T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

KESİR MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK KOŞULLARI

YÜKSEK LİSANS

Alperen Hasan KOCAĞ

MAYIS-2025
GÜMÜŞHANE

T.C.

GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

KESİR MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK KOŞULLARI

EXISTENCE AND UNIQUENESS CONDITIONS FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

YÜKSEK LİSANS

Alperen Hasan KOCAĞ

MAYIS-2025

GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

KESİR MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK KOŞULLARI

EXISTENCE AND UNIQUENESS CONDITIONS FOR FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

YÜKSEK LİSANS

Alperen Hasan KOCAĞ

Danışman: Doç. Dr. Lale CONA

MAYIS-2025
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum "**Kesir Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemleri için Varlık ve Teklik Koşulları**" isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirtiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

29/05/2025

………………………

Alperen Hasan KOCAĞ

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması için geçen süre zarfında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Doç. Dr. Lale CONA'ya beni her zaman destekleyen ve daima yanımda olan değerli eşime ve aileme teşekkür ederim.

…………………………

Alperen Hasan KOCAĞ

GÜMÜŞHANE –2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Giriş bölümde kesir mertebe diferansiyel denklem kavramı ve uygulama alanları hakkında genel bilgilere yer verilecektir. İkinci bölümde fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, daralma koşulları ve sabit nokta teoremleri ile kesir mertebe türev ve integraller için temel kavramlar ifade edilecektir. Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için varlık ve teklik teoremleri ile ilgili çalışmalara yer verilecektir. İkinci kısımda ise bir kesir mertebe diferansiyel denklem sisteminin çözümünün hangi koşullar altında varlık ve tekliği sağlandığı ortaya konacaktır.

Anahtar Kelimeler: Atangana-Baleanu Caputo kesir mertebe türev, Kesir mertebe türev ve integraller, Kesir mertebe diferansiyel denklem sistemleri, Varlık ve teklik teoremleri.

SUMMARY

In this thesis study, the existence and uniqueness of solutions of fractional order differential equation systems were investigated. In the introduction section, general information about the concept of fractional order differential equation and its application areas will be given. In the second part, basic concepts for functional analysis, differential equations, contraction conditions and fixed point theorems, fractional derivatives and integrals will be explained. The third part consists of two parts. In the first part, studies on existence and uniqueness theorems for some fractional order differential equation systems will be included. In the second part, it will be revealed under what conditions the existence and uniqueness of the solution of a system of fractional order differential equations is ensured.

Keywords: Atangana-Baleanu Caputo fractional derivative, Fractional derivatives and integrals, Systems of fractional differential equations, Existence and uniqueness theorems.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI IV
TEŞEKKÜR V
ÖZET VI
SUMMARY VII
İÇİNDEKİLER VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ X
1.GENEL BİLGİLER 1
2.TEMEL KAVRAMLAR 3
2.1. Fonksiyonel Analizin Temel Kavramları 3
2.2. Diferansiyel Denklemlerin Temel Kavramları 7
2.3. Sabit Nokta Teoremi ile ilgili Temel Kavramlar 18
2.4. Kesir Mertebe Türev ve İntegraller ile İlgili Temel Kavramlar 22
3. BULGULAR 36
3.1. Kesir Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemleri için Yapılan Çalışmalar: 36
3.2. Bir Kesir Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemleri için Sabit Nokta Yaklaşımı ... 39
4.SONUÇ VE ÖNERİLER 47
KAYNAKÇA 48
ÖZ GEÇMİŞ 53

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1 Gama fonksiyonuna ait değişim grafiği 22

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel(gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel(gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\in$	: Elemanıdır
ε	: Epsilon
δ	: Delta
α	: Alfa
β	: Beta
φ	: Fi
Ω	: Omega
ξ	: Ksi
Γ	: Gama
$\exists$	: Öyle ki
$\forall$	: Herhangi
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri

1.GENEL BİLGİLER

Newton ve Leibnitz 17. yüzyıl sonlarında diferansiyel ve integral hesabını ortaya koymuş ve yaptıkları hesaplamalar mühendislik, fizik, kimya, ekonomi gibi pek çok alanda kullanılmıştır. Aynı dönem Leibnitz'in $\frac{1}{2}$. mertebeden türevlerin varlığı ve bunun anlamı üzerine çalıştığı fakat kesir mertebeden türevlerinin uygulama alanlarının kısıtlı olması ve çeşitli problemler nedeni ile çalışmalar yeterince ilerleyememiştir. Liouville'nin kesirli integrasyon tanımını yaptığı çalışmaları dönemin ilk sistematik yöntem ve teknik kullanılan araştırması olarak düşünülebilir. Takip eden dönemde Padovan (1987), Oldham ve Spanier (1974), Miller ve Ross (1993) ve Poldubny (1999) gibi araştırmacılar lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlere dair çalışmalar yayınlamıştır.

Kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin çeşitli bilim ve mühendislik dallarında pek çok fiziksel olayın modellemesinde önemli bir araç olduğu ispatlanmıştır (Bagley ve Torvik, 1983; Catania ve Sorrentino, 2007; Sorrentinos, 2006). Gerçekten, dinamik süreçler, biyolojik bilimler, sinyal işleme, sistem kontrol teorisi, elektrokimya, difüzyon süreçleri ve nokta gecikmeli herhangi bir mertebeden lineer zamanla değişmeyen sistemlerdeki birçok uygulama kesir mertebe diferansiyel denklemler yoluyla çözülebilir (De la Sen, 2011; Magin, 2004; Mainardi, 1997; Metzler ve Klafter, 2000; Oldham, 2010; Ortigueira, 2003; Vinagre vd., 2000). Dahası kesirli hesap homojen olmayan lineer basit ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için çok kullanışlı bir araçtır (Agrawal, 2002; Rabei vd., 2004).

Kesir mertebeden türev hesabında Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Hadamard ve Grunwald-Letnikov ve diğerleri gibi birçok yaklaşım mevcuttur (Poldubny, 1999). Uygulanabilir problemler fiziksel olarak açıklanabilir başlangıç ve sınır şartlarından faydalanmaya izin veren kesir mertebe türevin tanımlamalarını gerektirir. Riemann-Liouville türevi karışık sınır şartları için uygun değildir fakat Caputo kesir mertebe türev bu ihtiyacı karşılar. Bu türevin mevcut olanlara göre sağladığı bazı faydalar, türevin üstel yasayı göz önüne alındığında kullanılabilmesi, üstel fonksiyona dayandığı için tekillikten arındırılmış olmasıdır. Ancak bu bulguda bazı ciddi sorunlar vardır. İlki kullanılan çekirdeğin yerel olmaması, ikincisi ilişkili anti türevin sadece fonksiyonun ve integralin ortalaması olmasıdır. Bu nedenle operatörün kesirli türevden çok bir filtre olduğu sonucuna varılmıştır. Fakat şuna da işaret edilmelidir ki bu yeni bulgunun etrafında büyük başarı ile birçok çalışma yapıldı. Bu türev makine mühendisliğinde, yeraltı suyu çalışmalarında, termal bilimlerde, difüzyon modelinde ve diğerlerinde kullanıldı (Caputo ve Fabrizio, 2015).

Atangana ve Baleanu ise Caputo-Fabrizio'nun belirttiği sorunları gidererek tekil bir çekirdeğe sahip olamadan bir türevin çok daha iyi versiyonunu önerdi. Bu türev genelleştirilmiş Mittag Leffler fonksiyonuna dayanmaktadır. Mittag Lefler fonksiyonunun karmaşık analiz sorusuna cevap vermesi, analitik devam prosedürünü tasvir etmek için tanımlandığı hatırlatılır (Atangana ve Koca, 2016). Atangana-Baleanu iki türev tanımı ortaya konmuştur. Bu türevler, singüler olmayan üstel tipten çekirdeğe sahiptir. Dolayısıyla ilgili türevler modelleme sürecindeki eksiklikleri gidermekte ve pek çok problemin analitik çözümlerine ulaşmasına imkân vermektedir. Bu sebeple uygulama alanları günden güne artmaktadır (Atangana ve Dumitru, 2016; Dokuyucu, 2020; Kucche ve Sutar, 2020; Almutairi vd., 2023; Huang vd., 2023; Riabi vd, 2023).

Kesirli türev ve kesirli diferansiyel denklemler, kesirli hesap tekniğinin anlaşılması için varlık ve teklik kavramları ile ele alınmıştır. Varlık ve teklik, periyodiklik, asimptotik davranış, kararlılık, kesir mertebe diferansiyel denklemlerin sayısal ve analitik çözüm metotları yoğun şekilde çalışılmıştır. Ancak fiziksel sistemlerin çoğu integral sınır şartlarıyla daha iyi tanımlanabilir. İntegral sınır şartları popülasyon dinamikleri, kan akışı modelleri, kimyasal mühendislik ve hücresel sistemler gibi pek çok uygulamada görülür Bunun dışında integral sınır şartlı sınır değer problemlerinin oldukça enteresan ve önemli kısmını oluşturur. Bunlar iki, üç, çok noktalı ve bölgesel olmayan sınır değer problemlerini içerir (Ashyralyev ve Sharifov, 2012).

Bu çalışmada lineer olmayan kesir mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin varlık ve tekliği araştırılmaktadır. Kesir mertebe denklemler, kesir mertebe diferansiyel denklemler, kesir mertebe diferansiyel denklem sistemleri hakkındaki tanımlamalar ve gerekli bilgiler çalışmanın ikinci bölümünde ele alınmaktadır. Tezin üçüncü bölümünde ilk olarak kesir mertebe diferansiyel denklem sistemlerinin varlık ve teklik teoremleri literatürdeki gelişimine göre verilmiştir. Daha sonra Atangana-Baleanu kesirli türevi ile verilen bir sistemin varlık ve tekliği incelenmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sırasıyla fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, Daralma koşulları ve sabit nokta teoremi, kesir mertebeden türev ve integraller ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analizin Temel Kavramları

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$a)$ $d(x,y) \geq 0$;
$b)$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
$c)$ $d(x,y) = d(y,x)$;
$d)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

özelliklerini sağlıyorsa d, X kümesinde bir metriktir ve (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay adı verilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.1. $X = \mathbb{R}$ ve $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer metriği ya da alışılmış metriği denir.

Tanım 2.1.2. (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu taktirde açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi sırasıyla

$$B_r\,(x_0) = B(x_0,r) = \{x \in X : \ d(x,x_0) < r\},$$
$$\bar{B}_r\,[x_0] = B[x_0,r] = \{x \in X : \ d(x,x_0) \leq r\},$$
$$S(x_0) = S(x_0,r) = \{x \in X : \ d(x,x_0) = r\},$$

olarak tanımlanır. Bu üç durumda da x_0 a merkez r ye yarıçap denir.

Burada $x_0 \in B(x_0,r)$ olduğundan $B(x_0,r) \neq \emptyset$. Görülüyor ki x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar merkeze olan uzaklığı r den daha küçük olan X e ait noktaların kümesidir. Yuvar yüzeyi ise x_0 a olan uzaklığı r ye eşit olan X e ait noktaların kümesidir. Ayrıca $S(x_0,r) = B\,[x_0,r] \setminus B(x_0,r)$ olduğu açıktır. Yuvar deyimi yerine civar veya komşuluk ifadeleri de kullanılır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (x_n), (X,d) metrik uzayı üzerinde bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n,x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar ve $(x_n) \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.1.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x_n), (X,d)$ metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall m,n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.1.5. (X,d) metrik uzay üzerinde tanımlanan her Cauchy dizisi, bu uzay içinde herhangi bir noktaya yakınsar ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzaydır denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.6. (X,d) bir metrik uzayı, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. $\forall r > 0$ için $B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın yığılma noktası denir ve A nın tüm yığılma noktalarından oluşan kümeyi de A' ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.7. A nın noktaları ile A nın yığılma noktalarından oluşan kümeye A nın kapanışı denir. $\bar{A}$ ile gösterilir. O halde $\bar{A} = A \cup A'$ dır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.8. (X,d) metrik uzay, (x_n) X de bir dizi olsun. (x_n) dizisinin terimlerinin oluşturduğu küme sınırlı ise (x_n) dizisine X de sınırlı bir dizi denir. Matematiksel olarak ifade edecek olursak:
$\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n,x) \leq \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $x \in X$ varsa (x_n) dizisi sınırlıdır (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.1.9. $X \neq \emptyset$ olsun. Her $x,y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $X \times X$ den X ye tanımlı

$$+ : (x,y) \to x + y$$

fonksiyonu ve $\mathbb{F} \times X$ den X e tanımlı

$$\cdot : (\alpha,x) \to \alpha.x$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyor ise X kümesine $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı adı verilir ($\alpha \cdot x$ yerine kısaca αx yazılır). Her $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ ve her $x,y,z \in X$ için

$a)$ $x+y=y+x,$

$b)$ $x+(y+z)=(x+y)+z$

$c)$ $x+0=x$ olacak şekilde (x ten bağımsız) bir tek $0 \in X$ vardır,

$d)$ $x+(-x)=0$ olacak şekilde bir tek $-x \in X$ vardır,

$e)$ $1x=x$,

$f)$ $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

$g)$ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$

$h)$ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$

Eğer $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) ise o zaman X e reel (ya da kompleks) vektör uzayı denir. X uzayının elemanları vektör ve $\mathbb{F}$ cisminin elemanları skalerdir.

$x+y$ işlemi vektörel toplam, αx işlemi de skaler çarpım olarak adlandırılır. Vektör uzaylarında geçerli olan birçok sonuç kompleks ve reel uzaylar içinde geçerlidir. Eğer uzayın tipi net olarak belirtilmemişse o zaman uzayı "vektör uzayı" olarak kabul ederiz. Bazen vektör uzayı yerine "lineer uzay" ya da "doğrusal uzay" ifadeleri de kullanılır (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.10. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun. Eğer $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$a)$ $\|x\| \geq 0$,

$b)$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$,

$c)$ $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$,

$d)$ $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$,

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna norm fonksiyonu ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisinede normlu uzay denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.2. $X=\mathbb{R}$ alınırsa, $x \in \mathbb{R}$ için

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \|x\|=|x|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır.

Örnek 2.1.3.

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanan norma Chebyshev normu veya sonsuzluk normu denir.

Tanım 2.1.11. Norm metriğine göre tam olan uzaya Banach uzayı denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Çözüm: $(x_m) = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m)$, $\mathbb{R}^n$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için her $m, r > n_0(\varepsilon)$ iken $\|x_m - x_r\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\forall m, r > n_0(\varepsilon) \text{ için } \|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i^r|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \tag{1}$$

olur. Böylece,

$$\forall m, r > n_0(\varepsilon) \text{ için } \sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i^r|^2 < \varepsilon^2$$
$$\forall m, r > n_0(\varepsilon) \text{ ve } 1 \leq i \leq n \text{ için } |x_i^m - x_i^r| < \varepsilon$$

dir. Bu son ifade ise $1 \leq i \leq n$ için (x_i^m) dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $\mathbb{R}$ ise tam olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_i^m = x_i$ olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ vardır. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dersek; $x \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde (x_m) dizisinin x e yakınsak olduğunu gösterelim. (1) ifadesinde m sabit tutulur ve $r \to \infty$ için limit alınırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

olur. Böylece her $m > n_0(\varepsilon)$ için

$$\|x_i^m - x_i\| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise (x_m) dizisinin x e yakınsak olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.12. (X, d) metrik uzayı ve $A \subset X$ olsun. A kümesi üzerindeki her (x_n) dizisi A nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahip ise A kompakt kümedir denir. Her hangi bir $A \subset X$ kümesinde $\bar{A}$ da kompakt ise A kümesine göreceli kompakttır denir (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.13. $1 \leq p < +\infty$ olsun. X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{R}$ değerli, Σ ölçülebilir $|f|^p$ fonksiyonunun Σ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının oluşturduğu aile $L^p = L^p(X, \Sigma, \mu)$ ile gösterilsin. $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$ için L^p ailesi

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} ,$$

normuna göre bir Banach uzaydır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1998).

Tanım 2.1.14. $p \in [1, \infty)$ ve (a, b), $\mathbb{R}$ nin açık bir alt kümesi olsun $H^p(a, b)$ Sobolev uzayı,

$$H^p(a, b) = \left\{ f \in L^2(a, b) \ : \ D^\beta f \in L^2, \ |\beta| < p \right\}$$

olarak tanımlanır (Syam ve Al-Refai, 2019).

Tanım 2.1.15. $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığında bir boyutlu Sobolev uzayı

$$H^1(a, b) = \{u | \ u \text{ mutlak sürekli ve } u' \in L^2(a, b)\}$$

olarak tanımlanır (Atangana ve Dumitru, 2016).

2.2. Diferansiyel Denklemlerin Temel Kavramları

Tanım 2.2.1. Bir değişken ve bu değişkene ait fonksiyon ile bu fonksiyonun belirli türevleri arasındaki ilişkiyi gösteren bağıntıya diferansiyel denklem adı verilir. $y = y(x)$, x reel değişkeninin fonksiyonu olmak üzere n. mertebeden bir diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilebilir. Denklem n. mertebeden ise

$$\frac{\partial^n F}{\partial y^n} \neq 0$$

olmalıdır (Başarır ve Türker, 2003).

Tanım 2.2.2. Bir x bağımsız değişkeni ile, bu değişkenin iki veya daha fazla fonksiyonundan ve bu fonksiyonların x değişkenine göre türevlerinden oluşan sistem diferansiyel denklem sistemi olarak tanımlanır. Şayet x bağımsız değişkeninin $y, z, w, \ldots$ gibi n tane fonksiyonu bilinmeyen olarak sistemde bulunuyorsa n bilinmeyenli diferansiyel denklem sistemidir. Böyle bir sistemin iterasyonu n. mertebeden bir tek denkleme indirgemek suretiyle yapılacaktır. İki bilinmeyen ihtiva eden bir sistem,

$$F(x, y, y', y'', \cdots, z, z', z'', \cdots) = 0$$
$$G(x, y, y', y'', \cdots, z, z', z'', \cdots) = 0$$

şeklinde gösterilebilir (Başarır ve Türker, 2003).

Yüksek mertebeden denklemleri bulunduran sistemler, birinci mertebeden denklem sistemlerine dönüştürülebilir.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \qquad\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

(2)

diferansiyel denklem sisteminde t bağımsız değişken ve $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ sistemdeki denklemleri aynı anda sağlayan çözümlerdir. Amacımız bu çözümleri bulmak olacaktır. Bu denklem sisteminin başlangıç koşulları t_0 , $x_1{}^0, \cdots, x_n{}^0$ sayıları olmak üzere;

$$x_1(t_0) = x_1{}^0, x_2(t_0) = x_2{}^0, \cdots, x_n(t_0) = x_n{}^0 \tag{3}$$

şeklindedir (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.1.(Başlangıç Değer Problemlerinde Varlık Teklik Teoremi) $F_1, \cdots, F_n$ fonksiyonları $n + 1$ tane $t, x_1, \cdots, x_n$ değişkenlerine bağlı ve $F_1, \cdots, F_n$ fonksiyonlarının her biri birinci mertebeden kısmi türevleri $t, x_1, \cdots, x_n$ eksenlerine sahip $(n+1)$ boyutlu uzaydaki bir K açık dörtgensel paralel yüzlü içinde sürekli olsun. Bununla birlikte $t_0, {x_1}^0, \cdots, {x_n}^0$ başlangıç koşulları K kümesinde bulunsun. Bu takdirde (2) deki denklem sistemi ve (3) deki başlangıç şartlarından oluşan başlangıç değer problemi $(t_0 - h, t_0 + h)$ aralığı içinde bir tek;

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t)$$

çözümüne sahiptir (Başarır ve Türker, 2003).

Uygulamalarda bu teoremin özel bir durumu göz önüne alınır. Diferansiyel denklemlerinin her birinin lineer ve birinci mertebeden olduğu,

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t)\\
x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t)\\
&\vdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t)
\end{aligned}$$

lineer sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi matris formunda yazarak

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} \text{ ve } A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots \quad \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemini $x' = Ax + G$ şeklinde yazabiliriz. Bu sistemde x, A ve G fonksiyonları t bağımsız değişkenine bağlı birer matris fonksiyonlarıdır. Örnek olarak,

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + tx_2 + sin(t)\\
x_2' &= t^2x_1 - e^t x_2 + 1 - t
\end{aligned}$$

sistemi alınırsa $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t^2 & -e^t \end{bmatrix}$ ve $G = \begin{bmatrix} sin(t) \\ 1-t \end{bmatrix}$ olmak üzere $x' = Ax + G$ olarak yazılabilir. Eğer J aralığındaki her t için her bir $g_j(t) = 0$ ise $x' = Ax + G$ sistemine homojendir denir. Bu durumda, $G(t) = 0$ ve sistem $x' = Ax$ olur.

Eğer J aralığındaki bazı t ler için $g_j(t) \neq 0$ ise (2) sistemi homojen olmaz. Başlangıç değerleri;

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$n \times 1$ tipinde bir matris olarak yazabiliriz. Gösterim uygun olması için genel olarak sağ taraftaki matrisi x^0 şeklinde göstereceğiz ve başlangıç şartlarını da $x(t_0) = x^0$ olarak yazacağız.

Teorem 2.2.2. Kabul edelim ki a_{ij} ve g fonksiyonları t_0 ı bulunduran bir açık J aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu takdirde;

$$x' = Ax + G \ ; \ x(t_0) = x^0$$

lineer başlangıç değer probleminin J deki her t için tanımlı bir tek çözümü vardır (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.3. $x' = Ax$ homojen lineer sisteminin çözümlerinin lineer kombinasyonları da sistemin bir çözümüdür (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.4. $x' = Ax$ homojen lineer sisteminin bütün çözümlerinin kümesi V olsun. Bu takdirde V vektör uzayıdır (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.5. Kabul edelim ki; bir açık J aralığı üzerinde $x' = Ax$ sisteminin çözümleri

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \ x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \ x^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde;

1) $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ lineer bağımsız olması için gerekli ve yeterli şart J deki herhangi bir t_0 için $\mathbb{R}^n$ de vektörler olarak göz önüne alındığında

$$x^{(1)}(t_0), \cdots, x^{(n)}(t_0)$$

nın lineer bağımsız olmasıdır.

2) $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ lineer bağımsız olması için gerekli ve yeterli şart J deki herhangi bir t_0 için

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.6. Kabul edelim ki $i = 1, 2, \cdots, n$ ve $j = 1, 2, \cdots, n$ için açık bir J aralığı üzerinde $a_{ij}(t)$ fonksiyonları sürekli olsun ve $A = [a_{ij}]$ alalım. $x' = Ax$ sisteminin çözüm uzayının boyutu n dir (Başarır ve Türker, 2003).

Yukarıdaki teorem bize $x' = Ax$ sisteminin çözümünde n tane lineer bağımsız çözüm bulmamız gerektiğini söyler. Sistemin her çözümü bu n tane çözümün bir lineer kombinasyonudur. Eğer n tane lineer bağımsız $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ çözümleri varsa $x' = Ax$ sisteminin genel çözümü $c_1, \cdots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \cdots + c_n x^{(n)}$$

şeklindedir. $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ nin bu lineer kombinasyonunu matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır. Keyfi sabitler matrisi,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ lineer bağımsız çözümleri olan bir Ω matrisini tanımlayalım. Bu şekilde tanımlayacağımız matrise $x' = Ax$ sisteminin temel matrisi adı verilir.

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \quad x^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \cdots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) \cdots x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Omega C = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \cdots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) \cdots \; x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 x_{11}(t) + c_2 x_{12}(t) + \cdots + c_n x_{1n}(t) \\ c_1 x_{21}(t) + c_2 x_{22}(t) + \cdots + c_n x_{2n}(t) \\ \vdots \\ c_1 x_{n1}(t) + c_2 x_{n2}(t) + \cdots + c_n x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$
$$= c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \cdots + c_n x^{(n)}$$

olur.

Teorem 2.2.7. J aralığı üzerinde $x' = Ax$ sisteminin bir temel matrisi Ω olsun. Bu takdirde $x' = Ax$ sisteminin genel çözümü, C matrisi $n \times 1$ tipinde keyfi sabitler matrisi olmak üzere $x = \Omega C$ dir (Başarır ve Türker, 2003).

Örnek 2.2.1. Aşağıda verilen diferansiyel denklem sitemini çözünüz.

$$\begin{cases} x_1{}' = x_1 - 4x_2 \\ x_2{}' = x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

Çözüm: Bu sistem;

$$\begin{aligned} x_1 &= (-2c_1 + c_2)e^{3t} - 2c_2 t e^{3t} \\ x_2 &= c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \end{aligned} \tag{4}$$

genel çözümüne sahiptir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

A matrisi sistemin katsayılar matrisidir.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

için sistem $x' = Ax$ şeklindedir. 2×1 tipinden matrisler olarak iki lineer bağımsız çözümü; (4) genel çözümde $c_1 = 1, c_2 = 0$ seçilirse,

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

ve $c_1 = 1,\ c_2 = 0$ seçilirse,

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{3t} \\ te^{3t} \end{bmatrix}$$

olur. 2×2 tipinden matrisin sütunları olarak $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ yi yazarsak;

$$\Omega = \begin{bmatrix} -2e^{3t} & (1-2t)e^{3t} \\ e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix}$$

temel matrisi elde edilir. Sistemin (4) genel çözümü, ΩC olarak matris formunda yazılabilir. Keyfi sabitler matrisi,

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

olup temel matris ile matris çarpımı yapılırsa;

$$\Omega C = \begin{bmatrix} -2e^{3t} & (1-2t)e^{3t} \\ e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2c_1e^{3t} + (1-2t)c_2e^{3t} \\ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-2c_1 + c_2)e^{3t} - 2c_2te^{3t} \\ c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece (4) deki genel çözümü, ΩC nin satırları olarak tekrar bulunur.

Teorem 2.2.8. $x' = Ax$ homojen sisteminin bir temel matrisi Ω olsun ve $x' = Ax + G$ sisteminin herhangi bir çözümü ξ olsun. $x' = Ax + G$ sisteminin genel çözümü;

$$\varphi = \Omega C + \xi$$

olur. Burada C matrisi $n \times 1$ tipinde keyfi sabitler matrisidir. Yani homojen olmayan bir sistemin genel çözümü, homojen sistemin genel çözümü ile homojen olmayan sistemin herhangi bir özel çözümünün toplamıdır (Başarır ve Türker, 2003).

Teorem 2.2.9. $A, n \times n$ tipinde sabit matris olsun. Bu takdirde $\xi e^{\lambda t}$ nin $x' = Ax$ sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart λ nın A nın bir özdeğeri ve ξ nin de bu özdeğere karşılık gelen bir özvektörü olmasıdır (Başarır ve Türker, 2003).

Örnek 2.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$x' = Ax$$

(5)

sistemini çözünüz.

Çözüm: İlk olarak A nın özdeğerlerini bulalım. Karakteristik denklem;

$$det(\lambda I_3 - A) = det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

dir. Özdeğerleri $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ ve $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla;

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dir. Bu özvektörler lineer bağımsız olduğundan $x' = Ax$ sisteminin lineer bağımsız üç çözümü vardır. Bu çözümler $\xi^{(1)} e^t$, $\xi^{(2)} e^{(1+\sqrt{2})t}$ ve $\xi^{(3)} e^{(1-\sqrt{2})t}$ dir. Bu çözümler çözüm uzayının bir bazını oluşturur. (5) sisteminin genel çözümü;

$$\varphi(t) = c_1 \xi^{(1)} e^t + c_2 \xi^{(2)} e^{(1+\sqrt{2})t} + c_3 \xi^{(3)} e^{(1-\sqrt{2})t}$$

dir. Genel çözüm temel matris cinsinden,

$$\varphi(t) = \Omega(t)C$$

olarak yazılabilir. Burada;

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{(1+\sqrt{2})t} & e^{(1-\sqrt{2})t} \\ 0 & e^{(1+\sqrt{2})t} & e^{(1-\sqrt{2})t} \\ 0 & \sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} & -\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \end{bmatrix}$$

dır. Bileşenler cinsinden sistemin genel çözümü ise;

$$x_1(t) = c_1e^t + c_2e^{(1+\sqrt{2})t} + c_3e^{(1-\sqrt{2})t}$$
$$x_2(t) = c_2e^{(1+\sqrt{2})t} + c_3e^{(1-\sqrt{2})t}$$
$$x_3(t) = \sqrt{2}c_2e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}c_3e^{(1-\sqrt{2})t}$$

dir.

Şimdi birinci mertebeden diferansiyel denklem ile ilgili başlangıç değer problemini ifade edelim: $I \subset \mathbb{R}$ açık bir alt aralık ve $I \times \mathbb{R}$ üzerinde g sürekli bir fonksiyon olmak üzere birinci basamaktan skaler

$$x' = g(t, x) \tag{6}$$

diferensiyel denklemi ve

$$x(t_0) = x_0 \tag{7}$$

başlangıç şartı göz önüne alınsın. Bu durumda I üzerinde tanımlanan

a) $t \in I$ için $\phi'(t)$ mevcuttur.
b) $\phi(t_0) = x_0, \;\; t_0 \in I$,
c) $t \in I$ için $(t, \phi(t)) \in I \times \mathbb{R}$,
d) $t \in I$ için $\phi'(t) = g(t, \phi(t))$.

koşullarını sağlayan bir $\phi(t)$ fonksiyonuna (6)-(7) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür (Ross, 1984).

Uyarı: (6)-(7) başlangıç değer problemi Cauchy problemi de denir bu Cauchy problemini çözmek geometrik olarak yorumlanırsa; istenilen ϕ çözümünün grafiği (t_o, x_o) koordinatlı noktadan geçmelidir yani (6) diferansiyel denkleminin (t_o, x_o) noktasından geçen bir integral eğrisini bulmaktır. Bu Cauchy problemindeki diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

Başlangıç değer problemleri incelendiğinde problemlerin tek çözümü, birden fazla çözümü olabilir ya da hiç çözümü olmayabilir. Şimdi başlangıç değer probleminin varlık ve tekliğini karakterize eden temel teoremi ifade edelim.

Teorem 2.2.10. (Temel Varlık ve Teklik Teoremi) $g(t,x)$ ve $\frac{\partial g}{\partial x}$ fonksiyonları $R(a,b) = \{(t,x): |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ bölgesinde t ve x e göre sürekli ise, bu durumda (6)-(7) başlangıç değer probleminin $|g(t,x)| \leq M$ ve $h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ olmak üzere $|t - t_0| \leq h$ aralığında tanımlı bir tek $x(t)$ çözümü vardır (Ross, 1984).

Tanım 2.2.3. Bilinmeyen fonksiyonların integral işaretinin altında bulunduğu denklemlere integral denklemleri adı verilir. İntegral denklemdeki bilinmeyen fonksiyonun derecesi bir ise bu tipteki integral denklemlere lineer integral denklemler, eğer bilinmeyen fonksiyonun derecesi bir değil ise bu tipteki integral denklemler lineer olmayan integral denklemlerdir denir. Birinci tip integral denklemde bilinmeyen fonksiyon sadece integralin içindedir. İkinci tip integral denklemde ise bilinmeyen fonksiyon hem integralin içinde hem de dışındadır. İkinci tipten integral denklemlerdeki integral dışındaki bilinmeyen fonksiyon, başka fonksiyon ile çarpım şekilde ise integral denklem üçüncü tip integral denklem olarak isimlendirilir (Köklü, 2018).

Tanım 2.2.4. Bir integral denklemde, integralin sınırlarından her ikisi sabit veya bir tanesi sabit diğeri sonsuz ya da her iki sınır da sonsuz ise bu türden denklemlere Fredholm integral denklemleri, sınırlarından herhangi biri x değişkenine bağlı ise bu tip denklemlere Volterra integral denklemleri denir (Köklü, 2018).

Şu halde Tanım 2.2.3 ve Tanım 2.2.4 göz önüne alınarak integral denklemleri matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edelim (Köklü, 2018).

Fredholm integral denkleminin en genel hali,

$$h(t)x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

şeklindedir.

1.tip Fredholm *integral denklemi:* $h(t) = 0$ için

$$f(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds = 0$$

2.tip Fredholm *integral denklemleri:* $h(t) = 1$ için

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

şeklinde olur.

1.tip Volterra integral denklemleri: $f, [a,b]$ üzerinde sürekli ve x bilinmeyen bir fonksiyon olsun. k de $D = \{(t,s): a \leq s \leq t, a \leq t \leq b\}$ üçgensel bölgede verilen sürekli fonksiyon (k, denklemin çekirdeği olarak isimlendirilir.) ve λ bir parametre ve $s > t$ ise $k(t,s) = 0$ olmak üzere

$$f(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds, t \in [a,b] \quad ;$$

2. tip Volterra integral denklemi: $t \in [a,b]$ olmak üzere

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds \quad ;$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin en genel şekli ise: $-\infty < a \leq t \leq b < \infty$, $f \in C[a,b]$ için

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g\big(t,s,x(s)\big)ds$$

olarak tanımlanır.

2.3. Sabit Nokta Teoremi ile ilgili Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Ax = x$ eşitliğini sağlayan $x \in$ X elemanına A nin bir *sabit noktası* denir (Berinde ve Takens, 2007).

A nin tüm sabit noktalarının kümesi F_A , $F(A)$ ya da $Fix(A)$ ile gösterilebilir. Biz bu tez çalışması boyunca $F(A)$ gösterimini kullanacağız.

Örnek 2.3.1. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $A: X \to X$ şeklinde özdeşlik dönüşümü için X nin her noktası sabit noktadır. $F(A) = X$ dir.

Örnek 2.3.2. $X = \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $A: X \to X,\ Ax = \alpha + x$ şeklindeki öteleme dönüşümlerin sabit noktası yoktur. $F(A) = \emptyset$ dir.

Örnek 2.3.3. $X = [0,2]$ olmak üzere $A: X \to X,\ Ax = 3 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = \frac{3}{2}$ dir. $F(A) = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ dir.

Tanım 2.3.2. (X, d) bir metrik uzay ve $A: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$
için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\, d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı mevcut ise A ye bir Lipschitz dönüşümü ve α yada Lipschitz sabiti adı verilir (Berinde ve Takens, 2007).

Örnek 2.3.4. $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ ve $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ Ax = 2x + 3$ olsun.

$$d(Ax, Ay) = |2x + 3 - (2y + 3)| = 2|x - y| = 2d(x, y) \leq \alpha d(x, y)$$

olduğundan $\alpha \geq 0$ için Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.3.3. (X, d) bir metrik uzay ve $A: X \to X$ bir Lipschitz dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\exists \alpha \in (0,1)$ reel sayısı varsa A ya bir daralma (contraction) dönüşümü ve α ya da daralma oranı denir (Berinde ve Takens, 2007).

Örnek 2.3.5. $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ ve $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ Ax = \frac{x}{2} + 1$ olsun

$$d(Ax, Ay) = \left|\frac{x}{2} + 1 - \left(\frac{y}{2} + 1\right)\right| = \frac{1}{2}|x - y|$$

$$d(Ax, Ay) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

olduğundan A daralma dönüşümüdür.

Tanım 2.3.4. (X, d) bir metrik uzay, $A : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Sabit nokta iterasyon yöntemi f bir fonksiyon olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = Ax_n = A^n(x_0)$$

alınarak elde edilen iterasyon yöntemine, *Picard iterasyon yöntemi* denir (Picard, 1890).

Tam metrik uzayda tanımlı daralma dönüşümlerinin sabit noktalarına yaklaşımda kullanılan bu iterasyon yöntemi adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğinin ispatında en önemli araçtır. Aşağıda ifade edilecek olan Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma dönüşümü için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder ve onu hesaplamak için bir yöntem sağlar (Banach, 1922).

Teorem 2.3.1.(Banach Sabit Nokta Teoremi)**:** (X, d) bir tam metrik uzay ve $A: X \to X$ daralma operatörü olsun. Bu durumda,

i. A nın yalnız bir $x \in X$ sabit noktası vardır.

ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $(A^n x_0)$ iterasyon dizisi, A nın bu sabit noktasına yakınsar

(yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = A(x_{n-1})$ ile tanımlı (x_n) iterasyon dizisi A nın bu sabit x noktasına yakınsar).

Teorem 2.3.2.(Schauder Sabit Nokta Teoremi)**:** (X, d) tam metrik uzay olsun. U, X nin boştan farklı, konveks, kapalı alt kümesi ve $A: U \to U$ dönüşümü verilsin öyle ki $\{Au: u \in U\}$ kümesi X de göreceli kompakt olsun. Bu durumda, A dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır (Weilbeer, 2005).

Teorem 2.3.3.(Arzela-Ascoli Teoremi): $a < b$ olmak üzere $F \subseteq C[a, b]$ şeklinde Chebyshev normu ile donatılmış kümeleri varsayalım. Bu durumda $F, C[a, b]$ de göreceli kompakttır ancak ve ancak F eş sürekli (yani her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki her $f \in F$ ve $x, x^* \in [a, b]$ için $|x - x^*| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ dur) ve F düzgün sınırlıdır (yani bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki her $f \in F$ için $\|f\|_\infty \leq C$) (Weilbeer, 2005).

Tanım 2.3.5. X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}_+^m$ tüm klasik metrik aksiyomlarını sağlayan metriğe Perov anlamında genelleştirilmiş metrik denir ve (X, d) ikilisine de genelleştirilmiş metrik uzay denir (Perov, 1964).

Perov'un kullandığı anlamda genelleştirilmiş bir metrik uzayda, Cauchy dizisi, yakınsak dizi, tamlık, açık ve kapalı alt küme kavramları klasik metrik uzaylardakine benzer şekilde şu şekilde tanımlanır:

Eğer $v, r \in \mathbb{R}^m, v := (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ ve $r := (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ ise $v \le r$, her $i \in \{1, \cdots, m\}$ için $v_i \le r_i$ ve $v < r$ her $i \in \{1, \cdots, m\}$ için $v_i < r_i$ olarak tanımlansın. Ayrıca $|v| := (|v_1|, \cdots, |v_m|)$ ve $max(u, v) := \left(max(u_1, v_1), \cdots, max(u_m, v_m)\right)$ dir. Eğer $c \in \mathbb{R}$ ise o zaman $v \le c$ her $i \in \{1, \cdots, m\}$ için $v_i \le c$ olarak tanımlansın.

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) < r\},$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar, ve

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X: d(x_0, x) \le r\},$$

kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar adı verilir (Perov, 1964).

Tanım 2.3.6. M reel sayıların bir kare matrisi olsun. Eğer $n \to \infty$ iken $M^n \to 0$ ise M ye sıfıra yakınsaktır denir (Guendouz v.d., 2020).

Lemma 2.3.1. $M \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R}_+)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir (Varga, 2000):

i. M sıfıra yakınsak bir matristir.

ii. M nin özdeğerleri açık birim yuvarın içindedir, yani her $\mu \in \mathbb{C}$ için $det(M - \mu I) = 0$ ise $|\mu| < 1$ dır.

iii. $I - M$ matrisi singüler değildir ve $(I - M)^{-1} = I + M + \cdots + M^n + \cdots$

iv. $I - M$ matrisi singüler değildir ve $(I - M)^{-1}$in elemanları negatif değildir.

v. Herhangi bir $q \in \mathbb{R}^m$ için $n \to \infty$ iken $M^n q \to 0$ ve $q^t M^n \to 0$.

Örnek 2.3.6. Sıfıra yakınsak matrislere aşağıdaki örnekler verilebilir

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ ve } a + b < 1,$$

$$M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ ve } a + b < 1,$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+ \text{ ve } max\{a, c\} < 1,$$

(Guendouz v.d., 2020). Fakat burada,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}_+ \text{ ve } a + b \geq 1\,,\; c + d \geq 1,$$

matrisi sıfıra yakınsak değildir (Din vd, 2023).

Tanım 2.3.7. (X, d) genelleştirilmiş bir metrik uzay ve $A: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d\big(A(x), A(y)\big) \leq Md(x, y)$$

olacak şekilde sıfıra yakınsak bir M matrisi varsa A ya bir daralma dönüşüm ve M ye ise Lipschitz matrisi denir.

Şimdi aşağıdaki teorem ile Banach sabit nokta teoreminin Perov anlamında genelleştirilmiş metrik uzaylara bir genişletilmesi yapılmıştır (Rus, 2001).

Teorem 2.3.4. (X, d) genelleştirilmiş tam metrik uzay ve M Lipschitz matrisi olmak üzere $A: X \to X$ daralma operatörü olsun. Bu taktirde A nın her $x_0 \in X$ için bir tek x^* sabit noktası vardır. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(A^k(x_0), x^*) \leq M^k(I - M)^{-1} d\big(x_0, A(x_0)\big),$$

dir (Perov, 1964; Graef vd., 2018).

Şimdi de Leray-Schauder tipindeki teoremi verelim.

Teorem 2.3.5. X genelleştirilmiş bir Banach uzayı olsun ve $A: X \to X$ sürekli bir operatör olsun. Bu taktirde,

- **i.** $A(x) = x$ denkleminin en az bir çözümü vardır,
- **ii.** Ya da $\mathcal{M} = \{x \in X:\ \mu A(x) = x,\ \ \mu \in (0,1)\}$ kümesi sınırsızdır,

koşulları sağlanır (Viorel, 2011; Graef vd., 2018).

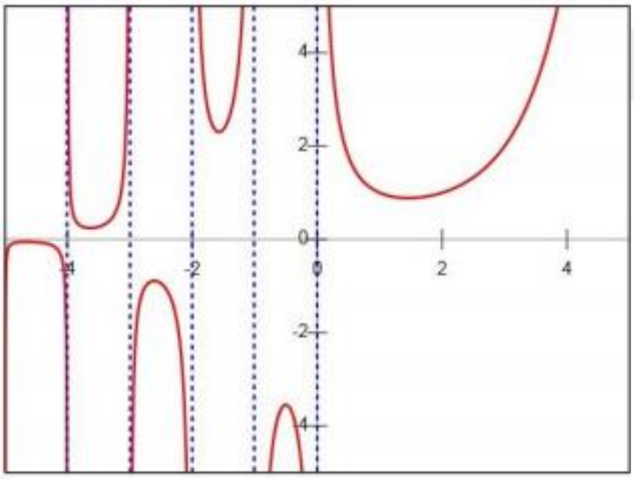
2.4. Kesir Mertebe Türev ve İntegraller ile İlgili Temel Kavramlar

Kesirli analizin amacı türev ile integral arasında var olan ilişkiyi bozmadan uygun genelleştirmeler yapmaktır. Bu bölümde Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli integral, Riemann-Liouville, Caputo ve Atangana-Baleanu kesirli türevi ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.4.1. (Gama Fonksiyonu) **:** n faktöriyeli genelleştiren ve n nin tam sayı olmayan bir sayı olarak kullanılmasını mümkün kılan gama fonksiyonu kesirli analizin ana fonksiyonlarındandır (Podlubny, 1999). Bu fonksiyonun tanımı aşağıdaki gibidir: Γ ile gösterilen ve $\mathbb{R} \setminus [\mathbb{Z}^- \cup \{0\}]$ üzerinde tanımlı

$$\Gamma: \mathbb{R} \setminus [\mathbb{Z}^- \cup \{0\}] \to \mathbb{R}\,, \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanan fonksiyona **Gama Fonksiyonu** denir.



Şekil 1 Gama fonksiyonuna ait değişim grafiği

Yaygın olmamakla birlikte Γ fonksiyonunun diğer bir tanımı da;

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(ln\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{x-1} du$$

integrali ile de verilebilir. Gerçekten de $ln\left(\frac{1}{u}\right) = t$ dersek $u = e^{-t}$ olup $du = -e^{-t}dt$ ve sınır değerleri

$$\begin{cases} u = 0 \; için \; t \to \infty \\ u = 1 \; için \; t = 0 \end{cases}$$

olur.

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{x-1} du$$

$$= \int_\infty^0 t^{x-1}(-e^{-t})dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad ,(\forall x > 0 \; için \; yakınsak)$$

olduğu elde edilir. Kompleks sayılar için de Γ fonksiyonu tanımlanabilir. $z \in \mathbb{C}$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

şeklindedir. Bu integralde $Re\, z > 0$ için yakınsaktır. Gerçekten; $z = x + iy$ için

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty e^{-t}t^{(x-1)+iy}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\, t^{iy}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}[cos(ylogt) + isin(ylogt)]dt$$

olup köşeli parantezin içi mutlak değerce sınırlı olduğundan bu integralin yakınsaklığı reel değişkenli $\Gamma(x)$ in yakınsaklığına indirgenmiş olur ki $\Gamma(x)$ $(reel\; integrali)$ $Re\, z > 0$ için yakınsaktır.

Gama Fonksiyonunun Özellikleri: Gama fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibidir (Podlubny, 1999).

1) $\Gamma(1) = 1$

En temel özelliklerinden birisi aşağıdaki fonksiyonel eşitliği sağlamasıdır

2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Gerçekten,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-t} t^x dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-t^x . e^{-t} \Big|_0^A + \int_0^A e^{-t} . x t^{x-1} dt \right)$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-A^x e^{-A} + 0^x \frac{1}{e^0} + \int_0^A e^{-t} . x t^{x-1} dt \right)$$

$$= 0 - \underbrace{\lim_{A\to\infty} \frac{A^x}{e^A}}_{=0} + \int_0^\infty e^{-t} . x t^{x-1} dt$$

$$= x \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} . t^{x-1} dt}_{\Gamma(x)}$$

$$= x\Gamma(x)$$

elde edilir. Eğer özel olarak burada $x \in \mathbb{N}$ ise

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ &= x.(x-1).\Gamma(x-1) \\ &\vdots \\ &= x.(x-1) \ldots 2.\Gamma(2) \\ &= x.(x-1) \ldots .2.1.\Gamma(1) \\ &= x! \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.4.2. (Beta Fonksiyonu) **:** Beta fonksiyonu gama fonksiyonuyla yakından ilişkili olup, x ve y nin pozitif değerleri için fonksiyon β integrali için aşağıdaki gibi tanımlanır (Oldham ve Spanier, 1974).

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \ , \ \ x,y > 0.$$

Beta ve gama fonksiyonları arasındaki ilişki, x ve y nin pozitif olmayan değerleri için

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

dir. (Oldham ve Spanier, 1974).

Tanım 2.4.3. (Mittag-Leffler Fonksiyonu)**:** $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$E_\alpha(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}$$

biçiminde tanımlanan seri yakınsak ise E_α fonksiyonuna Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Weilbeer, 2005; Diethelm ve Ford, 2010).

Tanım 2.4.3 de α nın alabileceği bazı değerler için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$E_1(z) = e^z,$$

$$E_2(z) = cos\sqrt{z}$$

$$E_3(z) = \frac{1}{3}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-z^{1/3}/2}cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}z^{1/3}\right)\right]$$

$$E_4(z) = \frac{1}{2}\left[cos\left(z^{1/4}\right) + cosh\left(z^{1/4}\right)\right]$$

$\alpha_1, \alpha_2 > 0$ iken

$$E_{\alpha_1\alpha_2}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha_1 + \alpha_2)}$$

olarak tanımlı seri yakınsak ise $E_{\alpha_1\alpha_2}$ fonksiyonuna 2-parametreli Mittag-Leffler fonksiyonudur denir (Diethelm ve Ford, 2010)**.**

Şimdi Mittag-Leffler fonksiyonun tam monotonluk özelliğini veren lemmayı ifade edelim.

Lemma 2.4.1. $0 < \alpha \leq 1$ ve $\beta \geq \alpha$ için $E_{\alpha,\beta}(-x)$ tam monotonluk özelliğine sahiptir. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} E_{\alpha,\beta}(-x) \geq 0\ ,$$

ve böylece $x > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$0 \leq E_{\alpha,\beta}(-x) \leq \left(1/\Gamma(\beta)\right)$$

dir.

Tanım 2.4.4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x sayısından büyük olan en küçük tamsayıyı veren ifadeye tavan fonksiyonu denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir (Iverson, 1962).

Tanım 2.4.5. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyleki $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ şartını sağlayan her sonlu ve $\{(a_k, b_k) \subset [a,b]: k = 1,2,\cdots,n\}$ ayrık açık alt aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna mutlak süreklidir denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1998).

Tanım 2.4.6. $[a,b]$ aralığında $(n-1)$. mertebeye kadar türevleri mutlak sürekli fonksiyonların kümesi $C^n[a,b]$ yada C^n ile gösterilir. $g \in L^1[a,b]$ olmak üzere

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^x g(t)dt$$

ile ifade edilir (Diethelm, 2010).

Lemma 2.4.2. $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ ve f, $[a, b]$ üzerinde n. dereceden sürekli türevleri olan bir fonksiyon ise

$$D^n f = D^m I_a^{m-n} f$$

dir.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ için $D^n I_a^n f = f$ olduğu bilinmektedir. Buradan $f = D^{m-n} I_a^{m-n} f$ olur. Her iki tarafa D^n uygulandığın da istenen eşitlik elde edilir (Diethelm, 2010).

Tanım 2.4.7. Ox −ekseninin bir I alt aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardan oluşan bir fonksiyon ailesi $\{f_n(x)\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0) > 0$ bulunabiliyorsa $\{f_n(x)\}$ ailesine eş-süreklidir denir (Lakshmikantham ve Vatsala, 2007).

Lemma 2.4.3. Her $\varepsilon > 0$ için $[0, T]$ üzerinde tanımlı sürekli $x_\varepsilon(t)$

$$\begin{cases} D^\alpha\big(x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0)\big) = f\big(t, x_\varepsilon(t)\big)\ , \quad 0 < \alpha < 1 \\ \quad x_\varepsilon(0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

başlangıç değer probleminin çözümü olmak üzere, $0 \leq t \leq T$ için $\left|f\big(t, x_\varepsilon(t)\big)\right| \leq M$ koşulunu sağlıyorsa, $\{x_\varepsilon(t)\}$ fonksiyon ailesi $0 \leq t \leq T$ üzerinde eş süreklidir denir (Lakshmikantham ve Vatsala, 2007).

Teorem 2.4.1. $R_0 = \{(t, x): 0 \leq t \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ için $f \in C[R_0, \mathbb{R}]$ ve R_0 üzerinde $|f(t, x)| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ olsun. Bu taktirde $0 < \alpha < 1$ ve $\gamma = min\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha + 1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ olmak üzere $0 \leq t \leq \gamma$ üzerinde (8) daki başlangıç değer probleminin en az bir çözümü vardır (Lakshmikantham ve Vatsala, 2007).

Tanım 2.4.8. $n \in \mathbb{R}_+$ olsun, Riemann-Liouville n. mertebe kesirli integrali $a \leq x \leq b$ için

$$\mathrm{I}_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. $n = 0$ olduğunda $I_a^n := I$ birim operatörüdür. $n \in \mathbb{N}$ alındığında ise Riemann-Liouville kesir mertebeden integral ile klasik anlamda integralin tek farkı tanım kümesinin Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara genişletilmesi dışında aynıdır (Diethelm, 2010).

Riemann-Liouville kesirli integralinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

a) $m, n \geq 0$ ve $\phi \in L^1[a, b]$ olmak üzere

$$I_a^m I_a^n \phi = I_a^{m+n} \phi$$

eşitliği hemen her yerde sağlanır. $\phi \in C[a, b]$ ya da $m + n \geq 1$ ise yukarıdaki özellik $[a, b]$ de her yerde sağlanır.

b) $m, n \geq 0$ ve $\phi \in L^1[a, b]$ olmak üzere

$$I_a^m I_a^n \phi = I_a^n I_a^m \phi$$

eşitliği hemen her yerde sağlanır.

Örnek 2.4.1. $f(x) = (x - a)^\beta, \beta > -1$ ve $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere f fonksiyonunun kesirli integrali Beta fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Diethelm, 2010).

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t - a)^\beta (x - t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} (x - a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta (1 - s)^{n-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + \beta + 1)} (x - a)^{n+\beta} \end{aligned}$$

Teorem 2.4.2. $(f_k)_{k=1}^\infty\, n > 0, [a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların düzgün yakınsayan bir dizisi olsun. Bu durumda kesirli integral ve limit yer değiştirebilir. Yani,

$$\left(I_a^n \lim_{k \to \infty} f_k \right) = \left(\lim_{k \to \infty} I_a^n f_k \right),$$

dır (Diethelm, 2010).

İspat: (f_k) fonksiyon dizisinin limiti f olsun. $(f_k) \to f$ yakınsaması düzgün olduğundan f fonksiyonu süreklidir. Kesirli integralin tanımı gereği,

$$\begin{aligned}
|I_a^n f_k(x) - I_a^n f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)|\,(x-t)^{n-1} dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \|f_k - f\|_\infty \int_a^x (x-t)^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \|f_k - f\|_\infty \frac{(x-a)^n}{n} \\
&= \frac{1}{n\Gamma(n)} \|f_k - f\|_\infty (x-a)^n \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} \|f_k - f\|_\infty (x-a)^n
\end{aligned}$$

olup bu son eşitsizliğinin sağ tarafındaki limiti sıfır olduğundan yukarıdaki yakınsama düzgündür. Dolayısıyla,

$$\left(I_a^n \lim_{k\to\infty} f_k\right) = \left(\lim_{k\to\infty} I_a^n f_k\right)$$

yazılabilir.

Örnek 2.4.2. $f(x) = e^x$ fonksiyonu verilsin, $n > 0$ için $I_0^n f(x)$ integralini hesaplayalım.

Çözüm: $n \in \mathbb{N}$ iken $I_0^n f(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ dir. $n \notin \mathbb{N}$ olduğunda ise bu durum genellenemez. Üstel fonksiyonun seri açılımı kullanılırsa, $f(x) = e^x$ in kesirli integrali

$$\begin{aligned}
I_0^n f(x) = I_0^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I_0^n [x^k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} x^{k+n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{\Gamma(k+n+1)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eşitliğin sağ tarafının seri açılımı e^x e ait değildir. Buradan da üstel bir fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli integral ile klasik integralinin aynı olmadığı görünür.

Tanım 2.4.9. $n \in \mathbb{R}_+$ ve $m = \lceil n \rceil$ olmak üzere

$$D_a^n f = D^m \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x (x-t)^{m-n-1} f(t) dt \,,$$

ile tanımlanan $D_a^n f$ operatörüne n. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev operatörü denir. $n = 0$ için $D_a^0 f = I$ birim operatörüdür (Diethelm, 2010).

Lemma 2.4.4. $n \in \mathbb{R}_+$ ve $m \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olmak üzere

$$D_a^n = D^m I_a^{m-n} \,,$$

dir (Diethelm, 2010).

İspat: Hipotez gereği $m \geq \lceil n \rceil$ sağlanır. Buradan $D^m I^m f = f$ özelliğinden

$$D^m I_a^{m-n} f = D^{\lceil n \rceil} D^{m-\lceil n \rceil} I_a^{m-\lceil n \rceil} I_a^{\lceil n \rceil - n} = D^{\lceil n \rceil} I_a^{\lceil n \rceil - n} = D_a^n$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.4.3. $f(x) = (x-a)^\beta, \beta > -1$ ve $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere f fonksiyonunun n. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibi hesaplanır (Diethelm, 2010).

$$\begin{aligned} D_a^n f(x) &= D^{\lceil n \rceil} I_a^{\lceil n \rceil - n} f(x) \\ &= D^{\lceil n \rceil} \frac{1}{\Gamma(\lceil n \rceil - n)} \int_a^x (x-t)^{\lceil n \rceil - n - 1} f(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\lceil n \rceil - n + \beta + 1)} D^{\lceil n \rceil} \left[(x-a)^{\lceil n \rceil - n + \beta} \right] \end{aligned}$$

bulunur. $n - \beta \in \mathbb{N}$ olduğunda sağ taraf derecesi $\lceil n \rceil - n + \beta \in \{0,1, \cdots \lceil n \rceil - 1\}$ olan polinomun $\lceil n \rceil$. mertebe türevi olur ki bu türev sıfıra eşittir. Yani

$$D_a^n [(x-a)^{n-m}] = 0, \;\; \forall n > 0, m \in \{1,2, \cdots \lceil n \rceil\}$$

$n - \beta \notin \mathbb{N}$ için

$$D_a^n\left[(x-a)^\beta\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}$$

biçiminde ifade edilir. Her iki durum tam sayı mertebeden türevin genelleştirilmesidir.

Teorem 2.4.3. $m, n \geq 0$, $\varphi \in L^1[a,b]$ ve $f = I_a^{m+n}\varphi$ olsun. Bu durumda

$$D_a^m D_a^n f = D_a^{m+n} f$$

özdeşliği sağlanır (Diethelm, 2010).

İspat: f hipotezde verilen şartları sağlasın ve Riemann-Liouville anlamında türev tanımından

$$\begin{aligned} D_a^m D_a^n f &= D_a^m D_a^n I_a^{m+n}\varphi \\ &= D_a^{\lceil m\rceil} I_a^{\lceil m\rceil - m} D_a^{\lceil n\rceil} I_a^{\lceil n\rceil - n} I_a^{m+n}\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Kesirli integralin özelliklerinden faydalanılarak eşitliğin son tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} D_a^m D_a^n f &= D^{\lceil m\rceil} I_a^{\lceil m\rceil - m} D^{\lceil n\rceil} I_a^{\lceil n\rceil + n}\varphi \\ &= D^{\lceil m\rceil} I_a^{\lceil m\rceil - m} D^{\lceil n\rceil} I_a^{\lceil n\rceil} I_a^{n}\varphi \end{aligned}$$

$D^m I^m = f$ özelliği ve doğal sayı bulunduran türev ve integral tanımları gereğince

$$\begin{aligned} D_a^m D_a^n f &= D^{m+n} I_a^{m+n}\varphi \\ &= D^{\lceil m+n\rceil} I_a^{\lceil m+n\rceil - m+n} I_a^{m+n}\varphi \\ &= \varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde f hipotezin koşullarını sağladığı ve Riemann-Liouville kesirli türevin tanımından

$$\begin{aligned} D_a^{m+n} f &= D_a^{m+n} I_a^{m+n}\varphi \\ &= D^{\lceil m+n\rceil} I_a^{\lceil m+n\rceil - m+n} I_a^{m+n}\varphi \end{aligned}$$

$$= \varphi$$

elde edilir.

Teorem 2.4.4. $\forall f \in L_1[a,b]$ ve $n \geq 0$ olmak üzere

$$D_a^n I_a^n f = f$$

denklemi hemen her yerde sağlanır (Diethelm, 2010).

İspat: $n = 0$ alındığında kesir mertebeden türev ile kesir mertebe integral operatörü birim operatördür. $n > 0$ ve $m = \lceil n \rceil$ olsun, Riemann-Liouville kesir mertebeden türev tanımı ve $D^m I^m f = f$ özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} D_a^n I_a^n f(x) &= D^m I_a^{m-n} I_a^n f(x) \\ &= D^m I_a^m D^n I_a^n f(x) \\ &= D^m I_a^m f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.5. f_1 ve f_2, $[a,b]$ arasında tanımlanan, $D_a^n f_1$ ve $D_a^n f_2$ hemen her yerde türevleri olan iki fonksiyon ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D_a^n f_1 + c_2 D_a^n f_2$$

dir (Diethelm, 2010).

İspat: Riemann-Liouville kesirli türev tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} D_a^n(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= D^m \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x (x-t)^{m-n-1} \left(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right) dt \\ &= c_1 D^m \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x (x-t)^{m-n-1} f_1(t) dt \\ &\quad + c_2 D^m \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x (x-t)^{m-n-1} f_2(t) dt \\ &= c_1 D_a^n f_1 + c_2 D_a^n f_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Kesir mertebe diferansiyel denklem tekniğinde, başlangıç şartlarını fiziksel duruma en uygun şekilde veren Caputo'dur. Caputo'nun yaklaşımındaki en önemli avantaj, Caputo'nun kesirli türevinin tamsayı mertebeden diferansiyel denklemdekiler ile aynı formda başlangıç şartlarına sahip olmasıdır.

Tanım 2.4.10. $n \geq 0$ ve $m = \lceil n \rceil$ olmak üzere D_a^n operatörü

$$D_a^n := I_a^{m-n} D^m f$$

olarak tanımlanır $n \in \mathbb{N}$ durumunda $m = n$ olacağından $D_a^n = D^n f$ dir. Yani klasik anlamdaki türev tanımıdır (Diethelm, 2010).

Tanım 2.4.11. $n \geq 0$ ve $m = \lceil n \rceil$ olmak üzere Caputo kesirli türevi

$${}_a^C D_x^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-n)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{n+1-m}} dt$$

şeklinde tanımlanır (Diethelm, 2010).

Caputo ile Riemann-Liouville kesir mertebe türevler arasındaki ilişkilerden bazısı aşağıda verilmiştir (Diethelm, 2010).

a) $n \geq 0$ ve $m = \lceil n \rceil$ ve f fonksiyonunun Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri mevcut ise

$${}_a^C D_x^n f(x) = D_a^n f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-n+1)} (x-a)^{k-n}$$

eşitliği sağlanır.

b) $n \geq 0$ ve $m = \lceil n \rceil$ ve f fonksiyonunun Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri var ise $D_a^n f = {}_a^C D_x^n f(x)$ denkleminin sağlanması için gerek ve yeter koşul $k = 0,1,\cdots,m-1$ için $D^k f(a) = 0$ olmasıdır.

Benzer yanları olan bu iki türev operatörünün bazı farklılıkları da vardır. Bu farklılıkların başında Riemann-Liouville kesirli türevi ile tanımlanmış bir problemin başlangıç şartlarının

$$\lim_{x \to a} D_a^{n-1} f(x) = \alpha_1,$$
$$\lim_{x \to a} D_a^{n-2} f(x) = \alpha_2,$$
$$\vdots$$

$$\lim_{x \to a} D_a^{n-k} f\,(x) = \alpha_k$$

olarak ifade edilmesidir (Podlubny, 1999). Bu tipteki denklemler matematiksel olarak çözülebilse de uygulamada bir anlamı yoktur. Caputo anlamında kesirli türevde ise başlangıç şartları tam sayı mertebeden türev olarak alınabilir. Bu iki türevin tanımı arasındaki temel farklardan biri Caputo'nun türevinde sabit sayının kesirli türevinin sıfır olmasıdır. Riemann-Liouville türevinde ise sabit bir sayının türevi sıfırdan farklıdır. Teorem 2.4.3 de belli şartlar altında $D_a^m D_a^n f = D_a^{m+n} f$ olduğu gösterildi. Benzer bir özellik Caputo türevi için farklı şartlar altında geçerlidir

$${}_a^C D_x^\alpha \left({}_a^C D_x^\beta f(x) \right) = {}_a^C D_x^{\alpha+\beta} f(x)\,,\ \ \beta = 0,1,\cdots, n-1 < \alpha < n\,,$$

(Podlubny, 1999).

Kesir mertebe denklem sistemleri için varlık teklik üzerine, gerek çalışılan uzay gerek başlangıç değer veya sınır değer problemin sınır şartları gerekse farklı sabit nokta teoremlerinin kullanılması nedeni ile yukarıda sunulan çalışmaların paralelinde literatürde bir birçok çalışma görmek mümkündür. Bu alanda birçok bilim adamı Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard, Marchaud, Riesz, Riesz–Miller, Miller–Ross, Weyl, Erdélyi–Kober gibi yeni kesir mertebe türev tanımları geliştirmiş olsalar da literatürde en yaygın kullanılan türevler Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleridir. Bu tanımlar her ne kadar yaygın kullanılsalar da tanımlarından kaynaklanan zayıf kaldıkları noktalar vardır. Son dönemlerde ise bu türevlerin zayıflıklarını gidermek amacıyla Caputo-Fabrizio 2015 yılında (Caputo ve Fabrizio, 2015) ve Atangana-Baleanu 2016 yılında (Atangana ve Dumitru, 2016) yeni türev tanımları ortaya koymuşlardır. Atangana ve Baleanu tarafından Caputo-Fabrizio kesir mertebe türevindeki çekirdekte yapılan değişiklikle daha genel bir tanım ortaya konmuştur. Özellikle son dönemlerde bu tanımın kullanıldığı yeni birçok çalışma mevcuttur (Kucche ve Sutar, 2020; Hassouna v.d., 2021; (Almutairi vd., 2023; Huang vd., 2023).

Tanım 2.4.12. $f \in H^1(a,b), b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Caputo anlamında Atangana-Baleanu türevi

$${}_b^{ABC} D_t^\alpha \big(f(t)\big) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx$$

olarak tanımlanır. Burada $B(\alpha)$, $B(0) = B(1) = 1$ şartını sağlayan bir normalleştirme fonksiyonudur (Atangana ve Dumitru, 2016).

Tanım 2.4.13. $f \in H^1(a,b), b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Riemann anlamında Atangana-Baleanu türevi

$$ {}^{ABR}_{\ \ b}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t f(x)E_{\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha}\right]dx $$

olarak tanımlanır (Atangana ve Dumitru, 2016).

Teorem 2.4.6. $f \in H^1(a,b), b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere,

$$ {}^{ABC}_{\ \ 0}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) = {}^{ABR}_{\ \ 0}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) + H(t) $$

dir (Atangana ve Dumitru, 2016).

Tanım 2.4.14. Atangana-Baleanu integrali,

$$ {}^{AB}_{\ a}I_t^{\alpha}\{f(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy \ , $$

olarak tanımlanır. $\alpha = 0$ olduğunda başlangıç koşulları sağlanır ve $\alpha = 1$ olduğunda klasik anlamda integral elde edilir (Atangana ve Dumitru, 2016).

3. BULGULAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda kesirli diferansiyel denklem sistemleri için varlık ve teklik teoremleri hakkında yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgilere yer verilecektir. İkinci kısımda ise bir kesirli diferansiyel denklem sistemi için varlık ve teklik teoremleri ifade ve ispat edilecektir.

3.1. Kesir Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemleri için Yapılan Çalışmalar:

Varsha Daftardar-Gejji ve A. Babakhani 2002 yılında

$$D^{\alpha}[\bar{x}(t)-\bar{x}(0)]=A\bar{x}(t),\bar{x}(0)=\bar{x}_0,0<\alpha<1,$$

kesirli diferansiyel denklem sistemi için varlık ve teklik teoremlerini ispatladı (Daftardar-Gejji ve Babakhani, 2002).

Young Zhou (2009) çalışmasında, $f\big(t,x(t)\big):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vektör alanı ve $n\geq 1$ boyutunda uygun bir $\|\cdot\|$ bir norma sahip $\mathbb{R}^n$ tam bir metrik uzayı ve $\alpha\in(0,1)$ mertebesinde ve alt limiti t_0 olan Caputo anlamındaki türevi kullanarak

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t)=f\big(t,x(t)\big), & 0<\alpha<1,\\ \quad x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

kesirli diferansiyel denklem sistemi için başlangıç değer problemini inceledi.

Ahmad ve diğerleri 2011 yılında aşağıdaki problemde kesir mertebe diferansiyel denklem sistemi için çözümün varlık ve tekliğini ortaya koymuşlardır.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{n}x(t) = f\big(t, x(t)\big),\ t \in [0, T],\ T > 0,\ 1 < n \leq 2, \\ x(0) - \lambda_1(T) = \mu_1 \int_0^T g\big(s, x(s)\big)ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h\big(s, x(s)\big)ds, \end{cases}$$

burada $f, g, h: [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar, $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ dir (Ahmad vd., 2011).

Allaberen Ashyralyev ve Yagub A. Sharifov 2012 yılındaki çalışmalarında

$$\begin{aligned} &{}^{C}D_{0+}^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t)\big),\ t \in [0, T], 0 < \alpha \leq 1, \\ &Ex(0) + Bx(T) = \int_0^T g\big(s, x(s)\big)ds, \end{aligned}$$

yerel olmayan sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlamıştır. Burada $f\big(t, x(t)\big)$ ve $g\big(t, x(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ yeterince düzgün kendisi ve bütün türevleri sürekli fonksiyonlar, ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ $, \alpha$ mertebeden Caputo kesirli türevidir (Ashyralyev ve Sharifov, 2012).

Ahmad ve Ntouyas (2012) çalışmalarında aşağıdaki koşullarda verilen sınır değer problemi için çözümün hangi koşullar altında var olduğunu elde etti,

$$\begin{cases} {}^{C}D^{n}x(t) = f\big(t, x(t)\big),\ t \in [0, T],\ T > 0,\ 1 < n \leq 2, \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1 \left({}^{C}D^{p}x(0) \right) = \gamma_1, \\ \alpha_2 x(1) + \beta_2 \left({}^{C}D^{p}x(1) \right) = \gamma_2,\ 0 < p < 1. \end{cases}$$

burada $f: [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, (i = 1,2)$ reel sabit ile $\alpha_i \neq 0$ dır (Ahmad ve Ntouyas, 2012).

Xiaoyou Liu ve Zhenhai Liu (2013) kesirli ayrılmış sınır şartları ile verilen doğrusal olmayan aşağıdaki kesirli sınır değer probleminin çözümünün varlık ve tekliğini ispatladılar.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{n}x(t) = f\left(t, x(t), {}^{C}D^{m}x(t)\right), \ t \in [0,T], \ 1 \leq n \leq 2, \ 1 < m \leq 2 \\ a_1 x(0) + b_1\left({}^{C}D^{p}x(0)\right) = c_1, \\ a_2 x(T) + b_2\left({}^{C}D^{p}x(T)\right) = c_2, \ 0 < p < 1. \end{cases}$$

burada $f: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $a_i, b_i, c_i, (i = 1,2)$ reel sabit ile $\alpha_1 \neq 0$ ve $T > 0$ dır (Liu ve Liu, 2013).

Nazım I Mahmudov ve Areen Al-Khateeb (2019) Leray-Schauder'in alternatif daralma dönüşüm prensibini uygulayarak aşağıdaki doğrusal olmayan kesir mertebeden diferansiyel denklem sistemi için çözümün varlık ve tekliği ispatlanmıştır.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t), y(t)\big), t \in [0,T], 1 < \alpha \leq 2 \\ {}^{C}D^{\beta}x(t) = f\big(t, x(t), y(t)\big), t \in [0,T], 1 < \beta \leq 2 \end{cases}$$

$$x(T) = \eta y'(\rho), y(T) = \zeta x'(\mu), x(0) = 0, y(0) = 0, \rho, \mu \in [0,T]$$

(Mahmudov ve Al-Khateeb, 2019).

Djamila Chergui vd. (2019) tarafından yeni bir sınır değer için aşağıdaki problemin çözümün varlık ve tekliği ortaya konmuştur.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{n}x(t) = f\left(t, x(t), {}^{C}D^{r}x(t)\right), \ t \in [0,T], \ T > 0, \ 1 < n \leq 2, \ \ 0 < r \leq 1 \\ x(0) - \lambda_1(T) = \mu_1 \int_0^T g\big(s, x(s)\big)ds, \\ x'(0) - \lambda_2 x'(T) = \mu_2 \int_0^T h\big(s, x(s)\big)ds, \end{cases}$$

burada $f \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g, h: [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$ dir (Chergui vd., 2019).

Cheikh Guendouz, Jamal Eddine Lazreg, Juan J.Nieto ve Abdelghani Ouahab (2020) çalışmalarında aşağıdaki başlangıç değerleri verilen kesir mertebeden diferansiyel denklem sistemin çözümlerinin varlık ve tekliklerini elde etmişlerdir.

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f\big(t, x(t), y(t)\big), \\ {}^{C}D^{\beta}x(t) = g\big(t, x(t), y(t)\big), \ \ t \in J \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

burada $\alpha, \beta \in (0,1]$, $J = [0,\infty)$, $f, g: J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ dır (Guendouz vd., 2020).

Yasir A. Madani ve diğerlerinin (2024) çalışmalarında aşağıdaki başlangıç değerleri verilen doğrusal olmayan kesir mertebeden diferansiyel denklem sistemin çözümlerinin varlık ve tekliklerini elde etmişlerdir.

$$\begin{cases} D^g u(t) = f_1\big(t, u(t), w(t), y(t)\big)\,; t \in \mathcal{g}, \\ D^h w(t) = f_2\big(t, u(t), w(t), y(t)\big)\,; t \in \mathcal{g}, \\ D^l y(t) = f_3\big(t, u(t), w(t), y(t)\big)\,; t \in \mathcal{g}, \\ D^{g-3}u(0) = \sigma_0 D^{g-3}u(T),\ D^{g-2}u(0) = \varsigma_0 D^{g-2}u(T), D^{g-1}u(0) = \tau_0 D^{g-1}u(T) \\ D^{h-3}w(0) = \sigma_1 D^{h-3}w(T),\ D^{h-2}w(0) = \varsigma_1 D^{h-2}w(T), D^{h-1}w(0) = \tau_1 D^{h-1}w(T) \\ D^{l-3}y(0) = \sigma_2 D^{l-3}y(T),\ D^{l-2}y(0) = \varsigma_2 D^{l-2}y(T), D^{l-1}y(0) = \tau_2 D^{l-1}y(T), \end{cases}$$

burada $g, h, l \in (2,3], \mathcal{g} = [0, T], T > 0$ ve $\sigma_n, \varsigma_n, \tau_n \neq 1\ (n = 0,1,2)$. $f_i(i = 1,2,3): \mathcal{g} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve D^g, D^h, D^l Reimann-Liouville kesir mertebeden türevlerdir (Madani vd., 2024).

3.2. Bir Kesir Mertebe Diferansiyel Denklem Sistemleri için Sabit Nokta Yaklaşımı

Bu kısımda aşağıda verilen kesir mertebe diferansiyel denklem sisteminin varlık ve teklik koşullarını veren teorem ispatlanacaktır.

$$\begin{cases} {}^{ABC}D^{\alpha}_{0,t}x(t) + T\big(x(t), y(t)\big) = \phi\big(t, x(t), y(t)\big)\ , \\ {}^{ABC}D^{\beta}_{0,t}y(t) + S\big(x(t), y(t)\big) = \psi\big(t, x(t), y(t)\big)\,, \\ \qquad t \in [0, b]\ \ ,\ 0 < \alpha, \beta < 1 \\ \qquad x(0) = x_0\ \ ,\ \ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{9}$$

Şimdi problemimize yardımcı olan bazı teoremlere yer verelim. İlk olarak, $N\big(y(t)\big)$ lineer olmayan bir fonksiyon olmak üzere

$${}^{ABC}D^{\alpha}_{0,t}x(t) + N\big(y(t)\big) = g\big(t, y(t)\big),\ \ 0 < \alpha < 1,\ y(0) = y_0$$

(10)

Atangana-Baleanu Caputo kesir mertebe diferansiyel denklemin çözümünün lokal varlığını veren aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2.1. $J = [0, b]$, $C = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \leq \delta\}$, $D = J \times C$ ve $f(t, y) = g(t, y) - N(y)$ olsun. Kabul edelim ki $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ ve $N: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

i. $\|f\|_\infty \leq \big(\delta B(\alpha)/(1-\alpha)\big)$,

ii. $g(t, y)$ ve $N(y)$ sürekli fonksiyonlar,

Bu durumda, $b^* = min\left\{b;\ \big((B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)/\alpha)\big)\Big((\delta/\|f\|_\infty) - \big(1 - \alpha/B(\alpha)\big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$ olmak üzere (10) probleminin çözümü olan bir $y: [0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır (Hassouna vd., 2021).

(10) probleminin çözümünün evrensel varlık ve tekliği aşağıdaki teoremlerle ortaya konmuştur (Hassouna vd., 2021).

Teorem 3.2.2. $a = \big(B(\alpha)/(1-\alpha)\big)$ ve $b = \alpha/(1-\alpha)$ olsun. Bu taktirde, (10) probleminin çözümü $f(t) = g(t, y) - N(y)$ olmak üzere

$$y(t) = \frac{1}{a} f\big(t, y(t)\big) + y(0) E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) - \int_0^t y(s) E'_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha) ds \qquad (11)$$

dir (Hassouna vd., 2021).

Teorem 3.2.3. $J = [0, b]$, $C = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \leq \delta\}$, $D = J \times C$ ve $f(t, y) = g(t, y) - N(y)$ olsun. Kabul edelim ki $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ ve $N: C \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlasın.

i. $\forall y, \bar{y} \in B$ ve $\forall t \in J$ için

$$|g(t, y) - g(t, \bar{y})| \leq L_1 |y - \bar{y}|$$

olacak şekilde $L_1 \geq 0$ sayısı vardır.

ii. $\forall y, \bar{y} \in B$ için

$$|N(y) - N(\bar{y})| \leq L_2 |y - \bar{y}|$$

olacak şekilde $L_2 \geq 0$ sayısı vardır.

iii. $L_1 + L_2 < a$.

Bu taktirde (10) probleminin $y: [0, b] \to \mathbb{R}$ bir tek çözümü vardır (Hassouna vd., 2021).

Şimdi, $\alpha, \beta \in (0,1), J = [0, b], K = \{x, y \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta\}$ $R = J \times K \times K$ ve $f(t, x, y) = \phi(t, x, y) - T(x, y),\; g(t, x, y) = \psi(t, x, y) - S(x, y)$ $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere ${}^{ABC}D^{\alpha}$ ve ${}^{ABC}D^{\beta}$ Atangana-Baleanu Caputo kesirli türevi ile verilen (9) problemini göz önüne alalım.

Teorem 3.2.4. $(x, y) \in C[0, b] \times C[0, b]$ fonksiyonları (9) probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak $a_1 = \left(B(\alpha)/(1-\alpha)\right)$, $a_2 = \left(B(\beta)/(1-\beta)\right)$ ve $t \in [0, b]$ için

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{a_1} f\left(t, x(t), y(t)\right) + x_0 E_{\alpha,1}(-bt^{\alpha}) - \int_0^t x(s) E'_{\alpha,1}(-b(t-s)^{\alpha}) ds \\ y(t) &= \frac{1}{a_2} g\left(t, x(t), y(t)\right) + y_0 E_{\beta,1}\left(-bt^{\beta}\right) - \int_0^t y(s) E'_{\beta,1}\left(-b(t-s)^{\beta}\right) ds \end{aligned} \tag{12}$$

dir.

Teorem 3.2.5. $J = [0, b]\,, K = \{x, y \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta\}$, olmak üzere $R = J \times K \times K,\; T{:}\, S{:}\, K \times K \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,\; f(t, x, y) = \phi(t, x, y) - T(x, y)$, $g(t, x, y) = \psi(t, x, y) - S(x, y)$ olsun. $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in (0,1)$ ve olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

i. ϕ, ψ, T, S sürekli fonksiyonlar,

ii. $\|f(t, x, y)\| \leq a_1\,, \|g(t, x, y)\| \leq a_2$,

iii. $\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \; K$ için

$$|\phi(t, x, y) - \phi(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} |x - \bar{x}| + \frac{L_2}{\Gamma(\alpha)} |y - \bar{y}|,$$

$$|T(x, y) - T(\bar{x}, \bar{y})| \leq \frac{L_3}{\Gamma(\alpha)} |x - \bar{x}| + \frac{L_4}{\Gamma(\alpha)} |y - \bar{y}|,$$

olacak şekilde $L_1, L_2, L_3, L_4 > 0$ ve sayıları mevcut olsun,

iv. $\forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \;\in\; K$ için

$$|\psi(t, x, y) - \psi(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq \frac{N_1}{\Gamma(\beta)} |x - \bar{x}| + \frac{N_1}{\Gamma(\beta)} |y - \bar{y}|,$$

$$|S(x, y) - S(\bar{x}, \bar{y})| \leq \frac{N_3}{\Gamma(\beta)} |x - \bar{x}| + \frac{N_4}{\Gamma(\beta)} |y - \bar{y}|,$$

olacak şekilde $N_1, N_2, N_3, N_4 > 0$ sayıları mevcut olsun,

v. $L_1 + L_2 < a_1$ ve $L_3 + L_4 < a_1$ ve $N_1 + N_2 < a_2$ ve $N_3 + N_4 < a_2$olsun.

vi. $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} < 1$

Bu taktirde, (9) probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: $C[0,b] \times C[0,b]$ Banach uzayının boş olmayan ve kapalı bir alt küme $G = \{(x,y) \in C[0,b] \times C[0,b] \ : \ |x - x_0| \le \delta, |y - y_0| \le \delta\}$ olsun. (9) problemimizi Teorem 3.2.5 şartları altında G üzerinde $A(x,y) = \big(A_1(x,y),\ A_2(x,y)\big)$ aşağıdaki gibi tanımlı olan bir sabit nokta problemine dönüştürüyoruz.

$$\begin{cases} A_1(x,y)(t) = \dfrac{1}{a_1} f\big(t, x(t), y(t)\big) + x_0 E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) - \displaystyle\int_0^t x(s) E'_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha) ds \\ A_2(x,y)(t) = \dfrac{1}{a_2} g\big(t, x(t), y(t)\big) + y_0 E_{\beta,1}\big(-bt^\beta\big) - \displaystyle\int_0^t y(s) E'_{\beta,1}\big(-b(t-s)^\beta\big) ds \end{cases}$$

dönüşümünün bir sabit noktasına dönüştürelim. Burada ilk olarak A dönüşümünün iyi tanımlı olduğu gösterilecektir. $(x,y) \in G$ ve $t \in [0,b]$ için

$$A_1(x,y)(t) = \frac{1}{a_1} f\big(t, x(t), y(t)\big) + x_0 E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) - \int_0^t x(s) E'_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha) ds$$

olup

$$\begin{aligned} A_1(x,y)(t) = {} & \frac{1}{a_1} f\big(t, x(t), y(t)\big) + x_0 E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) \\ & - \left\{ [x(s) \cdot E(-b(t-s)^\alpha)]_{s=0}^{s=t} - \int_0^t x'(s) E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha) ds \right\} \\ A_1(x,y)(t) = {} & \frac{1}{a_1} f\big(t, x(t), y(t)\big) + 2x_0 E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) - x(t) \\ & + \int_0^t x'(s) E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha) ds. \end{aligned}$$

$$2a_1A_1(x,y)(t) = f\big(t,x(t),y(t)\big) + 2a_1x_0E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) + a_1\int_0^t x'(s)E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha)ds$$

$$A_1(x,y)(t) = \frac{1}{2a_1}f\big(t,x(t),y(t)\big) + x_0E_{\alpha,1}(-bt^\alpha) + \frac{1}{2}\int_0^t x'(s)E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha)ds$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\|A_1(x,y)\| &\le \frac{1}{2a_1}\big\|f\big(t,x(t),y(t)\big)\big\| + |x_0|\underbrace{\|E_{\alpha,1}(-bt^\alpha)\|}_{\le 1} + \frac{1}{2}\left\|\int_0^t x'(s)E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha)ds\right\| \\
&\le \frac{1}{2a_1}\big\|f\big(t,x(t),y(t)\big)\big\| + |x_0| + \frac{1}{2}\underbrace{\|E_{\alpha,1}(-b(t-s)^\alpha)\|}_{\le 1}\left\|\int_0^t x'(s)ds\right\| \\
&\le \frac{1}{2a_1}\big\|f\big(t,x(t),y(t)\big)\big\| + |x_0| + \left(\frac{1}{2}|x(s)|_0^t\right) \\
&\le \frac{1}{2a_1}a_1 + \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}|x_0| \\
&= \frac{1}{2}(1 + \|x\| + |x_0|)\end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\|A_2(x,y)\| \le \frac{1}{2}(1 + \|y\| + |y_0|)$$

dir. Böylece, A dönüşümü iyi tanımlıdır. Açık olarak A dönüşümünün sabit noktaları (9) probleminin çözümleridir.

Şimdi A nın daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $\forall\ (x,y),(\bar{x},\bar{y}) \in G$ için

$$|A_1(x,y)(t) - A_1(\bar{x},\bar{y})(t)| =$$

$$= \left| \frac{1}{2a_1} f\big(t, x(t), y(t)\big) + x_0 E_{\alpha,1}(-bt^{\alpha}) + \frac{1}{2}\int_0^t x'(s) E_{\alpha,1}(-b(t-s)^{\alpha}) ds \right.$$

$$- \frac{1}{2a_1} f\big(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) - \bar{x}_0 E_{\alpha,1}(-bt^{\alpha})$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t \bar{x}'(s) E_{\alpha,1}(-b(t-s)^{\alpha}) ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{2a_1} \left| f\big(t, x(t), y(t)\big) - f\big(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \right|$$

$$+ \left| (x_0 - \bar{x}_0) E_{\alpha,1}(-bt^{\alpha}) \right|$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \int_0^t \big(x'(s) - \bar{x}'(s)\big) E_{\alpha,1}(-b(t-s)^{\alpha}) ds \right|$$

buradan norm alınacak olursa;

$$|A_1(x,y)(t) - A_1(\bar{x},\bar{y})(t)| \leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|)$$

$$+ \|x_0 - \bar{x}_0\| \underbrace{\|E_{\alpha,1}(-bt^{\alpha})\|}_{\leq 1}$$

$$+ \frac{1}{2} \|E_{\alpha,1}(-b(t-s)^{\alpha})\| \left| \int_0^t \big(x'(s) - \bar{x}'(s)\big) ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|) + \|x_0 - \bar{x}_0\| + \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|$$

$$\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|) + \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|$$

$$\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|)$$

$$+ \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\|x - \bar{x}\| + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\|y - \bar{y}\|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|)$$

olup benzer olarak,

$$|A_2(x,y)(t) - A_2(\bar{x},\bar{y})(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|).$$

olur, böylece,

$$\|A(x,y) - A(\bar{x},\bar{y})\| \leq M \begin{pmatrix} \|x-\bar{x}\| \\ \|y-\bar{y}\| \end{pmatrix}$$

dir. Burada,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\ \frac{1}{\Gamma(\beta)} & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}^2).$$

sıfıra yakınsak olduğundan A bir daralma dönüşümüdür. Şu halde Teorem 2.3.4 gereği A dönüşümü (9) probleminin çözümü olan bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Teorem 3.2.5 için sayısal bir örnek verilecektir.

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_{0,t}^{0,4}x(t) + x^2 - y \; = e^{-t}x + siny\,, \\ {}^{ABC}D_{0,t}^{0,5}y(t) + y^2 - x = cosx + ty\,, \\ t \in [0,2]\;\;, \qquad 0 < \alpha, \beta < 1 \\ x(0) = 1\;\;,\;\; y(0) = 2 \end{cases}$$

$J = [0,2]$, $K = \{x, y \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ olmak üzere $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\delta = 1$ değerleri için $K = (0,2) \times (1,3)$ ayrıca, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5$ ve $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ olsun.

$$\phi(t,x,y) = e^{-t}x + siny \;\;,\;\; \psi(t,x,y) = cosx + ty$$
$$T(x,y) = x^2 - y \;,\; S(x,y) = y^2 - x\,.$$

sürekli fonksiyonları için

$$f(t,x,y) = e^{-t}x + siny - (x^2 - y)\,,$$
$$g(t,x,y) = cosx + ty - (y^2 - x)\,,$$

dir. Şu halde,

$$L_1 = \frac{1}{\Gamma(0.4)}\,, \quad L_2 = \frac{1}{\Gamma(0.4)}\,,$$

$$N_1 = \frac{1}{\Gamma(0.5)}\,, \quad N_2 = \frac{1}{\Gamma(0.5)}$$

$$L_3 = \frac{1}{\Gamma(0.4)}\,, \quad L_4 = \frac{1}{\Gamma(0.4)}\,,$$

$$N_3 = \frac{1}{\Gamma(0.5)}\,, \quad N_4 = \frac{1}{\Gamma(0.5)}$$

Lipschitz sabitleri için

$$L_1 + L_2 < a_1\,, \;\; L_3 + L_4 < a_1,$$
$$N_1 + N_2 < a_2\,, \;\; N_3 + N_4 < a_2,$$

koşulları sağlanır ve

$$\frac{1}{\Gamma(0.4)} + \frac{1}{\Gamma(0.5)} < 1.$$

olduğundan Teorem 3.2.5 den (9) probleminin tek bir çözümü olduğu ortaya çıkar.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Atangana-Baleanu Caputo kesirli türevi ile verilen

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_{0,t}^{\alpha}x(t) + T\big(x(t),y(t)\big) = \phi\big(t,x(t),y(t)\big) \ , \\ {}^{ABC}D_{0,t}^{\beta}y(t) + S\big(x(t),y(t)\big) = \psi\big(t,x(t),y(t)\big) , \\ \qquad\qquad t \in [0,b] \ \ , \ 0 < \alpha,\beta < 1 \\ \qquad\qquad x(0) = x_0 \ \ , \ \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümünün varlık ve teklik için yeterli koşullar Teorem 3.2.5 de elde edildi. Bu problemin çözümünde Perov anlamında sabit nokta teoremi kullanıldı. Bu çalışma daha sonraki farklı kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün varlık ve tekliğinin araştırılmasında yol gösterici olacaktır.

Bu tez çalışması boyunca yapılan araştırmalar sonrası aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- Güncel problemlerin modellenerek çözülmesinde kesirli analiz en önemli araçlardan biridir.
- Kesir mertebe diferansiyel denklemler geniş uygulama alanına sahiptir.

- Uygulamalı matematik başta olmak üzere olmak üzere hem matematik hem de diğer anabilim dallarında sabit nokta teoremlerinin uygulamalarına sıklıkla rastlanmaktadır.
- Sabit nokta teorisine yüz yılı aşkın bir sürede her geçen gün farklı teoremler kazandırılmıştır.
- Başlangıç değer problemleri, integral denklemler, diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

KAYNAKÇA

Agrawal, O. P. (2002). Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *272*(1), 368–379. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00180-4

Ahmad, B., Nieto, J. J., ve Alsaedi, A. (2011). Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with non-separated type integral boundary conditions. *Acta Mathematica Scientia*, *31*(6), 2122–2130. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60388-3

Ahmad, B., ve Ntouyas, S. (2012). *Fractional differential inclusions with fractional separated boundary conditions*. *15*(3), 362–382. https://doi.org/doi:10.2478/s13540-012-0027-y

Almutairi, N., Saber, S., ve Ahmad, H. (2023). The fractal-fractional Atangana-Baleanu operator for pneumonia disease: stability, statistical and numerical analyses. *AIMS Mathematics*, *8*(12), 29382–29410.

Ashyralyev, A., ve Sharifov, Y. A. (2012). Existence and uniqueness of solutions for the system of nonlinear fractional differential equations with nonlocal and integral boundary conditions. *Abstract and Applied Analysis*, *2012*. https://doi.org/10.1155/2012/594802

Atangana, A., ve Dumitru, B. (2016). *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theroy and aplicaion to heat transfer mode. 2*. https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results

Atangana, A., ve Koca, I. (2016). Chaos in a simple nonlinear system with Atangana–Baleanu derivatives with fractional order. *Chaos, Solitons ve Fractals*, *89*, 447–454.

Bagley, R. L., ve Torvik, P. J. (1983). A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *Journal of Rheology*, *27*(3), 201–210. https://doi.org/10.1122/1.549724

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, *3*(1), 133–181.

Başarır, M., ve Türker, E. S. (2003). *Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler* (2. Baskı). Değişim Yayınları.

Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Yayınları.

Berinde, V., ve Takens, F. (2007). *Iterative approximation of fixed points* (Vol. 1912). Springer.

Caputo, M., ve Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, *1*(2), 73–85. https://doi.org/10.12785/pfda/010201

Catania, G., ve Sorrentino, S. (2007). *Analytical Modelling and Experimental Identification of Viscoelastic Mechanical Systems BT - Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering* (J. Sabatier, O. P. Agrawal, ve J. A. T. Machado (eds.); pp. 403–416). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6042-7_28

Cheikh Guendouz, Jamal Eddine Lazreg, Juan J. Nieto, A. O. (2020). Existence and Compactness Results for a System of Fractional Differential Equations. *Journal of Function Spaces*, *2020*. https://doi.org/10.1155/2020/5735140

Chergui, D., Oussaeif, T. E., ve Ahcene, M. (2019). Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations depending on lower-order derivative with non-separated type integral boundary conditions. *AIMS Mathematics*, *4*(1), 112–133. https://doi.org/10.3934/Math.2019.1.112

D.Aliprantis, C., ve Burkinshaw, O. (1998). *Principles Of Real Analysis*. Academic Press.

Daftardar-Gejji, V., ve Babakhani, A. (2002). Analysis of a system of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *293*(2004), 511–522. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.01.013

De la Sen, M. (2011). Positivity and stability of the solutions of Caputo fractional linear time-invariant systems of any order with internal point delays. *Abstract and Applied Analysis*, *2011*.

Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations. In C. J.-M. Morel, G. F. Takens, ve P. B. Teissier (Eds.), *Lecture Notes in Mathematics*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-14574-2

Diethelm, K., ve Ford, N. J. (2010). The analysis of fractional differential equations. *Lect. Notes Math*, *2004*, 3–12.

Din, F. U., Din, M., Ishtiaq, U., ve Sessa, S. (2023). Perov fixed-point results on F-contraction mappings equipped with binary relation. *Mathematics*, *11*(1), 238.

Dokuyucu, M. A. (2020). *Caputo and Atangana-Baleanu-Caputo Fractional Derivative Applied to Garden Equation*. *5*(1), 1–7.

Graef, J. R., Henderson, J., ve Ouahab, A. (2018). *Topological methods for differential equations and inclusions, Monographs and Research Notes in Mathematics Series Pro file*. CRC Press.

Guendouz, C., Lazreg, J. E., Nieto, J. J., ve Ouahab, A. (2020). Existence and compactness results for a system of fractional differential equations. *Journal of Function Spaces*, *2020*, 1–12.

Hassouna, M., El Kinani, E. H., ve Ouhadan, A. (2021). Global Existence and Uniqueness of Solution of Atangana–Baleanu Caputo Fractional Differential Equation with Nonlinear Term and Approximate Solutions. *International Journal of Differential Equations*, *2021*, 5675789. https://doi.org/10.1155/2021/5675789

Huang, W.-H., Samraiz, M., Mehmood, A., Baleanu, D., Rahman, G., ve Naheed, S. (2023). Modified Atangana-Baleanu fractional operators involving generalized Mittag-Leffler function. *Alexandria Engineering Journal*, *75*, 639–648.

Iverson, K. E. (1962). *A programming Language*.

Köklü, K. (2018). *İntegral Denklemler*. Papatya Yayıncılık.

Kucche, K. D., ve Sutar, S. T. (2020). Analysis of nonlinear fractional differential equations involving Atangana-Baleanu-Caputo derivative. *Chaos, Solitons and Fractals*, *143*, 1–20. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110556

Lakshmikantham, V., ve Vatsala, A. S. (2007). Theory of fractional differential inequalities and applications. *Communications in Applied Analysis*, *11*(3–4), 395–402.

Liu, X., ve Liu, Z. (2013). Separated boundary value problem for fractional differential equations depending on lower-order derivative. *Advances in Difference Equations*, *2013*(1), 78. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-78

Madani, Y. A., Rabih, M. N. A., Alqarni, F. A., Ali, Z., Aldwoah, K. A., ve Hleili, M. (2024). Existence, uniqueness, and stability of a nonlinear tripled fractional order differential system. *Fractal and Fractional*, *8*(7), 416.

Magin, R. (2004). Fractional calculus in bioengineering. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, *32*(1), 1–104.

Mahmudov, N. I., ve Al-Khateeb, A. (2019). Stability, existence and uniqueness of boundary value problems for a coupled system of fractional differential equations. *Mathematics*, *7*, 1–14. https://doi.org/10.3390/math7040354

Mainardi, F. (1997). *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2664-6

Metzler, R., ve Klafter, J. (2000). Boundary value problems for fractional diffusion equations. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *278*(1–2), 107–125.

Miller, K. S., ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *(No Title)*.

Oldham, K. B. (2010). Fractional differential equations in electrochemistry. *Advances in Engineering Software*, *41*(1), 9–12. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2008.12.012

Oldham, K. B., ve Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press. https://books.google.com.tr/books?hl=trvelr=veid=8hBuTfhpZrwCveoi=fndvepg=PP1vedq=the+fractional+calculus+oldham+pdfveots=Ac4HyPBDaJvesig=LCaUG5b9CpA5R8Tb71O-rJZ3GPgveredir_esc=y#v=onepageveq=betavef=false

Ortigueira, M. (2003). Special issue on fractional signal processing and applications. *Signal Processing*, *83*(11), 2285–2480.

Padovan, J. (1987). Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics*, *2*(4), 271–287.

Perov, A. I. (1964). On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. *Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn*, *2*(1964), 115–134.

Picard, É. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *6*, 145–210.

Podlubny, I. (1999). Academic Press: Cambridge. *MA*, *USA*.

Podlubny, Igor. (1999). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.

Rabei, E. M., Alhalholy, T. S., ve Rousan, A. (2004). Potentials of arbitrary forces with fractional derivatives. *International Journal of Modern Physics A*, *19*(17n18), 3083–3092.

Riabi, L., Hamdi Cherif, M., ve Cattani, C. (2023). An Efficient Approach to Solving the Fractional SIR Epidemic Model with the Atangana–Baleanu–Caputo Fractional Operator. *Fractal and Fractional*, *7*(8), 618.

Ross, S. L. (1984). *Differential equations 3rd edition Shepley L.Ross.pdf*.

Rus, I. A. (2001). *Generalized contractions and applications*. Cluj University Press.

Rynne, B. P., ve Youngson, M. A. (2008). *Linear Funtional Analysis* (Second Edi). Springer.

Sorrentinos, G. (2006). Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams. *Proceedings of the IMAS Conference and Exposition on Structural Dynamics*.

Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yanınları.

Syam, M. I., ve Al-Refai, M. (2019). Fractional differential equations with Atangana–Baleanu fractional derivative: Analysis and applications. *Chaos, Solitons ve Fractals: X*, *2*, 100013. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.csfx.2019.100013

Varga, R. S. (2000). Matrix Properties and Concepts. *Matrix Iterative Analysis*, 1–30.

Vinagre, B. M., Podlubny, I., Hernandez, A., ve Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *3*(3), 231–248.

Viorel, A. (2011). *Contributions to the study of nonlinear evolution equations*.

Weilbeer, M. (2005). Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. In *Univ Braunschweig Fakultat fur Mathematik und Informatik Diss Braunschweig*. http://rzbl04.biblio.etc.tu-bs.de:8080/docportal/servlets/MCRFileNodeServlet/DocPortal_derivate_00002234/dissertation.pdf

Zhou, Y. (2009). Existence and uniqueness of solitions for a system of fractional differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *12*.

ÖZGEÇMİŞ

Alperen Hasan KOCAĞ, lise eğitimini Düziçi Anadolu Öğretmen Lisesi'nde 1999 yılında bitirdi. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne yerleşip 2006 yılında tezsiz yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2006 yılından sonra çeşitli kurumlarda Öğretmenlik ve ücretli öğretmenlik yaptı. 2021 yılında Erzincan Çok Programlı Anadolu Lisesinde Matematik öğretmenliği yaptı. 2024 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2024 yılından bu yana Gümüşhane Mareşal Çakmak sosyal bilimler Lisesi'nde Matematik öğretmenliği yapmaktadır.

Yayınlar:

Cona, L. and Kocağ, A. H. (2023). Fixed Point Approach for Some Fractional Order Differential Equation Systems, 3.International Trakya Scientific Research Congress, November 25-26, Edirne, Turkey. (Tez kapsamında hazırlandı.)