

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LAPLACE DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELİKE HEKİMOĞLU

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ UFUK KAYA

HAZİRAN 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LAPLACE DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MELİKE HEKİMOĞLU

ORCID: 0009-0000-1511-7883

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ UFUK KAYA

HAZİRAN 2025

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**Laplace Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 13/06/2025

İmza

Melike HEKİMOĞLU

T.C.

BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Laplace Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri” başlıklı yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 13/06/2025

Tezi Hazırlayan

İmza

Melike HEKİMOĞLU

Danışman

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

İmza

Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Melike HEKİMOĞLU tarafından hazırlanan “**Laplace Dönüşüm Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri**” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 13/06/2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

Başkan: Prof. Dr. Abdullah KABLAN
(Gaziantep Üniversitesi)

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Derya ARSLAN
(Bitlis Eren Üniversitesi)

İMZA

.....

.....

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

..../...../2025

Prof. Dr. Mehmet Bakır ŞENGÜL
Enstitü Müdürü

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

LAPLACE DÖNÜŞÜM UZAYINDA DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

MELİKE HEKİMOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA

Haziran 2025

ÖZET

Laplace dönüşümü $[0, \infty)$ 'da integrallenebilir fonksiyonlara $L\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ biçiminde uygulanır. Bu dönüşüm diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere indirger ve diferansiyel denklemlerin önemli bir sınıfında çözüme ulaşmak için kullanışlıdır. Bunun dışında Bilateral (İki- Taraflı) Laplace dönüşümü $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı fonksiyonlara uygulanır ve bu dönüşüm de diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Klasik yöntemde, bu tür dönüşümler kullanılarak diferansiyel denklemlerin çözümü bulunurken diferansiyel denklemin Laplace (ya da Bilateral Laplace) dönüşümü alınarak çözüme ulaşılır. Biz tezde farklı bir bakış açısı kullanacağız. Diferansiyel denklemin kendisinin Laplace (Bilateral Laplace) uzayında olduğunu varsayacağız. Bunun için aradığımız y çözümünün $y(s) = L\{f(x)\}(s)$ biçimde (ya da $y(s) = B\{f(x)\}(s)$ biçiminde), bilinmeyen bir fonksiyonun Laplace (Bilateral Laplace) dönüşümü olduğunu varsayacağız ve çözümleri buna göre arayacağız. Bu çözümleri araştırırken diferansiyel denklemin koşulları ve özelliklerine göre Laplace dönüşümünü veya Bilateral Laplace dönüşümünü kullanacağız.

Anahtar kelimeler: Laplace dönüşümü, Dirac delta fonksiyonu, Genelleştirilmiş fonksiyonlar, Bilateral Laplace dönüşümü

Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Mathematics
SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN LAPLACE TRANSFORM
SPACE

Master's Thesis

MELİKE HEKİMOĞLU

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ufuk KAYA

June 2025

ABSTRACT

The Laplace transform is applied to integrable functions in $[0, \infty)$ by $L\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx$. This transformation reduces differential equations to algebraic equations and is useful for solving an important class of differential equations. Furthermore, the Bilateral Laplace transform is applied to integrable functions defined on the interval $(-\infty, +\infty)$ and is also used to solve differential equations. In the classical method, when solving differential equations using such transformations, the solution is obtained by taking the Laplace (or Bilateral Laplace) transform of the differential equation. We use a different perspective. We assume that the differential equation itself is in Laplace (Bilateral Laplace) space. So, we assume that the solution y is the Laplace transform of an unknown function in the form $y(s) = L\{f(x)\}(s)$ (or $y(s) = B\{f(x)\}(s)$) and search for solutions accordingly. We use the Laplace transform or Bilateral Laplace transform depending on the conditions and properties of the differential equation.

Keywords: Laplace transform, Dirac delta function, Generalized functions, Bilateral Laplace transform

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamızın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA'ya, Eren Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve yüksek lisans eğitimim sırasında desteğini esirgemeyen, her türlü zorlukta yanımda olan sevgili ailemin her bir ferdine ve beni bu yolda hiç yalnız bırakmayan her koşulda destek olan sevgili arkadaşım Rümeysa ŞAVKLIYILDIZ'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1.GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	4
2.1. Diferansiyel Denklemler	4
2.2 Laplace Dönüşümü	6
2.2.1. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri	6
2.2.2. Ters Laplace Dönüşümü.....	7
2.3. Bilateral Laplace Dönüşümü.....	9
2.3.1. Bilateral Laplace Dönüşümün Özellikleri	9
2.3.2. Ters Bilateral Laplace Dönüşümü	10
2.4. Dirac Delta Fonksiyonu	11
2.4.1 Dirac Delta Fonksiyonun Özellikleri.....	12
2.4.2. Dirac Delta Fonksiyonun Laplace Dönüşümü.....	14
2.4.3. Dirac Delta Fonksiyonun Bilateral Laplace Dönüşümü.....	15
2.5. Heaviside Birim Fonksiyonu	16
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	20
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	32

1.GİRİŞ

Diferansiyel denklem; bir ya da birden fazla fonksiyonun, türevlerini ilişkilendiren denklemdir. Kimya, fizik, biyoloji, mühendislik, ekonomi gibi alanlarındaki matematiksel modellemeler yapmak için genellikle diferansiyel denklemlerden yararlanır.

Diferansiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında Isaac Newton ve Gottfried Leibniz'in diferansiyel hesap konusundaki hesaplamaları ile diferansiyel denklemler kavramı başlar. Isaac Newton'un Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum adlı kitabında üç diferansiyel denklem tanımlamıştır. Bunlar:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

dir. Burada y , x 'in bilinmeyen bir fonksiyonu ve f bilinen bir fonksiyondur. Isaac Newton Sonsuz Seriler yöntemini kullanarak bu örnekler ve benzerlerini çözer ayrıca çözümlerin bir tane olup olmadığını da sorgular. [1].

Diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi için kullanılan bir diğer yöntem de Laplace dönüşümü yöntemidir. Pierre Simon Laplace'dan adını alan dönüşüm, tek değişkenli bir fonksiyonu dönüştüren bir integral operatörüdür. Laplace 1814 yılında fonksiyonların kullanımı alanında kapsamlı kitaplar yazdı ve Laplace dönüşümünün integral formu bunun sonucunda gelişmiş ve en son

$$L\{f\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

biçiminde verilmiştir [2].

Matematikte, İki taraflı Laplace dönüşümü veya Bilateral Laplace dönüşümü olarak da bilinen dönüşüm ise, olasılığın moment üreten fonksiyonuna eşdeğer bir integral dönüşümüdür. Bilateral Laplace dönüşümü; Fourier dönüşümü, Mellin dönüşümü, Z dönüşümü ve Tek taraflı Laplace dönüşümü ile yakından ilişkilidir ve diferansiyel denklemlerin çözümü için daha geniş çözüm yelpazesi sunar. Ayrıca Bilateral Laplace dönüşümü ve Laplace dönüşümü, matematiksel analiz ve mühendislik uygulamalarında sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Her iki dönüşümde diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir rol oynamaktadır.

f , tüm reel sayılar için tanımlanmış bir fonksiyonsa, Bilateral Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanmıştır: [3]

$$B\{f\}(s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Bilateral Laplace dönüşümü; $y = c$ ($c \neq 0$ sabit), $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$), $y = a^x$ ($a > 0$), $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), $y = \sin x$, $y = \cos x$, gibi elementer fonksiyonlara uygulanamaz. Bunun sebebi $(-\infty, \infty)$ aralığında bu fonksiyonların Bilateral Laplace dönüşümüne karşılık gelen integrallerin ıraksak olmasıdır. Bilateral Laplace dönüşümü, daha çok parçalı fonksiyonlara ya da Dirac Delta fonksiyonu gibi genelleşmiş fonksiyonlara uygulanır.

Diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümü ile çözerken, bu denklemlerin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygulanır. Elde edilen denklemi çözümleyerek $L\{y\}$ fonksiyonunu ayırıştırırız. Bu fonksiyonun Ters Laplace dönüşümü alınarak da denklemin çözümüne ulaşılmış olunur. Biz Laplace (Bilateral Laplace) dönüşümünü kullanarak farklı bir bakış açısıyla ilerleyeceğiz. Diferansiyel denklemin kendisinin Laplace (Bilateral Laplace) uzayında olduğunu varsayarak y çözümünü arayacağız. Denklemden y gördüğümüz yere $L\{f(x)\}(s)$ (ya da $B\{f(x)\}(s)$) yazacağız. Dolayısıyla y' , y'' gibi ifadeler de $\frac{dL\{f(x)\}(s)}{ds}$, $\frac{d^2L\{f(x)\}(s)}{ds^2}$ (ya da $\frac{dB\{f(x)\}(s)}{ds}$, $\frac{d^2B\{f(x)\}(s)}{ds^2}$) biçimine dönüşecek. Karşıma çıkan yeni denklemi çözümleyip (Bu yeni denklem cebirsel ya da diferansiyel

olabilir) bilinmeyen f fonksiyonunu bulacağız. Bulunan f fonksiyonunun Laplace dönüşümü (ya da Bilateral Laplace dönüşümü) alınınca denklemin çözümünü elde etmiş olacağız.

Tezdeki yöntemin diferansiyel denklemlere uygulamasından kısaca bahsedelim. Belirtelim ki, yöntem ilerleyen bölümlerde daha detaylı verilecektir. $ay'' + by' + cy = q(x)$ gibi bir diferansiyel denklemi ele alalım. Varsayalım ki $y = B\{f\}(s)$ olacak şekilde denklemin bir çözümü vardır. Burada, f , tüm reel ekseninde tanımlı bir fonksiyondur. O halde denklem

$$a \cdot \frac{d^2}{ds^2} B\{f\}(s) + b \cdot \frac{d}{ds} B\{f\}(s) + c \cdot B\{f\}(s) = q(s)$$

şeklinde olur. Buradan Bilateral Laplace dönüşümün özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} a \cdot B\{x^2 f(x)\} - b \cdot B\{xf(x)\} + c \cdot B\{f(x)\} &= q(s) \\ \Rightarrow B\{ax^2 f(x) - bxf(x) + cf(x)\} &= q(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin Ters Bilateral Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} ax^2 f(x) - bxf(x) + cf(x) &= B^{-1}\{q(s)\}(x) \\ \Rightarrow f(x)(ax^2 - bx + c) &= B^{-1}\{q(s)\}(x) \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{B^{-1}\{q(s)\}(x)}{ax^2 - bx + c} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanmış olur. Buradan, Bilateral Laplace dönüşümü alınırsa denklemin çözümü elde edilmiş olur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Diferansiyel Denklemler

Fen bilimleri ve mühendislikte, birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel formüller veya matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu modeller, genellikle bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Bu denklemlere diferansiyel denklemler denir. [5]

Tanım 2.1 [5]. Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon yalnız bir değişkene bağlı ise, diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem; iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı ise diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Örneğin,

$$y' + xy = x^2$$

$$(x^2y - y^2)dx + x^2dy = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \sin x + yx^3 = \cos x$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 4\frac{dy}{dx} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

denklemleri birer adi diferansiyel denklem ve

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} + \sin x = \cos x \cdot x^3$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x \partial t} + \sin x = \cos x$$

diferansiyel denklemleri ise birer kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 2.2 [5]. Eğer bir diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun var olan türevlerine göre lineer ise, diferansiyel denkleme lineerdir denir. Örneğin,

$$y''' + (\sin x)y = 0$$

$$x^2 y'' - xy' = 0$$

denklemleri lineerdir. n . mertebeden en genel lineer diferansiyel denklem

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = Q(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve Q , x 'in verilmiş fonksiyonlarıdır. Bir lineer diferansiyel denklem birinci derecedendir, fakat bunun tersi doğru değildir.

Örneğin,

$$y'' = 2 + xy^2$$

$$y'''y - x^2 y' + \cos x \cdot y = 0$$

denklemleri birinci derecedendir ancak lineer değildir.

Tanım 2.3 [5]. n . mertebeden

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

diferansiyel denklemi ve reel eksenin bir I aralığında (I açık, kapalı veya yarı-açık olabilir) tanımlı ve bu aralıkta n . mertebeye kadar türetilebilir bir $\varphi(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminde y yerine $\varphi(x)$ yazıldığında denklem özdeş olarak sağlanıyorsa, yani her $x \in I$ için

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

oluyorsa, $\varphi(x)$ fonksiyonuna I aralığında $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin bir çözümü denir.

2.2 Laplace Dönüşümü

Tanım 2.4. [5]. $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s 'nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

integraline f 'nin Laplace dönüşümü denir. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ veya basitçe $L\{f\} = F$ biçiminde gösterilir.

2.2.1. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

Teorem 2.1. (Lineerlik Özelliği)[10] $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonları ve a, b keyfi sabitleri olmak üzere

$$L\{af(x) + bg(x)\}(s) = aL\{f(x)\}(s) + bL\{g(x)\}(s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2. [10] $L\{f\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ iken

- (i) $L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$
- (ii) $L\left\{\int_0^x f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

ifadeleri doğrudur.

Teorem 2.3. [6]. (Türevin Laplace dönüşümü): $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve $f^{(n)}$, $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. Bu takdirde $L\{f^{(n)}\}$ mevcuttur ve

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n L\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

dır.

Teorem 2.4. [6] (Laplace dönüşümün türevi): f , $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ise $F(s) = L\{f(x)\}(s)$ olmak üzere

$$L\{(-1)^n x^n f(x)\}(s) = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

eşitliği sağlanır.

2.2.2. Ters Laplace Dönüşümü

Tanım 2.6.[6] Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $L\{f(x)\} = F(s)$ olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise, f ye F 'nin ters Laplace dönüşümü denir. F 'nin Ters Laplace dönüşümü $f = L^{-1}\{F\}$ veya $f(x) = L^{-1}\{F(s)\}$ şeklinde gösterilir.

Ters Laplace dönüşümü hesaplamaları için Laplace dönüşüm tablosu çok yararlıdır. Bazı fonksiyonların ters Laplace dönüşümleri doğrudan tablo yardımıyla elde edilebilir. Örneğin;

$$f(x) = 1 \text{ ise } L\{1\} = \frac{1}{s} \text{ olduğundan } L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,$$

$$f(x) = x \text{ ise } L\{x\} = \frac{1}{s^2} \text{ olduğundan } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$$

$$f(x) = \sin 3x \text{ ise } L\{\sin 3x\} = \frac{3}{s^2+3^2} \text{ olduğundan } L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \sin 3x$$

tir.

Aşağıda Laplace dönüşümü için bir tablo bulunmaktadır:

Laplace Dönüşüm Tablosu

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ <u>Heaviside Function</u>	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ <u>Dirac Delta Function</u>	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s) G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

2.3. Bilateral Laplace Dönüşümü

Tanım 2.5 [3]. Tüm reel ekseninde tanımlanmış bir f fonksiyonu için Bilateral (Dual, iki taraflı, two-sided) Laplace dönüşümü,

$$B\{f\}(s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

eşitliği ile tanımlanır.

2.3.1. Bilateral Laplace Dönüşümün Özellikleri

- 1) **Zaman Ölçeklendirme Özelliği [4].** Reel ekseninde tanımlı bir f fonksiyonu ve $a > 0$ olmak üzere

$$B\{f(ax)\}(s) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

şeklinde olur.

- 2) **Tersine Çevirme Özelliği [4].** Reel ekseninde tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere,

$$B\{f(-x)\}(s) = F(-s)$$

şeklindedir.

- 3) **Fonksiyonun Genel Türevinin Bilateral Laplace Dönüşüm Özelliği [4].** Reel ekseninde tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $F(s) = B\{f\}(s)$ ise,

$$B\{f^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s)$$

şeklinde olur.

- 4) **Kaydırma Özelliği [4].** Reel ekseninde tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $F(s) = B\{f\}(s)$ ise,

$$B\{e^{at}f(x)\}(s) = F(s - a)$$

şeklinde olur.

- 5) **Modülasyon Özelliği [4].** Reel ekseninde tanımlı bir f fonksiyonu, $F(s) = B\{f\}(s)$ ve $a \in R$ olmak üzere,

$$B\{\cos(ax)f(x)\}(s) = \frac{1}{2}F(s - ia) + \frac{1}{2}F(s + ia)$$

şeklindedir.

- 6) **Bilateral Laplace Dönüşümün Türevi [4].** $F(s) = B\{f\}(s)$ olsun ve $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$B\{(-1)^n x^n f(x)\}(s) = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

eşitliği sağlanır.

2.3.2. Ters Bilateral Laplace Dönüşümü

Eğer

$$F(s) = B\{f(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

integrali kompleks düzlemin bir bölgesinde düzgün yakınsak ise $f(x) = B^{-1}\{F(s)\}(x)$ ters Bilateral Laplace dönüşümü mevcuttur [8].

Biz örneklerimizde ve işlemlerinde ters Bilateral Laplace dönüşümünü sıklıkla kullanacağız.

2.4. Dirac Delta Fonksiyonu

Dirac delta fonksiyonu, genelleştirilmiş fonksiyon veya dağılımdır. İngiliz fizikçi Paul Dirac tarafından 1927 tarihli Kuantum Dinamiğinin Fiziksel Yorumu adlı kitabında tanıtılmış ve Kuantum Mekaniğinin Prensipleri adlı ders kitabında kullanılmıştır. Delta fonksiyonu $\delta(x)$; $x = 0$ hariç her yerde değeri sıfır olan, fakat $x = 0$ 'da sonsuz büyüklüğe sahip olan ve tüm reel eksen üzerindeki integrali 1'e eşit olan fonksiyondur.

Dirac deltasının grafiğinin genellikle x ekseninin tamamını ve pozitif y eksenini takip ettiği düşünülür. Dirac deltası, impuls ve nokta yükü, nokta kütlesi veya elektron noktası gibi diğer benzer soyutlamaları modellemek için kullanılır. Örneğin, vurulan bir bilyardo topunun dinamiklerini hesaplamak için, çarpma kuvvetinin Dirac deltası ile yaklaşık değeri hesaplanabilir.[9]

Dirac, bu fonksiyonu

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$

özelliklerini sağlayan $\delta(x)$ ile sembolize etmiş ve $\phi(x)$ herhangi sıradan bir fonksiyon olmak üzere $\delta(x)$ fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

şeklinde tanımlamıştır. Hiçbir regüler fonksiyon delta fonksiyonuna eşdeğer değildir. Yani, delta fonksiyonu klasik anlamda bir fonksiyon değildir. Bundan dolayı $\delta(x)$, genelleşmiş fonksiyonu veya dağılımı olarak adlandırılır. [7]

2.4.1 Dirac Delta Fonksiyonun Özellikleri

$f(x)$, $x = a$ noktasını içeren herhangi bir aralıkta sürekli bir fonksiyon olmak üzere delta fonksiyonu $\delta(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (2.1)$$

temel özelliği ile tanımlanır. Bu eşitlikten,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = f(a) \quad (2.2)$$

olduğu aşıkardır.

Böylece (2.1) ve (2.2) denklemlerinden

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten yola çıkarak

$$x\delta(x) = 0$$

elde edilir. Ayrıca değişken değişimi ile

$$\delta(x - a) = \delta(a - x)$$

sonucuna ve $x\delta(x) = 0$ ' ın türevini aldığımız zaman

$$\delta(x) + x\delta'(x) = 0$$

$$\delta(x) = -x\delta'(x) \quad (2.3)$$

eşitliğine ulaşabiliriz. $\delta(x - a) = \delta(a - x)$ sonucu $\delta(x)$ fonksiyonunun çift olduğunu gösterir.

T bir genelleştirilmiş fonksiyon ise T 'nin genelleştirilmiş türevi

$$\int_{-\infty}^{\infty} T'(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} T(x)f'(x)dx$$

eşitliği ile verilir.

Şimdi Dirac delta fonksiyonunun genelleşmiş türevlerini ele alalım:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f''(x)dx = f''(0),$$

⋮

Bu şekilde devam edilirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

veya daha genel olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - a) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

elde edilir. [7]

2.4.2. Dirac Delta Fonksiyonun Laplace Dönüşümü

Dirac delta fonksiyonunun Laplace dönüşümü, delta fonksiyonunun tanımı kullanılarak elde edilebilir. Laplace dönüşümü $[0, \infty)$ aralığında tanımlı olduğu için

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \delta(x - c) dx$$

integralini

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \delta(x - c) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - c) dx, \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^{-sx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

olarak alabiliriz. Dolayısıyla

$$\mathcal{L}\{\delta(x - c)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \delta(x - c) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - c) dx = \begin{cases} e^{-sc}, & c \geq 0, \\ 0, & c < 0 \end{cases}$$

olur [8]. Özel olarak, $c = 0$ için,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

dir. $c < 0$ için,

$$\mathcal{L}\{\delta(x - c)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \delta(x - c) dx = 0.$$

olması bizim yöntemimiz açısından kullanışsız olduğundan çoğu durumda, diferansiyel denklemlerin çözümüne yöntemimizi uygularken Bilateral Laplace dönüşümünü uygulayacağız.

Dirac delta fonksiyonunun Laplace dönüşümüne ait bilgileri tartıştığımız bu kısımda $\delta(x - c)f(x)$ fonksiyonunun da Laplace dönüşümünün ne olduğunu verelim. Burada f integrallenebilir bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(x - c)f(x)\} &= \int_0^{\infty} \delta(x - c)e^{-sx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c)\varphi(x)f(x) dx \\ &= \begin{cases} e^{-sc}f(c), & c \geq 0, \\ 0, & c < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.4.3. Dirac Delta Fonksiyonun Bilateral Laplace Dönüşümü

Dirac delta fonksiyonunun Bilateral Laplace dönüşümü, delta fonksiyonunun tanımını kullanılarak elde edilebilir. [6]

$$B\{\delta(x - c)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c)e^{-sx} dx = e^{-cs}$$

Buna göre, Bilateral Laplace dönüşümünün tanımlı olduğu aralık gereği klasik Laplace dönüşümüne göre daha kullanışlı olduğunu söyleyebiliriz.

2.5. Heaviside Birim Fonksiyonu

Tanım 2.7. $a \geq 0$ olmak üzere,

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona Heaviside birim fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $x = a$ da sıçrama şeklinde bir süreksizliğe sahiptir. Aynı zamanda H ile tanımlı dağılıma Heaviside dağılımı denir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

biçimindedir.[11] Şimdi bu eşitliklerle Heaviside dağılımının genelleşmiş türevini alalım:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H'(x)f(x)dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)dx = - \int_0^{\infty} f'(x)dx = -[f(x)]_0^{\infty} = f(0) = \langle \delta, f \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx. \end{aligned}$$

Son eşitlikten Heaviside fonksiyonun genelleştirilmiş türevinin Dirac delta fonksiyonu olduğu görülür: $H' = \delta$.[12]

Şimdi, bir diferansiyel denklemin çözümünde klasik anlamda Laplace dönüşümünün nasıl kullanıldığını ve Dirac delta, Heaviside gibi fonksiyonların nasıl işlevi olduğunu somutlaştıracak bir örnek çözelim:

Örnek 2.1. $y'' - 3y' + 2y = 2\delta(t - 3)$, $y(0) = 1, y'(0) = 3$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. $L\{y(x)\} = Y(s)$ olsun. Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak,

$$L\{y'' - 3y' + 2y\} = L\{2\delta(t - 3)\}$$

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 2L\{\delta(t - 3)\}$$

$L\{y''\} = s^2Y(s) - s - 3$, $L\{y'\} = sY(s) - 1$ ve $L\{\delta(t - 3)\} = e^{-3s}$ olduğundan denklemde kullanırsak,

$$s^2Y(s) - s - 3 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = 2e^{-3s}$$

$$s^2Y(s) - s - 3sY(s) + 2Y(s) = 2e^{-3s}$$

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) = 2e^{-3s} + s$$

$$Y(s) = \frac{2e^{-3s}}{(s-2)(s-1)} + \frac{s}{(s-2)(s-1)}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{(s-2)(s-1)} + \frac{s}{(s-2)(s-1)}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{(s-2)(s-1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-1)}\right\}$$

Buradan basit kesirlere ayırma yöntemini kullanırsak

$$\frac{2e^{-3s}}{(s-2)(s-1)} = e^{-3s}\left\{\frac{2}{(s-2)(s-1)}\right\} = e^{-3s}\left\{\frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-1)}\right\}$$

$$2e^{-3s} = e^{-3s}\{A(s-1) + B(s-2)\}$$

$$A = 2, B = -2$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2e^{-3s}}{(s-2)(s-1)}\right\} = L^{-1}\left[e^{-3s}\left\{\frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)}\right\}\right]$$

$$\frac{s}{(s-2)(s-1)} = \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-1)} = \frac{C(s-1)}{(s-2)(s-1)} + \frac{D(s-2)}{(s-2)(s-1)}$$

$$C = 2, D = -1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}$$

elde ederiz. Denklemden yerine yazdığımız zaman

$$L^{-1}\left[e^{-3s}\left\{\frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)}\right\}\right] + L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\}$$

$$L^{-1} \left[e^{-3s} \left\{ \frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)} \right\} \right] + 2e^{2x} - e^x$$

olur ve (2.3) eşitliğinden, $a \geq 0$ olmak üzere

$$L^{-1}\{e^{-as}Y(s)\} = f(x-a)H(x-a)$$

elde edilir. Buradan

$$Y(s) = \frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)}$$

$$f(x) = 2e^{2x} - 2e^x$$

$$f(x-3) = 2e^{2(x-3)} - 2e^{(x-3)}$$

sonuçlarını denklemde yerine yazdığımızda

$$L^{-1} \left[e^{-3s} \left\{ \frac{2}{(s-2)} - \frac{2}{(s-1)} \right\} \right] = H(x-3) \{ 2e^{2(x-3)} - 2e^{x-3} \}$$

$$y(x) = H(x-3) \{ 2e^{2(x-3)} - 2e^{x-3} \} + 2e^{2x} - e^x$$

elde edilir.

Bu örnekte görülüyor ki, klasik anlamda Laplace dönüşümünü diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanımı epey uzun işlemler gerektirmektedir. Aşağıdaki bölümde bizim yöntemimizle daha az işlemle denklemlerin çözülebildiğini göreceğiz.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda çeşitli diferansiyel denklemleri Laplace ya da Bilateral Laplace uzayında verilmiş gibi ele alıp denklemleri bu yöntemle çözeceğiz ve bu yöntemde Dirac delta fonksiyonu önemli bir role sahip olacak.

$$y'' - y = 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemi çözmek için klasik Laplace dönüşümünü uyguladığımızda

$$L\{y'' - y\} = L\{0\}$$

$$L\{y''\} - L\{y\} = 0$$

$$s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) - L\{y\} = 0$$

elde ederiz. Buradan denklemi düzenleyerek

$$L\{y\} = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 - 1} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s + 1}$$

$$y = Ae^x + Be^{-x}$$

çözümüne ulaşırız, burada

$$A = \frac{y(0) + y'(0)}{2}, B = \frac{y(0) - y'(0)}{2}$$

dir. Biz farklı bir bakış açısı kullanarak diferansiyel denklemin kendisinin ve aradığımız y çözümünün de Laplace (Bilateral Laplace) uzayında olduğunu varsayacağız. Bu çözümleri araştırırken diferansiyel denklemin koşulları ve özelliklerine göre Laplace dönüşümünü veya Bilateral Laplace dönüşümünü kullanacağız. Şimdi $y = B\{f(x)\}(s)$ olacak şekilde diferansiyel denklemde çözümü arayalım. O halde $y'' - y = 0$ denklemi

$$\frac{d^2 B\{f(x)\}(s)}{ds^2} - B\{f(x)\}(s) = 0$$

denklemine dönüşür. 2.3.1.6'da verdiğimiz Bilateral Laplace dönüşümünün türevi özelliğinden

$$B\{(-1)^2 x^2 f(x)\}(s) - B\{f(x)\}(s) = 0$$

yazılır. Bilateral Laplace dönüşümünün lineerliğinden

$$B\{x^2 f(x) - f(x)\}(s) = 0 = B\{0\}$$

elde edilir. Bilateral Laplace dönüşümünün tersinirlik özelliğinden [7]

$$(x^2 - 1)f(x) = 0$$

ya da

$$f(x) = \frac{0}{x^2 - 1}$$

bulunur. Biz burada ve tezin tamamında $\frac{0}{x^2-1}$ gibi ifadeleri 0 olarak almayacağız. Zaten bu ifadeleri 0 alırsak yöntem çalışmamaktadır. $\frac{0}{x^2-1}$ ya da buna benzer ifadeleri Dirac delta fonksiyonu ile ilişkilendireceğiz. Dirac Delta fonksiyonunun $x\delta(x) = 0$ özelliğini Bölüm 2.4’den biliyoruz. Bunu a bir sabit olmak üzere $(x - a)\delta(x - a) = 0$ olarak yazabiliriz. Bu eşitliği

$$\frac{0}{x - a} = \delta(x - a)$$

olarak ele alalım. Eşitliğin her tarafını bir c sabiti ile çarpmak, eşitliği bozmaz:

$$\frac{c \cdot 0}{x - a} = c\delta(x - a)$$

$$\frac{0}{x - a} = c\delta(x - a) \quad (3.1)$$

Bu eşitliklerden yola çıkarak f ’i basit kesirlere ayırma yöntemi ile yazdığımızda

$$f(x) = \frac{0}{x^2 - 1} = \frac{0}{x - 1} + \frac{0}{x + 1} = c_1\delta(x - 1) + c_2\delta(x + 1)$$

elde ederiz. Şimdi burada $y = B\{f(x)\}$ bağıntısı ile çözümü bulalım.

$$y(s) = B\{f(x)\}(s) = c_1B\{\delta(x - 1)\} + c_2B\{\delta(x + 1)\}$$

olur. Burada Dirac Delta fonksiyonun Bilateral Laplace dönüşümünden

$$y = c_1 e^s + c_2 e^{-s}$$

elde edilir.

Teorem.3.1. Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{0}{(x-a)^n} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a) + \cdots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x-a)$$

eşitliği doğrudur. Bu formül (3.1)'in bir genelleştirilmesidir.

İspat. (3.1)'den $\frac{0}{x-a} = c_1 \delta(x-a)$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alındığında

$$\frac{0 \cdot (x-a) - 0}{(x-a)^2} = c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)} - \frac{0}{(x-a)^2} = c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^2} = \frac{0}{(x-a)} - c_1 \delta'(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^2} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a)$$

elde etmiş oluruz (Burada sabitler yeniden işaretlenmiştir).

Tümevarım varsayımı olarak n için $\frac{0}{(x-a)^n} = c_0 \delta(x-a) + c_1 \delta'(x-a) + c_2 \delta''(x-a) + \cdots + c_{n-2} \delta^{(n-2)}(x-a) + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(x-a)$ olduğunu kabul edip, $n+1$ için ispatı yapalım. Varsaydığımız eşitlikte 2 taraftan türev alalım.

$$\frac{0.(x-a)^n - 0.n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{2n}} = c_0\delta'(x-a) + c_1\delta''(x-a) + \dots + c_{n-1}\delta^{(n)}(x-a)$$

$$\frac{0}{(x-a)^n} - \frac{0.n}{(x-a)^{n+1}} = c_0\delta'(x-a) + c_1\delta''(x-a) + \dots + c_{n-1}\delta^{(n)}(x-a)$$

$$\frac{0.n}{(x-a)^{n+1}} = -\frac{0}{(x-a)^n} - c_0\delta'(x-a) - c_1\delta''(x-a) - \dots - c_{n-1}\delta^{(n)}(x-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{0.n}{(x-a)^{n+1}} &= -c_0\delta(x-a) - c_1\delta'(x-a) - \dots - c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x-a) - c_0\delta'(x-a) \\ &\quad - c_1\delta''(x-a) - \dots - c_{n-1}\delta^{(n)}(x-a) \end{aligned}$$

elde edilir. Sabitleri düzenlediğimiz zaman

$$= d_0\delta(x-a) + d_1\delta'(x-a) + d_2\delta''(x-a) + \dots + d_n\delta^{(n)}(x-a)$$

olur ve ispat biter.

Sonuç.3.1. Teorem.3.1’de a sabiti sıfır olduğu zaman aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{0}{x^2} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x)$$

$$\frac{0}{x^3} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x)$$

$$\frac{0}{x^4} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x) + c_3\delta'''(x)$$

.

.

.

$$\frac{0}{x^n} = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + c_2\delta''(x) + \dots + c_{n-2}\delta^{(n-2)}(x) + c_{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$$

Örnek 3.1. $y'' + xy = 1$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm: Denklemi Bilateral Laplace dönüşümü ile çözmeye çalışalım. $y = B\{f(x)\}(s)$ olsun. O halde denklem,

$$\frac{d^2 B\{f(x)\}(s)}{ds^2} + sB\{f(x)\}(s) = 1$$

$$B\{x^2 f(x)\}(s) + B\{f'(x)\}(s) = 1$$

olur. Bilateral Laplace dönüşümünün tersinirlik özelliğinden

$$x^2 f(x) + f'(x) = \delta(x)$$

olur. Denklemi çözebilmek için integrasyon çarpan yöntemini kullanarak $e^{\frac{x^3}{3}}$ ile denklemin her iki tarafını çarpalım.

$$e^{\frac{x^3}{3}} f'(x) + x^2 e^{\frac{x^3}{3}} f(x) = e^{\frac{x^3}{3}} \delta(x)$$

Bu eşitliği düzenlediğimizde

$$\frac{d\left(e^{\frac{x^3}{3}} f(x)\right)}{dx} = e^{\frac{x^3}{3}} \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^x d\left(e^{\frac{t^3}{3}} f(t)\right) = \int_{-\infty}^x e^{\frac{t^3}{3}} \delta(t) dt$$

$$e^{\frac{x^3}{3}} f(x) = H(x)$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^3}{3}} H(x)$$

olur. Şimdi, $y = B\{f(x)\}(s)$ bağıntısı ile denklemin çözümünü bulalım.

$$y(s) = B\{f(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{\frac{-x^3}{3}} e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} e^{\frac{-x^3}{3}} e^{-sx} dx$$

çözümünü elde etmiş oluruz.

Örnek 3.2. $y' = 1$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = x + c$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim. $y = B\{f(x)\}(s)$ olsun.

$$\frac{dB\{f(x)\}(s)}{ds} = B\{\delta(x)\}$$

$$B\{-xf(x)\}(s) = B\{\delta(x)\}$$

$$-xf(x) = \delta(x)$$

$$f(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$$

(2.3) den

$$f(x) = -\frac{-x\delta'(x) + 0}{x}$$

$$f(x) = \delta'(x) + \frac{0}{x} = \delta'(x) + c\delta(x)$$

Şimdi, $y = B\{f(x)\}(s)$ bağıntısı ile denklemin çözümünü bulalım.

$$y(s) = B\{f(x)\}(s) = B\{\delta'(x) + c\delta(x)\}(s)$$

$$y = s + c$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek 3.3 $y'' + y = x^2$ diferansiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm: Klasik yöntemlerle çözüldüğü zaman diferansiyel denklemin çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemini tekrar çözelim. $y = B\{f(x)\}(s)$ olsun.

$$B\{x^2 f(x) + f(x)\}(s) = B\{\delta''(x)\}(s)$$

$$(x^2 + 1)f(x) = \delta''(x)$$

$$f(x) = \frac{\delta''(x)}{(x^2 + 1)}$$

$$f(x) = \frac{\delta''(x) + 0}{(x^2 + 1)}$$

$$f(x) = \frac{\delta''(x)}{(x^2 + 1)} + \frac{0}{(x - i)(x + i)}$$

$f(x)$ 'i basit kesirlere ayırma yöntemi ile tekrar yazdığımızda

$$f(x) = \frac{\delta''(x)}{(x^2 + 1)} + \frac{0}{(x - i)} + \frac{0}{(x + i)}$$

elde ederiz. $\frac{0}{x-a} = c_1 \delta(x - a)$ eşitliğinden f 'i tekrar yazdığımızda

$$f(x) = \frac{\delta''(x)}{(x^2 + 1)} + a_1 \delta(x - i) + a_2 \delta(x + i)$$

olur. Şimdi, $y = B\{f(x)\}(s)$ bağıntısı ile denklemin çözümünü bulalım.

$$B\{f(x)\}(s) = B\left\{\frac{\delta''(x)}{(x^2 + 1)} + a_1 \delta(x - i) + a_2 \delta(x + i)\right\}(s)$$

$$B\{f(x)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-sx} \delta''(x)}{(x^2 + 1)} + a_1 e^{-is} + a_2 e^{is}$$

Burada Dirac Delta fonksiyonun genelleştirilmiş türev özelliğini kullanarak $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-sx} \delta''(x)}{(x^2 + 1)}$ integralin sonucunun $s^2 - 2$ olduğu aşıkardır.

$$y(s) = B\{f(x)\}(s) = s^2 - 2 + a_1(\cos s - i \sin s) + a_2(\cos s + i \sin s)$$

$$= s^2 - 2 + (a_1 + a_2) \cos s + i(-a_1 + a_2) \sin s$$

$$= s^2 - 2 + c_1 \cos s + c_2 \sin s$$

olur. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

Örnek 3.4 $y'' - 3y' + 2y = x$ diferansiyel denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm: Klasik yöntemle çözüldüğünde diferansiyel denklemin çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ şeklindedir. Şimdi kendi yöntemimizle diferansiyel denklemi tekrar çözelim. $y = B\{f(x)\}(s)$ olsun.

$$\frac{d^2}{ds^2} B\{f(x)\}(s) - 3 \frac{d}{ds} B\{f(x)\}(s) + 2B\{f(x)\}(s) = s$$

$$B\{x^2 f(x) + 3x f(x) + 2f(x)\}(s) = s$$

$$(x^2 + 3x + 2)f(x) = \delta'(x)$$

$$f(x) = \frac{\delta'(x) + 0}{(x+1)(x+2)}$$

$f(x)$ 'i basit kesirlere ayırma yöntemi ile tekrar yazdığımızda

$$f(x) = \frac{\delta'(x)}{(x+1)(x+2)} + \frac{0}{x+1} + \frac{0}{x+2}$$

olur. $\frac{0}{x-a} = c_1 \delta(x-a)$ eşitliğinden f 'i tekrar yazdığımızda

$$f(x) = \frac{\delta'(x)}{(x+1)(x+2)} + c_1 \delta(x+1) + c_2 \delta(x+2)$$

elde ederiz. Şimdi, $y = B\{f(x)\}(s)$ bağıntısı ile denklemin çözümünü bulalım.

$$y(s) = B\{f(x)\}(s) = B\left\{\frac{\delta'(x)}{(x+1)(x+2)} + c_1\delta(x+1) + c_2\delta(x+2)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \delta'(x) dx + c_1 e^{2s} + c_2 e^s$$

Dirac Delta fonksiyonun genelleştirilmiş türev özelliğini de kullanarak

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-s e^{-sx} \frac{1}{(x+1)(x+2)} - e^{-sx} \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} \right) \delta(x) dx + c_1 e^{2s} + c_2 e^s$$

$$= \frac{s}{2} + \frac{3}{4} + c_1 e^{2s} + c_2 e^s$$

sonucunu elde etmiş oluruz. Bu, mevcut çözüm ile tutarlıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, diferansiyel denklemlerin çözümünde klasik Laplace dönüşümü yönteminin ötesine geçilerek, diferansiyel denklemin doğrudan Laplace veya Bilateral Laplace dönüşüm uzayında tanımlı olduğu varsayımına dayanan alternatif bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşımla, diferansiyel denklemin çözümünün de dönüşüm uzayında var olduğu kabul edilmiş ve çözümler aranmıştır.

Tez süresince yapılan analizler ve örnek çözümler, özellikle Bilateral Laplace dönüşümünün Dirac Delta fonksiyonu ve onun genelleştirilmiş türevleriyle birlikte kullanıldığında, klasik yöntemlere göre bazı problemlerde daha kısa ve doğrudan çözümler elde edilmesini sağladığını göstermiştir. Bu yöntem sayesinde bazı diferansiyel denklemlerin klasik çözümlerinde karşılaşılan karmaşık cebirsel işlemler en aza indirgenmiş, Dirac delta fonksiyonu gibi genelleştirilmiş fonksiyonların çözümde etkin biçimde kullanılabileceği ortaya konulmuştur. Ancak yöntemin sınırlılıkları da gözlemlenmiştir. Özellikle Bilateral Laplace dönüşümünün bazı fonksiyonlar için ıraksak sonuçlar üretmesi, yöntemin her denkleme uygulanamayacağını göstermektedir.

Gelecek çalışmalarda, bu yöntemin farklı türden (örneğin, kısmi türevli) diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği araştırılabilir. Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi çerçevesinde, diğer dönüşüm yöntemleri (örneğin Fourier ve Mellin) ile benzer yaklaşımlar geliştirilebilir. Tezde sunulan yöntem klasik çözüm yollarına yeni bir perspektif getirmekte ve hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından değerli bir yaklaşım sunmaktadır. Bu yöntem, diferansiyel denklemler kuramında alternatif ve yenilikçi çözümler üretmek isteyen araştırmacılar için yeni kapılar aralayabilir.

KAYNAKLAR

- [1] (Differential equations –Wikipedi).
https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_equation (accessed May. 12, 2025).
- [2] (Laplace Transform - Wikipedia) https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform
(accessed May. 10, 2025).
- [3] W. R. Le Page, *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. New York: Courier Corporation, 1980.
- [4] Bracewell, Ron, and Peter B. Kahn. The Fourier transform and its applications, *American Journal of Physics* Vol. 34. No. 8, pp 712-712, 1966.
- [5] M. Çağlayan, N. Çelik, S. Doğan, *Adi Diferansiyel Denklemler*. Bursa, Türkiye: Dora Yayıncılık, 2013.
- [6] R. K. Nagle, E. B. Saff ve A. D. Snider, *Fundamentals of Differential Equations, (7th ed.)*, Addison Wesley, 2010.
- [7] K. Köklü, *İntegral Dönüşümleri ve Uygulamalar.*, İstanbul: Üniversite Yayıncılık, 2018.
- [8] A. V. Oppenheim ve G. C. Verghese, *Signals, Systems & Inference*. London: Pearson, 2017.
- [9] (Dirac Delta function – Wikipedia).
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function (accessed May. 10, 2025).
- [10] A. Mısır, *Teori Teknik ve Uygulamalı Diferensiyel Denklemler*, Ankara: Gazi Kitabevi, 2016.
- [11] R. P. Kanwall, *Generalized Functions: Theory and Technique*, Berlin: Birkhauser, 1998.
- [12] L. Debnath and D. Bhatta, *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed. Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC, 2016