta^r - \vartheta^r} \\
&= L_r GFq_n^{(r)} + (-1)^{r+1} \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{(\theta^r)^{n-1} a - (\vartheta^r)^{n-1} b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{n-1} c - (\vartheta^r)^{n-1} d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \\
&= L_r GFq_n^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{n-1}^{(r)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6 *Aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:*

$$GFq_{-n}^{(r)} = (-1)^{nr} \left(\frac{a(\vartheta^r)^n - b(\theta^r)^n}{\theta - \vartheta} + \mathbf{i} \left(\frac{c(\vartheta^r)^n - d(\theta^r)^n}{\theta - \vartheta} \right) \right), \quad (3.15)$$

$$GFq_{-n}^{(-r)} = (-1)^{r-1} GFq_n^{(r)}, \quad (3.16)$$

$$GFq_n^{(-r)} = (-1)^{r-1} GFq_{-n}^{(r)}. \quad (3.17)$$

İspat. Denklem (3.10)'u kullanarak;

$$\begin{aligned}
GFq_{-n}^{(r)} &= \frac{(\theta^r)^{-n} a - (\vartheta^r)^{-n} b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{-n} c - (\vartheta^r)^{-n} d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&= \frac{(\theta^{-1})^{nr} a - (\vartheta^{-1})^{nr} b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^{-1})^{nr} c - (\vartheta^{-1})^{nr} d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&= \frac{(-\vartheta)^{nr} a - (-\theta)^{nr} b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(-\vartheta)^{nr} c - (-\theta)^{nr} d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \\
&= (-1)^{nr} \left(\frac{(\vartheta^r)^n a - (\theta^r)^n b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\vartheta^r)^n c - (\theta^r)^n d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
GFq_{-n}^{(-r)} &= \frac{(\theta^{-r})^{-n} a - (\vartheta^{-r})^{-n} b}{\theta^{-r} - \vartheta^{-r}} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^{-r})^{-n} c - (\vartheta^{-r})^{-n} d}{\theta^{-r} - \vartheta^{-r}} \right) \\
&= \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{(\theta^{-1})^r - (\vartheta^{-1})^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{(\theta^{-1})^r - (\vartheta^{-1})^r} \right) \\
&= \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{(-\vartheta)^r - (-\theta)^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{(-\vartheta)^r - (-\theta)^r} \right) \\
&= \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{((\theta)^r - (\vartheta)^r) (-1)^{r+1}} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{(-1)^{r+1} ((\theta)^r - (\vartheta)^r)} \right) \\
&= (-1)^{r-1} \frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{(\theta)^r - (\vartheta)^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{(\theta)^r - (\vartheta)^r} \right) \\
&= (-1)^{r-1} GFq_n^{(r)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
GFq_n^{(-r)} &= \frac{(\theta^{-r})^n a - (\vartheta^{-r})^n b}{\theta^{-r} - \vartheta^{-r}} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^{-r})^n c - (\vartheta^{-r})^n d}{\theta^{-r} - \vartheta^{-r}} \right) \\
&= \frac{(\theta^{-1})^{nr} a - (\vartheta^{-1})^{nr} b}{(\theta^{-1})^r - (\vartheta^{-1})^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^{-1})^{nr} c - (\vartheta^{-1})^{nr} d}{(\theta^{-1})^r - (\vartheta^{-1})^r} \right) \\
&= \frac{(-\vartheta)^{nr} a - (-\theta)^{nr} b}{(-\vartheta)^r - (-\theta)^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(-\vartheta)^{nr} c - (-\theta)^{nr} d}{(-\vartheta)^r - (-\theta)^r} \right) \\
&= \frac{(-1)^{nr} ((\vartheta^r)^n a - (\theta^r)^n b)}{(-1)^{r+1} ((\theta)^r - (\vartheta)^r)} + \mathbf{i} \left(\frac{(-1)^{nr} ((\vartheta^r)^n c - (\theta^r)^n d)}{(-1)^{r+1} ((\theta)^r - (\vartheta)^r)} \right) \\
&= (-1)^{r-1} \left((-1)^{nr} \left(\frac{(\vartheta^r)^n a - (\theta^r)^n b}{(\theta)^r - (\vartheta)^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\vartheta^r)^n c - (\theta^r)^n d}{(\theta)^r - (\vartheta)^r} \right) \right) \right) \\
&= (-1)^{r-1} GFq_{-n}^{(r)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi de yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarını içeren bazı toplam özelliklerini verelim.

Teorem 3.7 $r \in \mathbb{N}$ için, $\varphi_n = (-1)^{r+1} + (-1)^r L_r - F_n^{(r)} + (-1)^r F_{n-1}^{(r)} + (-1)^r F_{n+1}^{(r)} - F_{n+2}^{(r)} + 1$ ve $\psi_n = (-1)^r + L_{2r} + (-1)^{r+1} L_r + (-1)^r F_{n+1}^{(r)} - F_{n+2}^{(r)} + (-1)^r F_{n+3}^{(r)} - F_{n+4}^{(r)} + 1$ olmak üzere, yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının sonlu toplamı

$$\sum_{s=0}^n GFq_s^{(r)} = \frac{\varphi_n \mathbf{i} + \psi_n \mathbf{k}}{1 - L_r + (-1)^r} \quad (3.18)$$

olarak ifade edilir.

İspat. Denklem (3.11)'i uygulayarak ve bazı hesaplamalar yaparak

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^n GFq_s^{(r)} &= \sum_{s=0}^n \left((F_{s+1}^{(r)} + F_{s-1}^{(r)}) \mathbf{i} + (F_{s+1}^{(r)} + F_{s+3}^{(r)}) \mathbf{k} \right) \\
&= \sum_{s=0}^n (F_{s+1}^{(r)} + F_{s-1}^{(r)}) \mathbf{i} + \sum_{s=0}^n (F_{s+1}^{(r)} + F_{s+3}^{(r)}) \mathbf{k} \\
&= \sum_{s=0}^n \left(\frac{(\theta^r)^{s+1} - (\vartheta^r)^{s+1}}{\theta^r - \vartheta^r} + \frac{(\theta^r)^{s-1} - (\vartheta^r)^{s-1}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \sum_{s=0}^n \left(\frac{(\theta^r)^{s+1} - (\vartheta^r)^{s+1}}{\theta^r - \vartheta^r} + \frac{(\theta^r)^{s+3} - (\vartheta^r)^{s+3}}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \mathbf{k} \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{s=0}^n (\theta^r)^{s+1} - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^{s+1} + \sum_{s=0}^n (\theta^r)^{s-1} - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^{s-1} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{s=0}^n (\theta^r)^{s+1} - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^{s+1} + \sum_{s=0}^n (\theta^r)^{s+3} - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^{s+3} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\theta^r \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - \vartheta^r \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s + \theta^{-r} \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - \vartheta^{-r} \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\theta^r \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - \vartheta^r \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s + \theta^{3r} \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - \vartheta^{3r} \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - \theta^r} \left(\frac{\theta^r (1 - (\theta^r)^{n+1})}{+\theta^{-r} (1 - (\theta^r)^{n+1})} \right) - \frac{1}{1 - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^r (1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{+\vartheta^{-r} (1 - (\vartheta^r)^{n+1})} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{1}{1 - \theta^r} \left(\frac{\theta^r (1 - (\theta^r)^{n+1})}{+\theta^{3r} (1 - (\theta^r)^{n+1})} \right) - \frac{1}{1 - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^r (1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{+\vartheta^{3r} (1 - (\vartheta^r)^{n+1})} \right) \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)} \left(\frac{\theta^r (1 - \vartheta^r) (1 - (\theta^r)^{n+1})}{+\theta^{-r} (1 - \vartheta^r) (1 - (\theta^r)^{n+1})} \right) \\
&\quad - \frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)} \left(\frac{\vartheta^r (1 - \theta^r) (1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{+\vartheta^{-r} (1 - \theta^r) (1 - (\vartheta^r)^{n+1})} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)} \left(\frac{\theta^r (1 - \vartheta^r) (1 - (\theta^r)^{n+1})}{+\theta^{3r} (1 - \vartheta^r) (1 - (\theta^r)^{n+1})} \right) \\
&\quad - \frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)} \left(\frac{\vartheta^r (1 - \theta^r) (1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{+\vartheta^{3r} (1 - \theta^r) (1 - (\vartheta^r)^{n+1})} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{\theta^r - (\theta^r)^{n+2} - (\theta\vartheta)^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^{n+1}}{(1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{\theta^{-r} - (\theta^r)^n - \theta^{-r}\vartheta^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^{n-1}}{(1 - \theta^r) (1 - \vartheta^r)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^r - (\vartheta^r)^{n+2} - (\vartheta\theta)^r + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^{n+1}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
& -\frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^{-r} - (\vartheta^r)^n - \vartheta^{-r}\theta^r + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^{n-1}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r - (\theta^r)^{n+2} - (\theta\vartheta)^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^{n+1}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^{3r} - (\theta^r)^{n+4} - (\theta\vartheta)^r \theta^{2r} + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^{n+3}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
& -\frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^r - (\vartheta^r)^{n+2} - (\theta\vartheta)^r + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^{n+1}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
& -\frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\vartheta^{3r} - (\vartheta^r)^{n+4} - (\theta\vartheta)^r \vartheta^{2r} + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^{n+3}}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\
= & \frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{\theta^r - (\theta^r)^{n+2} - (-1)^r + (-1)^r (\theta^r)^{n+1}}{-\vartheta^r + (\vartheta^r)^{n+2} + (-1)^r - (-1)^r (\vartheta^r)^{n+1}} \right) \\
& +\frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{(-\vartheta)^r - (\theta^r)^n - (-\vartheta)^r \vartheta^r + (-1)^r (\theta^r)^{n-1}}{-(-\theta)^r + (\vartheta^r)^n + (-\theta)^r \theta^r - (-1)^r (\vartheta^r)^{n-1}} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{\theta^r - (\theta^r)^{n+2} - (-1)^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^{n+1}}{-\vartheta^r + (\vartheta^r)^{n+2} + (-1)^r - (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^{n+1}} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{\theta^{3r} - (\theta^r)^{n+4} - (-1)^r \theta^{2r} + (-1)^r (\theta^r)^{n+3}}{-\vartheta^{3r} + (\vartheta^r)^{n+4} + (-1)^r \vartheta^{2r} - (-1)^r (\vartheta^r)^{n+3}} \right) \\
= & \frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{(\theta^r - \vartheta^r) + (-1)^r ((\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1})}{-((\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2})} \right) \\
& +\frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\frac{(-1)^{r+1} (\theta^r - \vartheta^r) + (-1)^r (\theta^{2r} - \vartheta^{2r})}{+(-1)^r ((\theta^r)^{n-1} - (\vartheta^r)^{n-1}) - ((\theta^r)^n - (\vartheta^r)^n)} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r)(1 - L_r + (-1)^r)} \left(\frac{(\theta^r - \vartheta^r) - ((\theta^r)^{n+2} - (\vartheta^r)^{n+2})}{+(-1)^r ((\theta^r)^{n+1} - (\vartheta^r)^{n+1})} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\frac{(-1)^{r+1} (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) - ((\theta^r)^{n+4} - (\vartheta^r)^{n+4})}{+(\theta^{3r} - \vartheta^{3r}) + (-1)^r ((\theta^r)^{n+3} - (\vartheta^r)^{n+3})} \right) \\
= & \frac{\mathbf{i}}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\frac{1 + (-1)^r F_{n+1}^{(r)} - F_{n+2}^{(r)}}{+(-1)^{r+1} + (-1)^r L_r + (-1)^r F_{n-1}^{(r)} - F_n^{(r)}} \right) \\
& +\frac{\mathbf{k}}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\frac{1 + (-1)^r F_{n+1}^{(r)} - F_{n+2}^{(r)}}{+(-1)^{r+1} L_r - F_{n+4}^{(r)} + L_{2r} + (-1)^r + (-1)^r F_{n+3}^{(r)}} \right)
\end{aligned}$$

dır. Böylece sonuç elde edilmiş olur. ■

Sonuç 3.2 $n \geq 0$ için Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının sonlu toplamı

$$\sum_{s=0}^n GFq_s = GFq_{n+2} - (\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$$

biçimindedir.

İspat. Denklem (3.18)'de $r = 1$ alalım. Yani,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n GFq_s &= \frac{\mathbf{i}}{1-1-1} (1 - F_{n+1} - F_{n+2} - 1 - 1 - F_{n-1} - F_n) \\ &\quad + \frac{\mathbf{k}}{1-1-1} (1 + -F_{n+1} - F_{n+2} - 1 - F_{n+4} + 4 - 1 - F_{n+3}) \\ &= (F_{n+1} + F_{n+2} + F_n + F_{n-1} - 1)\mathbf{i} + (F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} - 4)\mathbf{k} \\ &= (F_{n+3} + F_{n+1} - 1)\mathbf{i} + (F_{n+3} + F_{n+5} - 4)\mathbf{k} \\ &= (F_{n+3} + F_{n+1})\mathbf{i} + (F_{n+3} + F_{n+5})\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \\ &= GFq_{n+2} - (\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 3.8 $a = 1 + \theta^r \mathbf{i} + \theta^{2r} \mathbf{j} + \theta^{3r} \mathbf{k}$, $b = 1 + \vartheta^r \mathbf{i} + \vartheta^{2r} \mathbf{j} + \vartheta^{3r} \mathbf{k}$, $c = \theta^{-r} + \mathbf{i} + \theta^r \mathbf{j} + \theta^{2r} \mathbf{k}$ ve $d = \vartheta^{-r} + \mathbf{i} + \vartheta^r \mathbf{j} + \vartheta^{2r} \mathbf{k}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$a - b = (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k}), \quad (3.19)$$

$$c - d = (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} + \mathbf{j} + L_r \mathbf{k}), \quad (3.20)$$

$$a\vartheta^r - b\theta^r = (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^r \mathbf{j} + (-1)^r L_r \mathbf{k} - 1), \quad (3.21)$$

$$c\vartheta^r - d\theta^r = (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} L_r - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}), \quad (3.22)$$

$$(a - b) - (a\vartheta^r - b\theta^r) = (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + (L_r - (-1)^r) \mathbf{j} + L_{2r} \mathbf{k} + (1 - L_r) (-1)^r \mathbf{k} + 1), \quad (3.23)$$

ve

$$(c - d) - (c\vartheta^r - d\theta^r) = (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} + (-1)^r L_r + \mathbf{j} + \mathbf{i} + (L_r + (-1)^{r+1}) \mathbf{k}). \quad (3.24)$$

İspat. a, b, c ve d ifadelerinden

$$\begin{aligned}
a - b &= (1 + \theta^r \mathbf{i} + \theta^{2r} \mathbf{j} + \theta^{3r} \mathbf{k}) - (1 + \vartheta^r \mathbf{i} + \vartheta^{2r} \mathbf{j} + \vartheta^{3r} \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{i} + (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) \mathbf{j} + (\theta^{3r} - \vartheta^{3r}) \mathbf{k} \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + (\theta^r + \vartheta^r) \mathbf{j} + (\theta^{2r} + \vartheta^{2r} + (\theta\vartheta)^r) \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c - d &= (\theta^{-r} + \mathbf{i} + \theta^r \mathbf{j} + \theta^{2r} \mathbf{k}) - (\vartheta^{-r} + \mathbf{i} + \vartheta^r \mathbf{j} + \vartheta^{2r} \mathbf{k}) \\
&= (\theta^{-r} - \vartheta^{-r}) + (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{j} + (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) \mathbf{k} \\
&= ((-\vartheta)^r - (-\theta)^r) + (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{j} + (\theta^r - \vartheta^r) (\theta^r + \vartheta^r) \mathbf{k} \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} + \mathbf{j} + L_r \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\vartheta^r - b\theta^r &= (1 + \theta^r \mathbf{i} + \theta^{2r} \mathbf{j} + \theta^{3r} \mathbf{k}) \vartheta^r - (1 + \vartheta^r \mathbf{i} + \vartheta^{2r} \mathbf{j} + \vartheta^{3r} \mathbf{k}) \theta^r \\
&= (\vartheta^r - \theta^r) + (\theta\vartheta)^r (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{j} + (\theta\vartheta)^r (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) \mathbf{k} \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) (-1 + (-1)^r \mathbf{j} + (-1)^r (\theta^r + \vartheta^r) \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^r \mathbf{j} - 1 + (-1)^r L_r \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\vartheta^r - d\theta^r &= (\theta^{-r} + \mathbf{i} + \theta^r \mathbf{j} + \theta^{2r} \mathbf{k}) \vartheta^r - (\vartheta^{-r} + \mathbf{i} + \vartheta^r \mathbf{j} + \vartheta^{2r} \mathbf{k}) \theta^r \\
&= (\theta^{-r} \vartheta^r - \theta^r \vartheta^{-r}) + (\vartheta^r - \theta^r) \mathbf{i} + (\theta\vartheta)^r (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{k} \\
&= (-1)^{r+1} (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) - (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{i} + (-1)^r (\theta^r - \vartheta^r) \mathbf{k} \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) ((\theta^r + \vartheta^r) (-1)^{r+1} - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} L_r - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

(3.19) ve (3.21) denklemleri uygulayarak

$$\begin{aligned}
(a - b) - (a\vartheta^r - b\theta^r) &= (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k}) \\
&\quad - (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^r \mathbf{j} - 1 + (-1)^r L_r \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) (\mathbf{i} + (L_r - (-1)^r) \mathbf{j} + L_{2r} \mathbf{k} + (1 - L_r) (-1)^r \mathbf{k} + 1)
\end{aligned}$$

ve (3.20) ve (3.22) denklemleri kullanarak,

$$\begin{aligned}
(c - d) - (c\vartheta^r - d\theta^r) &= (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} + \mathbf{j} + L_r \mathbf{k}) \\
&\quad - (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} L_r - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}) \\
&= (\theta^r - \vartheta^r) ((-1)^{r+1} + (-1)^r L_r + \mathbf{j} + \mathbf{i} + (L_r + (-1)^{r+1}) \mathbf{k})
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.9 $\gamma = 1 + \mathbf{i} + ((-1)^{r+1} + L_r) \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^{r+1} L_r + (-1)^r) \mathbf{k}$ ve $\delta = (-1)^{r+1} + (-1)^r L_r + \mathbf{j} + \mathbf{i} + (L_r + (-1)^{r+1}) \mathbf{k}$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\sum_{s=0}^n GFq_s^{(r)} = \frac{(-1)^r GFq_n^{(r)} - GFq_{n+1}^{(r)}}{1 - L_r + (-1)^r} + \frac{\gamma + \delta \mathbf{i}}{1 - L_r + (-1)^r} \quad (3.25)$$

dir.

İspat. Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^n GFq_s^{(r)} &= \sum_{s=0}^n \left(\frac{(\theta^r)^s a - (\vartheta^r)^s b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^s c - (\vartheta^r)^s d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{s=0}^n (\theta^r)^s a - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s b + \mathbf{i} \left(\sum_{s=0}^n (\theta^r)^s c - \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s d \right) \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(a \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - b \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s + \mathbf{i} \left(c \sum_{s=0}^n (\theta^r)^s - d \sum_{s=0}^n (\vartheta^r)^s \right) \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(a \frac{(1 - (\theta^r)^{n+1})}{1 - \theta^r} - b \frac{(1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{1 - \vartheta^r} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(c \frac{(1 - (\theta^r)^{n+1})}{1 - \theta^r} - d \frac{(1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{1 - \vartheta^r} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a(1 - \vartheta^r)(1 - (\theta^r)^{n+1}) - b(1 - \theta^r)(1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c(1 - \vartheta^r)(1 - (\theta^r)^{n+1}) - d(1 - \theta^r)(1 - (\vartheta^r)^{n+1})}{(1 - \theta^r)(1 - \vartheta^r)} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &a(1 - (\theta^r)^{n+1} - \vartheta^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^n) \\ &- b(1 - (\vartheta^r)^{n+1} - \theta^r + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^n) \end{aligned} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &c(1 - (\theta^r)^{n+1} - \vartheta^r + (\theta\vartheta)^r (\theta^r)^n) \\ &- d(1 - (\vartheta^r)^{n+1} - \theta^r + (\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^n) \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &a - a(\theta^r)^{n+1} - a\vartheta^r + a(\theta\vartheta)^r (\theta^r)^n \\ &- b + b(\vartheta^r)^{n+1} + b\theta^r - b(\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^n \end{aligned} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &c - c(\theta^r)^{n+1} - c\vartheta^r + c(\theta\vartheta)^r (\theta^r)^n \\ &- d + d(\vartheta^r)^{n+1} + d\theta^r - d(\theta\vartheta)^r (\vartheta^r)^n \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &(a - b) + (\theta\vartheta)^r (a(\theta^r)^n - b(\vartheta^r)^n) \\ &- (a\vartheta^r - b\theta^r) - (a(\theta^r)^{n+1} - b(\vartheta^r)^{n+1}) \end{aligned} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \left(\begin{aligned} &(c - d) + (\theta\vartheta)^r ((\theta^r)^n c - d(\vartheta^r)^n) \\ &- (c\vartheta^r - d\theta^r) - (c(\theta^r)^{n+1} - d(\vartheta^r)^{n+1}) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r \theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} (-1)^r ((\theta^r)^n c - d (\vartheta^r)^n) \\ + \mathbf{i} (-1)^r ((\theta^r)^n c - d (\vartheta^r)^n) \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r \theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} (a (\theta^r)^{n+1} - b (\vartheta^r)^{n+1}) \\ + \mathbf{i} (c (\theta^r)^{n+1} - d (\vartheta^r)^{n+1}) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r \theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} (a - b) - (a \vartheta^r - b \theta^r) \\ + \mathbf{i} ((c - d) - (c \vartheta^r - d \theta^r)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{(-1)^r GFq_n^{(r)} - GFq_{n+1}^{(r)}}{1 - L_r + (-1)^r} \\
&\quad + \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r \theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} (a - b) - (a \vartheta^r - b \theta^r) \\ + \mathbf{i} ((c - d) - (c \vartheta^r - d \theta^r)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{(-1)^r GFq_n^{(r)} - GFq_{n+1}^{(r)}}{1 - L_r + (-1)^r} \\
&\quad + \frac{1}{1 - L_r + (-1)^r} \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{i} + ((-1)^{r+1} + L_r) \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^{r+1} L_r + (-1)^r) \mathbf{k} \\ + \mathbf{i} ((-1)^{r+1} + (-1)^r L_r + \mathbf{j} + \mathbf{i} + (L_r + (-1)^{r+1}) \mathbf{k}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

BÖLÜM 4

YÜKSEK MERTEBEDEN GAUSS FİBONACCI KUATERNİYONLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE BAZI MATRİS GÖSTERİMLERİ

Tezimizin bu bölümünde $GFq_n^{(r)}$ nin üreteç fonksiyonları ve bazı matris gösterimleri verilecektir. Bu bölümdeki sonuçlar Kızılateş ve Yachani tarafından [17] elde edilmiştir.

4.1 ÜRETEÇ FONKSİYONLARI

Şimdi yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu verelim.

Teorem 4.1 $r \in \mathbb{N}$ için, $\mathfrak{S} = \mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k} - ((-1)^r \mathbf{j} + (-1)^r L_r \mathbf{k} - 1) t$ ve $\tau = (-1)^{r+1} + \mathbf{j} + L_r \mathbf{k} - ((-1)^{r+1} L_r - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}) t$ olmak üzere, yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$GFq^{(r)}(t) = \frac{\mathfrak{S} + \mathbf{i}\tau}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilir.

İspat.

$$GFq^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} t^n$$

$GFq_n^{(r)}$ 'nin üreteç fonksiyonu olsun. Şimdi Teorem 3.3'ü ve Lemma 3.11'i uygularsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) t^n \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n a t^n \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n b t^n \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n c t^n \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n d t^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} a \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n \\ -b \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \begin{pmatrix} c \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n \\ -d \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a}{1 - \theta^r t} - \frac{b}{1 - \vartheta^r t} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c}{1 - \theta^r t} - \frac{d}{1 - \vartheta^r t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a(1 - \vartheta^r t) - b(1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c(1 - \vartheta^r t) - d(1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a - a\vartheta^r t - b + b\theta^r t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c - c\vartheta^r t - d + d\theta^r t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \right) \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{(a - b) - (a\vartheta^r - b\theta^r) t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{(c - d) - (c\vartheta^r - d\theta^r) t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i} + L_r \mathbf{j} + (L_{2r} + (-1)^r) \mathbf{k} - ((-1)^r \mathbf{j} - \mathbf{1} + (-1)^r L_r \mathbf{k}) t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \\
&\quad + \mathbf{i} \left(\frac{(\mathbf{j} + (-1)^{r+1} + L_r \mathbf{k} - ((-1)^{r+1} L_r - \mathbf{i} + (-1)^r \mathbf{k}) t)}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \right) \\
&= \frac{\mathfrak{S} + \mathbf{i} \tau}{1 - L_r t + (-1)^r t^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur. ■

Sonuç 4.1 Gauss Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$GFq(t) = \frac{GFq_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{i}) t}{1 - t - t^2}$$

şeklindedir.

İspat. Denklem (4.1)'de $r = 1$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
GFq(t) &= \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} + (3 - 1) \mathbf{k}) - (-\mathbf{j} - 1 - \mathbf{k}) t}{1 - t - t^2} + \mathbf{i} \left[\frac{(\mathbf{j} + 1 + \mathbf{k}) - (1 - \mathbf{i} - \mathbf{k}) t}{1 - t - t^2} \right] \\
&= \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + (\mathbf{j} + 1 + \mathbf{k}) t}{1 - t - t^2} + \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j}) + (-\mathbf{i} - 1 - \mathbf{j}) t}{1 - t - t^2} \\
&= \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j}) + (\mathbf{j} + 1 + \mathbf{k} - \mathbf{i} - 1 - \mathbf{j}) t}{1 - t - t^2} \\
&= \frac{(2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{k} - \mathbf{i}) t}{1 - t - t^2} \\
&= \frac{GFq_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{i}) t}{1 - t - t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2 $r \geq 1$ için, $\mu = 1 + (-1)^{r+1} + (-1)^r L_r t$ ve $v = 1 + L_{2r} + (-1)^r + (-1)^{r+1} L_r t$ olmak üzere yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} t^n = \frac{\mu \mathbf{i} + v \mathbf{k}}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \quad (4.2)$$

biçimindedir.

İspat. Denklem (3.11) ve yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülünden

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((F_{n+1}^{(r)} + F_{n-1}^{(r)}) \mathbf{i} + (F_{n+1}^{(r)} + F_{n+3}^{(r)}) \mathbf{k} \right) t^n \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n-1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n-1} t^n \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n+3} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n+3} t^n \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\theta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - \vartheta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n + \theta^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - \vartheta^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\theta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - \vartheta^r \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n + \theta^{3r} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - \vartheta^{3r} \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r}{1 - \theta^r t} - \frac{\vartheta^r}{1 - \vartheta^r t} + \frac{\theta^{-r}}{1 - \theta^r t} - \frac{\vartheta^{-r}}{1 - \vartheta^r t} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r}{1 - \theta^r t} - \frac{\vartheta^r}{1 - \vartheta^r t} + \frac{\theta^{3r}}{1 - \theta^r t} - \frac{\vartheta^{3r}}{1 - \vartheta^r t} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r (1 - \vartheta^r t) - \vartheta^r (1 - \theta^r t) + \theta^{-r} (1 - \vartheta^r t) - \vartheta^{-r} (1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r (1 - \vartheta^r t) - \vartheta^r (1 - \theta^r t) + \theta^{3r} (1 - \vartheta^r t) - \vartheta^{3r} (1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r - (\theta\vartheta)^r t - \vartheta^r + (\theta\vartheta)^r t + \theta^{-r} - \theta^{-r} \vartheta^r t - \vartheta^{-r} + \vartheta^{-r} \theta^r t}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{\theta^r - (\theta\vartheta)^r t - \vartheta^r + (\theta\vartheta)^r t + \theta^{3r} - (\theta\vartheta)^r \theta^{2r} t - \vartheta^{3r} + (\theta\vartheta)^r \vartheta^{2r} t}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{(\theta^r - \vartheta^r) + (\theta^{-r} - \vartheta^{-r}) + (\vartheta^{-r} \theta^r - \theta^{-r} \vartheta^r) t}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{(\theta^r - \vartheta^r) + (\theta^{3r} - \vartheta^{3r}) + (-1)^{r+1} (\theta^{2r} - \vartheta^{2r}) t}{(1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \\
&= \frac{\mathbf{i}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \left((\theta^r - \vartheta^r) + ((-\vartheta)^r - (-\theta)^r) \right. \\
&\quad \left. + ((-\theta)^r \theta^r - (-\vartheta)^r \vartheta^r) t \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \left((\theta^r - \vartheta^r) + (\theta^r - \vartheta^r) (\theta^{2r} + \vartheta^{2r} + (\theta\vartheta)^r) \right. \\
&\quad \left. + (\theta^r - \vartheta^r) (-1)^{r+1} (\theta^r + \vartheta^r) t \right) \\
&= \frac{\mathbf{i} (\theta^r - \vartheta^r)}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \left(1 + (-1)^{r+1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^r (\theta^r + \vartheta^r) t \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k} (\theta^r - \vartheta^r)}{(\theta^r - \vartheta^r) (1 - \theta^r t) (1 - \vartheta^r t)} \left(1 + (\theta^2 + \vartheta^2 + (\theta\vartheta)^r) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{r+1} (\theta^r + \vartheta^r) t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{i}}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} (1 + (-1)^{r+1} + (-1)^r L_r t) \\
&\quad + \frac{\mathbf{k}}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} (1 + L_{2r} + (-1)^r + (-1)^{r+1} L_r t)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.2 Gauss Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$GFq(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GFq_n = \frac{(2-t)\mathbf{i} + (3+t)\mathbf{k}}{1-t-t^2}$$

biçimindedir.

İspat. Denklem (4.2)'de $r = 1$ alınrsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GFq_n t^n &= \left(\frac{1+1-t}{1-t-t^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{1+3-1+t}{1-t-t^2} \right) \mathbf{k} \\
&= \frac{(2-t)\mathbf{i} + (3+t)\mathbf{k}}{1-t-t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 $n, m \in \mathbb{Z}$ ve $r \in \mathbb{N}$ için yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonu $GFq_{n+m}^{(r)}$ 'nin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} GFq_{n+m}^{(r)} t^n = \frac{GFq_m^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{m-1}^{(r)} t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \quad (4.3)$$

şeklindedir.

İspat. Denklem (3.10)'u kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GFq_{n+m}^{(r)} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\theta^r)^{n+m} a - (\vartheta^r)^{n+m} b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^{n+m} c - (\vartheta^r)^{n+m} d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) t^n \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n+m} a - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n+m} b \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^{n+m} c - \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^{n+m} d \right) \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} a (\theta^r)^m \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - b (\vartheta^r)^m \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(c (\theta^r)^m \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n t^n - d (\vartheta^r)^m \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n t^n \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a(\theta^r)^m}{1 - \theta^r t} - \frac{b(\vartheta^r)^m}{1 - \vartheta^r t} \right) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c(\theta^r)^m}{1 - \theta^r t} - \frac{d(\vartheta^r)^m}{1 - \vartheta^r t} \right) \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a(\theta^r)^m (1 - \vartheta^r t) - b(\vartheta^r)^m (1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c(\theta^r)^m (1 - \vartheta^r t) - d(\vartheta^r)^m (1 - \theta^r t)}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{a(\theta^r)^m - a(\theta^r)^m \vartheta^r t - b(\vartheta^r)^m + b(\vartheta^r)^m \theta^r t}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(\frac{c(\theta^r)^m - c(\theta^r)^m \vartheta^r t - d(\vartheta^r)^m + d(\vartheta^r)^m \theta^r t}{(1 - \theta^r t)(1 - \vartheta^r t)} \right) \\
&= \frac{1}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \left(\frac{a(\theta^r)^m - b(\vartheta^r)^m}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{c(\theta^r)^m - d(\vartheta^r)^m}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \left(\frac{(a(\theta^r)^m \vartheta^r - b(\vartheta^r)^m \theta^r) + \mathbf{i}(c(\theta^r)^m \vartheta^r - d(\vartheta^r)^m \theta^r)}{\theta^r - \vartheta^r} \right) t \\
&= \frac{GFq_m^{(r)}}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} - \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \frac{1}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \\
&\quad \times \left(\begin{array}{l} (\theta\vartheta)^r (a(\theta^r)^{m-1} - b(\vartheta^r)^{m-1}) \\ + \mathbf{i}(\theta\vartheta)^r (c(\theta^r)^{m-1} - d(\vartheta^r)^{m-1}) \end{array} \right) t \\
&= \frac{GFq_m^{(r)}}{1 - L_r t + (-1)^r t^2} \\
&\quad - \frac{1}{(1 - L_r t + (-1)^r t^2)} \frac{1}{(\theta^r - \vartheta^r)} \left(\begin{array}{l} (-1)^r (a(\theta^r)^{m-1} - b(\vartheta^r)^{m-1}) \\ + \mathbf{i}(-1)^r (c(\theta^r)^{m-1} - d(\vartheta^r)^{m-1}) \end{array} \right) t \\
&= \frac{GFq_m^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{m-1}^{(r)} t}{1 - L_r t + (-1)^r t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.3 Gauss Fibonacci kuaterniyonu GFq_{n+m} 'nin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} GFq_{n+m} t^n = \frac{GFq_m + GFq_{m-1} t}{1 - t - t^2}$$

şeklindedir.

İspat. Denklem (4.3)'de $r = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} GFq_{n+m}^{(1)} t^n &= \frac{GFq_m^{(1)} + (-1)^{1+1} GFq_{m-1}^{(1)} t}{1 - L_1 t + (-1)^1 t^2}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}. \\
&= \frac{GFq_m + GFq_{m-1} t}{1 - t - t^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.2 ÜSTEL ÜRETEÇ FONKSİYONU

Teorem 4.4 Yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonu $GFq_n^{(r)}$ 'nin üstel üreteç fonksiyonu $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = \frac{ae^{\theta^r t} - be^{\vartheta^r t} + \mathbf{i}(ce^{\theta^r t} - de^{\vartheta^r t})}{\theta^r - \vartheta^r} \quad (4.4)$$

biçimindedir.

İspat. $GFq_n^{(r)}$ 'nin üstel üreteç fonksiyonu

$$E^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} \frac{t^n}{n!}$$

olsun. Denklem (3.10)'u kullanarak,

$$\begin{aligned} E^{(r)}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} GFq_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\theta^r)^n a - (\vartheta^r)^n b}{\theta^r - \vartheta^r} + \mathbf{i} \left(\frac{(\theta^r)^n c - (\vartheta^r)^n d}{\theta^r - \vartheta^r} \right) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} \left(a \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n \frac{t^n}{n!} - b \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n \frac{t^n}{n!} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} \left(c \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r)^n \frac{t^n}{n!} - d \sum_{n=0}^{\infty} (\vartheta^r)^n \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{\theta^r - \vartheta^r} (ae^{\theta^r t} - be^{\vartheta^r t}) + \frac{\mathbf{i}}{\theta^r - \vartheta^r} (ce^{\theta^r t} - de^{\vartheta^r t}) \\ &= \frac{ae^{\theta^r t} - be^{\vartheta^r t} + \mathbf{i}(ce^{\theta^r t} - de^{\vartheta^r t})}{\theta^r - \vartheta^r} \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

4.3 BAZI MATRİS GÖSTERİMLERİ

Bu kısımda elemanları yüksek mertebeden Gauss Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas sayıları olan iki matrisi aşağıdaki gibi tanımlayalım. $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_n^{(r)} = \begin{pmatrix} GFq_{n+2}^{(r)} & GFq_{n+1}^{(r)} \\ GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

ve

$$P^{(r)} = \begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olsun.

Teorem 4.5 *Aşağıdaki formüller geçerlidir:*

$$W_n^{(r)} = P^{(r)}W_{n-1}^{(r)} \quad (4.5)$$

ve

$$W_n^{(r)} = (P^{(r)})^n W_0^{(r)} \quad (4.6)$$

dir.

İspat. Matris çarpımı ve denklem (3.14)'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} P^{(r)}W_{n-1}^{(r)} &= \begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \\ GFq_n^{(r)} & GFq_{n-1}^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_r GFq_{n+1}^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_n^{(r)} & L_r GFq_n^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{n-1}^{(r)} \\ GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GFq_{n+2}^{(r)} & GFq_{n+1}^{(r)} \\ GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde ederiz. Denklem (4.6)'nın kanıtı n üzerindeki matematiksel tümevarım yoluyla elde edilir. $n = 1$ için denklem (4.6)'nın doğru olduğu açıkça görülür. Denklem (4.6)'nın $n = k$ için geçerli olduğunu varsayalım, o zaman denklem (3.14) ve tümevarım hipotezini kullanarak,

$$\begin{aligned} (P^{(r)})^{k+1} W_0^{(r)} &= \begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} GFq_2^{(r)} & GFq_1^{(r)} \\ GFq_1^{(r)} & GFq_0^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} GFq_2^{(r)} & GFq_1^{(r)} \\ GFq_1^{(r)} & GFq_0^{(r)} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GFq_{k+2}^{(r)} & GFq_{k+1}^{(r)} \\ GFq_{k+1}^{(r)} & GFq_k^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_r GFq_{k+2}^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_{k+1}^{(r)} & L_r GFq_{k+1}^{(r)} + (-1)^{r+1} GFq_k^{(r)} \\ GFq_{k+2}^{(r)} & GFq_{k+1}^{(r)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GFq_{k+3}^{(r)} & GFq_{k+2}^{(r)} \\ GFq_{k+2}^{(r)} & GFq_{k+1}^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla denklem (4.6), $n = k + 1$ için de geçerlidir. Böylece tümevarım tamamlanmış ve istenilen sonuç elde edilmiş olur. ■

Teorem 4.6 Aşağıdaki formüller $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir:

$$GFq_{n+2}^{(r)}GFq_n^{(r)} - \left(GFq_{n+1}^{(r)}\right)^2 \quad (4.7)$$

$$= \frac{(-1)^{nr}}{F_r^2} \begin{bmatrix} ((F_{3r} + F_r) \mathbf{i} + (F_{3r} + F_{5r}) \mathbf{k}) \\ \times ((F_r + (-1)^{r+1} F_r) \mathbf{i} + (F_r + F_{3r}) \mathbf{k}) \\ - (F_{2r} \mathbf{i} + (F_{2r} + F_{4r}) \mathbf{k})^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$GFq_n^{(r)}GFq_{n+2}^{(r)} - \left(GFq_{n+1}^{(r)}\right)^2 \quad (4.8)$$

$$= \frac{(-1)^{nr}}{F_r^2} \begin{bmatrix} ((F_r + (-1)^{r+1} F_r) \mathbf{i} + (F_r + F_{3r}) \mathbf{k}) \\ \times ((F_{3r} + F_r) \mathbf{i} + (F_{3r} + F_{5r}) \mathbf{k}) \\ - (F_{2r} \mathbf{i} + (F_{2r} + F_{4r}) \mathbf{k})^2 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. Denklem (4.7)'nin ispatı için denklem (4.6)'da her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} GFq_{n+2}^{(r)} & GFq_{n+1}^{(r)} \\ GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} GFq_2^{(r)} & GFq_1^{(r)} \\ GFq_1^{(r)} & GFq_0^{(r)} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{nr} \left(GFq_2^{(r)}GFq_0^{(r)} - \left(GFq_1^{(r)}\right)^2 \right) \\ &= \frac{(-1)^{nr}}{F_r^2} \begin{bmatrix} ((F_{3r} + F_r) \mathbf{i} + (F_{3r} + F_{5r}) \mathbf{k}) \\ \times ((F_r + (-1)^{r+1} F_r) \mathbf{i} + (F_r + F_{3r}) \mathbf{k}) \\ - (F_{2r} \mathbf{i} + (F_{2r} + F_{4r}) \mathbf{k})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, yine denklem (4.6)'nın her iki tarafının determinantı alınırsa,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} GFq_{n+2}^{(r)} & GFq_{n+1}^{(r)} \\ GFq_{n+1}^{(r)} & GFq_n^{(r)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} L_r & (-1)^{r+1} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} GFq_2^{(r)} & GFq_1^{(r)} \\ GFq_1^{(r)} & GFq_0^{(r)} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{nr} \left(GFq_0^{(r)}GFq_2^{(r)} - \left(GFq_1^{(r)}\right)^2 \right) \\ &= \frac{(-1)^{nr}}{F_r^2} \begin{bmatrix} ((F_r + (-1)^{r+1} F_r) \mathbf{i} + (F_r + F_{3r}) \mathbf{k}) \\ \times ((F_{3r} + F_r) \mathbf{i} + (F_{3r} + F_{5r}) \mathbf{k}) \\ - (F_{2r} \mathbf{i} + (F_{2r} + F_{4r}) \mathbf{k})^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.4 $n \in \mathbb{N}$ olsun. Gauss Fibonacci kuaterniyonları için birinci Cassini'nin özdeşliği

$$GFq_{n+1}^{(r)}GFq_{n-1}^{(r)} - \left(GFq_n^{(r)}\right)^2 = (-1)^n 5(2 - i)$$

şeklindedir.

Sonuç 4.5 $n \in \mathbb{N}$ olsun. Gauss Fibonacci kuaterniyonları için ikinci Cassini'nin özdeşliği

$$GFq_{n-1}^{(r)}GFq_{n+1}^{(r)} - (GFq_n^{(r)})^2 = (-1)^n 5(2+i)$$

şeklindedir.





BÖLÜM 5

SONUÇ

Tezimizde, bileşenleri yüksek mertebeden Gauss Fibonacci sayıları olan kuaterniyonlar tanımladık. Bu tanım ile literatürde var olan bazı çalışmaları genelleştirmiş olduk. Ayrıca, yüksek mertebeden Gaussian Fibonacci kuaterniyonlarının bazı yeni özelliklerini ve formüllerini elde ettik. r 'nin farklı tam sayı değerleri için, burada elde edilen sonuçlar Gaussian Fibonacci benzeri kuaterniyonlar için elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Berzsenyi G.** (1977) Gaussian Fibonacci Numbers. *Fibonacci Q.* 15(3):233-236.
- [2] **Catarino P. and Ricardo S.** (2022) On Quaternion Gaussian Bronze Fibonacci Numbers, *Ann.* 36(2):129-150.
- [3] **Gauss C.** (1832) *Theoria Residuorum Biquadraticorum. Commentatio prima, Typis Dieterichianis.*
- [4] **Halıcı S.** (2012) On Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 22:321-327.
- [5] **Halıcı S. and Cerda-Morales G.** (2021) On Quaternion-Gaussian Fibonacci Numbers and Their Properties. *An. Stiint. Univ. "Ovidius" Constanta, Ser. Mat.* 29(1):71-82.
- [6] **Halıcı S.** (2021) On Quaternion-Gaussian Lucas Numbers. *Math. Methods Appl. Sci.* 44(9):7601-7606.
- [7] **Halıcı S.** (2013) On complex Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 23:105-112.
- [8] **Hamilton W.R.** (1866) *Elements of Quaternions. London: Longmans, Green, & Company.*
- [9] **Horadam A.F.** (1963) Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. *Am. Math. Mon.* 70(3): 289-291.
- [10] **Jordan J. H.** (1965) Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers. *Fibonacci Q.* 3(4):315-318.
- [11] **Karmaşık sayı** (2025) Wikipedia. Adres: https://tr.wikipedia.org/wiki/Karmaşık_sayı
- [12] **Kızılateş C.** (2019) On Quaternions with Incomplete Fibonacci and Lucas numbers Components. *Util. Math.* 110:263-269.
- [13] **Kızılateş C. and Kone T.** (2021) On Higher Order Fibonacci Quaternions. *J. Anal.* 29: 1071-1082.
- [14] **Kızılateş C. and Kone T.** (2021). On higher order Fibonacci hyper complex numbers. *Chaos Solitons Fractals.* 48,1-6.
- [15] **Kızılateş C. and Kibar I.Y.** (2024) On 3-Parameter Quaternions with Higher Order Generalized Fibonacci Numbers Components. *J. Anal.* 32:1819-1832.
- [16] **Kızılateş C.** (2024) A Different Approach To Gauss Fibonacci Polynomials. *Contrib. Discrete Math.* 19(4):1-10.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [17] **Kızılateş C. and Yachani S. T.** (2025) On higher-order Gaussian Fibonacci quaternions and their properties. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 65(4), 674-688.
- [18] **Koshy T.** (2001) Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Wiley, New York, NY, USA*.
- [19] **Özvatın M.** (2018) Generalized golden-Fibonacci Calculus and Applications. *Master's Thesis, Izmir Institute of Technology, Izmir, Turkey*.
- [20] **Pashaev O.K. and Nalci S.** (2012) Golden quantum oscillator and Binet--Fibonacci calculus. *J. Phys. A: Math. Theor.* 45(1): 015303.
- [21] **Pethe S. and Horadam A.F.** (1986) Generalised Gaussian Fibonacci numbers. *Bull. Aust. Math. Soc.* 33(1):37-48.
- [22] **Polatlı E. and Kesim S.** (2015) On Quaternions with Generalized Fibonacci and Lucas Number Components. *Adv. Difference Equ.* 2015:1-8.
- [23] **Polatlı E.** (2016) A generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 26(2):719-730.
- [24] **Sigler L.** (2003) Fibonacci's Liber Abaci: A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. *Springer Science & Business Media*.
- [25] **Singh P.** (1985) The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval *India*. *Hist. Math.* 12(3):229-244.
- [26] **Terzioğlu N, Kızılateş C. and Du W-S.** (2022) New Properties and Identities for Fibonacci Finite Operator Quaternions. *Mathematics*. 10(10):1719.

ÖZGEÇMİŞ

Samson Tiankum YACHANI, ilk ve orta öğrenimini Gana'nın kuzeyinde Bimbagu'da tamamladıktan sonra 2019 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2023 yılında mezun oldu. Halen 2023 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

