

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**ENERJİ TABANLI YAKLAŞIM İLE
SAÇILMA-KATLAMA DİNAMİĞİNİN OLUŞTURULMASI VE
KAOS ÜRETECİNİN TASARLANMASI**

DOKTORA TEZİ

Mustafa KÖSEM

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Elektronik Mühendisliği Programı

MART 2025

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**ENERJİ TABANLI YAKLAŞIM İLE
SAÇILMA-KATLAMA DİNAMİĞİNİN OLUŞTURULMASI VE
KAOS ÜRETECİNİN TASARLANMASI**

DOKTORA TEZİ

**Mustafa KÖSEM
(504032204)**

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Elektronik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Neslihan Serap ŞENGÖR

MART 2025

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

**ESTABLISHING STRETCHING AND FOLDING MECHANISM
AND DESIGNING CHAOS GENERATOR
WITH ENERGY-BASED APPROACH**



Ph.D. THESIS

**Mustafa KÖSEM
(504032204)**

Department of Electronics and Information Engineering

Electronics Engineering Programme

Thesis Advisor: Prof. Dr. Neslihan Serap ŞENGÖR

MARCH 2025

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 504032204 numaralı Doktora Öğrencisi Mustafa KÖSEM, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “ENERJİ TABANLI YAKLAŞIM İLE SAÇILMA-KATLAMA DİNAMİĞİNİN OLUŞTURULMASI VE KAOS ÜRETECİNİN TASARLANMASI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Neslihan Serap ŞENGÖR**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Müştak Erhan YALÇIN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Murat DOĞRUEL
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Mürvet ÜÇER
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Burcu ERKMEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 17 Ekim 2024
Savunma Tarihi : 14 Mart 2025





Eşime,



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. KAOS TEORİSİNDE KULLANILAN ENERJİ TEMELLİ YÖNTEMLER..	7
2.1 Dinamik Sistem Teorisinde Enerji Kavramının Kullanılması	7
2.1.1 Sistemin Modellenmesi ve Sisteme Dair Denklemlerin Oluşturulması.....	7
2.1.2 Denklemlerin Çözülmesi.....	9
2.1.3 Sistem Davranışının Kestirilmesi.....	10
2.1.4 Sistemin Kontrol Edilmesi	11
2.2 Kaos Teorisinde Kullanılan Bazı Enerji Temelli Yöntemler	11
2.2.1 Euler-Lagrange Denklemleri.....	12
2.2.2 Hamilton Denklemleri.....	12
2.2.3 Port Kontrollü Hamilton Sistemler	13
3. CHUA DEVRESİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR İNCELEMESİ.....	17
3.1 Chua Devresi.....	17
3.2 Chua Devresinden Türetilen Yeni Devreler ve Genelleştirmeler	23
3.2.1 Devre Parametrelerinin Negatif Olmasına Müsade Edilmesi	23
3.2.2 Alternatif Devreler Önerilmesi	24
3.2.3 Denklemlerde Genelleştirmeler Yapılması	26
3.2.4 Farklı Chua Diyotları Kullanılması.....	29
3.3 Chua Literatüründe Tezle İlgili Ortaya Konan Katkıları	29
4. CHUA DEVRESİ İÇİN HAMILTONİYANIN ELDESİ.....	35
5. KAOTİK OSİLATÖR TASARIMI İÇİN ENERJİ TEMELLİ BİR YÖNTEM	37
5.1 Durum Uzayında Enerjinin Arttığı ve Azaldığı Bölgeler	39
5.2 Chua Diyodunun Enerji Değişimine Etkisi.....	42
5.2.1 N_R 'nin doğrusal olması hali	42
5.2.2 N_R 'nin parça parça doğrusal olması hali	44
5.2.2.1 $a=-13/70$, $b=-5/7$ için kararsız limit çevrim davranışı	44
5.2.2.2 $a=-5/7$, $b=-13/70$ için kararsız limit çevrim davranışı	45
5.2.2.3 $a=-3/7$, $b=-13/70$ için kararlı limit çevrim davranışı.....	46
5.2.2.4 $a=-13/70$, $b=-8/7$ için periyot katlaması ile kaos davranışı.....	46
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
6.1 Farklı Enerji Fonksiyonları ile Çalışılması	49
6.2 Farklı Saçılma ve Katlama Fonksiyonları ile Çalışılması.....	49
6.3 Histerisiz ya da Süreksizlik İçeren Sistemlerin İncelenmesi	50
6.4 Üç Reel Özdeğer İçeren Sistemlerin İncelenmesi.....	50
6.5 Mekanik Sistemlerin İncelenmesi	51

6.6 Çok Çeker İçeren Sistemlerin İncelenmesi	51
6.7 Chua Osilatörüne Ait Dinamiklerin İncelenmesi	52
6.8 Dallanma Davranışlarının İncelenmesi	53
6.9 Yarı Geçiş Dönüşümleri Üzerine Çalışılması	53
6.10 Shilnikov Teoreminin Enerji Kavramları ile Ele Alınması.....	54
6.11 Yeni Bir Dallanma Diyagramı Analiz Yöntemi Önerilmesi.....	54
6.12 Kaos Üretimi İçin Bir Kontrol İşlevi Geliştirilmesi	55
KAYNAKLAR.....	57
EKLER.....	65
ÖZGEÇMİŞ	93



SEMBOLLER

A	: kare matris
x, y, b, k, w	: sütun vektörler
$\varphi(.)$	: tek değerli fonksiyon
$f(.)$	: çok değerli fonksiyon
$\Re$	: reel sayılar
v_1, v_2, i_3	: Chua devre ailesi durum değişkenleri
C_1, C_2, L	: Chua devre ailesi aktif eleman parametreleri
R, R_0	: Chua devre ailesi pasif eleman parametreleri
N_R	: Chua diyodu
G_a, G_b, B_p, E	: Chua diyodu fiziksel parametreleri
m_0, m_1	: Chua diyodu için dış bölgeler ve orta bölge eğimleri
x, y, z	: Chua devre ailesi boyutsuz durum değişkenleri
α, β, γ, k	: Chua devre ailesi dallanma parametreleri
$f(x)$	: Chua diyodu boyutsuz tanım bağıntısı
b, a	: Boyutsuz Chua diyodu için dış bölgeler ve orta bölge eğimleri
$h(x)$	: Genişletilmiş Chua diyodu boyutsuz tanım bağıntısı
m_1, m_0	: Genişletilmiş Chua diyodu için dış bölgeler ve orta bölge eğimleri
c, d, k	: Chua devre ailesi matris gösterimi parametreleri
V	: Potansiyel enerji
T	: Kinetik enerji
$\mathcal{L}$	: Lagranjyan
$\mathcal{H}$	: Hamiltonyan
t	: Zaman
τ	: Boyutsuz koordinatlarda zaman
τ	: Enerji ve dual enerji tanımları için zaman aralığı
i, v, q, ϕ	: Temel elektriksel büyüklükler
E_C, E_L	: bir kondansatörün ve endüktansın enerjisi



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Van der Pol osilatörü faz portresi.	1
Şekil 1.2 : Negatif reel kök ve kompleks kök çifti içeren bir doğrusal matris denklem sisteminin faz portresi	2
Şekil 1.3 : Chua devresi ve Chua osilatörü.	4
Şekil 1.4 : Chua devresinde LC tank devresi yerine transmisyon hattı konarak elde edilen yeni kaotik devre.	4
Şekil 1.5 : Chua osilatöründe LCR alt devresine akım geri-beslemesi uygulanarak elde edilen yeni kaotik devre.	5
Şekil 2.1 : Elektrik ya da manyetik alan kuplajı yapılmış iki Chua devresinin termistörlerdeki değişim yardımıyla senkronizasyonu için önerilen devre.....	11
Şekil 3.1 : Chua devresi.	17
Şekil 3.2 : Chua diyodu gerilim-akım grafiği.	18
Şekil 3.3 : 2 kırıklı Chua diyodu için gerilim-akım grafikleri.	19
Şekil 3.4 : Boyutsuz koordinatlarda Chua diyodu gerilim-akım grafiği.....	21
Şekil 3.5 : Chua devresi benzeri kaotik devreler.	24
Şekil 3.6 : Chua osilatörü.....	24
Şekil 3.7 : Kanonik Chua devresinin kendi üzerine açılır olmaması için kullanılabilir Chua diyodu alternatifleri.....	31
Şekil 5.1 : Chua devresi.	37
Şekil 5.2 : Durum uzayında enerjinin arttığı bölgeler.....	39
Şekil 5.3 : Farklı Chua diyotları için durum uzayında enerjinin arttığı bölgeler.....	41
Şekil 5.4 : Doğrusal Chua diyodu kullanılması halinde yörüngeler.	43
Şekil 5.5 : $a = -13/70$, $b = -5/7$ için β 'nin değişimine göre enerjinin değişimi.....	45
Şekil 5.6 : $a = -5/7$, $b = -13/70$ için β 'nin değişimine göre enerjinin değişimi.....	45
Şekil 5.7 : $a = -3/7$, $b = -13/70$ için β 'nin değişimine göre enerjinin değişimi.....	46
Şekil 5.8 : $a = -13/70$, $b = -8/7$ için β 'nin değişimine göre enerjinin değişimi.....	47
Şekil 6.1 : Anahtarlamalı sistemler için 3 farklı zayıf Lyapunov teoremi örneği.	56
Şekil B.1: Kondansatör ve endüktans için enerji ve dual enerji.....	69
Şekil C.1: Basit sarkaç için (a) kartezyen, (b) kutupsal koordinatlarda sisteme etkiyen kuvvetler.	72
Şekil 5.9 : Peryot katlaması ile kaos oluşumu esnasında H ve dH'nin değişimi ..	89-92



ENERJİ TABANLI YAKLAŞIM İLE SAÇILMA-KATLAMA DİNAMİĞİNİN OLUŞTURULMASI VE KAOS ÜRETECİNİN TASARLANMASI

ÖZET

Tezin amacı bir elektrik devresinde enerji kavramı yardımıyla kaosu açıklamak ya da bir elektrik devresindeki kaotik dinamiği başlatan enerji alış verişini inceleyerek kaotik devre tasarlamak için etkin bir yöntem önermektir.

Saçılma ve katlama, kayıplı kaotik sistemlerin iyi bilinen bir mekanizmasıdır. Enerji bakış açısı ile bakıldığında saçılma ve katlama mekanizmasının oluşturulabilmesi için enerjinin değiştirilebilmesinin sağlanması bir zorunluluktur. Bu tezin konusu enerji şekillendirme yoluyla kaos yaratacak bir saçılma ve katlanma mekanizması oluşturmanın mümkün olup olmadığı veya gelecekte bu amaca hizmet edecek bir anlayışa varmanın mümkün olup olmadığıdır.

Tezde bir LC tank devresinin kurulacak enerji alış verişini ile kaosa sokulmasının mümkün olup olmadığı incelenmiştir. Bu amaçla Chua devresi ele alınmıştır.

Chua devresinin kaos tarihinde büyük bir önemi vardır. Sürekli dinamik sistemlerde kaos eldesi için en az 3 boyutlu bir sistem gereklidir. Chua devresi de kaos elde edilebilecek 3 boyutlu en basit elektrik devresidir. Chua devresi ilk önerildiği haliyle 5 eleman içermektedir: 1 endüktans, 2 kondansatör, 1 pasif direnç ve Chua diyodu olarak adlandırılan bir aktif direnç. Devrenin bu ilk haliyle zengin dinamikler üretmesine karşın literatürde 3 boyutlu bir dinamik sistemde karşılaşılabilecek bütün dinamikleri üretmediği fark edilince endüktansa seri bir direnç eklenmesiyle 6 elemanlı hali de türetilmiştir. Chua devresinin Chua osilatörü olarak adlandırılan bu yeni haliyle literatürde 3 boyutlu bir sistemde karşılaşılabilecek bütün dinamikleri ürettiği gösterilmiştir. Tezde de gerek ele alınan probleme adım adım yaklaşma imkanı verdiği için gerekse de üzerinde çok çalışıldığı için elde edilen sonuçları genelleştirme potansiyeli açısından Chua devresi ile çalışılmıştır.

Tarihsel akışa bakıldığında enerji temelli yöntemlerin klasik mekanikte daha etkin kullanıldığı görülür. Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri yazılırken önce genelleştirilmiş koordinatlar belirlenir. Ardından da problem genelleştirilmiş koordinatlardan bakarak ele alınır. Euler-Lagrange denklemleri için genelleştirilmiş konumları ve bu konumların türevleri olan genelleştirilmiş hızları içeren bir diferansiyel denklem takımı yazılır. Hamilton denklemleri için ise genelleştirilmiş konumlar ve genelleştirilmiş hızlar birbirleri cinsinden yazılarak bir diferansiyel denklem takımı elde edilir.

Klasik mekanikte genelleştirilmiş konum ve genelleştirilmiş hız tanımları nettir. Dolayısıyla kinetik ve potansiyel enerji kavramları da nettir. Elektrik devrelerinde ise durum farklıdır. Genelleştirilmiş konum ve genelleştirilmiş hızın hangi büyüklük olarak alınacağına göre kinetik enerji ve potansiyel enerji değişir.

Elektrik devrelerinin enerji formülasyonlarına bakıldığında literatürde iki yöntem öne çıkar. Bernstein-Lieberman denklemleri ve Chua-McPearson denklemleri.

Bernstein-Lieberman denklemleri sadece LC devreleri için kullanılabildiği için tezde Chua-McPearson denklemleri kullanılmıştır.

Bir elektrik devresinde enerji kavramı ile iş yapılmak istendiğinde karşımıza ilk olarak enerjinin hangi büyüklük olarak ele alınacağı sorusu çıkar. İlk akla gelen enerji depolayabilen elemanların toplam enerjisinin enerji olarak kullanılmasıdır. Literatürde karşılaşılan bir başka yöntem ise elektrik devresine ait diferansiyel denklemlerin Port Kontrollü Hamilton teoride ele alınmış olan yapılardan birine benzetilmesi ve enerjinin de buna göre tanımlanmasıdır. Bu iki şekilde oluşturulan enerji fonksiyonu gerekenden daha karmaşık olabilir. Şöyle ki:

Bir elektrik devresi en genel halde bir diferansiyel-cebrik denklem sistemi ile ifade edilebilir. Bir diferansiyel-cebrik denklem sisteminde diferansiyel denklemlerin bir kısmının ya da tamamının denklemlerden elenmesi durumunda daha basit diferansiyel denklemler ve daha basit bir enerji fonksiyonu ile çalışmak söz konusu olabilir.

Port Kontrollü Hamilton teori genel olarak kararlılaştırma ve buna çok benzeyen senkronizasyon için kullanılmaktadır. Bu amaçlar için kullanıldığında sorun yaratmayacak olan Hamiltonyanın kaos eldesi için kullanılmasında endişeler söz konusu olmuştur. Bu belirsizlikler sebebiyle tezde iki yöntemle Hamiltonyan elde edilmiş ve doğru bir Hamiltonyan ile çalışıldığından emin olunmuştur.

Chua devresinin enerji alış-verişine bakılacak olursa Chua diyotu devredeki enerji veren tek elemandır. Dolayısıyla Chua diyotu pasif direncin tükettiğinden fazlasını devreye verdiğinde dinamik elemanlarda enerji depolanır. Aksi halde ise dinamik elemanların mevcut enerjisi tüketilir. Tezde devrenin davranışını anlamak için devrenin Hamiltonyanındaki değişim incelenmiştir. Ortaya konan yaklaşım enerjinin yörüngeler boyunca izlenmesi ve enerjideki değişimin Chua devresinin farklı dinamikleri ile ilişkilendirilmesidir.

Hamiltonyan elde edildikten sonra Hamiltonyanın nasıl değiştiğine bakılmıştır. Elde edilen sonuç Hamiltonyan'ın türevinin z 'ye bağlı olmayıp, sadece x ve y 'ye bağlı olmasıdır. Bu durum enerjinin artış ve azalışını x - y izdüşümü kullanılarak değerlendirmeyi mümkün kılmıştır.

Öncelikle bu sonucun neden oluştuğunu ele almak iyi olacaktır. Chua devresi bir LC tank devresi içermektedir ve bu LC tank devresinin diğer enerji depolayabilen elemanla direkt bir ilişkisi yoktur. Tek ilişki pasif direncin uç denklemi üzerinden oluşmaktadır. İşte Chua devresindeki bu topolojinin bir sonucu olarak Hamiltonyanın türevi sadece kondansatörler üzerindeki gerilime bağlıdır.

Chua diyodu 3 parçalı, parça-parça doğrusal karakteristliğe sahiptir. Tezde amaç spiral tipi kaos oluşumunu gözlemek olduğu için basitlik açısından 2-parçalı karakteristliğe sahip Chua diyodu ile çalışılmıştır.

Hamiltonyanın türevi sıfıra eşitlenmiş ve enerjinin arttığı ve azaldığı bölgeleri birbirinden ayıran alt-uzay denklemleri elde edilmiştir. Böylece sistemin hangi bölgelerde enerji aldığı, hangi bölgelerde de kaybettiği belirlenmiştir.

Devre bir LC devresi olsaydı ilk koşullarına bağlı olarak periyodik çözüm üretecek ve kayıpsız davranış sergileyecekti.

Paralel LCR devresi olsaydı R direnci pasif ise devre durmaksızın enerji kaybederdi, aktif ise de durmaksızın enerji kazanırdı. Bu durumda çözüm direncin aktif ya da pasif olmasına göre ya sıfıra ya da sonsuza gider.

Chua devresinde Chua diyodu doğrusal olduğunda gözlenecek dinamikler LCR devresi için yapılan bu yorumlara benzerdir. Devrede bu durum için inceleme yapılmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Chua devresinde özdeğerler her bölgede bir reel, bir kompleks çift şeklinde alınmıştır. Literatürde karşılaşılan Chua devresi parametreleri için istisnalar dışında daima orta ve dış bölgeler için bir reel özdeğer ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti hali söz konusudur. Shilnikov teoreminin koşullarından birinin homoklinik yörüngesinin denge noktasında sistemin bir reel özdeğere ve bir kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahip olması ve Chua devresi ile olan çalışmalarda yazarların amacının kaos elde etmek olduğu düşünülürse literatürde karşılaşılan bu durum anlamlı olacaktır.

Chua diyodunun doğrusal olması için inceleme yapıldıktan sonra 2 kırıklı, parça parça doğrusal Chua diyodu için devrenin incelenmesine geçilmiştir. Bu analiz için geçici çözümler atılmıştır. Dallanma parametresi α 'nın değeri sabitlenmiştir. Dallanma parametreleri a ve b 'nin değerleri, üst ve alt bölgeler için sistemlerin bir reel özdeğeri ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti olacak şekilde seçilmiştir. Başlangıç noktaları çözümler kararsız özvektörün etkisi altında sonsuza gitmeyecek şekilde seçilmiştir. İncelemelerde β parametresi taranmıştır.

İlk parametre takımı için kararsız limit çevrim davranışı gözlemlenmiştir. β parametresi arttırıldıkça sistemde önce ıraksak çözüm, ardından kararsız limit çevrim, ardından da yakınsak çözüm gözlemlenmiştir.

İkinci parametre takımı olarak ilk parametre takımında a ve b parametrelerinin değerleri birbirleriyle değiştirilmiştir. Her ne kadar bu değişiklik ile kararlı limit çevrim eldesi ümit edilmiş olsa da bu gerçekleşmemiştir. Sebebini anlamak için sistemin Chua diyodunun kırıklarına göre her bir bölgedeki enerji alış verişini incelenmiştir. Yapılan gözlem alt ve üst bölgelerde doğru enerji alış verişinin sağlanmadığı olmuştur. Yapılan çıkarım aşağıdaki gibidir:

Chua devresinde bir merkez çevresinde kararlı ya da kararsız limit çevrim oluşturulacaksa hem iç bölge ve dış bölgede; hem de üst ve alt bölgede doğru enerji ilişkileri kurulmalıdır

Üçüncü parametre takımı seçilirken bu hususlar gözetilmiş ve kararlı bir limit çevrim eldesi başarılmıştır.

Bu üç parametre takımında da β parametresi arttırılırken kararsız çözümden kararlı çözüme gidiş gözlenmiştir. Orta değerlerde ise limit çevrim davranışı gözlenmiştir.

Bir başka parametre takımı ile inceleme yapıldığında peryot katlaması ile kaos dinamiği gözlenmiştir. Bu dinamik gözlemlendiğinde de benzer olarak β parametresi arttırılırken kararsız çözümden kararlı çözüme gidiş gözlenmiştir. Kararlı çözümle yola çıkılmış, ardından bir kararlı limit çevrim gözlenmiştir. Ardından kararlı limit çevrim iç bölgesi ile dış bölgesi arasında bir girişim oluşmuş, enerji alan ve veren yörüngeler birbirlerini kesmeye başlamıştır. Bu peryot katlaması ile kaos dinamiğini getirmiştir. Ardından da ıraksak çözüm gözlenmiştir.

Bir yan sonuç olarak garip çekicinin içinde kararlı ya da kararsız çözümlerin gözlemlendiği haller olmuştur. İç bölge sistem dinamiğine belirleyici bir etki yapmamıştır.

Bu gözlemden de bir yan sonuç çıkarılmış ve yörüngesinin iç-bölgeye girdiğinde daima bu bölgede kalmaması için iç-bölgenin enerji kazanan davranış göstermesinin daha dayanıklı kaos eldesi açısından önemli olduğu not edilmiştir. Bu da ana amacımız dışında elde edilen önemli bir ilave sonuç olmuştur.



ESTABLISHING STRETCHING AND FOLDING MECHANISM AND DESIGNING CHAOS GENERATOR WITH ENERGY-BASED APPROACH

SUMMARY

The aim of the thesis is to explain chaotic dynamics by using energy concept or to propose an effective method for designing chaotic circuits by examining energy exchange of in an electrical circuit that initiates chaotic dynamics.

There are two types of chaotic systems; first one is energy conservative Hamiltonian chaotic systems and the other one is systems that consist of strange attractors. Strange attractors continuously gains and loses energy such that system variables keeps their magnitudes within some limit values. They differ from stable systems, these systems neither go to a stable equilibrium point nor go to a limit cycle.

Stretching and folding is a well known mechanism of lossy chaotic systems. With the energy point of view to form stretching and folding mechanism it is a necessity to ensure that energy can be changed. The subject of this thesis, whether it is possible to form a stretching and folding mechanism via energy shaping to produce chaos or to reach an understanding that will serve this purpose in the future.

In the thesis, it is examined whether it is possible to put an LC tank circuit into chaos with proper energy exchange. The first chaotic circuits that come to mind for this idea are Van der Pol oscillator and Chua circuits. Examining the Van de Pol oscillator would be more complex because it contains source. For this reason Chua circuit was taken.

The Chua circuit has a great importance in the history of chaos. In continuous dynamic systems, a system with at least 3 dimensions is required to obtain chaos. The Chua circuit is the simplest electrical circuit where chaos can be obtained. The Chua circuit, as first proposed, consists of 5 elements: 1 inductance, 2 capacitors, 1 passive resistor and an active resistor called the Chua diode. Although the circuit produced rich dynamics in its first proposed form, it was realized that it could not produce all the dynamics that can be encountered in a 3-dimensional dynamic system in the literature, and thus, a 6-element version was also derived by adding a series resistance to the inductance. This new form of the Chua circuit, called the Chua oscillator, has been shown in the literature to produce all the dynamics that can be encountered in a 3D system. In this thesis, since it has been worked on extensively the Chua circuit was used for its potential to generalize the results obtained.

In dynamic systems, energy representations can be used to understand the system dynamics. Lyapunov theory can be given as an example. Euler-Lagrange equations and Hamilton equations used to write differential equations in classical mechanical systems are other examples that can be given. In these methods, the concepts of potential and kinetic energy are used. When similar equations are wanted to be written for electric circuits, the question of how kinetic energy or potential energy should be

defined in electric circuits is faced. Since the thesis also aims to examine dynamic systems with the help of the concept of energy, this subject is addressed first.

When we look at the history, we see that energy-based methods are used more effectively in classical mechanics. When writing the Euler-Lagrange and Hamilton equations, first the generalized coordinates are determined. Then first the problem is considered from the generalized coordinates. For the Euler-Lagrange equations, a differential equation set is written that includes the generalized coordinates and the generalized velocities that are the derivatives of these coordinates. For Hamilton's equations, the generalized coordinates and generalized velocities are written in terms of each other to obtain a differential equation set. If the generalized coordinate number of the system is n , the Euler-Lagrange equations contain n second-order differential equations; and the Hamilton equations contain $2n$ first-order differential equations.

If the Euler-Lagrange equations are to be written for an electric circuit, first a group of variables are determined as generalized coordinates, then these generalized coordinates and their derivatives, the generalized velocities, must form a set of differential equations that include all of them. When it is desired to write Hamilton equations for an electric circuit, one group of variables must be determined as the generalized coordinates and another group of variables as the generalized velocities. Then, a differential equation set in which these variables are written in terms of each other must be obtained. The two formulations are not unique. Also, the number of generalized coordinates and generalized velocities may not be equal. While in classical mechanics, velocity is always a derivative of position, in an electric circuit, a relationship is formed between generalized position and generalized velocity through the way the circuit elements are connected.

In classical mechanics, the definitions of generalized position and generalized velocity are clear. Therefore, the concepts of kinetic and potential energy are also clear. In electric circuits, the situation is different. Kinetic energy and potential energy changes depending on which concept the generalized position and generalized velocity will be taken as.

When looking at the energy formulations of electric circuits, two methods stand out in the literature. Bernstein-Lieberman equations and Chua-McPearson equations. Since Bernstein Lieberman equations can only be used for LC circuits, Chua McPearson equations are used in the thesis.

When we want to do work with the concept of energy in an electric circuit, the first question we encounter is which magnitude of energy will be considered. The first thing that comes to mind is to use the total energy of the elements that can store energy as energy. Another method encountered in the literature is to liken the differential equations of the electric circuit to one of the structures considered in the Port Controlled Hamilton theory and to define the energy accordingly. The energy function created in these two ways may be more complicated than necessary. As explained below:

An electric circuit can be expressed in the most general form by a differential-algebraic equation system. In a differential-algebraic equation system, if some or all of the differential equations are eliminated from the equations, it may be possible to work with simpler differential equations and a simpler energy function.

Port Controlled Hamiltonian theory is generally used for stabilization and similar synchronization. There have been concerns about using the Hamiltonian to obtain

chaos, although it would not cause problems when used for these purposes. Due to these uncertainties, the Hamiltonian was obtained with two methods in the thesis and it was ensured that the correct Hamiltonian was used.

Since the Hamiltonian for the Chua circuit has been obtained, it can now be considered with the concept of energy. If we look at the energy exchange of the Chua circuit, the Chua diode is the only element in the circuit that gives energy. Therefore, when the Chua diode gives more energy to the circuit than the passive resistance consumes, energy is stored in the dynamic elements. Otherwise, the existing energy in the dynamic elements is consumed.

In this thesis, the change in the Hamiltonian of the circuit is investigated to understand the behavior of the circuit. The approach put forward is to track the energy along the orbits and relate the change in energy to the different dynamics of the Chua circuit.

Chua diode has 3-piece, piecewise linear characteristic. Since the aim of the thesis is to obtain the spiral type chaos, Chua diode with 2-piece characteristic is studied.

After obtaining the Hamiltonian, it was examined how the Hamiltonian changed. The result obtained was that the derivative of the Hamiltonian does not depend on z , but only on x and y . This made it possible to evaluate the increase and decrease of the energy using the x - y projection.

First, it would be good to consider why this result occurs. The Chua circuit contains an LC tank circuit, and this LC tank circuit has no direct relationship with the other energy-storing element. The only relationship is through the terminal equation of the passive resistor. As a result of this topology in the Chua circuit, the derivative of the Hamiltonian depends only on the voltage across the capacitors.

Chua diode has 3-piece, piecewise linear characteristic. Since the aim of the thesis is to observe the spiral type chaos formation, Chua diode with 2-piece characteristic is studied.

The derivative of the Hamiltonian is set equal to zero and the subspace equations separating the regions where the energy increases and decreases are obtained. Thus, it is determined in which regions the system gains energy and in which regions it loses energy.

If we were to consider an LC circuit, it would produce a periodic solution depending on its initial conditions and exhibit lossless behavior. If it were a parallel LCR circuit, if the R resistance was passive, the circuit would constantly lose energy, and if it was active, it would constantly gain energy. In this case, the solution would either go to zero or infinity depending on whether the resistance was active or passive.

The dynamics to be observed when the Chua diode is linear in the Chua circuit are similar to these comments made for the LC and LCR circuits. An examination was made for this situation in the circuit and similar results were obtained.

In the Chua circuit, the eigenvalues are taken as one real and one complex pair in each region. For the Chua circuit parameters encountered in the literature, except for some exceptions, there is always one real eigenvalue and one complex conjugate eigenvalue pair for the middle and outer regions. If we consider that one of the conditions of the Shilnikov theorem is that the system has one real eigenvalue and one complex conjugate eigenvalue pair at the equilibrium point of the homoclinic orbit and that the aim of the authors in the studies with the Chua circuit is to obtain chaos, this situation encountered in the literature will be meaningful.

Then, the circuit is examined for the case of a linear Chua diode with 2 pieces. For this analysis, temporary solutions are discarded. The value of the parameter α is fixed. The values of the branching parameters a and b are chosen such that the systems have a real eigenvalue and a complex conjugate eigenvalue pair for the upper and lower regions. The initial points are chosen in such a way that the solutions are not caught by the unstable eigenvector. Otherwise, the solutions will remain under the influence of the unstable eigenvector and goes to infinity. The β parameter was scanned in the analyses.

For the first parameter set, unstable limit cycle behavior was observed. As the β parameter was increased, the system first showed a divergent solution, then an unstable limit cycle formed, and then a convergent solution observed.

As the second parameter set, the values of the a and b parameters in the first parameter set were changed with each other. Although it was hoped that a stable limit cycle would be obtained with this change, this did not happen. To understand the reason, the energy exchange in each region of the system according to the parts of the Chua diode was examined. The observation was that the correct energy exchange was not provided in the lower and upper regions. The inference made is as follows:

If a stable or unstable limit cycle is to be created around a center in the Chua circuit, correct energy relations must be established both in the inner and outer regions; and in the upper and lower regions.

These issues were taken into consideration when selecting the third parameter set and a stable limit cycle was achieved.

In all three parameter sets, a transition from an unstable solution to a stable solution was observed as the β parameter was increased. At intermediate values, limit cycle behavior was observed.

When another parameter set was examined, chaos dynamics were observed with period doubling cascade route. When this dynamic was observed, a similar progression from an unstable solution to a stable solution was observed as the β parameter was increased. A stable solution was started, and then a stable limit cycle was observed. Then an interference occurred between the inner and outer regions of the stable limit cycle, the orbits that gains and loses energy started to intersect each other. This brought chaos dynamics with period doubling. Then a divergent solution was observed.

As a side result, there were cases where stable or unstable solutions were observed inside the strange attractor. The inner region did not have a decisive effect on the system dynamics.

Obtained result from the thesis is that, after settled a stable limit cycle, creating an interference between energy gaining and losing trajectories starts period doubling mechanism. By increasing the interference, circuit enters the chaotic regime by period doubling cascade route. When it is continued to increase the interference chaos is observed.

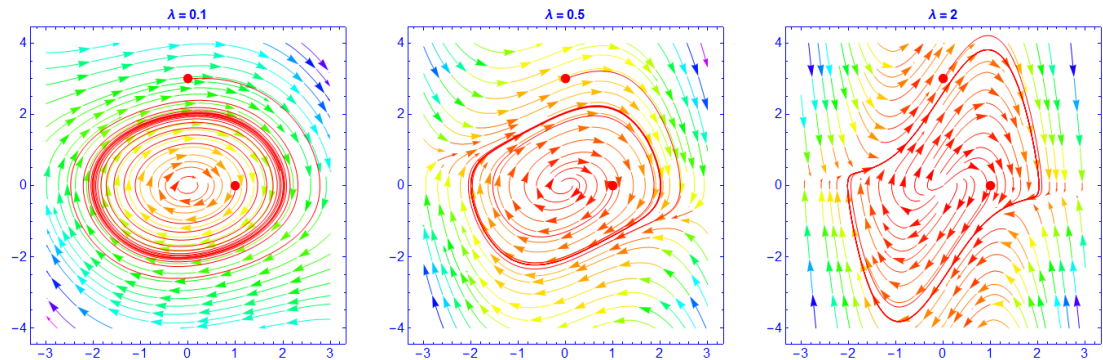
As a subsidiary result, while examining the effect of the energy Exchange in the inner region of chaotic attractor doesn't affect the rising of the chaotic attractor. Additionally, the case in the inner region energy is increasing when chaotic behaviour occurred this chaotic attractor becomes more robust.

1. GİRİŞ

Bu tezde doğrusal olmayan¹ sistemlerin analizi için kullanılabilecek enerji temelli bir yaklaşım geliştirilmesi amaçlanmıştır. Genel olarak doğrusal olmayan sistemler analitik olarak çözülemezler. 3 cisim problemi buna örnek olarak gösterilebilir [1]. Klasik mekanikte noktasal iki cisim için başlangıç konumları ve hızları bilindiğinde bu cisimlerin yörüngeleri hesap edilebilir. Oysa aynı problem üç noktasal cisim için kaotik davranış gösterir. Dolayısıyla analitik olarak çözülemez.

Doğrusal sistemlerde özdeğerler ve özvektörler hesap edilerek sistem davranışı kestirilebilmektedir. Ne yazık ki doğrusal olmayan sistemlerde bu yöntem işe yaramamaktadır. Genel yaklaşım sistemin bir noktada küçük değişimler için doğrusal eşdeğerinin bulunması ve bu nokta civarındaki davranışının kestirilmesidir. Kullanılan analiz yöntemine göre ele alınan çeşitli noktalardaki bu yerel davranışlardan sistemin davranışı yorumlanır. Sistemin ya da doğrusal eşdeğerinin varsa denge noktalarının bulunması; bu noktalardaki özdeğer ve özvektörlerinin analiz edilmesi buna güzel bir örnektir. Faz alanı çizimi bu yaklaşımın en genel uygulamasıdır.

Bu yöntem kaotik olmayan sistemler için etkili olarak kullanılabilir. Şekil 1.1'deki van der Pol osilatörü faz alanı buna örnek olarak gösterilebilir. Bir faz portresi sadece faz alanı içermeyip özvektörler, özdüzlemler; denge noktaları, limit çevrimler; homoklinik, heteroklinik yörüngeler de içerecek şekilde daha kapsamlı çizilebilir.



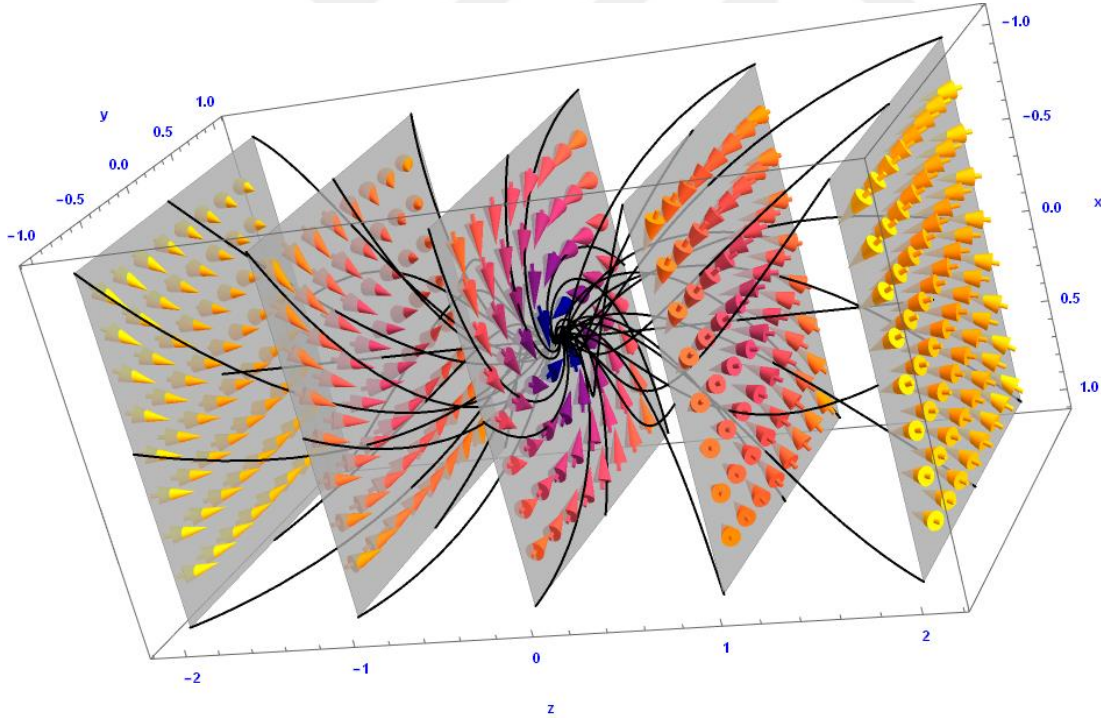
Şekil 1.1 : Van der Pol osilatörü faz portresi.

¹ Doğrusal sistemler toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağlayan sistemlerdir.

İki boyutlu bir sistemde faz alanı yardımıyla yörünge kestirilebilir olsa da üç boyutlu bir sistemde bu yöntem çok karmaşık hale gelecektir. Şekil 1.2'deki bir sabit katsayılı doğrusal matris diferansiyel denkleminin faz portresi buna örnek olarak gösterilebilir. Bu iki sistemin diferansiyel denklemleri (1.1) ile verilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x \end{aligned} \quad (a) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (b) \quad (1.1)$$

(1.1)(a) denklemi ile verilen Van der Pol osilatörünün faz portresi Şekil 1.1'de; (1.1)(b) denklemi ile verilen sabit katsayılı, doğrusal matris diferansiyel denkleminin faz portresi ise Şekil 1.2'de verilmiştir. Faz portrelerinde oklar ile faz alanları gösterilmiştir. (1.1)(b) diferansiyel denkleminin analitik çözümü elde edilebilir olmasına rağmen Şekil 1.2'den görülebileceği gibi faz alanının yorumlanması oldukça zordur. Sistem davranışının daha karmaşık olduğu kaotik sistemlerde faz alanını yorumlamak çok daha zor olabilir.



Şekil 1.2 : Negatif reel kök ve kompleks kök çifti içeren bir doğrusal matris denklem sisteminin faz portresi

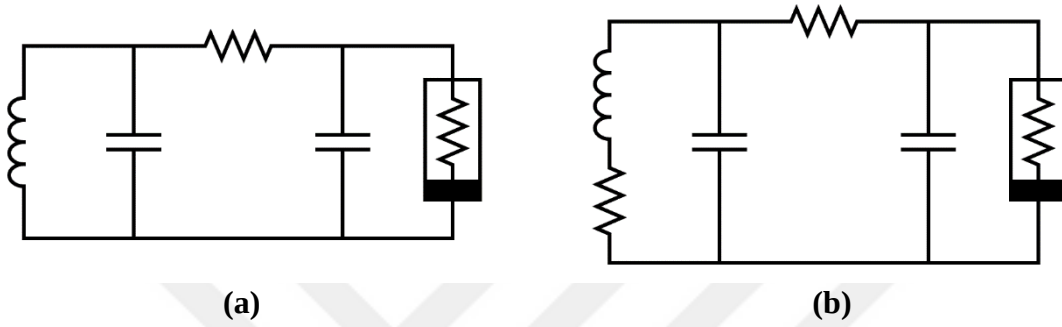
Bu zorluğu aşmak için enerji kavramı kullanılabilir. Enerji temelli yöntemler sistem davranışına dair bilgi vermektedir. Doğrusal olmayan sistemler kararlı oldukları taktirde, bu sistemler için etkili olarak kullanılabilen bir yöntem Lyapunov teoridir. Lyapunov teori yerel ya da genel olarak sistemin bir denge noktasına gittiğini göstermek için kullanılır. Enerji temelli başka yöntemler de vardır: Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri. Bu denklemler sisteme dair diferansiyel denklemlerin elde edilmesinde kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Hamilton teori başlangıçta denklemlerin eldesi için kullanılmış olsa da daha sonra bu teori geliştirilmiş ve senkronizasyon, kararlaştırma gibi konularda Lyapunov teori gibi geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Kaotik sistemlerin davranışlarını sınıflandırmak için kullanılan çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlere örnek olarak Poincare kesitlemeleri, garip çekici için Lyapunov üsteli hesabı, dallanma diyagramı çizimi verilebilir. Ne yazık ki bu yöntemler sistemin sayısal analiz ile çözülmesini gerektirir. Aynı sorun faz portresi çizimi kullanımında da vardır. Sistemi çözüp yörüngeyi çizmeksizin iş yapmak sadece Hamilton kaotik sistemlerde mümkündür. Bu sistemlerde faz alanı çizimi ile yörünge hareketi kestirilebilmektedir. Aksi olarak sistem analiz edilmeksizin yapılabilecekler çok sınırlıdır. Sistemin parça parça doğrusal olması, doğrusal alt sistemler içermesi, ya da küçük işaret analizi ile uyumlu hareket etmesi halinde etkin olarak kullanılabilen özdeğer, özvektör analizi; diferansiyel denklemin denge noktası analizi buna örnek olarak verilebilir.

Tezin amacı kaotik sistemlerin enerji bakış açısı ile incelenmesidir. Enerji bakış açısı ile bir sisteme yaklaşabilmek için önce enerji olarak hangi büyüklüğün izleneceğinin belirlenmesi gerekir. Literatür incelemesi sonucunda bu konuda Chua-McPearson tarafından geliştirilen yöntem belirlenmiş ve bu yöntemle elde edilen Hamiltonyan kullanılmıştır.

Enerji bakış açısı ile kaotik sistemlerin incelenmesi hedef olarak konduğu taktirde hangi tip kaotik sistemlere bakılacağı önem arz eder. Hamilton sistemler genel olarak korunumlu sistemlerdir. Örneğin sürtünmesiz ortamda basit sarkaç periyodik davranış gösterirken ikili sarkaç ise kaotik davranış gösterir ve iki sistemde de enerji korunur. Enerjinin korunduğu Hamilton kaotik sistemler tezin kapsamı dışında olup, tezde diğer tip kaotik sistemler olan kayıplı kaotik sistemler ele alınmıştır. Kayıplı kaotik sistemlerde kaos garip çekicinin varlığı ile gözlenir.

Kayıplı kaotik sistemler incelenmek istendiğinde de literatürdeki öneminden dolayı Chua devresi doğal olarak öne çıkar. Chua devresi basitçe gerçekleştirilebilir olması, devrede gözlenen zengin dinamikler ve Shilnikov anlamında kaotik olduğu analitik olarak ispat edilen bir devre olması sebebiyle çok popüler olmuştur [2-5]. Özellikle bu devreden türetilen Chua osilatörünün bilinen bütün 3. dereceden otonom kayıplı kaotik sistem dinamiklerini gösterdiğinin anlaşılmasıyla Şekil 1.3’de gösterilen Chua devresi ve Chua osilatörü kaos üzerine çalışmak için çok önemli devreler haline gelmiştir [6].

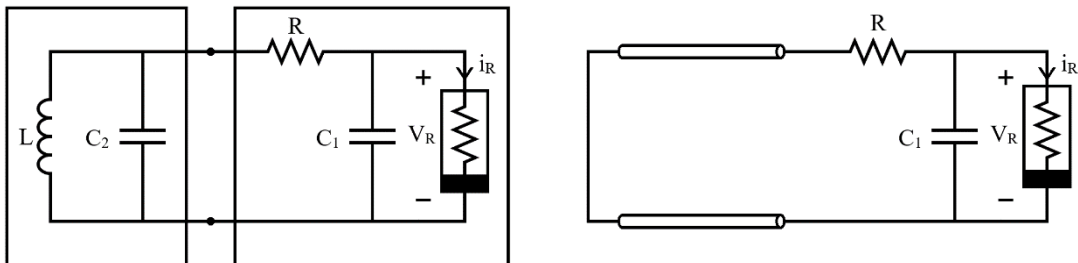


Şekil 1.3 : Chua devresi ve Chua osilatörü.

Tezde enerji bakış açısıyla Chua devresi ele alınmıştır. Chua devresi farklı tip davranışlar için enerjinin değişimi açısından gözlenmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

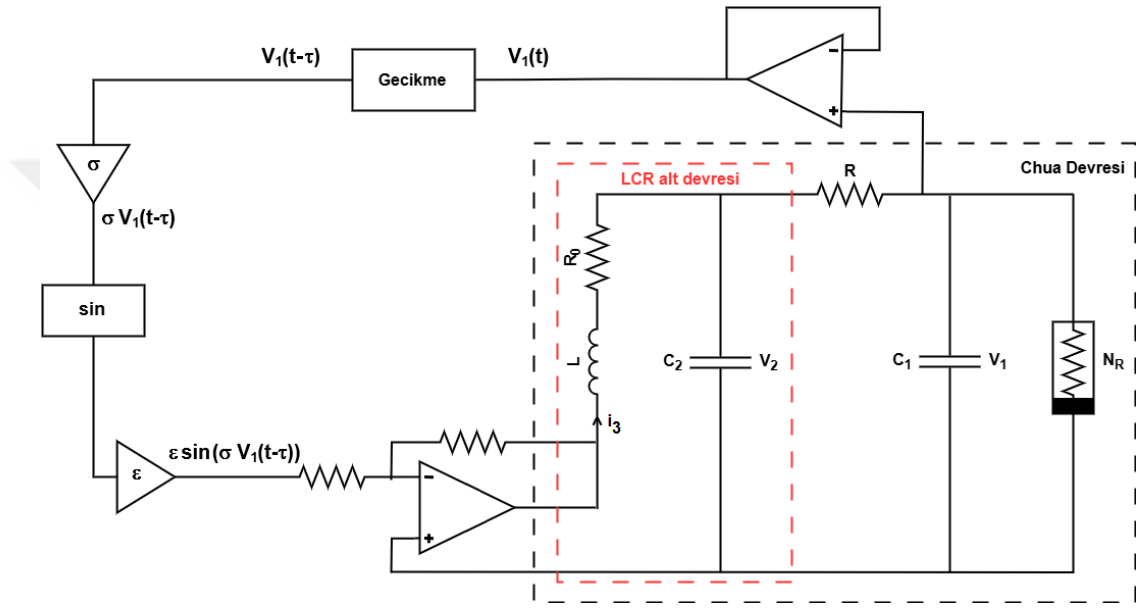
Enerji değişimi iki farklı şekilde incelenmiştir. İlk olarak toplam enerjinin değişimi açısından dinamikler incelenmiştir. Bir diğer yöntem olarak Chua devresinin içerdiği LC tank devresinin devrenin geri kalanı ile yaptığı enerji alış-verişine bakılmıştır.

Literatürde de benzer yaklaşımlar gözlenmektedir [7]. Örneğin Şekil 1.4’de görülen Chua devresinde LC alt devresi yerine bir transmisyon hattı konulmuştur. Bu hat da bir RLC devresi gibi modellenebildiği için devre bir RLC devresi ve ona paralel bağlı bir aktif devre şeklinde yorumlanabilir.



Şekil 1.4 : Chua devresinde LC tank devresi yerine transmisyon hattı konarak elde edilen yeni kaotik devre.

Tezde ortaya konan yaklaşım birçok açıdan geliştirilme potansiyeline sahiptir ve kendine birçok uygulama alanı bulabilir. Örneğin Şekil 1.5’da verilen [8] numaralı kaynaktan yer alan devrede Chua osilatöründe LCR alt devresine bir akım geri beslemesi yapılarak devrenin kaotik davranışı zenginleştirilmiştir. Benzer düşünce ile tezde Chua devresi için edinilen anlayış Chua osilatörü için de tekrarlandığında elde edilecek bilgi ile amaca yönelik geri besleme yaparak daha kararlı kaos eldesi mümkün olabilir. Tezin son bölümünde tez konusunun geleceğe yönelik yaratabileceği başka potansiyellere de değinilecektir.



Şekil 1.5 : Chua osilatöründe LCR alt devresine akım geri-beslemesi uygulanarak elde edilen yeni kaotik devre.

Tez toplam altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde kaos teorisinde kullanılan enerji temelli yöntemlere değinilmiştir. Üçüncü bölümde Chua literatürü ele alınmıştır. Dördüncü bölümde Chua devresi için Euler-Lagrange denklemleri yazılarak Hamiltonyan elde edilmiştir. Beşinci bölümde tezde geliştirilen yöntem açıklanmıştır. Tezde enerjinin arttığı ve azaldığı yörüngelerin arasındaki girişimin kaotik dinamik yaratmak için kullanılabileceği gösterilmiştir. Son bölümde ise bu bakış yardımıyla ulaşılabilecek yeni sonuçlar ele alınmıştır.



2. KAOS TEORİSİNDE KULLANILAN ENERJİ TEMELLİ YÖNTEMLER

2.1 Dinamik Sistem Teorisinde Enerji Kavramının Kullanılması

Dinamik sistem teorisinde bir sistemin zamana göre davranışı incelenir. Sistemde bilinmesi istenen büyüklükler değişkenler ile ifade edilir ve sistemin davranışı çeşitli yöntemlerle çözülür. Dinamik sistemlerde enerji kavramından dört şekilde istifade edilebilir:

- Sistemin modellenmesi ve sisteme dair denklemlerin oluşturulması
- Denklemlerin çözülmesi
- Sistem davranışının kestirilmesi
- Sistemin kontrol edilmesi

Bu bölümde bu başlıklar örnekler ve literatür incelemesi ile ele alınacaktır.

2.1.1 Sistemin Modellenmesi ve Sisteme Dair Denklemlerin Oluşturulması

Sistem denklemleri enerji kavramı yardımıyla elde edilebilir. Klasik mekanikte etkin olarak kullanılan Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri bu kullanıma verilebilecek örneklerdir. Klasik mekaniğe dalga denklemi olarak yaklaşan Hamilton-Jacobi denklemi enerjinin bu kullanımına verilebilecek bir başka örnektir. Hamilton-Jacobi denklemi ile sistem denklemleri oluşturulduğunda varyasyonel hesap teknikleri kullanılır.

Enerji kavramı ile sisteme dair bir özellik denklemlere katılabilir. Klasik mekanikteki Newton'un 3. yasası (etki-tepki prensibi), enerjinin korunumu, momentumun korunumu yasaları; elektrik devreleri ya da daha genel olarak ağ teorisinde kullanılan Tellegen ve renkli dal teoremleri; termonamiğin ikinci yasası bu kullanıma örnek olarak verilebilir.

Fiziksel karşılığı olan dinamik sistemler ele alındığında gerçek dünya problemi ile uyumlu enerji tanımları yapılması faydalı olabilir. Örneğin bir aracın zamanla hareketi incelendiğinde enerji kavramı aracın kinetik enerjisi olarak karşımıza çıkar. Bir başka

örnek olarak bilardo toplarının bir dış kuvvet uygulandığında nasıl hareket edecekleri incelendiğinde momentumun korunumu ilkesi enerji kavramının kullanıldığı yer olur. *Ancak bu bakış enerji kavramının kullanılmasında sınırlayıcı olmamalıdır.* Enerji kavramının kullanılabilmesi için enerjinin fiziksel anlamı olacak şekilde tanımlanması şart değildir.

Enerji kavramı yerine fiziksel anlamı olmayan dual enerji kavramı da kullanılabilir. Elektrik devreleri için bu kavramlar EK B’de açıklanmıştır. Euler-Lagrange ve Hamilton gösterimlerinde enerji ve dual enerji kavramlarının alternatif kullanımlarına [9] numaralı kaynakta yer verilmiştir. Enerji tanımları yapılırken gerçek dünya problemi göz önüne alınmaksızın sadece denklemlerde enerji formülasyonuna uygun bir matematik düzenleme yapılması da yeterlidir [10].

Öte yandan sistemin çözümü neticesinde elde edilen sonuçlar ile gerçek dünya problemi arasında ilişki kurulacaksa sisteme dair fiziksel kısıtlara dikkat edilmelidir.

Örnek 2.1 : Bir LC tank devresinde potansiyel enerji olarak kondansatörün enerjisi, kinetik enerji olarak da endüktansın enerjisi tanımlansın. Devre çalışırken bir anda açık devre yapılsın. Bu sistem için aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

- a. $V=0, T=0$: Enerji verilmemiş bir LC devresi.
 - b. $V=0, T>0$: LC devresinde kondansatörün tamamen boş, endüktansın tamamen dolu olduğu an.
 - c. $V>0, T=0$: LC devresinde kondansatörün tamamen dolu, endüktansın tamamen boş olduğu an.
 - d. $V>0, T>0$: LC devresinde kondansatör ve endüktansın tamamen boş olmadığı bir an.
- Bir ilk koşula sahip LC devresi için anahtar açılana kadar b-d-c-d adımları durmaksızın gerçekleşir. Bu devrim boyunca enerji korunur.
 - Anahtar açıldığında kondansatör enerjisini korur, dolayısıyla potansiyel enerji korunur. Endüktans için ise durum farklıdır. Anahtar açıldığı için endüktanstan akım akmaz, bunun sonucu olarak manyetik alan oluşmaz ve dolayısıyla kinetik enerji korunmaz.

Örnek 2.2 : Örnek 2.1'deki sistemde devre çalışırken bir anda kondansatör açık, endüktans ta kısa devre yapılsın. Bu anahtarlama anında kondansatör ve endüktans için enerji, dolayısıyla potansiyel enerji ve kinetik enerji korunur.

Buradaki yorumun benzeri [11] numaralı kaynakta yer almıştır. Bu çalışmada kondansatör ve endüktansın sırasıyla açık ve kısa devre yapılarak değerlerini korumasının mümkün olduğu; oysa direncin değerini koruma kabiliyetinin olmadığına değinilmiş; ardından da memristör ve memristör benzeri elemanların değerlerini koruma kabiliyetleri incelenmiştir.

Sistem modelinin basitleştirilmesi söz konusu ise bu durumda enerjinin korunumu ile ilgili özelliklerden taviz vermeksizin bir basitleştirme yapılması gerekir [12].

2.1.2 Denklemlerin Çözülmesi

Bu kullanıma örnek Hamilton sistemlerde enerjinin korunması özelliğinden istifade eden enerji korunumlu diferansiyel denklem analiz yöntemleridir. Diferansiyel denklemlerin sayısal entegrasyon yöntemleri ile çözümünde zamanda bir adım aralığı belirlenip bu adım aralığı için kullanılan türev yaklaşıklığı ile alan hesabı yapılır. Çok basit ifadeyle diferansiyel denklemin çözümünün bir noktadaki değeri ve o noktadaki diferansiyel denklemin türevi ya da çok boyutta çalışılıyorsa gradyeni kullanılarak bir sonraki nokta kestirilir. Elbette bu temel düşünce şeklidir; yüksek mertebeden türevler kullanmak, hatanın bir katsayı yardımıyla geriye doğru düzeltme terimi olarak kullanılması, polinomsal yaklaşıklık yöntemleri kullanmak, vb. birçok ilave teknik ile sayısal analizin doğruluğu artırılır.

Bu yöntemlerde türeve sayısal analiz ile nasıl yaklaşılabacağı hatayı etkiler. Analiz anındaki değişken değerleri ile o andaki türev değeri kullanılabilir ya da o andaki değerler yardımıyla adım büyüklüğü kadar sonraki değişken değerleri bulunur ve adım büyüklüğü sonundaki türev değeri kullanılabilir. İlaveten zaman adımının ortasındaki türev değerini kullanan yöntemler de vardır. Sayısal hata türeve dair hangi yaklaşıklığın kullanıldığından etkilenir.

Eğer sistem kanonik Hamiltonyan ise diferansiyel denklem, (C.58)(a) yapısındadır. Bu tip sistemler için kullanılan bir yöntem, denklemlerin (C.58)(a)'ya göre p ve q değişkenleri için iki parçaya ayrılması ve bir grup değişken için analiz anındaki, diğer

grup değişken için de adım büyüklüğü sonundaki türevin kullanılmasıdır. Bu yöntemler korunumlu enegratörler¹ olarak adlandırılır [13, 14].

Denklemlerin çözümünde enerji korunumuna dikkat eden bir başka yaklaşım da diferansiyel denklem entegrasyonu kullanmak yerine; denklemlere enerji korunumuna dair denklemi de katıp elde edilen diferansiyel cebrik denklem takımı için özel diferansiyel cebrik entegratörler² kullanmaktır [15].

Kütle hareketi ile oluşan iş ya da kimyasal tepkime oluşumu, ısı alış verişı gibi enerjinin form değiştirdiği dinamik sistemlerin analizinde form değiştiren enerji çeşitlerinin eşitlenmesi de denklem çözümünde kullanılabilir.

Bir sistemin sayısal analiz yöntemleri ile periyodik çözümleri arandığında sayısal entegrasyon yöntemleri küçük hataların birikerek sonuca etki edebilmesi sebebiyle etkili olmayabilir. Bu durumda sistemin doğrusal olmayan karakteri düşük ise pertürbasyon analizi işe yarayabilir. Doğrusal olmayan davranışın baskın olduğu durumda ise Harmonik Balans yöntemleri etkin olarak kullanılabilir. [16] numaralı kaynakta bu konuda kapsamlı bir literatür taraması yer almaktadır.

2.1.3 Sistem Davranışının Kestirilmesi

Dinamik sistemlerin analiz edilmeksizin davranışının kestirilmesi için enerji kavramı etkin olarak kullanılabilir. Bunun en görkemli örneği Lyapunov teoridir. Bu teoride sistem değişkenlerini giriş olarak alan özel bir fonksiyon bulunmaktadır. Öyle ki bu fonksiyonun değeri dinamik sistemin çözümü boyunca ya sabit kalır ya da git gide azalır. Lyapunov teori, dinamik sistemin çözümünün yerel ya da genel olarak sınırlı kaldığını ya da bir denge noktasına gittiğini söyleme imkanı verir. 100 yıldan eski bir teoridir ve bir çok açıdan geliştirilmiştir. Anahtarlama sistem kararlılığı da bu teorinin etkin olarak uygulama alanı bulduğu yerlerden biridir. Böyle bir sistem için bir Lyapunov fonksiyonu bulmak yerine uygun koşulları sağlayan Lyapunov fonksiyonları ile çalışmak mümkündür. Tezde 6.9. bölümde gelecekte tezin amacı doğrultusunda bu teorinin nasıl kullanılabileceğine değinilmiştir.

İki tip sistemde daha enerji kavramı yardımıyla sistem davranışı etkin olarak kestirilebilmektedir. Hamiltonyan sistemlerde ve Gradyen sistemlerde.

¹ Symplectic integrators

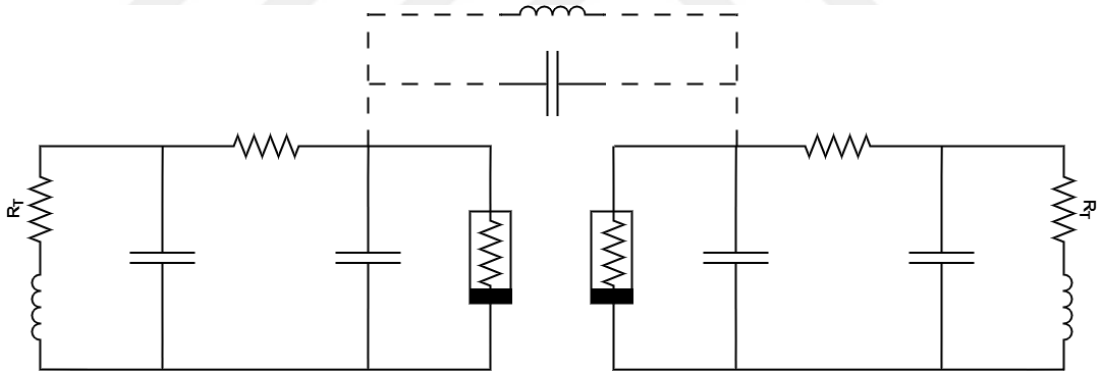
² Diferantial algebraic equation integrators

(C.58)(a) ile verilebilen sistemler kanonik Hamiltonyan sistemler olarak adlandırılır. Bu sistemlerde Hamiltonyan korunumlu büyüklüktür. Yörüngeler boyunca değeri korunur. Gradyen sistemlerde ise sistem değişkenlerinin fonksiyonu olan bir potansiyel fonksiyonunun değeri yörünge hareketi boyunca daima azalır. Böylece hareket bir denge noktasında sonlanır.

2.1.4 Sistemin Kontrol Edilmesi

Örneğin Şekil 2.1'deki devrede iki Chua devresi kapasite (ya da endüktans) ile elektrik alanı (ya da manyetik alan) kuplajı oluşturarak bir birine bağlanmıştır. Devreler arası kuplaj kapasitif, endüktif ya da iki kuplajın birden kullanılması şeklinde olabilir. Chua devrelerinde birer termistör kullanılmıştır. Termistör kullanımı ile devreler ısı değişimine duyarlı hale getirilmiştir.

Sayısal analiz, simülasyon ve devre gerçekleştirilmesi ile termistörlerin koşulları çok farklı olduğunda senkronizasyonun başılamadığı gösterilmiştir. Devrede kuplajın olduğu yere termistörlerin konabileceği; böylelikle senkronizasyonun gerçekleşmesinin kontrol edilebildiği bir temel yapıya varmanın mümkün olabileceği önerilmiştir [17].



Şekil 2.1 : Elektrik ya da manyetik alan kuplajı yapılmış iki Chua devresinin termistörlerdeki değişim yardımıyla senkronizasyonu için önerilen devre.

2.2 Kaos Teorisinde Kullanılan Bazı Enerji Temelli Yöntemler

Bu bölümde kaos teorisinde kullanılan enerji temelli bazı yöntemler ele alınacaktır. İlk olarak Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri, ardından da Port Kontrollü Hamilton formülasyonları verilecektir. Burada gösterilecek olan Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin çıkarımları için EK C'ye bakınız.

2.2.1 Euler-Lagrange Denklemleri

Sistemin holonomik olmayan kısıt denklemi içermesi yani sadece konuma bağlı olmayan kısıt içermesi durumunda Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (C.39)$$

Sistemin korunumsuz kuvvetler de içermesi halinde yani en genel halde Euler- Lagrange denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (C.48)$$

2.2.2 Hamilton Denklemleri

Sistem kanonik yapıda ise yani kinetik enerji zamana bağlı değil ise (C.58)(a) kanonik Hamilton denklemleri kullanılır. Sistem kanonik yapıda olmadığından yani kinetik enerji zamana bağlı olduğunda (C.58)(b) de denklemlere katılır. Bu durumda (C.58) Hamilton denklemleri kullanılır.

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (a) \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (b)$$

Sistemin korunumsuz kuvvetler de içermesi halinde yani en genel halde ise Hamilton denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \end{aligned} \quad (a) \quad (C.73)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (b)$$

2.2.3 Port Kontrollü Hamilton Sistemler

Tanım 2.1 Kapı Kontrollü Hamilton Sistem: Kanonik Hamilton yapıda bir sistem ele alınsın. Bu sistemin uyarılması durumunda sisteme ait denklemler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} + F\end{aligned}\quad (2.1)$$

Bu denklemler, genelleştirilmiş koordinatlardaki konumlar, momentumlar ve kuvvetlere dair $q = (q_1, \dots, q_n)^T$, $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ ve $u = (F_1, \dots, F_n)^T$ şeklinde tanımlanan q , p ve u vektörleri yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial q} + u\end{aligned}\quad (2.2)$$

(2.2) ile verilen bu sistemde H 'nin zamana göre türevi alınır,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial^T H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial^T H}{\partial p} \dot{p} = (-\dot{p}^T + u^T) \dot{q} + \dot{q}^T \dot{p} = u^T \dot{q} \quad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. Bu da genelleştirilmiş kuvvetler ile sisteme verilen enerjinin sistemin toplam enerjisindeki yani Hamiltonyanındaki değişime eşit olduğu anlamına gelir. Yani bu denklem enerjinin korunumunu gösterir.

(2.2) ile verilen bu sisteme bir y çıkışı ilave edilirse aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \frac{\partial H}{\partial p} (= \dot{q})\end{aligned}\quad (2.4)$$

Kapı yaklaşımı ile düşünülecek olursa (2.4) denklemine göre u giriş ve y çıkış kapılarından verilen enerji kayıpsız olarak sisteme aktarılır. Bu denklemde giriş fonksiyonuna çarpan olarak gelen ilgili matris parametresi genelleştirilirse aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B(q) \end{bmatrix} u$$

$$y = B^T(q) \frac{\partial H}{\partial p}$$
(2.5)

Şimdi de bu denklemdeki matris ve vektörler genelleştirilirse,

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x) u$$

$$\dot{y} = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x)$$
(2.6)

denklemi elde edilir. Bu denklemde $x = (q^T, p^T)^T$ 'dir ve $J(x)$ de,

$$J(x) = -J^T(x)$$
(2.7)

koşulunu sağlayan eksi bakışım¹ bir sabit matristir. (E.6) denklemleri *Kapı Kontrollü Hamilton* sisteme dair gösterimdir.

Tanım 2.2 Kayıplı Kapı Kontrollü Hamilton Sistem: Kapı Kontrollü Hamilton sisteme kayıplılık eklenmesi ile elde edilir.

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x) u$$

$$\dot{y} = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x)$$
(2.8)

(2.8) denklem sistemi *Kayıplı Kapı Kontrollü Hamilton* sisteme dair gösterimdir. Bu denklem sistemi kayıpsız değildir.

¹ skew symmetric

Kapı Kontrolü Hamilton sistemlerde genel bir sakınca vardır. Denklemler elde edilirken klasik mekanikte çok işe yarayan Hamilton denklemleri ile yola çıkılmıştır. EK C'den görülebileceği gibi Hamilton denklemleri genelleştirilmiş koordinatlarda yazılır. Oysaki Kapı Kontrollü Hamilton denklemleri elde edilirken bu denklemler üzerinde genelleştirme işlemleri yapılmıştır. Dolayısıyla artık denklemlerin genelleştirilmiş koordinatlarda olduğu söylenemez.

Bu teori ile çalışılırken sistemin bu şekilde yazılan enerji fonksiyonunun alışlageldik koordinatlarda olduğu, genelleştirilmiş koordinatlarda çalışılmamasının bir sakınca yaratıp yaratmayacağı sorgulanmalıdır. Kapı kontrollü Hamilton teori genellikle kararlılaştırma veya senkronizasyon için kullanıldığı için bu husus bir sorun oluşturmamaktadır.



3. CHUA DEVRESİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR İNCELEMESİ

Tezin amacı Chua devresinin davranışını enerji alış verişi ile gözlemektir. Dolayısıyla literatürde Chua devresi ile ilgili yapılan analizler tez için önemli bir çıkış noktasıdır. Chua devresi kaos tarihinde büyük bir öneme sahiptir. Devrede gözlenen zengin dinamikler ve devrenin basitçe gerçekleştirilebilir olması sebebiyle Chua devresi kaos literatüründe çok popüler olmuştur.

Chua devresi kaotik davranış gösteren en basit elektrik devresidir. Gözlenen zengin dinamiklere rağmen Chua devresinde gözlenemeyen dallanma davranışları benzer karmaşıklıkta yeni kaotik elektrik devreler önerilmesine sebep olmuştur. Chua devresi ve benzer olan bu devreler literatürde bir arada '*Chua Devre Ailesi*' olarak anılmıştır.

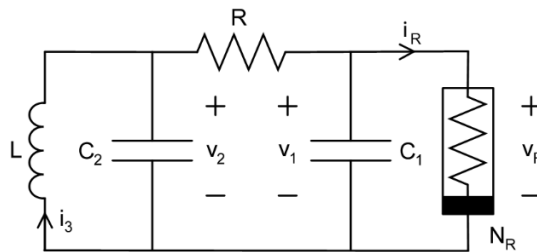
Bu bölümde Chua devresi ile ilgili literatür aşağıdaki açılardan incelenecektir:

- Chua ve Chua devre ailesine ait devreler ve denklemler
- Literatürde tezle ilgili ortaya konan katkılar

İlk bölümde Chua devresi ile ilgili bilgi verilecektir. Bu bölümde Chua devresi için literatürde karşılaşılan farklı devre denklemleri gösterilecek olup ardından Chua devre ailesi tanıtılacak ve Chua devresi ile ilgili genelleştirmelere değinilecektir. Bir sonraki bölümde ise Chua devresi ile ilgili literatür verilecektir.

3.1 Chua Devresi

Şekil 3.1'de verilen Chua devresi 3 enerji depolayan eleman, bir direnç ve bir aktif dirençten oluşmaktadır. Aktif direnç 3 kırık içeren sürekli, parça parça doğrusal bir dirençtir ve literatürde '*Chua Diyotu*' olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 3.1 : Chua devresi.

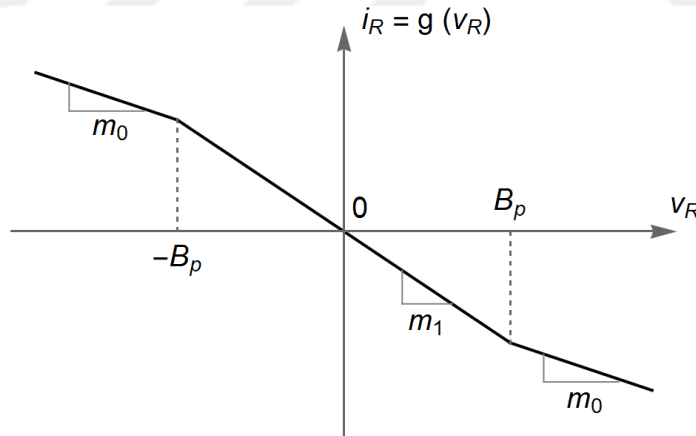
Chua devresine ait denklemler aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= G(v_2 - v_1) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -G(v_2 - v_1) + i_3 \\ L \frac{di_3}{dt} &= -v_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) denklemindeki C_1 , C_2 , L ve G devre elemanlarının değerleridir. Denklemdaki $g(v_R)$ fonksiyonu ise doğrusal olmayan N_R direncinin tanım bağıntısıdır ve (3.2) denklemi ile verilmektedir.

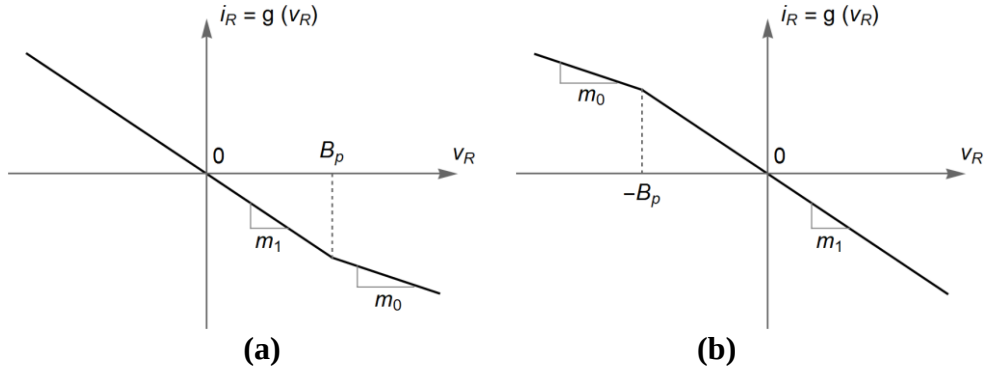
$$\begin{aligned} i_R = g(v_R) &= m_0 v_R + \frac{(m_1 - m_0)}{2} [|v_R + B_p| - |v_R - B_p|] \\ &= \begin{cases} m_0 v_R + B_p (m_1 - m_0), & v_R \geq B_p \text{ için} \\ m_1 v_R, & |v_R| \leq B_p \text{ için} \\ m_0 v_R - B_p (m_1 - m_0), & v_R \leq -B_p \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bu denklemlere göre Chua diyodunun gerilim-akım grafiği Şekil 3.2'deki gibidir.



Şekil 3.2 : Chua diyodu gerilim-akım grafiği.

Literatürdeki ilk çalışmalarda devrede 3 yerine 2 kırıklı Chua diyodu kullanıldığında da kaos elde edilebileceği gözlenmiştir. İki kırıklı Chua diyodu için eleman gerilim-akım grafikleri Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil 3.3 : 2 kırıklı Chua diyodu için gerilim-akım grafikleri.

Şekil 3.3(a) ve Şekil 3.3(b)'deki gerilim-akım grafiklerine dair denklemler (3.3) ve (3.4) denklemleri ile verilebilir. Literatürde daha sonra 3'ten fazla kırıklı Chua diyotları ile de çalışılmıştır.

$$\begin{aligned}
 i_R = g(v_R) &= m_0 v_R + \frac{(m_0 - m_1)}{2} [|v_R - B_p| - (v_R + B_p)] \\
 &= m_1 v_R + \frac{(m_0 - m_1)}{2} [|v_R - B_p| + (v_R - B_p)] \\
 &= \begin{cases} m_1 v_R, & v_R \leq B_p \text{ için} \\ m_0 v_R + B_p (m_1 - m_0), & v_R > B_p \text{ için} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 i_R = g(v_R) &= m_0 v_R + \frac{(m_1 - m_0)}{2} [|v_R + B_p| + (v_R - B_p)] \\
 &= m_1 v_R + \frac{(m_1 - m_0)}{2} [|v_R + B_p| - (v_R + B_p)] \\
 &= \begin{cases} m_1 v_R, & v_R \geq -B_p \text{ için} \\ m_0 v_R - B_p (m_1 - m_0), & v_R < -B_p \text{ için} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Chua diyotu tanım bağıntısı kırık yapısına göre (3.2), (3.3) ya da (3.4) denklemlerinden biri ile verilmektedir. Chua devresine ait diferansiyel denklem de (3.1) denklemi ile verilmektedir. Bu 2 denklemin oluşturduğu sistem dallanma incelemeleri için çok fazla parametre içermektedir. Bu sebeple denklemlerde uygun dönüşümler yapılarak boyutsuz yeni bir denklem takımı türetilmiştir. Boyutsuzlaştırma yapılmasının bir başka sebebi de (3.1) denklemindeki ölçek farkıdır.

Denklem parametrelerinden C_1 ve C_2 'nin tipik değeri pF boyutunda iken, L 'nin tipik değeri mH boyutundadır. Durum değişkenlerinin çarpanları arasındaki bu boyut farkının sonucu olarak Chua devresinde tipik eleman akımları mA boyutunda iken eleman gerilimleri V boyutundadır. Endüktans akımı ile kondansatör gerilimleri arasındaki yaklaşık 1000 kat fark devrenin sayısal analizinde küçük de olsa bir zorluk yaratmaktadır. Bu sebeplerle yapılan boyutsuzlaştırmaya dair dönüşüm denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta v_1}{E} & y &= \frac{\Delta v_2}{E} & z &= \frac{\Delta i_3}{(EG)} & \tau &= \frac{\Delta tG}{C_2} \\ a &= \frac{\Delta m_1}{G} & b &= \frac{\Delta m_0}{G} & \alpha &= \frac{\Delta C_2}{C_1} & \beta &= \frac{\Delta C_2}{(LG^2)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

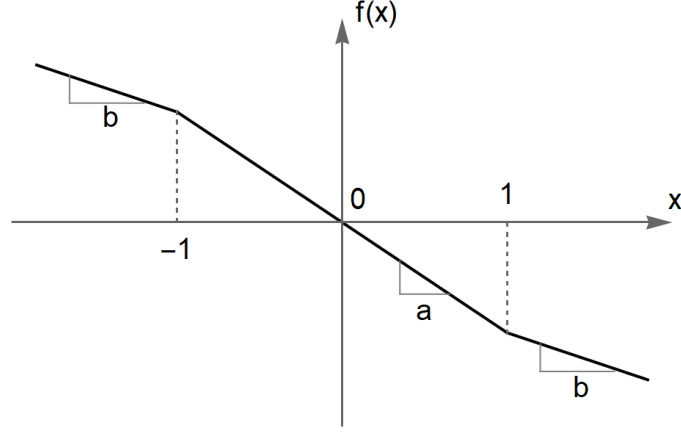
(3.5) dönüşüm denklemlerinin (3.1) devre denklemine uygulanması ile (3.6) boyutsuz devre denklemleri elde edilir. Bu denklemdeki x, y ve z boyutsuz durum değişkenleri; α ve β ise dallanma parametreleridir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha (y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bu denklemdeki $f(x)$ boyutsuz Chua diyodu için eleman tanım bağıntısıdır ve aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\begin{aligned} f(x) &= b x + \frac{1}{2}(a-b)[|x+1| - |x-1|] \\ &= \begin{cases} b x + a - b, & x \geq 1 \text{ için} \\ a x, & |x| \leq 1 \text{ için} \\ b x + b - a, & x \leq -1 \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bu denklemlere göre elde edilen boyutsuz Chua diyodunun gerilim-akım grafiği Şekil 3.4'deki gibidir. Şekilden görülebileceği gibi boyutsuz koordinatlarda parça parça doğrusal Chua diyodunun anahtarlama anları ± 1 'dir.



Şekil 3.4 : Boyutsuz koordinatlarda Chua diyodu gerilim-akım grafiği.

Alternatif bir gösterim olarak, (3.6) ve (3.7) denklemleri

$$h(x) \overset{\Delta}{=} x + f(x), \quad m_0 \overset{\Delta}{=} a + 1, \quad m_1 \overset{\Delta}{=} b + 1 \quad (3.8)$$

tanımları kullanılarak aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha (y - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|x+1| - |x-1|] \\ &= \begin{cases} m_1 x + m_0 - m_1, & x \geq 1 \text{ için} \\ m_0 x, & |x| \leq 1 \text{ için} \\ m_1 x + m_1 - m_0, & x \leq -1 \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.10) denklemindeki m_0 ve m_1 parametreleri boyutsuz büyüklükler olup (3.2) – (3.5) denklemlerindeki Chua diyodu eğimi olan parametreler değildir. Literatürde bu şekilde geçtiği için farklı parametreler tanımlanarak yazılmamıştır.

(3.2) denklemindeki m_0 ve m_1 Şekil 3.2'deki parça parça doğrusal gerilim-akım grafiğindeki eğimlerdir. Chua diyodu tanım denklemi gerilim kontrollü bir direnç olarak verildiği için, zamanla (3.2) denklemindeki m_0 , m_1 ve B_p yerine sırasıyla

G_b , G_a ve E kullanımı tercih edilmiştir. Chua diyodu denklemi bu parametreler için (3.11) denkleminde tekrar verilmiştir. Günümüzde fiziksel parametreler kullanılacak ise genelde bu parametreler tercih edilmektedir.

$$i_R = g(v_R) = G_b v_R + \frac{(G_a - G_b)}{2} [|v_R + E| - |v_R - E|]$$

$$= \begin{cases} G_b v_R + (G_a - G_b)E, & v_R \geq E \text{ için} \\ G_a v_R, & |v_R| \leq E \text{ için} \\ G_b v_R + (G_b - G_a)E, & v_R \leq -E \text{ için} \end{cases} \quad (3.11)$$

(3.2) denklemi yerine (3.11) denkleminin kullanılması durumunda boyutsuz koordinatlardaki denklemler değişmeyecektir. Sadece bu durumda (3.5) dönüşüm denklemleri yerine yeni dönüşüm denklemleri kullanılması gerekir.

(3.6) ve (3.7) ile verilen boyutsuz koordinatlardaki denklemler bir lineer matris denklem sistemi olarak da yazılabilir. Denklemler bu formda yazılmak istenirse $\mathbf{x}$, boyutsuz koordinatlara ait durum değişkenlerini içeren vektör, $\mathbf{b}$ bir öteleme vektörü, A bir matris olmak üzere denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{x}' = A \mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha(c+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\alpha d(a-b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Bu durumda (3.13) denklemindeki c ve d katsayıları boyutsuz koordinat x 'in değerine göre aşağıdaki gibi değişir.

$$(c,d) = \begin{cases} c=b, & d=1 & x \geq 1 \text{ için} \\ c=a, & d=0 & |x| \leq 1 \text{ için} \\ c=b, & d=-1 & x \leq -1 \text{ için} \end{cases} \quad (3.14)$$

Chua denklemleri için bir başka gösterim olarak (3.12) – (3.14) denklemleri denge noktası analizi yapıldıktan sonra ötelenerek aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} A(\mathbf{x} - \mathbf{k}) & x \geq 1 \text{ için} \\ A \mathbf{x} & |x| \leq 1 \text{ için} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{k}) & x \leq -1 \text{ için} \end{cases} \quad (3.15)$$

Bu denklemdeki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{k}$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix}, \quad k = -\frac{b-a}{b+1} \quad (3.16)$$

3.2 Chua Devresinden Türetilen Yeni Devreler ve Genelleştirmeler

Chua devresi üzerinde çalışıldıkça 3 boyutta gözlenebilecek bütün kaotik dinamiklerin bu devre kullanılarak gözlenemediği görülmüştür. Bu sebeple gözlenemeyen bu dinamikleri görebilmek amacıyla yeni arayışlar söz konusu olmuştur. Bu arayışlar 4 grupta ele alınabilir:

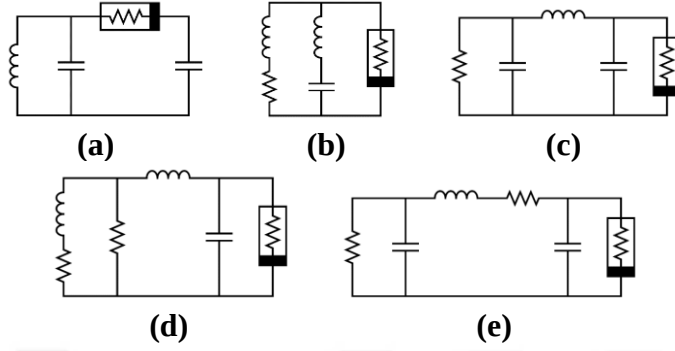
- Devre parametrelerinin negatif olmasına mücade edilmesi
- Alternatif devreler önerilmesi
- Denklemlerde genelleştirmeler yapılması
- Farklı Chua Diyotları Kullanılması

3.2.1 Devre Parametrelerinin Negatif Olmasına Mücade Edilmesi

İlk yaklaşıma örnek literatürde '*Double Hook*' olarak adlandırılan garip çekicidir. Chua devresinde orta ve dış bölgeler için geçerli olan parça parça doğrusal sistemlerin özdeğerleri reel olduğunda kaotik çekici gözlenip gözlenemeyeceğinin sorgulanması neticesinde C_1 ve L 'nin negatif olmasına mücade edildiğinde bir kaotik çekici bulunabilmiştir [18]. [19] numaralı kaynaklarda parametere değerleri negatif olduğunda bunu sağlayan fiziksel devre gerçeklemelerinin nasıl yapılabileceğine dair yöntemler verilmiştir. Aynı çalışmada negatif parametre dünyasında devrenin dallanma davranışının da değiştiği not edilmiştir.

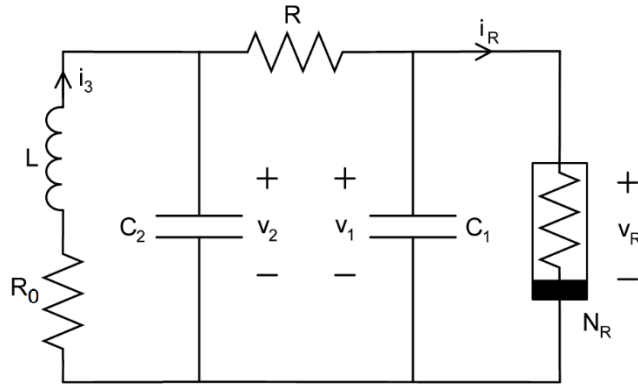
3.2.2 Alternatif Devreler Önerilmesi

İkinci yaklaşıma verilebilecek bazı örnekler Şekil 3.5'te görülmektedir [20-24]. Bu ve benzeri devreler önerilirken Chua devresinin basitliğine benzer olarak devrede sadece 3 adet enerji depolayabilen eleman olmasına dikkat edilmiştir.



Şekil 3.5 : Chua devresi benzeri kaotik devreler¹.

Chua benzeri devreler türetildikten sonra yapılan çalışmalar neticesinde bu devrelerden biri öne çıkmıştır. Şekil 3.6'da verilen bu devre *Chua Osilatörü*² olarak adlandırılmış ve Chua devresi ile beraber kaotik çalışmalar için bir prototip olmuştur [25-29]. [30] numaralı kaynakta Chua Osilatörünün 6 elemana kadar kanonik eşdeğer olduğu devreler verilmiştir. Bu yayında Şekil 3.5'teki devreler yer almıştır.



Şekil 3.6 : Chua osilatörü.

¹Şekil 2.5'teki devrelerin ilgili kaynaklardaki yerleri aşağıdaki gibidir:

(a) (20, s. 241), (b) (21, s. 276), (c) (22, s. 738), (d) (23, s. 887), (e) (24, s. 510)

² Bu adlandırmada osilatör kelimesi bu devrenin Chua Devre Ailesi üyesi devrelere eşdeğer olduğuna vurgu yapmaktadır.

Chua osilatörüne dair denklemler aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= G(v_2 - v_1) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -G(v_2 - v_1) + i_3 \\ L \frac{di_3}{dt} &= -(v_2 + R_0 i_3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.17) denklemindeki C_1 , C_2 , L , R ve R_0 devre elemanlarına ait büyüklüklerdir. Denklemdaki $g(v_R)$ ise doğrusal olmayan N_R direncinin tanım bağıntısı olup (3.18) denklemi ile verilmektedir.

$$\begin{aligned} i_R = g(v_R) &= G_b v_R + \frac{(G_a - G_b)}{2} [|v_R + E| - |v_R - E|] \\ &= \begin{cases} G_b v_R + (G_a - G_b) E, & v_R \geq E \text{ için} \\ G_a v_R, & |v_R| \leq E \text{ için} \\ G_b v_R + (G_b - G_a) E, & v_R \leq -E \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bu denklemler için boyutsuzlaştırmaya dair dönüşüm denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x &\triangleq v_1 / E & y &\triangleq v_2 / E & z &\triangleq i_3 R / E & \tau &\triangleq t / |RC_2| \\ \alpha &\triangleq C_2 / C_1 & \beta &\triangleq R^2 C_2 / L & \gamma &\triangleq R R_0 C_2 / L \\ a &\triangleq R G_a & b &\triangleq R G_b & k &= \begin{cases} 1, & RC_2 > 0 \text{ için} \\ -1, & RC_2 < 0 \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19) dönüşüm denklemlerinin (3.17) devre denkleminde uygulanması ile aşağıdaki boyutsuz devre denklemleri elde edilir. Bu denklemdeki x , y ve z boyutsuz durum değişkenleri; α , β , γ ve k ise dallanma parametreleridir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= k \alpha (y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= k (x - y + z) \\ \frac{dz}{d\tau} &= k (-\beta y - \gamma z) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bu denklemdeki $f(x)$ Chua diyodu için boyutsuz koordinatlardaki eleman tanım bağıntısıdır ve (3.19) dönüşüm denklemlerinin (3.18) Chua diyodu tanım bağıntısına uygulanması ile (3.20) denklemindeki gibi elde edilir.

$$f(x) = b x + \frac{1}{2}(a-b)[|x+1| - |x-1|] \quad (3.21)$$

Şekil 3.6'daki devrenin Chua osilatörü olarak seçilmesinin bir avantajı olarak devre $R=0$ için klasik Chua devresi'ne dönüşür. Böylece daha önce Chua devresi için üretilen bilginin bu yeni devrenin özel hali olması sağlanmıştır.

3.2.3 Denklemlerde Genelleştirmeler Yapılması

Chua denklemlerinin genelleştirilmesine yönelik üçüncü yaklaşımda ilk olarak (3.15) ve (3.16) ile verilen sisteme dair boyutsuz haldeki doğrusal matris diferansiyel denklem ailesi ele alınmıştır. Chua devresine dair denklemlerin üst ve alt bölge için simetrik yapısı gözetilerek bir genelleştirme yapıldığı takdirde bu denklemler aşağıdaki gibi $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}$ doğrusal matris denklemi ailesi şeklinde yazılabilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,11} & a_{1,12} & a_{1,13} \\ a_{1,21} & a_{1,22} & a_{1,23} \\ a_{1,31} & a_{1,32} & a_{1,33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{0,11} & a_{0,12} & a_{0,13} \\ a_{0,21} & a_{0,22} & a_{0,23} \\ a_{0,31} & a_{0,32} & a_{0,33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b} & x \geq 1 \text{ için} \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{x} & |x| \leq 1 \text{ için} \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x} - \mathbf{b} & x \leq -1 \text{ için} \end{cases}$$

Bu 21 parametre içeren bir denklemdir. Ancak Chua devresinin simetrik yapısı ve Chua diyodu eleman tanım bağıntısının sürekliliği düşünülerek bu denklem ciddi şekilde basitleştirilebilir.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - [|x+1| - |x-1|] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Böylece 12 parametre içeren (3.23) denklemi elde edilmiş oldu. Kaotik sistemleri incelerken koordinatlardaki değerlerin önemli olmadığı, topolojik özelliklerin önemli olduğu düşünülürse (3.23) denkleminde kanonik bir dönüşüm uygulamak sistemin

doğasını değiştirmeyecektir. Bu düşünce ile A matrisi özdeğerler ile belirlenebilir. Reel katsayılı tekil olmayan bir A matrisi 3 özdeğer ile belirlenebilir. O halde dış ve iç bölgeler için olan A matrisleri 3'er parametre ile belirlenebilir. Ayrıca (3.20) denkleminde $f(x)$ sadece bir boyutta gözüktüğü için $\mathbf{b}$ matrisi de 1 parametre ile belirlenebilir. Böylece 7 parametre içeren (3.24) denklemi yazılabilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad A_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} A_1 \mathbf{x} + \mathbf{b} & x \geq 1 \text{ için} \\ A_0 \mathbf{x} & |x| \leq 1 \text{ için} \\ A_1 \mathbf{x} - \mathbf{b} & x \leq -1 \text{ için} \end{cases}$$

Son olarak Chua diyodu sürekli olduğundan, (3.24) parça parça doğrusal matris denklemi için de sürekliliğin sağlanacağı düşünülerek bu denklemi sağlayan $\mathbf{b}$ matrisi bulunabilir. Dolayısıyla Şekil 3.1'deki klasik Chua devresi $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ve $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ parametreleri kullanılarak sadece 6 parametre ile belirlenebilir.

Bu denklem Chua devre ailesi için yazılmıştır. Aslında α , β ve γ parametrelerinin alabileceği bütün değerler düşünüldüğünde (3.24) denkleminin bir alt kümesi Chua devre ailesini vermektedir. Chua devre ailesi için yazılan doğrusal matris diferansiyel denklemi için aşağıdaki kısıtlar geçerlidir:

- Vektör alanı orta bölgede doğrusaldır.
- Durum uzayı, bir boyutta simetrik iki değer ile üst bölge ve alt bölgeye ayrılır.
- Üst ve alt bölgeler merkeze göre simetriktir.
- Vektör alanı süreklidir.

Chua devre ailesi üzerine bir çok yayın yapılmış bu sonuçlardan istifade etmek için denklemlerde genelleştirmeler de önerilmiştir. Bu kısımda bu bakışa dair 2 örnek verilecektir.

Örnek 3.1 :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^3 \quad (3.25)$$

- $\mathbf{f}(\cdot)$ sürekli,
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{x})$ şeklinde tek simetrik,
- $\mathcal{R}^3$, U_1 ve U_{-1} paralel düzlemleri ile; iç bölge D_0 ve dış bölgeler D_1 ile D_{-1} şeklinde 3 bölgeye ayrılın ve $\mathbf{f}(\cdot)$ bu bölgelerde parça parça doğrusal olsun.

Bu dinamik sistem aşağıdaki gibi yazılabilir [31]:

Böylece bir boyutta $\pm E$ değerini geçince üst bölge, orta bölge, alt bölge şeklinde bölge geçişleri yapılması yerine; birbirine paralel 2 düzlem için bu düzlemleri geçince bölge geçişleri yapılmıştır. Bu da önerilen bu denklemlerle sağlanan genelleştirmedir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$h(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[|\mathbf{w}^T \mathbf{x} + 1| - |\mathbf{w}^T \mathbf{x} - 1| \right]$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} h(\mathbf{w}^T \mathbf{x})$$

Örnek 3.2 :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \quad (3.27)$$

- Bu vektör diferansiyel denkleminin çözümü tek ve sınırlı olsun.
- $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{x}$ vektörü için bir $n \times n$ matris fonksiyonu olsun.
- $\mathbf{F}(\cdot)$, $\mathbf{x}$ vektörü için $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ şeklinde bir dönüşüm olsun.
- $\mathbf{F}(\cdot)$ fonksiyonu sonlu sayıda sigmoid, mutlak değer ya da parça parça doğrusal fonksiyonun kombinasyonu olsun.

Bu genelleştirilmiş Chua dönüşümleri, diğer kaotik sistemlerin incelenmesi için kullanılabilir [32].

3.2.4 Farklı Chua Diyotları Kullanılması

Chua devresi ya da Chua osilatörü ile çalışılırken farklı Chua diyotlarının etkisi de bir araştırma alanı olmuştur. Bu düşünce ile farklı Chua diyodu denklemleri incelenmiştir. [32-37] numaralı kaynaklar buna örnek olarak verilebilir. Bu kaynaklarda kullanılan Chua diyodu denklemleri (3.28) denkleminde gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} h(x) &= c_0 x + c_1 x^3 & (a) \\ h(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 & (b) \\ h(x) &= (\exp(\gamma x) - 1) / (\exp(\gamma x) + 1) & (c) \\ h(x) &= l(x) + m(x) & (d) \\ h(x) &= a x + b x \exp(c x^2) & (e) \end{aligned} \quad (3.28)$$

(a) ve (b) denklemleri kübik polinom örnekleridir [33-35]. (c) denkleminde sigmoid fonksiyonu kullanılmıştır [32]. (d) denkleminde $l(x)$ parça parça doğrusal, $m(x)$ ise sonlu sayıda süreksizlik içeren bir fonksiyondur [36]. (e) denklemi ise x 'in değerine göre saçılma ve katlama özellikleri gösteren bir fonksiyondur [37].

Bu alt bölümde Chua devresi, Chua devre ailesi ve denklemleri tanıtılmıştır. Bu bölümden görülebileceği gibi sonuçların genelleştirilme potansiyeli düşünüldüğünde kaos üzerine çalışılırken Chua devresinin ele alınması bir gereklilik haline gelmiştir. Tezde de bu düşünce ile Chua devresi üzerinde çalışılmıştır. Bir sonraki bölümde Chua devresi ve Chua osilatörünün ait literatür bu devrelerin geliştirilmesi ve tez konusuna verebilecekleri katkılar açısından ele alınacaktır.

3.3 Chua Literatüründe Tezle İlgili Ortaya Konan Katkılar

Bu bölümde çok kapsamlı olan Chua literatürü tezde ele alınan ya da gelecekte tezle ilgili olabilecek çalışmalar kapsamında izah edilecektir. Bölümde literatürün konu açısından gruplandırılması, kronolojik akıştan öncelikli olarak değerlendirilecektir.

Chua devresi, literatürde ilk olarak çift çeker¹ davranışından bahsedilen [2] numaralı kaynakta yer almıştır. Matsumoto tarafından yapılan bu yayında devre '*Chua Devresi*' olarak anılmıştır. Chua devresinin fiziksel olarak gerçekleşmesi ilk olarak [38] numaralı kaynakta başarılmıştır. Bu devrede çift çeker ve peryot katlaması ile kaos

¹ 'Çift çeker' ifadesi 'Double scroll' terimi için bir karşılık olarak kullanılacaktır.

davranışları gözlenmiştir. [2] numaralı kaynakta devrede birçok başka davranışın da gözlemlendiği, bu davranışların devam eden yayınlar ile verileceği not düşülmüştür.

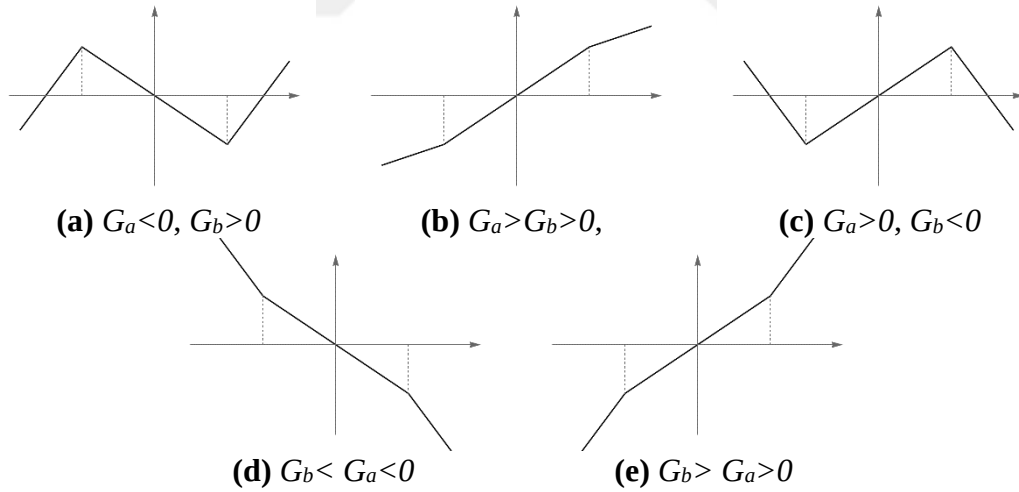
Bu yayınlardan ilki olan [3] numaralı kaynakta devre denklemleri kapsamlı olarak ele alınmış ve boyutsuz koordinatlar tanımlanarak tekrar yazılmıştır. Chua devresinin tipik özelliği devre denklemlerinin 3 parçalı parça parça doğrusal, otonom lineer diferansiyel matris denklemi şeklinde yazılabilesidir. Denklemler bu şekilde yeniden düzenlenmiş ve her bir bölge için denge noktaları ile bölgelere ait özdeğer ve özvektörlerin yardımıyla çift çekir davranışı izah edilmiştir. Sayısal analiz ile kaotik çekicinin lyapunov sabiti bulunmuştur. Bu yayın Matsumoto, Komuro ve Chua tarafından yapılmıştır.

Chua devresi çok popüler olunca Chua tarafından devrenin ortaya çıkışı da bir yayın ile anlatılmıştır [39]. Chua Tokyo, Japonya seyahati sırasında Matsumoto'nun laboratuvarında bir Lorenz devresi gerçeklemesi görmüştür. Devrenin çalışmaması neticesinde yeni devre arayışları olmuştur. 3 aktif eleman içeren devre kombinasyonları üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışma neticesinde de devre bulunmuştur.

Chua, Matsumoto ve Komuro'nun bir sonraki yayını kaos teorisi açısından çok önemlidir. Bu yayında Chua devresinin Shilnikov anlamında kaotik olduğu analitik olarak ispat edilmiş ve Chua devresi için kapsamlı dallanma analizi verilmiştir [4, 5]. Bu ispatta lineer matris denklemi formunda yazılan Chua denklemlerine kanonik matris dönüşümleri uygulanmıştır. Böylece devre denklemlerinde bir genelleştirme yapılmıştır. İspat çift çekir için verildiği için ve devre denklemlerinde de genelleştirme yapıldığı için makale *'The Double Scroll Family'* olarak adlandırılmıştır. Bu genelleştirme yapılırken Chua devresi için kanonik dönüşümler ile varılabilen katsayı matrisi kümesi adreslenmiştir. Shilnikov anlamında kaos gösterilirken homoklinik yörüngenin varlığı gösterildiği için bu yayının ardından çift çekirin ortaya çıkışı ve yok oluşu üzerine çalışmalar yapılmıştır [40, 41].

Chua devresinde parça parça doğrusal diyodun kırıkları üzerinde oynamalar yapılan çalışmalar mevcuttur [39, 41-44]. Lineer devre analiz yöntemlerini derinlemesine kullanarak Chua devresinin ele alındığı çalışmalar vardır [43, 45]. Bazı çalışmalarda LC devresinden adım adım Chua devresine varılması üzerine bir bakış sergilenmiştir [39, 43, 44, 46]. Bu çalışmalar tez için çok önemli olmuştur.

Chua devresinin Shilnikov anlamında kaos olduğu gösterilirken kanonik matris dönüşümleri kullanılması üzerine Chua denklemlerinin genelleştirilmesi üzerine çalışmalar başlamıştır. İlk olarak Wu tarafından 21 bilinmeyen içeren (3.22) denklemi yerine 12 bilinmeyen içeren (3.23) denklemi önerilmiştir [47]. Ardından dış bölgelerdeki ve iç bölgedeki özdeğerlerin kanonik bir devre¹ ile gerçekleşmesi fikrine varılmış ve yalnızca 6 eleman içeren yeni bir devre önerilmiştir [23]. *Kanonik Chua Devresi* olarak adlandırılan bu devre Şekil 3.5(e)'de verilen devredir. Yayında Chua diyodu 2 parametre ile tanımlandığı için devrenin sentezi için gereken 7 parametrenin bulunmasını sağlayan bir algoritma da verilmiştir. Ardından bir başka kanonik devre önerilmiştir ki bu daha sonra öne çıkacak olan Chua Osilatörü devresidir [27]. Chua osilatöründe LC devresi içindeki endüktansa seri bağlı bir direnç vardır. Gerçek dünyada iç direnci olmayan endüktans bulunmadığı düşünüldüğünde bu devrenin gerçek dünyaya daha uygun olduğu düşünülebilir. Bu çalışmada ayrıca devrenin ürettiği dönüşümün kendi üzerine açılır² olmaması için 3 kırıklı Chua diyotunun sağlaması gereken özellikler bulunmuştur. Şekil 3.7'de önerilen Chua diyotları için bu sakınca yoktur. Kısa bir zaman için literatürde farklı kanonik devreler için eş zamanlı olarak üretim yapılmaya devam edilmiştir.



Şekil 3.7 : Kanonik Chua devresinin kendi üzerine açılır olmaması için kullanılacak Chua diyodu alternatifleri.

¹ Önerilen devrenin kanonik bir matris dönüşümü ile bir başka devreye eşdeğer olmasıdır.

² 'Kendi üzerine açılır' ifadesi 'Folding' terimi için bir karşılık olarak kullanılacaktır.

Ortak bir dil oluşturulması için 1993 yılında Chua devresi için yapılan bir özel dergi sayısında editör Madan tarafından aşağıdaki terminoloji tavsiye edilmiştir [48].

Suggested Terminologies and Notations for Chua's Circuit:

1. The 5-element circuit will continue to be called **Chua's circuit**. However, the $v-i$ characteristic of **Chua's diode** may assume **any** single-valued, (not necessarily symmetric or piecewise-linear) piecewise smooth function. The recently augmented Chua's circuit obtained by connecting one linear resistor in series with the inductor will be called the **Chua's oscillator**, except in the context of topological conjugacy when it may also be called a **canonical Chua's circuit**. Since there exist several distinct circuits which are also topologically conjugate to Chua's circuit, their circuit diagram must always be specified to avoid being confused with the canonical Chua's circuit as defined above.
2. The state equations associated with Chua's circuit will be called **Chua's equation** in both the physical and the dimensionless forms. The two dimensionless parameters associated with the linear elements will be denoted by α and β respectively. The equations associated with the Chua's oscillator will be called the **canonical Chua's equation**. The three dimensionless parameters associated with the linear elements will be denoted by α , β , and γ respectively.
3. The original 1-D map associated with Chua's circuit will be called **Chua's 1-D map**.
4. Two strange attractors observed in the Chua's circuit have been the spiral attractor and the double scroll attractor. Many more have now been observed in the Chua's oscillator. All these will be called a **family of Chua's attractors**.

Tarihi önemi açısından yukarıda tekrar verilen terminoloji aşağıdaki kuralları tavsiye etmiştir:

- Chua devresi devrenin Şekil 3.1'de verilen 5 elemanlı halidir. Doğrusal olmayan direnç *Chua diyodu* olarak adlandırılacaktır. Chua diyodunun $v-i$ karakteristiği tek değerli parça parça smooth¹ olmak şartıyla herhangi bir fonksiyon olabilir. Şekil 3.6'da verilen, endüktansa seri direnç içeren 6 elemanlı devre *Chua osilatörü* olarak adlandırılacaktır. Chua devresine topolojik eşdeğer diğer devreler kanonik Chua devresi olarak adlandırılacaktır. Eğer kanonik Chua devresi ile çalışılıyorsa kanonik eşdeğer devreler tek olmadığı için devre çizimi kesinlikle verilmelidir.

¹ sürekli, sınırlı ve sınırlı sayıda parça içeren

- Hem fiziksel haldeki hem de boyutsuz haldeki denklemler Chua denklemleri olarak adlandırılacaktır. Bu denklemlerde boyutsuz koordinatlardaki lineer devre elemanları ile ilişkili olan parametreler için α ve β kullanılacaktır. Chua osilatörü denklemleri *kanonik Chua denklemleri*¹ olarak adlandırılacaktır. Bu denklemlerde boyutsuz koordinatlardaki lineer devre elemanları ile ilişkili olan parametreler için α , β , γ kullanılacaktır.
- Chua devresi ile ilişkili olarak oluşturulan 1 boyutlu dönüşümler *Chua'nın 1 boyutlu dönüşümleri* olarak adlandırılacaktır.
- Chua devresinde gözüken asıl garip çekiciler *spiral çeker* ve *çift çeker* olarak adlandırılacaktır. Chua devresinde görülebilen bütün çekiciler, bir arada *Chua çekici ailesi* olarak adlandırılacaktır.

Bu terminoloji benimsenmiştir ve Chua Osilatörü diğer kanonik Chua devrelerine göre literatürde öne çıkmıştır [6, 26]. Chua Osilatörünün kanonik devre olarak benimsenmesi Chua Devresi için üretilen bilgiyi de anlamlı kılmıştır. Çünkü devre $R_0=0$ için Chua devresine dönüşmektedir. [49] numaralı kaynakta Chua Osilatörü dinamikleri özdeğerler ve özvektörler yardımı ile izah edilmiştir

Chua osilatörü basitliğinin yanı sıra kanonik olma özelliği sayesinde 3 boyutlu kaotik sistemler içinde en genel sonuçları üreten devredir [29]. Chua osilatöründen üretilen dinamikler aşağıdaki gibidir:

- Birçok farklı osilatörü gözleme imkanı verir [6, 23, 25, 26, 28-30, 49-51].
- Peryot 3 davranış gösterir [22].
- Şerit dinamiği² gösterir [52].
- İç içe girmiş garip çekici varlığı barındırır [53-55].
- Farklı yollarla kaotik davranış oluşumu gözlenir:
 - Ardışıl dallanmalar ile periyot katlaması ile kaos davranışı gösterir [6].
 - Peryot ekleme davranışı gösterir [22].

¹ Harhangi bir kanonik Chua devresi için bu devreye topolojik olarak eşdeğer olan bir Chua osilatör devresi parametre takımı bulunabilir.

² Çözümün 2 boyutlu bir alt uzayda değil, noktalar arasında sürekliliğin sağlandığı bir sürekli alt uzayda olması hali.

- Aralıklılık ile kaos davranışı gösterir [24].
- Ardışıl dallanmalar ile önce Torus, ardından da Torus kırılması ile kaos davranışı gösterir [20].

Chua Osilatörü kaos teorisinde bir paradigma haline gelmiştir. Kaos üzerine çalışmalar için bu devreye odaklanmak sonuçların geliştirilmesini de sağlamaktadır. Chua Osilatörü 3. dereceden kayıplı kaotik devrelerde gözlenebilen bütün kaotik dinamikleri sergilemektedir [6, 56].



4. CHUA DEVRESİ İÇİN HAMILTONYANIN ELDESİ

Chua devresi'nin denklemleri 3 durum değişkeni içerdiği ve devrede de 3 adet enerji depolayan eleman olduğu için devrenin Hamiltonyan'ı bu enerji depolayan elemanların enerjileri toplamına eşittir. Oysaki genel olarak bir devredeki dinamik elemanların enerjileri toplamı devre dinamiğini belirleyen Hamiltonyan'a eşit olmayabilir. Bu durum göz ardı edildiğinde gereğinden karmaşık bir enerji fonksiyonu ile çalışma olasılığı vardır. Devreye ait Hamiltonyan'ın elde edilmesinin pratik bir yolu devre denklemlerinin Kapı Kontollü Hamilton (KKH) gösterimi şeklinde yazılmasıdır. [10] numaralı kaynakta Chua devresi için bu gösterim yazılmış ve Hamiltonyan aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [C_1 \dot{x}_1^2 + C_2 \dot{x}_2^2 + L \dot{i}_3^2] \quad (4.1)$$

Yanlış bir enerji fonksiyonu ile çalışmak kaygımız olduğu için enerji bir başka yöntem ile de elde edilecektir. Burada Chua ve McPearson tarafından [57] numaralı kaynakta önerilen yöntem kullanılacaktır. Bu yöntemde kullanılan genelleştirilmiş koordinatlar x ve genelleştirilmiş hızlar $\dot{x}$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} x &\triangleq [\phi_2 \quad \phi_1] & (a) \\ \dot{x} &\triangleq [v_2 \quad v_1] & (b) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2)(a) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_2 kondansatörlerin akılarıdır. Lagranjyan'ın elde edilmesine dair ayrıntılar basitlik açısından verilmemiştir. Sonuç olarak Lagranjyan aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} C_1 v_1^2 + \frac{1}{2} C_2 v_2^2 - \frac{1}{2L} [-\phi_2 + \phi_2(0) + \phi_3(0)]^2 \quad (4.3)$$

Bu denklemde,

$$\phi_3(0) = L i_3(0) \quad (4.4)$$

şeklinde verilen ilişki endüktansın ilk koşul bağıntısından elde edilmiştir.

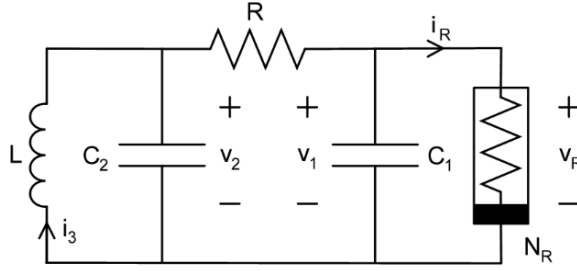
EK C’de detayları verildiği gibi Lagranjyan yardımıyla Hamiltonyan elde edilebilir. Ara işlemler yapıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}C_1v_1^2 + \frac{1}{2}C_2v_2^2 + \frac{1}{2L}[-\phi_2 + \phi_2(0) + \phi_3(0)]^2 \quad (4.5)$$

Bu büyüklük Chua devresinin Hamiltonyan’ıdır. H ’nin gerçekten dinamik elemanların enerjileri toplamına eşit olduğu Şekil 3.1’deki Chua devresi için yazılan L – C_2 çevre denkleminin bu denkleme uygulanması ile görülebilir. Böylece (4.5) denkleminde de (4.1) denklemi elde edilmiş oldu.

5. KAOTİK OSİLATÖR TASARIMI İÇİN ENERJİ TEMELLİ BİR YÖNTEM

Bu bölümde Chua devresinde spiral tipi kaosu ortaya çıkışı enerji bakış açısı ile ele alınmıştır. Şekil 5.1’de tekrar verilen Chua devresi L , C_1 ve C_2 dinamik elemanları, pasif R direnci ve aktif N_R direncinden oluşmaktadır. Devrenin enerji alış-verişine bakılacak olursa N_R devredeki enerji veren tek elemandır. Dolayısıyla N_R , R direncinin tükettiğinden fazlasını verdiğinde dinamik elemanlarda enerji depolanır. Aksi halde ise dinamik elemanların mevcut enerjisi tüketilir. Bu bölümde devrenin davranışını anlamak için dinamik elemanların enerjileri toplamındaki değişim incelenmiştir. Ortaya konan yaklaşım bu toplam enerjinin yörüngeler boyunca izlenmesi ve enerjideki değişimin Chua devresinin farklı dinamikleri ile ilişkilendirilmesidir.



Şekil 5.1 : Chua devresi.

Chua devresinin denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= G(v_2 - v_1) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -G(v_2 - v_1) + i_3 \\ L \frac{di_3}{dt} &= -v_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Bu denklemde Chua diyodu N_R 'nin tanım bağıntısı aşağıdaki gibidir. N_R , 3 parçalı parça-parça doğrusal karakteristiğe sahiptir.

$$i_R = g(v_R) = G_b v_R + \frac{(G_a - G_b)}{2} [|v_R + E| - |v_R - E|]$$

$$= \begin{cases} G_b v_R + (G_a - G_b) E, & v_R \geq E \text{ için} \\ G_a v_R, & |v_R| \leq E \text{ için} \\ G_b v_R + (G_b - G_a) E, & v_R \leq -E \text{ için} \end{cases} \quad (5.2)$$

Bu bölümde amaç spiral tipi kaos oluşumunu gözlemek olduğu için devrede (5.3) denkleminde verilen 2-parçalı karakteristiğe sahip Chua diyodu ile çalışılmıştır.

$$i_R = \begin{cases} G_a v_R, & v_R \geq -E \text{ için} \\ G_b v_R + (G_b - G_a) E, & v_R \leq -E \text{ için} \end{cases} \quad (5.3)$$

Bir önceki bölümde Chua devresi için Hamiltonyan aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + L i_3^2] \quad (5.4)$$

Bu noktadan itibaren daha az parametre içeren boyutsuz haldeki denklemler ile çalışılacaktır. Chua devresi için boyutsuz koordinatlara geçiş için ölçeklendirme denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} x &= v_1 / E & y &= v_2 / E & z &= i_3 / (E G) & \tau &= t G / C_2 \\ a &= m_1 / G & b &= m_0 / G & \alpha &= C_2 / C_1 & \beta &= C_2 / (L G^2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Bu denklemlerin kullanılmasıyla devre denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha (y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (5.6)$$

Aslında (5.6) denklemi a ve b yerine $m_o = a + 1$ ve $m_1 = b + 1$ ilişkileri kullanılarak m_o ve m_1 ilişkileri cinsinden yazılırsa hafifçe basitleştirilebilir [4]. Ancak ileride elde edilecek olan (5.11) denklemlerini daha basit kıldığı için burada a ve b değişkenleri tercih edilmiştir. (5.5) ölçeklendirme denklemlerinin Chua diyodu tanım bağıntısı olan (5.3) denkleminde kullanılmasıyla Chua diyodu denklemleri boyutsuz koordinatlar için aşağıdaki şekilde elde edilir.

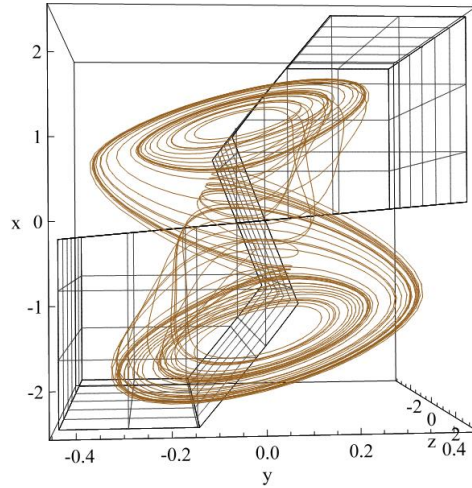
$$f(x) = \begin{cases} a x, & x \geq -1 \text{ için} \\ b x - a + b, & x \leq -1 \text{ için} \end{cases} \quad (5.7)$$

Boyutsuz koordinatlarda Hamiltonyan ise (5.5) denklemlerinin (5.4)'e uygulanmasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} x^2 + y^2 + \frac{1}{\beta} z^2 \right] \quad (5.8)$$

5.1 Durum Uzayında Enerjinin Arttığı ve Azaldığı Bölgeler

Şekil 5.2 durum uzayında Hamiltonyan'ın değişimine dair bir fikir vermektedir. Şekilde taralı alanlar enerjinin arttığı bölgeleri göstermektedir. Yani bu bölgelerde Chua diyodu devreye enerji vermektedir.



Şekil 5.2 : Durum uzayında enerjinin arttığı bölgeler.

Bu çizim için kullanılan analiz parametreleri $(\alpha, \beta, a, b) = (9, 100/7, -8/7, -5/7)$ şeklindedir. Bu şekildeki enerjinin arttığı ve azaldığı bölgeleri birbirinden ayıran düzlemleri bulmak için $dH/d\tau = 0$ denklemi çözülmelidir. (5.8) denkleminin türevi

alınır ve bu denklemde (5.6) devre denklemleri yerine konup elde edilen ifade sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{dH}{d\tau} = -(x-y)^2 - x f(x) \quad (5.9)$$

(5.9) denklemi Hamiltonyanın zamana göre değişimini vermektedir. Görülebileceği bu denklem durum değişkeni z 'den bağımsızdır. O halde enerjinin artış ve azalışını x - y izdüşümü kullanılarak değerlendirmek mümkündür. Bu sonuç önemli bir imkan sağlamıştır. Yörüngeler çizilip x - y izdüşümünden bakılırsa sistemin enerji alış veriş ile ilgili yorumlar mümkün olacaktır.

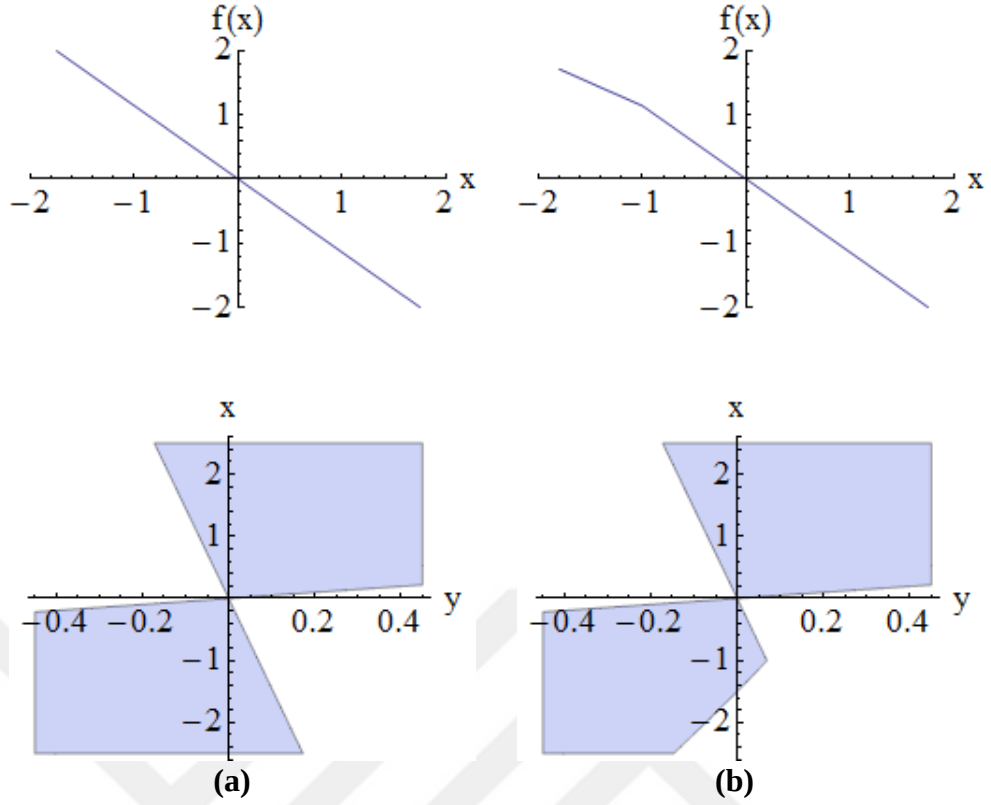
Öncelikle bu sonucun neden oluştuğunu ele almak iyi olacaktır. Chua devresi bir LC tank devresi içermektedir ve bu LC tank devresinin diğer enerji depolayabilen elemanla direkt bir ilişkisi yoktur. İlişki pasif direncin uç denklemi üzerinden oluşmaktadır. İşte bu topolojinin bir sonucu olarak (5.9) denklemi elde oluşmaktadır.

Tezde kaotik elektrik devrelerine bir sistem dahilinde kolaydan zora doğru bakmak arzulanmıştır. Bu düşünce ile de Chua devresi ile yola çıkılmıştır. Bu seçimin biraz da şans içeren bir sonucu olarak şimdi 3 boyutlu bir sistemin enerji alış verişine 2 boyut üzerinden bakma imkanı oluşmuştur.

Bu yorumu fiziksel devre parametreleri üzerinden yapacak olursak *Chua devresinde C_1 kondansatörünün LC tank devresi ile olan enerji alış veriş sistemi dinamiğini belirlemektedir.* Buna ilaveten LC tank devresinde kondansatör gerilimi ile endüktans akımı arasında bir diferansiyel denklem ilişkisi varır ve biri diğerini belirlemektedir. İşte bunun bir sonucu olarak paragrafın ilk cümlesindeki italik metin aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

Chua devresinde C_1 kondansatörünün C_2 kondansatörü ile olan enerji alış veriş sistemi dinamiğini belirlemektedir.

Şekil 5.3'te enerjinin arttığı bölgelerin diyot karakteristiği ile değişimi gösterilmiştir. Şeklin üst yarısında ele alınan durumlar için diyot karakteristikleri, alt yarısında ise bu Chua diyotları için enerjinin arttığı bölgeler gösterilmiştir. Grafikte enerjinin arttığı bölgeler mavi renk ile gösterilmiştir.



Şekil 5.3 : Farklı Chua diyotları için durum uzayında enerjinin arttığı bölgeler.

Şekil 5.3'ün üst yarısında gösterilen Chua diyotları için eleman tanım bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = a x \quad (a)$$

$$f(x) = \begin{cases} a x, & x \geq -1 \text{ için} \\ b x - a + b, & x < -1 \text{ için} \end{cases} \quad (5.10) \quad (b)$$

(5.9) denklemi sıfıra eşitlenir, (5.10) denklemleri bu ifadede yerine konur ve elde edilen denklemler çözülürse, enerjinin arttığı ve azaldığı bölgeleri birbirinden ayıran alt-uzay denklemleri elde edilir. (5.10)(b) denklemi, (5.10)(a)'yı özel bir hal olarak içerdiği için çözüm sadece (5.10)(b) denklemi için verilmiştir. Çözüm sonucu elde edilen (5.11) denklemindeki bu eşitlikler enerjinin arttığı ve azaldığı alt uzayları birbirinden ayıran sınır bölgesi denklemleridir.

$$y = \begin{cases} x \left(1 \pm \sqrt{-a} \right), & x \geq -1 \text{ için} \\ x \pm \sqrt{(a-b)x - b x^2}, & x < -1 \text{ için} \end{cases} \quad (5.11)$$

5.2 Chua Diyodunun Enerji Değişimine Etkisi

Chua diyodunun karakteristliği ile devredeki enerji alış-verişi arasındaki ilişkiyi incelemek için Chua diyodu adım adım oluşturulacak ve bu esnada devrenin enerji alış-verişi incelenmiştir. İncelemeye doğrusal Chua diyodu ile başlanmış ve ardından 2-parçalı karakteristlik için inceleme yapılmıştır. (5.10) denklemlerinde (a) tek kırık hali, (b) ise çift kırık halidir.

Benzer bakış Kennedy tarafından [43, 46] numaralı kaynaklarda uygulanmış ve Chua devresi dinamikleri devre adım adım oluşturularak izah edilmiştir. Bu kaynaklarda Chua diyodu farklı kırık sayısı içeren halleri ile ele alınmamış olsa da Chua devresinde önce orta bölge ve dış bölge için, ardından da bir bölgeden diğerine geçiş yapılan anlar için yorumlar yapılmış ve nihayetinde de Chua devresi dinamiğine adım adım bir izahat getirilmiştir.

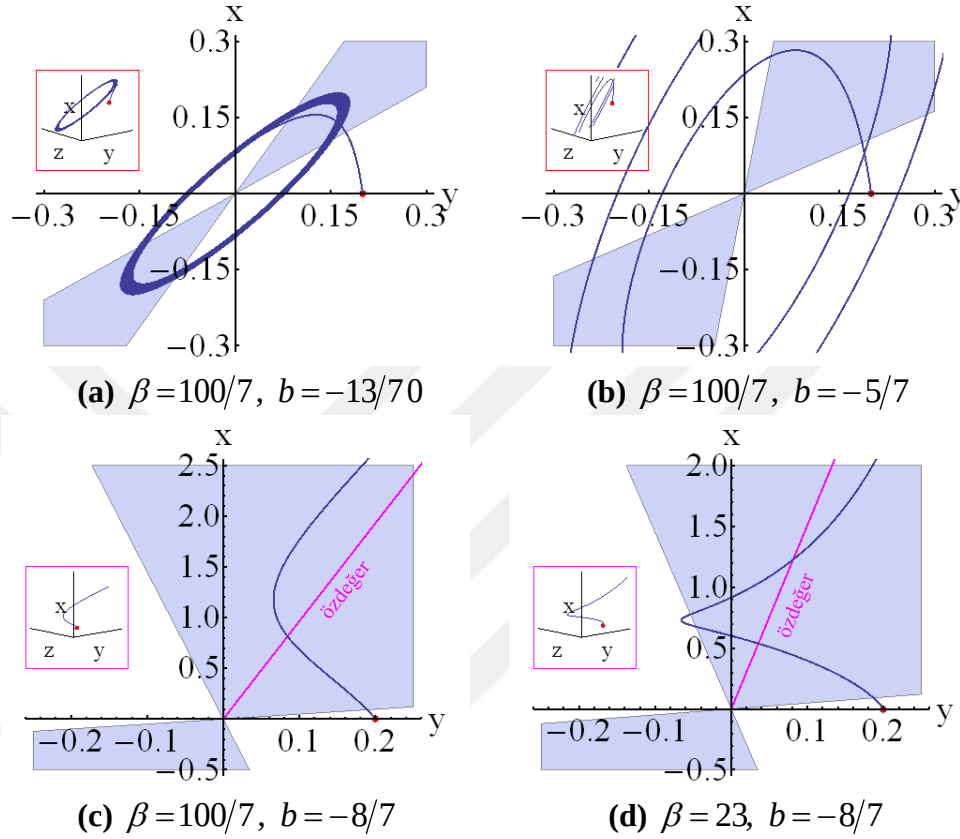
LC devresi kayıpsız bir devredir. Devre ilk koşullarına bağlı olarak periyodik çözüm üretir. Bu devre bir çıkış noktası olarak ele alınsın ve adım adım Chua devresi oluşturulsun. LCR devresinde kayıpsız LC devresine paralel bir R direnci bağlanmıştır. R direnci pasif ise devre durmaksızın enerji kaybedecektir, aktif ise de durmaksızın enerji kazanacaktır. Bu durumda çözüm özdeğerlerin değerlerine göre ya sıfıra ya da sonsuza gider.

Tezde Chua devresi tek kırık (Chua diyodunun pasif ya da aktif direnç olma hali) ve 2 kırıklı haliyle incelenmiştir. 2 kırıklı hal için anahtarlanan iki sistem söz konusudur. Anahtarlanan bu iki sistemin birbirleriyle olan etkileşimine göre devre davranışı şekillenir.

5.2.1 N_R 'nin doğrusal olması hali

Chua devresinde Chua diyodu N_R pasif bir direnç ile değiştirilirse, çözümler zamanla azalarak devre denge noktası olan sıfıra gidecektir [43]. Devrede Şekil 5.3(a)'da karakteristliği verilen aktif N_R direnci kullanıldığında ise, Chua diyodunun pasif direnç R 'nin tükettiğinden daha fazla enerji verip vermediğine bağlı olarak devre ya sonsuza ya da sıfıra gider. Iraksamanın da adeta değeri sonsuz olan özel bir noktaya gidiş olduğu düşünülürse davranış yine denge noktası davranışı gibidir. Şekil 5.4'de dallanma parametreleri α ve β 'nin çeşitli değerleri için yörüngeler görülmektedir. Şekillerde 3-boyutlu durum uzayı iç-şekil olarak verilmiştir. Analizler dallanma

parametresi α 'nın 9 değeri için yapılmış ve başlangıç koşulları olarak $(x_0, y_0, z_0)=(0, 0.2, 0)$ alınmıştır. 3. dereceden bir sistem olan Chua devresinde ya özdeğerlerin 3'ü de reel olabilir ya da bir reel özdeğer ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti hali söz konusu olabilir.



Şekil 5.4 : Doğrusal Chua diyodu kullanılması halinde yörüngeler.

Literatürde karşılaşılan Chua devresi parametrelerinde daima orta ve dış bölgeler için bir reel özdeğer ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti hali söz konusudur. Sadece [18] numaralı kaynakta devre parametrelerinin negatif olmasına müsaade edilmiş ve 3 reel özdeğer ile çalışılmıştır. Shilnikov teoreminin koşullarından birinin homoklinik yörüngenin denge noktasında sistemin bir reel özdeğere ve bir kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahip olması ve Chua devresi ile olan çalışmalarda yazarların amacının kaos elde etmek olduğu düşünülürse literatürde karşılaşılan bu durum anlamlı olacaktır.

N_R 'nin bu durumunda adeta bir RLC devresi söz konusudur. Bu devre de direncin pasif ya da aktif olmasına bağlı olarak ya denge noktasına ya da sonsuza gitmiştir. Yani kayıpsız LC tank devresinin enerjisi direncin pasif ya da aktif olmasına göre ya durmaksızın azalmış ya da durmaksızın artmıştır.

Bir sonraki bölümde N_R 2-kırıklı yapıda ele alınacaktır.

5.2.2 N_R 'nin parça parça doğrusal olması hali

Çalışmanın bu noktadan sonrasında analizler aşağıdaki koşullar altında yapılmıştır:

- Çözümlere geçici dinamikler dahil edilmemiştir.
- Dallanma parametresi α 'nın değeri 9 olarak sabitlenmiştir.
- Dallanma parametreleri a ve b 'nin değerleri, üst ve alt bölgeler için sistemlerin bir reel özdeğeri ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti olacak şekilde seçilmiştir.
- Başlangıç noktaları çözümler kararsız özvektörün etkisi altında kalmayacak şekilde seçilmiştir. Şekil 5.4(c-d)'de örnekleri gösterilen bu durum oluştuğunda çözüm özvektörün etkisi altında kalarak sonsuza gider.

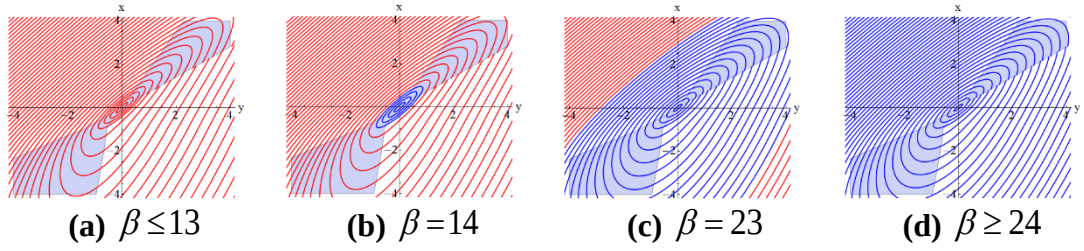
Grafikler elde edilirken kompleks özdeğer çiftinin gerdiği düzlem üzerinde (5.11) denklemi ile belirlenen eğriyi sağlayan bir grup nokta alınıp bu noktalar yine bu düzlemi kesene kadar diferansiyel denklem çözülmüştür. Ardından eğer enerji artmışsa bu yörünge kırmızı ile, azalmışsa da mavi ile gösterilmiştir.

Bu bölümde Chua devresinde Chua diyodu olarak Şekil 5.3(b)'de karakteristiği verilen N_R direnci kullanıldığında oluşacak dinamikler incelenecektir. Bu durumda N_R direnci 2 parçalı doğrusal, sürekli aktif bir dirençtir. Farklı durumlar için analiz sonuçları ve bu sonuçlara dair çıkarımlar aşağıdaki gibidir.

5.2.2.1 $a=-13/70$, $b=-5/7$ için kararsız limit çevrim davranışı

Şekil 3.5'te bu parametre değerleri için devrenin davranışı verilmiştir. Durum uzayında yörüngelerin (5.11)'i sağladığı anlarda sistemin enerjisi hesaplanmış ve eğer enerji azalıyor ise bu yörünge mavi renk ile, artıyor ise kırmızı renk ile gösterilmiştir. β 'nin küçük değerleri için Şekil 5.5(a)'da görüldüğü gibi devre daima enerji kazanır, bütün yörüngeler ıraksar. Şekil 5.5(b)'deki $\beta = 14$ değerinde kararsız bir limit çevrim oluşur. Bu durumda sistem iç-bölgede enerji kaybeder iken dış-bölgede enerji kazanır. β arttırılmaya devam ettiğinde kararsız limit çevrim büyür. Bu dinamik $\beta = 23$ değerine kadar devam eder Şekil 5.5(c). β parametresinin daha fazla arttırılması kararsız limit çevrimin yok olmasına sebep olur. β 'nin daha büyük değerleri için Şekil 5.5(d)'de

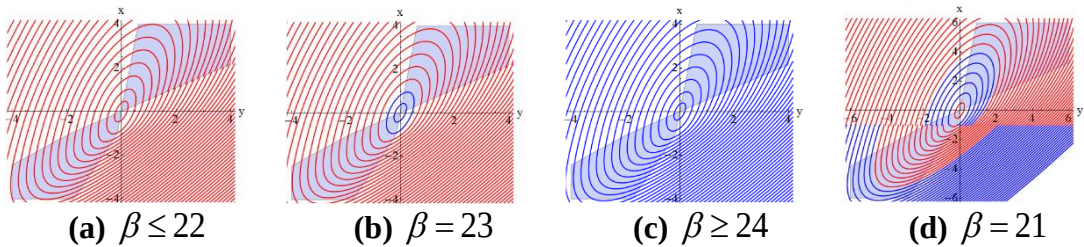
görülebileceği gibi sistem daima enerji kaybeder, bütün yörüngeler bir denge noktasında sonlanır.



Şekil 5.5 : $a = -13/70$, $b = -5/7$ için β 'nın değişimine göre enerjinin değişimi.

5.2.2.2 $a = -5/7$, $b = -13/70$ için kararsız limit çevrim davranışı

Bir önceki durumda iç-bölgenin enerji vermesi, dış-bölgenin ise enerji alması durumunda kararsız bir limit çevrimin oluşacağı gözlemlendi. Bu sonuç ışığında a ve b parametrelerinin değerlerini karşılıklı olarak değiştirmenin kararlı limit çevrim oluşturmak için yeterli olacağı düşünülebilir. İlginç bir sonuç olarak, Şekil 5.6(a-c)'deki devreye ait yörüngelerden görülebileceği gibi bu yeterli olmamaktadır. a ve b parametrelerinin bu yeni değerleri için sonuç bir önceki durumla aynı olmakta ve kararsız limit çevrim oluşmaktadır. Şekilde (a-c) için Şekil 5.5'teki renk kodları kullanılmıştır. Kararlı limit çevrimin neden oluşturulamadığını anlamak için sistemin enerji alış-verişini daha detaylı olarak incelemek gerekir. Şekil 5.6(d)'de $\beta = 21$ değeri için doğrusal olmayan direncin farklı bölgelerine ait enerji değişimi görülmektedir. Bu şekilde yörüngelerin $x = -1$ doğrusunu kestiği anlarda sistemin enerjisi hesaplanmış ve eğer enerji artıyor ise bu yörünge kırmızı renk ile, azalıyor ise mavi renk ile gösterilmiştir. Sistem, $\beta = 21$ değeri için ıraksak davranış gösterir. Oysaki Şekil 5.6(d)'den sistemin dış bölgede, $x = -1$ doğrusunun altında enerji kaybettiği gözlemlenebilir.



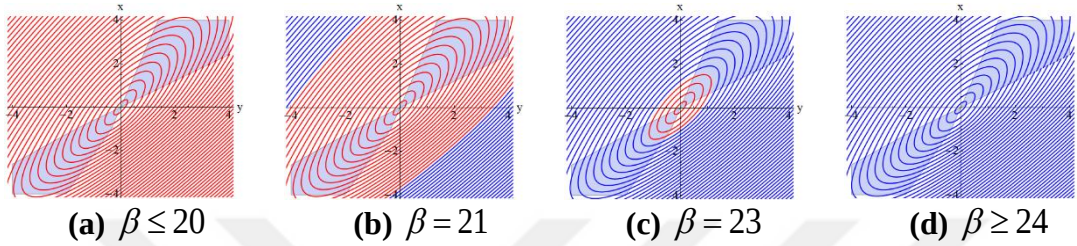
Şekil 5.6 : $a = -5/7$, $b = -13/70$ için β 'nın değişimine göre enerjinin değişimi.

Ancak sistem, kaybettiği enerjiden daha fazlasını bu doğrunun üstünde kazandığı için davranış ıraksaktır. Eğer tam tersi olsaydı, sistem dış bölgede enerji kaybediyor (yakınsak davranış gösteriyor) olacaktı. Bu da bir kararlı limit çevrimin oluşmasına

sebepler olur. Bir sonraki alt-bölümde bunu sağlayan parametre değerleri için sistem incelenecektir.

5.2.2.3 $a=-3/7$, $b=-13/70$ için kararlı limit çevrim davranışı

Bu durumda sistem $\beta = 21$ değeri için, dış bölgede kazandığından fazlasını kaybeder ve kararlı bir limit çevrim oluşur. Şekil 5.7’de bu parametre değerleri için sisteme ait davranışlar verilmiştir. Şekilde, Şekil 5.5’teki renk kodları kullanılmıştır.



Şekil 5.7 : $a = -3/7$, $b = -13/70$ için β ’nın değişimine göre enerjinin değişimi.

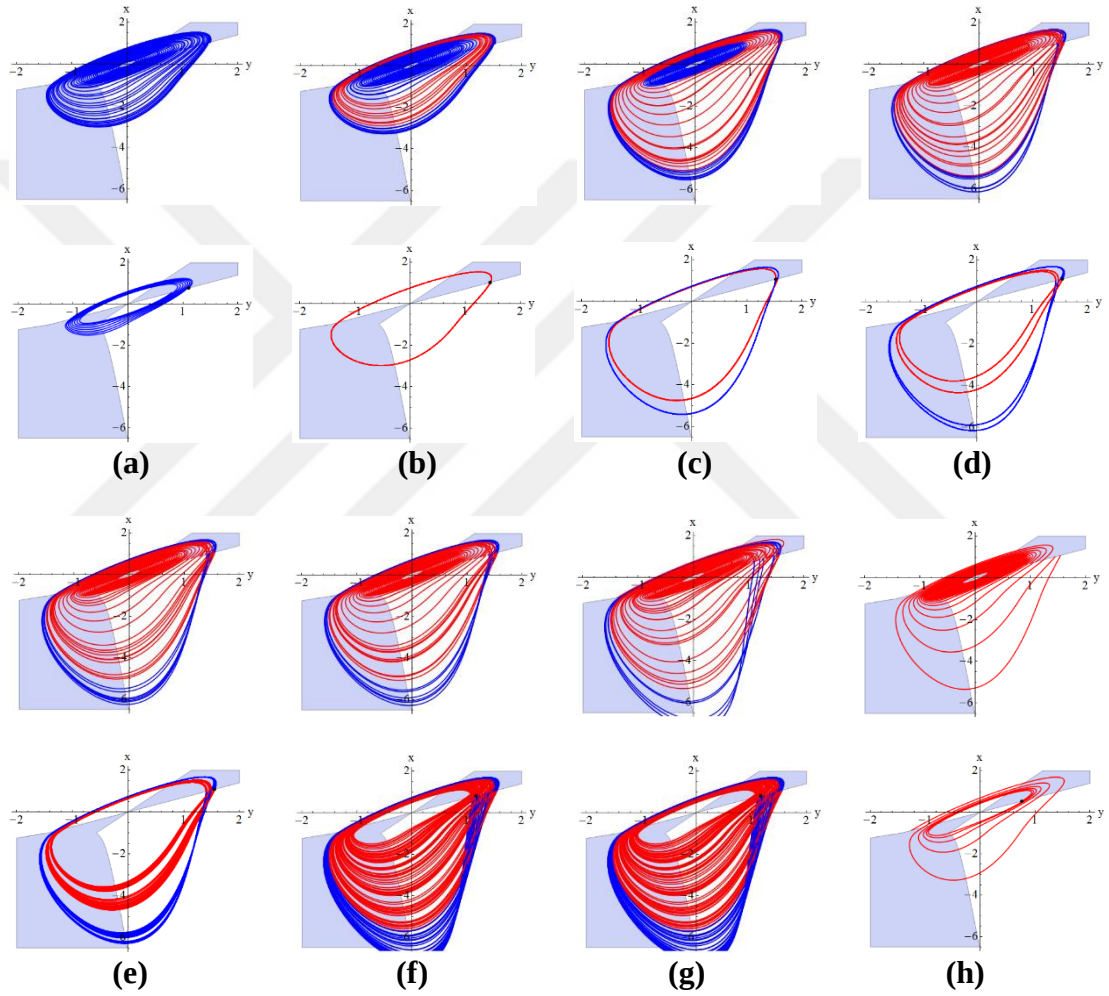
5.2.2.4 $a=-13/70$, $b=-8/7$ için peryot katlaması ile kaos davranışı

Şekil 5.8’de bu parametre değerleri için sistemin davranışı verilmiştir. Şekilde, yine Şekil 5.5’teki renk kodları kullanılmıştır. Şekildeki parametre değerleri için Ek E’de verilen Şekil 5.9’a bakınız.

Şekil 5.8’de her bir durum için üst şekil durum uzayında enerjinin arttığı ve azaldığı bölgeleri, alt şekil ise oluşan yörüngeyi gösterir. β ’nın büyük değerleri için Şekil 5.8(a)’da görüldüğü gibi sistem daima enerji kaybeder, bütün yörüngeler yakınsaktır. β ’nın değeri azaltıldığında sistemde 3 enerji bölgesi oluşur. Bu 3 bölgeden orta bölgede sistem enerji kazanır iken diğerlerinde kaybeder. Bu dinamiğin gözlemlendiği $\beta=19$ değerinde kararlı bir limit çevrim oluşur (Şekil 5.8(b)). β ’nın azaltılmaya devam edilmesiyle orta ve dış bölge arasında bir girişim oluşmaya başlar. β ’nın daha küçük değerleri için bu girişimin miktarı da artar. Girişimin artmasının sonucu olarak peryot katlama dinamiği gözlenir (Şekil 5.8(c-e)). Bu dinamik sonucunda peryot katlaması ile kaos oluşur (Şekil 5.8(f)). Başlangıçta saçılma ve katlama dinamiği sıralı iken (saçılma-katlama-saçılma-katlama-... şeklinde) girişimin arttırılmaya devam edilmesi ile bu düzen bozulmakta, ancak kaotik dinamik korunmaktadır. (Şekil 5.8(g)). β ’nın daha fazla azaltılması durumunda bu dinamik yok olur ve sistem ıraksak davranış gösterir (Şekil 5.8(h)).

Sistemde 3 farklı enerji bölgesinin olduğu durumlar incelendiğinde (Şekil 5.8(b-c)) durumları için iç-bölge enerji kaybeder iken; (Şekil 5.8(d-g)) durumları için iç-bölge

enerji kazanmaktadır. Analizlerde bu gözlemin üzerine gidilmiş ve iç-bölgenin sistem dinamiğine etkisini anlamak için farklı a ve b parametreleri için sistem analiz edilmiştir. Bu analizler sonucunda (Şekil 5.8(b-c)) durumları iç-bölge enerji kazanır iken ve (Şekil 5.8(d-g)) durumları iç-bölge enerji kaybeder iken de gözlenmiştir. Böylece iç-bölgenin sistemin davranışına direkt etkisi olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Öte yandan yörüngenin iç-bölgeye girdiğinde daima bu bölgede kalmaması için iç-bölgenin enerji kazanan davranış göstermesi daha dayanıklı kaos eldesi açısından önemlidir. Bu da ana amacımız dışında elde edilen önemli bir ilave sonuçtur.



Şekil 5.8 : $a = -13/70$, $b = -8/7$ için β 'nın değişimine göre enerjinin değişimi.

Ele alınan durumlar için Hamiltonyan ve Hamiltonyanın türevinin değişimi Ek E'de Şekil 5.9'da verilmiştir. Şekillerde dH için $dH-x-z$ ve $dH-y-z$ izdüşüm grafiklerinin olması rahatsızlık yaratmamalıdır. Bu grafiklerde z boyutunda değer değişimi olması ile (5.9) denkleminin z içermemesi çelişmez. Çünkü bu grafikler çizilirken çözümler boyunca H ve dH 'nin değişimi incelenmiştir; x , y ve z 'ye değer verilir H ve dH çizilmemiştir.

Şekiller incelendiğinde peryot katlaması ile kaos oluşumunu tetikleyen kısmın durum uzayında sınırlı bir bölge olduğu kolayca görülebilir. Bu gözlem önemlidir ve kaosu anlamak ya da kaos oluşturan bir mekanizma önermek için kullanılabilir.

Bu bölümde Chua devresinde spiral tipi kaos için peryod katlaması mekanizması enerji fonksiyonları kullanılarak incelenmiştir. İlk olarak sistemin Hamiltonyan'ı elde edilmiş; ardından farklı Chua diyodları için enerji fonksiyonunun değişimi ile sistemin dinamiği arasındaki ilgi gözlenmiştir.

Görülebileceği gibi Chua devresinde Chua diyodunun uygun enerji alış-verişini sağlayacak şekilde seçilmesi halinde kaos eldesi mümkündür. Bu önemli bir sonuçtur ve genelleştirme potansiyeli çok yüksektir. Bir sonraki bölümde bu potansiyellere değinilecektir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde kaotik devreleri incelemek için önemli bir bakış açısı yakalanmıştır. Cazip bir dünyanın kapısı aralanmıştır ancak bu kapının sunduğu imkanlar henüz net değildir. Kuvvetle muhtemel elde edilen sonuçlar sadece bir başlangıç olacaktır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanacak ve bu bakış ile gelecekte varılabilecek yeni ufuklar değerlendirilecektir.

6.1 Farklı Enerji Fonksiyonları ile Çalışılması

EK C’de genelleştirilmiş koordinatlar tanımlanmış ve Şekil C.1’de örneklenmiştir. Tezde kullanılan enerji fonksiyonu genelleştirilmiş koordinatlarda değildir. Çünkü Chua devresi bir LC tank devresi içerir ve bu devrenin enerji fonksiyonu olarak 3 aktif elemanın enerjileri toplamı kullanılmıştır. Başka bir enerji fonksiyonu ile çalışma olasılığı da vardır. Ayrıca Lagranjyan ile de çalışılabilir. Bir başka olasılık da farklı enerji fonksiyonları üreten yöntemler kullanmaktır [58]

Yapılan iş farklı enerji fonksiyonları için tekrar edilerek enerjinin arttığı ve azaldığı bölgelerde girişim oluşması fikrinin farklı enerji temelli yöntemler için nasıl uygulanabileceği üzerine çalışılabilir. Benzer sorun kararlılaştırma ve senkronizasyon için karşımıza çıkmamaktadır çünkü bu yöntemlerde hata sönümlenmektedir. Oysa burada amaç kaos oluşumu olduğu için farklı enerji fonksiyonları için tezde geliştirilen fikrin nasıl uygulanabileceği incelenmelidir.

6.2 Farklı Saçılma ve Katlama Fonksiyonları ile Çalışılması

Kaos için tipik bir mekanizma olan saçılma ve katlama dinamiği saçılma ve katlama esnasında enerjinin değişimi açısından incelenebilir. Literatürde saçılma ve katlama fonksiyonlarının kaos eldesi için kullanıldığı çalışmalar mevcuttur [37, 59].

Böylece özel olarak belirlenen saçılma ve katlama fonksiyonları yardımıyla daha dayanıklı kaos eldesi mümkün olabilir. Ayrıca bu çalışma teorik bir tabana

oturtulabilirse saçılma ve katlama fonksiyonlarının kaotik çekicinin lyapunov üstellerine nasıl etki ettiğine dair bir çıkarımda bulunma imkanı da olabilir.

6.3 Histerisiz ya da Süreksizlik İçeren Sistemlerin İncelenmesi

Histerisiz ya da süreksizlik içeren sistemler tezin kapsamı dışındadır. Çalışma bu sistemleri de içerecek şekilde genişletilebilir. [36] numaralı kaynakta süreksizlik durumunda diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ele alınmıştır. Kennedy, [43, 46] numaralı kaynaklarda Chua devresini LC tank devresinden yola çıkarak adım adım oluşturmaktadır. Bu kaynaklarda Chua devresi için LC ve LCR devreleri incelendikten sonra N_R Chua diyodu olmak üzere LCN_R devresi incelenmiş ve farklı Chua diyotları için hangi durumlarda limit çevrim davranışın olduğu incelenmiştir. Bu inceleme esnasında N_R 'nin histerisiz içermesine müsaade edilmiştir. Ardından Chua devresi dinamiğine geçmeden önce histerisiz davranışı küçük değerli bir kondansatörün hızlı değer değişimi ile ilişkilendirilmiş ve Chua devresi sistematik bir şekilde adım adım oluşturulurken devre dinamiklerinin değişimi yorumlanmıştır.

Bu yapılan işin benzeri tezde ortaya konan enerjinin arttığı ve azaldığı yörüngeler arasında girişim oluşturarak kaos eldesi mekanizması için yapılabilir. Bu amaç için ödüllü bir yayın olan [60] numaralı kaynaktan da istifade edilebilir.

6.4 Üç Reel Özdeğer İçeren Sistemlerin İncelenmesi

Chua devresinde parça parça doğrusal alt sistemlerin anahtarlanması söz konusudur. Bu alt sistemlerin özdeğerleri reel olduğunda kaos gözlenip gözlenemeyeceğinin sorgulanması neticesinde C_1 ve L 'nin negatif olmasına müsaade edildiğinde bir kaotik çekici bulunabilmiştir [18]. Bu halde Shilnikov teoreminin koşullarının sağlanmadığına dikkat edilmelidir.

Tezde Hamiltonyan izlenirken iç ve dış bölgelerde bir reel özdeğer ve bir kompleks eşlenik özdeğer çifti ile çalışılmıştı. Analizlerde başlangıç noktaları kompleks eşlenik özdeğerlerin gerdiği düzlem üzerinde seçilmişti. Benzer işlem 2 reel özdeğerin gerdiği düzlem için de yapılabilir. Bu durumda iki reel özdeğerin gerdiği düzlemden başlangıç noktaları seçilebilir. Ancak 3. derece bir sistemde üç reel özdeğer için 2'şerli kombinasyonlar kullanıldığında 3 hal söz konusu olacaktır. Bu noktada özdeğerlerin

değerlerine göre sistem davranışına da bakılarak hangin çiftin gerdiği alt uzay ile yola çıkılacağı üzerine yorum yapılması gerekecektir.

6.5 Mekanik Sistemlerin İncelenmesi

Chua devre ailesinin mekanik modellerinin eldesi üzerine olan bir çalışmada Chua devresi ve Chua osilatörünün elektro-mekanik modelleri ile Chua devresinin mekanik modeli oluşturulmuştur [61]. Bu kaynak ve süreksizlik içeren Chua devresi denklemleri için mekanik gerçeklemeler içeren [36] numaralı kaynak önerilen yöntemi mekanik sistemlerde kullanmak için bir çıkış noktası olabilir.

Tezde Hamiltopyan kullanılarak Chua devresindeki enerji değişimi incelenmiştir. Euler-Lagrange denklemleri ve Hamiltonyan denklemleri klasik mekanikte etkili bir şekilde kullanılan enerji temelli analiz yöntemleridir. Bu yöntemlerin elektrik devre analizinde etkili olarak kullanılamamasının sebebi elektrik devrelerinde kinetik enerji ve potansiyel enerjinin nasıl tanımlanacağı sorusunun cevabının net olarak verilememesidir. Bu konu EK D’de ayrıntılı olarak izah edilmiştir. Literatürdeki gelişmeler ışığında artık bu sorunun birden çok cevabı olduğu, farklı enerji tanımları yapılabileceği bilinmektedir [9]. Bu kaynakta potansiyel ve kinetik enerji ile dual potansiyel ve kinetik enerji¹ tanımları yapılmıştır.

Bu çalışmalar öncülüğünde klasik mekanik sistemler incelenebilir. Enerjinin korunduğu sistemlerde de kaos gözlenebilmektedir. Bu tip kotik davranışta bir garip çekici oluşmamakta, bütün faz uzayında kaotik davranış gözlenmektedir. Bu tip klasik mekanik sistemler elendikten sonra, geriye kalan enerjinin değiştiği sistemler incelenerek yeni sonuçlar elde edilebilir.

6.6 Çok Çeker İçeren Sistemlerin İncelenmesi

Chua diyotunda kırık sayısının arttırılmasıyla oluşturulan devreler literatürde önemli bir yer tutmaktadır. [62] numaralı çalışmada Chua diyodu için bir basamak tipi çok seviyeli rampa fonksiyonu kullanılarak n çeker oluşturulmuştur. [63] numaralı çalışmada aynı yaklaşım için testere dişi rampa fonksiyonu kullanılmıştır. Bir başka bakış çift sayıda sıçramalar içeren bir fonksiyon ile Chua diyodu karakteristiğine

¹ coenergy yerine dual enerji karşılığı kullanılmıştır.

benzer karakteristiği olan bir fonksiyonun çarpılmasıyla elde edilen Chua diyodunun kullanılmasıdır [64]. Bu çalışmada bu çarpan fonksiyon çift sıçraması olan bir fonksiyon olarak seçildiği için n çift çeker kaotik sistemler üretilmiştir.

Çok çeker yapılarda çekerler arası geçiş bölgeleri tüpler olarak belirlenir ise enerji temelli yaklaşımla bu tüpler incelenebilir. Tüpün giriş tarafında alınan bir disk benzeri bölgede seçilen başlangıç koşulları için tüp boyunca hareket ederken enerji değişimlerine bakılabilir. Böylece çekerler arası geçiş bölgelerinin etkinliği incelenebilir.

6.7 Chua Osilatörüne Ait Dinamiklerin İncelenmesi

Chua devresi bulunduğundan sonra benzer karmaşıklıkta yeni devreler de önerilmiştir. Bu çaba Chua Osilatörünün bulunması ile sonlanmıştır. Çünkü Chua osilatörünün 3 boyutlu, parça parça doğrusal, sürekli; bir boyutu simetrik dış bölgeler ve orta bölge olmak üzere 3 parçalı olan herhangi bir faz uzayına kanonik olarak eşdeğer olduğu ispatlanmıştır [27]. Chua osilatörü, orta bölge ve dış bölgeler için kanonik olarak eşdeğer kılınacağı sistemle aynı özdeşliklere sahip olabilmektedir. Hatta bu eşleşmenin başarılabilmesi için eleman değerlerinin nasıl bulunabileceğine dair algoritma da verilmiştir [28] ve [30] numaralı kaynaklar bu yöntemin uygulamalarını içermektedir.

Chua devresi ürettiği zengin dinamiklere rağmen her tür kaotik davranışın gözlemlenebildiği bir sistem değildir. Dolayısıyla Chua osilatörünün incelenmesi daha önce ele alınamayan *Aralıklılık*¹, *Torus kırılması* gibi kaotik dinamikleri inceleme fırsatı da verir [6, 20, 24]. Hatta asimetrik Chua diyodu için devre başka sistemlere de kanonik olarak eşdeğer olabilir. Örneğin [65] numaralı kaynakta Colpits osilatöründe transistörlerin küçük işaret eşdeğerleri kullanıldığı takdirde Chua osilatörünün asimetrik Chua diyodu için bu devreye kanonik olarak eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

Kennedy tarafından geliştirilen Chua Osilatörü için yazılan ABC programı, Kennedy'nin tez öğrencisi James Patrick McEvoy tarafından MATLAB'a uyarlanmış ve dosya paylaşımında *MATLAB Adventures in Bifurcations & Chaos (ABC++)* adıyla kullanıma sunulmuştur [51]. Bu kod çözümleri bölgeler arası geçiş düzlemlerini de

¹ Aralıklılık ifadesi Intermittency terimi için Türkçe karşılık olarak önerilmiştir.

göstererek çizerek çözümlerin yorumlanmasını kolaylaştırmaktadır. Ayrıca çözümleri davranışlarına göre sınıflandırmıştır. Bu programdan istifade edilebilir.

Tezde LC tank devresi içeren Chua devresinin enerji alış verişine bakılmıştır. Benzer iş LCR alt devresi içeren Chua osilatörü için yapılabilir. Bu da zor bir hedef olarak görülmemektedir.

6.8 Dallanma Davranışlarının İncelenmesi

Chua devresi, ile ilgili ilk yayın olan [2] numaralı kaynakta çift çeker kapsayan bir eğer tipi kararsız limit çevrim de gösterilmiştir. Bu kararsız limit çevrim [66] numaralı kaynakta durum geri beslemesi yapılmış Chua sisteminde kararlılık sağlanacak şekilde parametre seçilmesi ile sayısal analiz ile de doğrulanmıştır.

[40, 41] numaralı kaynaklarda spiral tipi iki çekicinin birbirine teması neticesinde çift çekerin ortaya çıktığı; çift çekerin dışında eğer tipi bir limit çevrim olduğu; çift çekerin dıştaki bu kararsız limit çevrime teması neticesinde de yok olduğu sonuçları not edilmiştir.

Yapılan işe benzer inceleme enerji değişimi gözetilerek yapılabilir. Böylece kaos için çok önemli bir konu olan dallanma toerisi enerjinin değişimi ile ele alınabilir. Bu amaçla Chua devresi ve Chua Osilatöründeki dallanma davranışları incelenebilir.

6.9 Yarı Geçiş Dönüşümleri Üzerine Çalışılması

Parça parça doğrusal bir sistem ile çalışıldığı için analitik çözümlerden yola çıkılarak yarı geçiş dönüşümleri oluşturulabilir. Luo analitik çözümleri kullanarak bu dönüşümleri aşağıdaki kombinasyonlar için oluşturmuştur [67].

- Üst bölgeye giriş – üst bölgeden çıkış
- Alt bölgeye giriş – alt bölgeden çıkış
- Üst bölgeden orta bölgeye giriş – orta bölgeden üst bölgeye dönüş
- Alt bölgeden orta bölgeye giriş – orta bölgeden alt bölgeye dönüş
- Üst bölgeden orta bölgeye giriş – orta bölgeden alt bölgeye giriş
- Alt bölgeden orta bölgeye giriş – orta bölgeden üst bölgeye giriş

Bu dönüşümleri oluşturduktan sonra geçiş kombinasyonları için analiz yapmıştır. Aşağıdaki hedefler için bu dönüşümlerle çalışılabilir.

- Yarı-geçiş dönüşümleri yardımıyla enerji ile ilgili sonuçlar elde edilmesi
- Çekim kümesi belirlenmesi
- Periyodik çözüme girişim ekleme fikri ile peryot katlama ile kaos geçisi dinamiği oluşturulması

Bu bakış açısıyla çalışılırken anahtarlamalı sistemlere dair teoriler de kullanılabilir. Buna bir örnek Şekil 6.1’de gösterilmiştir. Şekillerdeki 3 sistem için Lyapunov fonksiyonları V_1 , V_2 ve V_3 ’tür. İlk örnekte 3 sistem için Lyapunov fonksiyonları sistem aktif olduğu anlarda azalmaktadır. Diğer zamanlarda azalması gerekli değildir. İkinci örnekte sistemlerin aktif olduğu anlarda Lyapunov fonksiyonları artabilmekte ancak anahtarlama anlarındaki değerler azalan dizi oluşturmaktadır. Üçüncü örnekte ise sistemlerin aktif olduğu anlardaki Lyapunov fonksiyonunun değeri azalmaktadır. Zayıf Lyapunov teorilere göre 3 örnek de kararlıdır. Kararlılık tezin konusu değildir ancak benzer bakışla enerjinin artış ve azalışına dair analitik sonuçlar elde edilebilir.

6.10 Shilnikov Teoreminin Enerji Kavramları ile Ele Alınması

Chua devresinin Shilnikov anlamında kaotik olduğu ispat edilmiştir. Eğer tezde geliştirilen bakış açısı bir teorik tabana oturtulabilirse Shilnikov teoremi Lagranjyan ya da Hamiltonyan kavramları kullanılarak farklı bir şekilde yeniden yazılabilir. Bir önceki bölümde geliştirilecek analitik yarı geçiş dönüşümleri burada da katkı sağlayabilir.

6.11 Yeni Bir Dallanma Diyagramı Analiz Yöntemi Önerilmesi

Dinamik sistemler bir alt uzaydan geçiş anlarında faz uzayı değişkenlerinin değerleri kaydedilerek incelenebilmektedir. Poincare kesitlemesi analizinde bir boyut dallanma analizi yapılacak parametre, diğer boyut da alt uzaydan geçiş anlarında kaydedilen faz uzayı değişkeni büyüklüğüdür. Bu analizde geçici hallerin sönümlenmesi için bir süre beklendikten sonra kesitleme bölgesinden geçen yörünge değerleri kaydedilmekte bu bilgi ile sisteme dair dallanma davranışı yorumlanmaktadır. Kesitleme bölgesi bir düzlem olabileceği gibi bir değişkenin türevinin sıfır olduğu yer gibi bir alt uzay da

olabilir. Etkin olarak kullanılan bu analiz yönteminde poincare kesitlemesinin doğru şekilde yapılması kritiktir, sonucu etkileyebilir.

Tezde ortaya konan bakış genelleştirildiği takdirde alternatif bir kaotik sistem analiz yöntemi olarak kullanılabilir. Bir kaotik çekici kesişimleri çekerin iç bölgesinde olan birçok Poincare kesitlemesi ile incelenebilir.

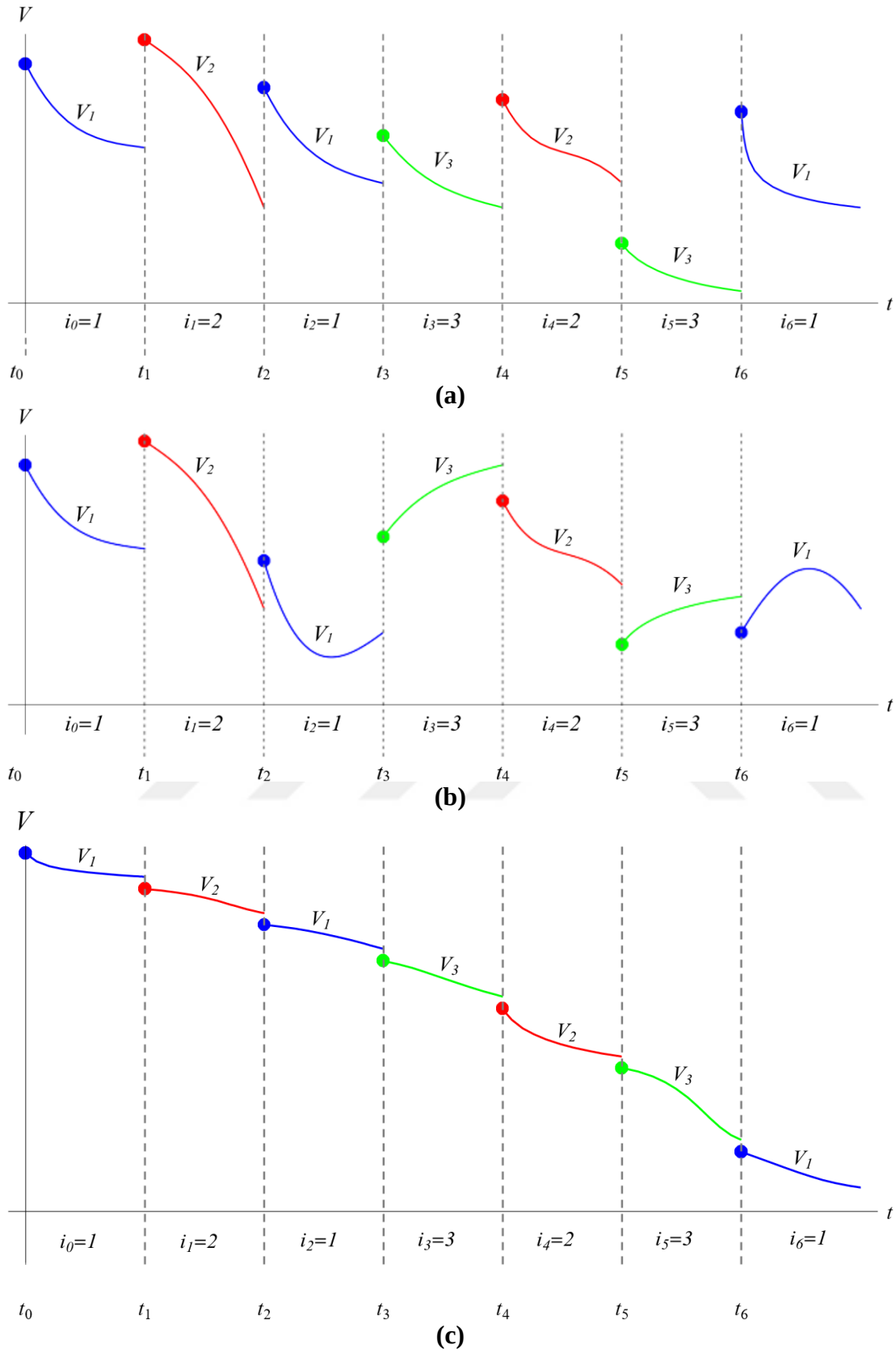
Bu bakışın sınanması için Chua devresi benzeri tek çeker sistemlerin incelendiği [68] numaralı kaynak faydalı olabilir. Ayrıca bu bakış açısı için Chua devresi için yazılan Hamiltonyan'ın türevinde neden z boyutunun gözükmediği güzel bir çıkış noktası olabilir. Chua devresinde karşılaşılan bu durum sayesinde 3 boyutlu bir sistemde enerjinin artış ve azalışını 2 boyuttan izlemek mümkün olmuştur. Tezde Bölüm 5.1'de bu konuya değinilmiştir.

6.12 Kaos Üretimi İçin Bir Kontrol İşlevi Geliştirilmesi

EK E.'de Şekil 5.9'da Peryot katlaması ile kaos oluşumu esnasında H ve dH 'nin değişimi verilmiştir. Grafiklerden görülebileceği gibi enerjinin arttığı ve azaldığı yörüngeler arası girişimin olduğu sınırlı bir bölge vardır. Eğer girişimin olduğu bu bölge ile (5.11) denklemi ilişkilendirilebilirse kaos oluşumu için bir mekanizma önerilebilir, bu amaçla bir kontrol işlevi tasarlanabilir.

Farklı Chua diyotları için (5.11)'in ve kaotik çekicinin lyapunov üstellerinin nasıl değiştiğine bakılarak daha dayanıklı kaos eldesine dair çıkarımlar yapılabilir.

Bir diğer konu olarak bir kaotik devre uzun süre çalıştığında devre elemanlarının parametrelerinde ufak değişiklikler olacaktır. Bu değişiklikler de kaotik davranıştan çıkılmasına sebep olabilir. Eleman parametreleri ile girişim bölgesinin etkileşimi iyi anlaşılabilirse kaotik devrenin kendini devre parametrelerindeki sapmalara karşı koruyabilemsine imkan sağlayan kontrol işlevleri de önerilebilir.



Şekil 6.1 : Anahtarlamaalı sistemler için 3 farklı zayıf Lyapunov teori örneği.

KAYNAKLAR

- [1] **Holmes, P.** (1990). Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”. *Physics Reports*, 193(3), 137-163. doi:[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90012-Q](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90012-Q)
- [2] **Matsumoto, T.** (1984). A Chaotic Attractor From Chua Circuit. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 31(12), 1055-1058. doi:10.1109/TCS.1984.1085459
- [3] **Matsumoto, T., Chua, L. O., & Komuro, M.** (1985). The Double Scroll. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 32(8), 797-818. doi:10.1109/TCS.1985.1085791
- [4] **Chua, L. O., Komuro, M., & Matsumoto, T.** (1986). The Double Scroll Family. 1. Rigorous Proof of Chaos. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 33(11), 1072-1097. doi:10.1109/TCS.1986.1085869
- [5] **Chua, L. O., Matsumoto, T., & Komuro, M.** (1986). The Double Scroll Family. 2. Rigorous Analysis of Bifurcation Phenomena. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 33(11), 1097-1118. doi:10.1109/TCS.1986.1085869
- [6] **Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. S., & Zhong, G. Q.** (1993). A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos – Part I. Routes to Chaos. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 40(10), 732-744. doi:10.1109/81.246149
- [7] **Sharkovsky, A. N.** (1993). Chaos from a Time-Delayed Chua's Circuit. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 781-783. doi:10.1109/81.246152
- [8] **Wang, X. F., Zhong, G. Q., Tang, K. S., Man, K. F., & Liu, Z. F.** (2001). Generating chaos in Chua's circuit via time-delay feedback. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 48(9), 1151-1156. doi:10.1109/81.948446
- [9] **Jeltsema, D., & Scherpen, J. M. A.** (2009). Multidomain Modeling of Nonlinear Networks and Systems Energy- and Power-Based Perspectives. *Ieee Control Systems Magazine*, 29(4), 28-59. doi:10.1109/mcs.2009.932927
- [10] **Sira-Ramírez, H., & Cruz-Hernández, C.** (2001). Synchronization of Chaotic Systems: A Generalized Hamiltonian Systems Approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(5), 1381-1395. doi:10.1142/S0218127401002778

- [11] **Itoh, M., & Chua, L. O.** (2016). Parasitic Effects on Memristor Dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(06), 1630014. doi:10.1142/S0218127416300147
- [12] **Farhat, C., Chapman, T., & Avery, P.** (2015). Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(5), 1077-1110. doi:10.1002/nme.4820
- [13] **Sanz-Serna, J.** (1992). Symplectic Integrators for Hamiltonian Problems: An Overview. *Acta Numerica*, 1, 243-286. doi:10.1017/S0962492900002282
- [14] **Mei, L. J., & Wu, X. Y.** (2017). Symplectic Exponential Runge-Kutta Methods for Solving Nonlinear Hamiltonian Systems. *Journal of Computational Physics*, 338, 567-584. doi:10.1016/j.jcp.2017.03.018
- [15] **Lens, E. V., Cardona, A., & G  radin, M.** (2004). Energy Preserving Time Integration for Constrained Multibody Systems. *Multibody System Dynamics*, 11(1), 41-61. doi:10.1023/B:MUBO.0000014901.06757.bb
- [16] **Yan, Z. P., Dai, H. H., Wang, Q. S., & Atluri, S. N.** (2023). Harmonic Balance Methods: A Review and Recent Developments. *Computer Modelling in Engineering & Sciences (CMES)*, 137(2), 1419-1459. doi:10.32604/cmes.2023.028198
- [17] **Zhou, P., Zhang, X. F., Hu, X. K., & Ren, G. D.** (2022). Energy Balance Between Two Thermosensitive Circuits Under Field Coupling. *Nonlinear Dynamics*, 110(2), 1879-1895. doi:10.1007/s11071-022-07669-z
- [18] **Bartissol, P., & Chua, L. O.** (1988). The Double Hook. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 35(12), 1512-1522. doi:10.1109/31.9914
- [19] **Medrano, R. O., & Rocha, R.** (2014). The Negative Side of Chua's Circuit Parameter Space: Stability Analysis, Period-Adding, Basin of Attraction Metamorphoses, and Experimental Investigation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(9). doi:10.1142/S0218127414300250
- [20] **Matsumoto, T., Chua, L. O., & Tokunaga, R.** (1987). Chaos via Torus Breakdown. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 34(3), 240-253. doi:10.1109/tcs.1987.1086135
- [21] **Anshan, H.** (1988, Jun. 7-9). *A Study of the Chaotic Phenomena in Chua's Circuit*. Paper presented at the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS).
- [22] **Anshan, H.** (1991, Jun 16-17). *Period Doubling and Period Plus One Law—Chaotic Phenomena in Similar Chua's Circuit*. Paper presented at the International Conference on Circuits and Systems, Shenzhen, China.

- [23] **Chua, L. O., & Lin, G. N.** (1990). Canonical Realization of Chua Circuit Family. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 37(7), 885-902. doi:10.1109/31.55064
- [24] **Chua, L. O., & Lin, G. N.** (1991). Intermittency in a Piecewise Circuit. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 38(5), 510-520. doi:10.1109/31.76487
- [25] **Chua, L. O.** (1992, Aug. 9-12). *A Zoo of Strange Attractors from the Canonical Chua's Circuits*. Paper presented at the Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems.
- [26] **Madan, R. N.** (1992, Aug. 9-12). *Observing and Learning Chaotic Phenomena from Chua's Circuit*. Paper presented at the Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems.
- [27] **Chua, L. O.** (1993). Global Unfolding of Chua's Circuit. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, E76A(5), 704-734, May
- [28] **Deregel, P.** (1993). Chua's Oscillator: A Zoo of Attractors. In *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (pp. 179-229).
- [29] **Pivka, L., Wu, C. W., & Huang, A. S.** (1994). Chua's Oscillator - A Compendium of Chaotic Phenomena. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 331B(6), 705-741, doi:10.1016/0016-0032(94)90087-6
- [30] **Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. S., & Zhon, G. Q.** (1993). A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos – Part II. Strange Attractors. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 40(10), 745-761. doi:10.1109/81.246150
- [31] **Pospíšil, J., Kolka, Z., Horská, J., & Brzobohaty, J.** (2000). Simplest ODE Equivalents of Chua's Equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(1), 1-23. doi:10.1142/s0218127400000025
- [32] **Brown, R.** (1993). Generalizations of the Chua Equations. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(11), 878-884. doi:10.1109/81.251831
- [33] **Altman, E. J.** (1993). Bifurcation Analysis of Chua's Circuit with Applications for Low-Level Visual Sensing. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 03(01), 63-92. doi:10.1142/S021812669300006X
- [34] **Khibnik, A. I., Roose, D., & Chua, L. O.** (1993). On Periodic Orbits and Homoclinic Bifurcations in Chua's Circuit with a Smooth Nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(2), 363-384. doi:10.1142/s021812749300026x

- [35] **Zhong, G. Q.** (1994). Implementation of Chua's Circuit with a Cubic Nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 41(12), 934-941, doi:10.1109/81.340866.
- [36] **Lamarque, C. H., Janin, O., & Awrejcewicz, J.** (1999). Chua Systems with Discontinuities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(4), 591-616, doi:10.1142/S0218127499000420
- [37] **Li, R., Duan, Z., Wang, B., & Chen, G.** (2008). A Modified Chua's Circuit with an Attraction-Repulsion Function. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(7), 1865-1888. doi:10.1142/s0218127408021427
- [38] **Zhong, G. Q., & Ayrom, F.** (1985). Periodicity and Chaos in Chua's Circuit. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 32(5), 501-503.
- [39] **Chua, L. O.** (1992). The Genesis of Chua's Circuit. *Aeu-International Journal of Electronics and Communications*, 46(4), 250-257
- [40] **Komuro, M.** (1985, Dec. 11-13). *Birth and Death of the Double Scroll*. Paper presented at the 24th Ieee Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, Fl,.
- [41] **Matsumoto, T., Chua, L. O., & Komuro, M.** (1987). Birth and Death of the Double Scroll. *Physica D*, 24(1-3), 97-124. doi:10.1016/0167-2789(87)90069-8
- [42] **Kılıç, R.** (2010). *A Practical Guide for Studying Chua's Circuits*.
- [43] **Kennedy, M. P.** (1993). Three Steps to Chaos-Part I: Evolution. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 640-656. doi:10.1109/81.246140
- [44] **Fortuna, L., Frasca, M., & Xibilia, M. G.** (2009). The Birth of the Chua's Circuit. In *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow* (Vol. 65, pp. 1-59): World Scientific
- [45] **Chua, L. O., & Huynh, L. T.** (1992, Aug. 9-12). *Bifurcation Analysis of Chua's Circuit*. Paper presented at the Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems.
- [46] **Kennedy, M. P.** (1993). Three Steps to Chaos-Part II:A Chua's Circuit Primer. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 657-674. doi:10.1109/81.246141
- [47] **Wu, S. X.** (1987). Chua's Circuit Family. *Proceedings of the IEEE*, 75(8), 1022-1032
- [48] **Madan, R. N.** (Ed.) (1993). *Editorial Note. Special Issue on Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos – Part 1: Introduction and Applications* (Vol. 03)

- [49] **Kevorkian, P.** (1993). Snapshots of Dynamical Evolution of Attractors from Chua's Oscillator. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(10), 762-780. doi:10.1109/81.246151
- [50] **Chua, L. O.** (1996). A Simple ODE with more than 20 Strange Attractors. In V. Lakshmikantham (Ed.), *World Congress of Nonlinear Analysts '92* (pp. 3043-3054). Berlin, Boston: De Gruyter.
- [51] **Kennedy, M. P.** (1994). ABC (Adventures in Bifurcations and Chaos): A Program for Studying Chaos. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 331B(6), 631-658. doi:10.1016/0016-0032(94)90084-1
- [52] **Lin, G. N.** (1992, May 14-17). *A Universal Circuit for Studying Chaos in Chua's Circuit Family*. Paper presented at the 34th Midwest Symp. on Circuits and Systems, Monterey, Ca.
- [53] **Kapitaniak, T.** (1995). Experimental Observation of Riddled Behavior. *Journal of Physics a-Mathematical and General*, 28(3), L63-L66. doi:10.1088/0305-4470/28/3/001
- [54] **Kapitaniak, T., Chua, L. O., & Zhong, G. Q.** (1997). Experimental Evidence of Locally Intermingled Basins of Attraction in Coupled Chua's Circuits. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(9), 1517-1522. doi:https://doi.org/10.1016/S0960-0779(96)00151-8
- [55] **Heagy, J. F., Carroll, T. L., & Pecora, L. M.** (1994). Experimental and Numerical Evidence for Riddled Basins in Coupled Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, 73(26), 3528-3531. doi:10.1103/PhysRevLett.73.3528
- [56] **Madan, R. N.** (1993). Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos
- [57] **Chua, L. O., & McPherson, J. D.** (1974). Explicit Topological Formulation of Lagrangian and Hamiltonian Equations for Nonlinear Networks. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 21(2), 277-286. doi:10.1109/TCS.1974.1083849
- [58] **Sarasola, C., Torrealdea, F. J., d'Anjou, A., Moujahid, A., & Graña, M.** (2004). Energy Balance in Feedback Synchronization of Chaotic Systems. *Physical Review E*, 69(1). doi:10.1103/PhysRevE.69.011606
- [59] **Duan, Z. S., Wang, J. Z., & Huang, L.** (2005). Attraction/Repulsion Functions in a New Class of Chaotic Systems *Physics Letters A*, 335(2-3), 139-149. doi:10.1016/j.physleta.2004.11.056
- [60] **Kennedy, M. P., & Chua, L. O.** (1991). Hysteresis in Electronic Circuits, A Circuit Theorist's Perspective. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 19(5), 471-515. doi:10.1002/cta.4490190505

- [61] **Awrejcewicz, J., & Calvisi, M. L.** (2002). Mechanical Models of Chua's Circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(4), 671-686. doi:10.1142/s0218127402004668
- [62] **Zhong, G. Q., Man, K. F., & Chen, G.** (2002). A Systematic Approach to Generating n-Scroll Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(12), 2907-2915. doi:10.1142/s0218127402006230
- [63] **Wang, N., Li, C., Bao, H., Chen, M., & Bao, B.** (2019). Generating Multi-Scroll Chua's Attractors via Simplified Piecewise-Linear Chua's Diode. *Ieee Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 66(12), 4767-4779. doi:10.1109/tcsi.2019.2933365
- [64] **Suykens, J. A. K., & Vandewalle, J.** (1993). Generation of n-Double Scrolls (n=1, 2, 3, 4, ...). *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 40(11), 861-867. doi:10.1109/81.251829
- [65] **Kennedy, M. P.** (1995). On the Relationship Between the Chaotic Colpitts Oscillator and Chua's Oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 42(6), 376-379. doi:10.1109/81.390276
- [66] **Chen, G. R., & Dong, X.** (1993, May 3-6). *Ordering Chaos of Chua's Circuit - A Feedback Control Approach*. Paper presented at the 1993 IEEE International Symp on Circuits and Systems, Chicago, IL.
- [67] **Luo, A. C. J., & Xue, B.** (2008, Oct 31-Nov 06). *Nonlinear Dynamics of the Chua's Circuit Revisited*. Paper presented at the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, MA.
- [68] **Bilotta, E., Di Blasi, G., Stranges, F., & Pantano, P.** (2007). A Gallery of Chua Attractors. Part V. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(5), 1383-1511. doi:10.1142/s0218127407018099
- [69] **Goldstein, H.** (1950). *Classical Mechanics*: Cambridge: Addison-Wesley
- [70] **Jose, J. V., & Saletan, E. J.** (1998). *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*: Cambridge University Press
- [71] **Wells, D. A.** (1938). Application of the Lagrangian Equations to Electrical Circuits. *Journal of Applied Physics*, 9(5), 312-320.
- [72] **Brayton, R. K., & Moser, J. K.** (1964). A theory of nonlinear networks. I. *Quarterly of Applied Mathematics*, 22(1), 1-33.
- [73] **Brayton, R. K., & Moser, J. K.** (1964). A theory of nonlinear networks. I. *Quarterly of Applied Mathematics*, 22(2), 81-104.

- [74] **Szatkowski, A.** (1979). Remark on 'Explicit Topological Formulation of Lagrangian and Hamiltonian Equations for Nonlinear Networks'. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 26(5), 358-360. doi:10.1109/TCS.1979.1084647
- [75] **Kwatny, H. G., Massimo, F. M., & Bahar, L. Y.** (1982). The Generalized Lagrange Formulation for Nonlinear RLC Networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 29(4), 220-233. doi:10.1109/TCS.1982.1085140
- [76] **Bernstein, G. M., & Lieberman, M. A.** (1989). A Method for Obtaining a Canonical Hamiltonian for Nonlinear LC Circuits. *Ieee Transactions on Circuits and Systems*, 36(3), 411-420. doi:10.1109/31.17588





EKLER

EK A. Matematik Tanımlar

EK B. Elektrik Devrelerine İlişkin Tanımlar

EK C. Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Oluşturulması

EK D. Elektrik Devrelerinin Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri

EK E. Şekil 5.9 $a=-13/70$, $b=-8/7$ Parametreleri İçin H ve dH 'nin Değişimi



EK A. Matematik Tanımlar

Örnek A.1 : A tekil bir kare matris olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (\text{A.1})$$

Tanım A.1 Vektörel Çarpım: x ve y aynı boyutlu iki vektör olmak üzere, tekil bir kare matris olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\langle x, y \rangle \triangleq x^T y = x y^T, \quad \langle ., . \rangle : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.2})$$

Tanım A.2 Gradyen ve Jakobyen: x vektörünün tek değerli bir fonksiyonu φ , çok değerli bir fonksiyonu da f olsun. Bu fonksiyonların x vektörünün bileşenlerine göre kısmi türevleri,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \varphi(.) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad f(.) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.4})$$

şeklinde tanımlanır. $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ “gradyen”, $\frac{\partial f}{\partial x}$ de “jakobiyen” olarak adlandırılır.

Özellik A.2: M tersi olan bir kare matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial Mx} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial Mx_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial Mx_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial Mx_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot M^{-1} = \frac{\partial \varphi}{\partial Mx} \cdot M^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

eşitliği sağlanır.



EK B. Elektrik Devrelerine İlişkin Tanımlar

Tanım B.1 Bir Kondansatörün Enerjisi:

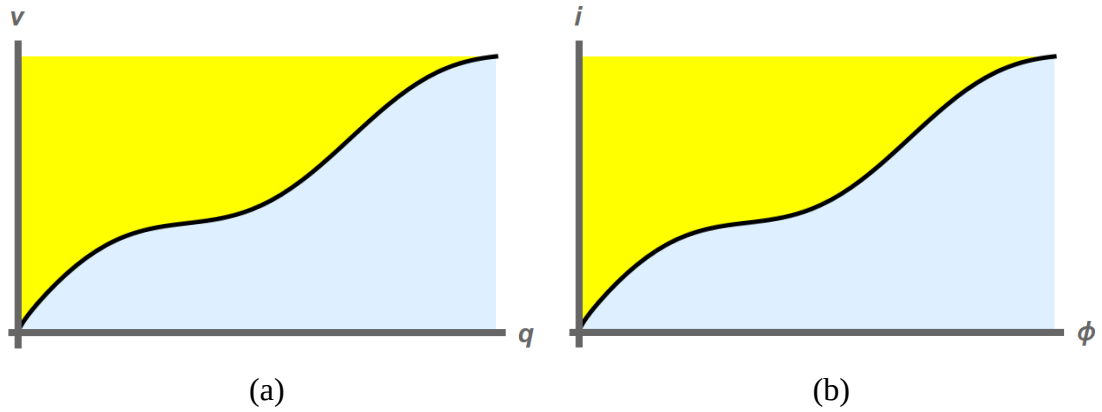
$$\begin{aligned} E_C &= \int_{-\infty}^t v_C(t') i_C(t') dt' = \int_{-\infty}^t v_C(q_C(t')) \frac{dq_C(t')}{dt'} dt' = \int_{-\infty}^t v_C(q_C(t')) dq_C(t') \\ &= \int_{q_{C_k}(-\infty)}^{q_{C_k}(t)} v_C(u) du = \int_0^{q_{C_k}} v_C(u) du \end{aligned} \quad (B.1)$$

şeklinde tanımlanır. Nihai ifade elde edilirken $u = q_C(t')$ değişken dönüşümü yapılmış; $q_{C_k}(t)$, q_{C_k} ile gösterilmiş ve kondansatörün ilk yükü $q_{C_k}(-\infty) = 0$ olarak kabul edilmiştir.

Tanım B.2 Bir Endüktansın Enerjisi: Kondansatöre benzer şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} E_L &= \int_{-\infty}^t i_L(t') v_L(t') dt' = \int_{-\infty}^t i_L(\phi_L(t')) \frac{d\phi_L(t')}{dt'} dt' = \int_{-\infty}^t i_L(\phi_L(t')) d\phi_L(t') \\ &= \int_{\phi_{L_k}(-\infty)}^{\phi_{L_k}(t)} i_L(u) du = \int_0^{\phi_{L_k}} i_L(u) du \end{aligned} \quad (B.2)$$

Enerji ve Dual Enerji Tanımları: Endüktans ve kondansatörün enerjisi yukarıda (B.1) ve (B.2) denklemleri ile tanımlanmıştır. Bu tanımlara göre Şekil B.1'deki mavi alanlar endüktans ve kondansatör için enerji tanımlarıdır. Benzer olark fiziksel anlamı olmasa da dual enerji tanımları yapılabilir. Şekil B.1'deki sarı alanlar dual enerji tanımlarıdır. Bu enerjiler elektrik devrelerinin Euler-Lagrange ve Hamilton gösterimlerinin eldesinde kullanılmaktadır.



Şekil B.1 : Kondansatör ve endüktans için enerji ve dual enerji.



EK C. Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Oluşturulması

Klasik mekanikte enerji temelli yöntemler kullanılarak bir sisteme dair denklemler yazılabilir. Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri, bu amaca hizmet eden yöntemlerdir. Bu bölümde klasik mekanikteki çok önemli enerji temelli analiz yöntemleri, Hamilton denklemleri ve buna temel teşkil eden Euler-Lagrange denklemleri hakkında bilgi verilmiştir. Bölüm yazılırken [69, 70] numaralı kaynaklardan istifade edilmiştir.

C.1. Genelleştirilmiş Koordinatlar

Klasik mekanikte sabit kütleli N adet parçacığın *üç boyutlu uzaydaki* ilk hızsız hareketi ele alınsın. Bu sistemin hareketi,

$$F(x,t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (C.1)$$

şeklinde verilebilir. (C.1) denklemleri $3N$ boyutlu bir hareket tanımlar. Ancak sistemdeki her parçacık özgür olarak hareket etmiyor olabilir. Örneğin bir kürenin üzerinde hareket etmeye zorlanan bir parçacığın hareketi iki açı ile ya da boyu sabit bir sarkacın ilk hızsız salınımı bir açı ile ifade edilebilir. Bu sebeple sistemin kısıt içermesi halinde (C.1) denklemlerine kısıt denklemleri ilave edilmelidir.

N parçacığın oluşturduğu bir sistemde parçacıkların hareketlerini sınırlayan K adet kısıt denklemi olduğunu ve bu kısıt denklemlerinin,

$$f_I(x_1, \dots, x_N; t) = 0 \quad , \quad I = 1, \dots, K < 3N \quad (C.2)$$

şeklinde konumun bir fonksiyonu olarak ifade edilebildikleri varsayılınsın. Bu tip kısıt denklemleri *holonomik kısıtlar* olarak adlandırılır. Kısıtlar hızlara da bağlı olabilir. Bu durumda kısıt denklemleri,

$$f_I(x_1, \dots, x_N; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N; t) = 0 \quad , \quad I = 1, \dots, K < 3N \quad (C.3)$$

şeklinde konumun ve hızın bir fonksiyonu olur. Eğer kısıtlar sadece hızlara bağlı ise (C.3) denklemleri entegre edilip bu kısıtlar (C.2) yapısındaki holonomik kısıtlara dönüştürülebilir. Daha genel olarak kısıtlar (C.3) tipindeki denklemlerle de verilemiyolabilir. Örneğin,

$$f_I(x_1, \dots, x_N; t) < 0 \quad , \quad I = 1, \dots, K < 3N \quad (C.4)$$

denklemlerinde olduğu gibi. (C.2) denklemleri ile verilemeyen kısıt denklemleri *holonomik olmayan kısıtlar* olarak adlandırılır.

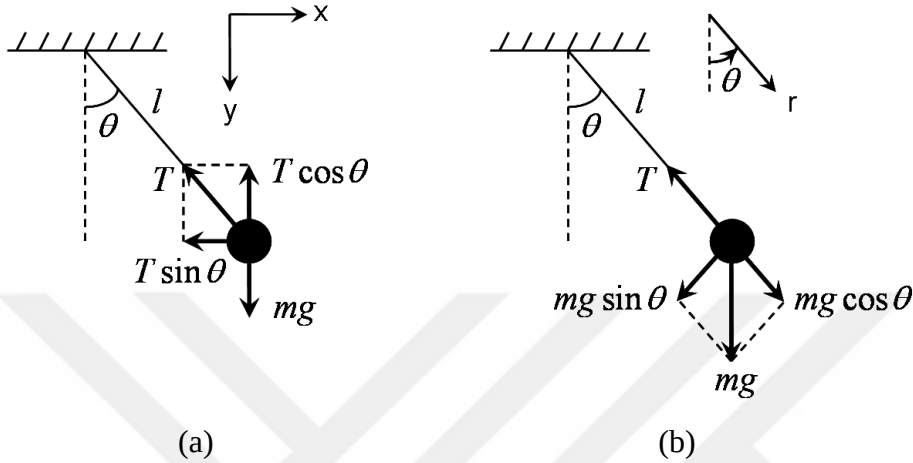
Sistemin holonomik kısıtlar içermesi durumunu ele alınsın. Kısıt denklemleri sebebiyle bazı koordinatlar, diğerlerine kesin bir ilişki ile bağlıdır. Bu koordinatları bağımlı koordinatlar olarak ele alabiliriz. (C.2) ile verilen kısıt denklemlerinin $3N$ boyutlu (C.1) denklemlerine uygulaması ile K adet koordinat denklemlerden elenebilir. Bu eleme yapılmadan önceki $3N$ adet koordinat *alışlageldik koordinatlar*¹ olarak, eleme yapıldıktan sonra geriye kalan $3N-K$ adet koordinat ise *genelleştirilmiş*

¹ Alışlageldik koordinatlar, genelleştirilmiş koordinatların aksine literatürde bulunmamaktadır. Terim ‘genelleştirilmiş koordinatlar olmayan’ kullanımı hoş görülmediği için türetilmiştir.

koordinatlar olarak adlandırılır. Kuvvetler açısından da bir ayrım yapılarak bağımlı koordinatlar yönündeki kuvvetler *kısıt kuvvetleri* olarak adlandırılır.

Kısıt içeren bir sistem iki şekilde ele alınabilir. Bir örnek üzerinden bu yöntemler gösterilecektir.

Örnek C.1 : Şekil C.1'deki basit sarkaç sistemi Newton denklemleri ile çözülmek istensin.



Şekil C.1 : Basit sarkaç için (a) kartezyen, (b) kutupsal kooordinatlarda sisteme etkiyen kuvvetler.

Şekil C.1'de kartezyen ve kutupsal koordinatlar için basit sarkaç ve etkiyen kuvvetler gösterilmiştir. Kartezyen ve kutupsal koordinatlarda konum, hız ve ivme aşağıdaki gibi tanımlanır.

<u>Kartezyen koordinatlar</u>	<u>Kutupsal koordinatlar</u>	
Konum : $\vec{s} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$	Konum : $\vec{s} = r\vec{e}_r$	
Hız : $\vec{v} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$	Hız : $\vec{v} = r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta$	(C.5)
İvme : $\vec{a} = x''\vec{e}_x + y''\vec{e}_y$	İvme : $\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\vec{e}_r + (r\theta'' + 2r'\theta')\vec{e}_\theta$	

Bu sistem için kısıt kuvveti ipteki gerilme olan T 'dir. Kısıt denklemi ise kartezyen ve kutupsal koordinatlar için aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l^2 & (a) \\ r &= l & (b) \end{aligned} \quad (C.6)$$

Kartezyen koordinatlarda x ve y koordinatları alışlageldik koordinatlardır. (C.6)(a) kısıt denklemi sadece konumlar cinsinden yazılabildiği için bir holonomik kısıttır.

Kutupsal koordinatlarda ise r ve θ koordinatları alışlageldik koordinatlardır. (C.6)(b) kısıt denklemi de sadece konumlar cinsinden yazılabildiği için bir holonomik kısıttır.

Şimdi Şekil C.1'deki sisteme ait denklemler kartezyen ve kutupsal koordinatlarda aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Kartezyen koordinatlar için çözüm:

Bu durumda sistem alışlageldik koordinatlar olan kartezyen koordinatlarda ele alınmaktadır. Şekil 2.1(a)'daki kuvvetler için (C.1) denklemleri yazılır ve bu denklemlere (C.5) ile verilen ivme tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= m\vec{a}_x = mx'' = -T \sin \theta = -T \frac{x}{l} \\ \sum \vec{F}_y &= m\vec{a}_y = my'' = -T \cos \theta + mg = -T \frac{y}{l} + mg\end{aligned}\quad (C.7)$$

denklemleri elde edilir. (C.7) denklemlerine kısıt denklemi de ilave edilir ve bu denklem sistemi düzenlenirse sistem dinamiğini belirleyen aşağıdaki denklem sistemi elde edilir. Bu bir diferansiyel-cebrik denklem sistemidir.

$$\begin{aligned}mx'' + T \frac{x}{l} &= 0 \\ my'' + T \frac{y}{l} - mg &= 0 \\ x^2 + y^2 &= l^2\end{aligned}\quad \begin{matrix} (a) \\ (C.8) \\ (b) \end{matrix}$$

(C.8)(b) denkleminin (C.8)(a) denkleminde yerine konmasıyla denklemler x ve y koordinatları yerine bir başka koordinat cinsinden yazılarak basitleştirilebilir. (C.8)(b) kısıt denklemi iki koordinata birden bağlı olduğu için bu basitleştirmenin nasıl yapılacağı aşikar değildir.

Gerçekten $x = r \sin \theta$ ve $y = r \cos \theta$ değişken dönüşümleri yapılırsa (C.8) diferansiyel denklemleri yerine θ koordinatı içeren tek bir diferansiyel denklem yazılabilir. İşte kısıt denkleminin kullanılmasıyla basitleştirilen yeni diferansiyel denkleme dair bu θ koordinatı genelleştirilmiş koordinattır.

Kutupsal koordinatlar için çözüm:

Kartezyen koordinatlardan farklı olarak bu koordinat sisteminden bakıldığında kısıt denklemi sadece bir koordinatı (r koordinatını) kısıtlamaktadır. Oysa kartezyen koordinatlar için denklem yazıldığında kısıt denklemi iki koordinatı birden (x ve y koordinatlarını) kısıtlamaktaydı.

Bu durumda sistem genelleştirilmiş koordinatlarda ele alınabilir. Sisteme dair hareket denklemleri yazılırken sadece genelleştirilmiş koordinat θ için Newton denklemi yazılır. Bağımlı koordinat r ise sisteme kısıt denklemi üzerinden etki eder.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_\theta &= m\vec{a}_\theta = m(r\theta'' + 2r'\theta') = -mg \sin \theta \\ r &= l\end{aligned}\quad \begin{matrix} (a) \\ (C.9) \\ (b) \end{matrix}$$

Kısıt denklemi (C.9)(b) ve bu denklemin türevi olan $r' = 0$ sisteme ait hareket denklemi (C.9)(a)'da yerine konur ve elde edilen denklem düzenlenirse sisteme ait dinamik denklem,

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (C.10)$$

şeklinde elde edilir. İki yöntemle bulunan sonuçlar özdeştir. Eğer (C.8) denklem sisteminde $x = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$ değişken dönüşümleri yapılır ve elde edilen denklemler düzenlenirse (C.10) ifadesi elde edilebilir.

Görülebileceği gibi kutupsal koordinatlardan bakmak işleri kolaylaştırmıştır. Bu durumda kısıt denkleminde yer alan r koordinatı bağımlı koordinat, θ koordinatı ise genelleştirilmiş koordinattır.

Yani kutupsal koordinatlardan bakmak bağımlı koordinat ve genelleştirilmiş koordinatın ayrılabilmesini; bunun bir sonucu olarak denklemlerin kolayca yazılabilmesini sağlamıştır.

Euler-Lagrange denklemlerinin önemli bir faydası sistemin holonomik kısıt içermesi durumunda sisteme ait denklemlerin genelleştirilmiş koordinatlar kullanılarak kolayca yazılabilmesini sağlamasıdır.

Bu örnek ile klasik mekanikte sisteme genelleştirilmiş koordinatlardan bakılmasının sistem denklemlerin elde edilmesinde sağladığı kolaylık gösterilmiştir.

C.2. Euler-Lagrange Denklemleri

Örnek C.1’de klasik mekanik problemlerinde diferansiyel denklemleri elde ederken doğru koordinatları kullanmanın faydası gösterilmiştir. Böylece diferansiyel denklem daha kolay elde edilmiştir.

Euler-Lagrange denklemlerinin faydası diferansiyel denklemlerin kolay bir şekilde yazılması ile sınırlı değildir. Yöntem çok daha önemli bir kolaylık sağlamakta; sisteme dair denklemlerin kinetik ve potansiyel enerji kavramları yardımıyla nasıl yazılabileceğini de göstermektedir.

Bir mekanik sistemin dengede olmasını her parçacığa etkiyen toplam kuvvetin sıfır olması olarak tanımlansın. 3 boyutlu uzayda N parçacıktan oluşan denge halindeki bir mekanik sistemde, zaman değişmeksizin sistemin koordinatlarında sonsuz küçük değişimler olsun. Sistemin koordinatlarındaki bu sonsuz küçük yer değiştirmeler δr_i ile gösterilsin. Sisteme etkiyen kuvvetlerin ve zamanın değişmediğinin varsayıldığı bu yer değiştirme için yapılan iş, sözde iş (virtual work) olarak adlandırılır. Sistem denge konumunda olduğuna göre her parçacığa etkiyen hızlar toplamı sıfır olmalıdır. O halde parçacığın ve bunun sonucu olarak da sistemin sözde işi sıfır olmalıdır.

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (C.11)$$

Şimdi kuvvetler, kısıt kuvvetleri (iç kuvvetler) ve dış kuvvetler olarak ikiye ayrıldığı takdirde (C.11) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\sum_i F_i^{\text{dış}} \cdot \delta r_i + \sum_i F_i^{\text{kısıt}} \cdot \delta r_i = 0 \quad (C.12)$$

Kısıt kuvvetlerinin iş yapmadığı sistemler için incelemeye devam edilsin. Bu kabul sistemin hareketinin mümkün olduğu koordinatlar yönünde kısıt kuvveti olmaması anlamına gelir. Örneğin, bir yüzey üzerinde hareket edecek şekilde kısıtlanmış bir cisim ele alınsın. Sürtünme yok ise kısıt kuvveti hareket yönüne diktir, dolayısıyla koşul sağlanır ancak sürtünme var ise bu kuvvet hareket yönüne dik değildir ve bu nedenle kısıt kuvveti iş yapan bir kuvvettir. Kısıt kuvvetlerinin iş yapmadığını kabul ettiğimiz sistemler için (C.12) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\sum_i F_i^{\text{dış}} \cdot \delta r_i = 0 \quad (\text{C.13})$$

Mekanik sistemde her parçacığa etkiyen toplam kuvvetin sıfır olması kabulü ile yola çıkılmıştı. Bu statik haldir; incelemeyi dinamik hale genişletmek için bu kabulden vazgeçilsin. Bu defa sistemdeki parçacıklar uygulanan dış kuvvetler altında hareketlidir. Yani her parçacığa etkiyen toplam kuvvetin sıfır olmamasına müsaade vardır. Bu durumda (C.1) Newton denklemi gereğince aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$F_i^{\text{dış}} = m_i a_i = m_i \dot{v}_i = \dot{p}_i \quad (\text{a})$$

$$F_i^{\text{dış}} - \dot{p}_i = 0 \quad (\text{b}) \quad (\text{C.14})$$

Kısıt kuvvetlerinin iş yapmadığı sistemler için inceleme yapıldığından (C.14)(a) yazılabildi. Bunun sonucu olan (C.14)(b), sistemdeki her parçacığa etki eden kuvvete eşit ve ters yönlü bir kuvvet uygulanırsa sistemin dengede olacağını ifade eder. Burada dengede olmak her parçacığa etkiyen toplam kuvvetin sıfır olması anlamındadır.

Böylece dinamik hale ait denklem, statik hal göz önüne alarak yazılabilir. Burada yapılan dış kuvvetlerle ilgili bir eşitliğe dış kuvvetlerin eşit olduğu bir başka büyüklüğün dahil edilmesidir. Bu yöntem ile (C.11), (C.12) ve (C.13) denklemleri aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\sum_i (F_i^{\text{dış}} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$\sum_i (F_i^{\text{dış}} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i F_i^{\text{kısıt}} \cdot \delta r_i = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\sum_i (F_i^{\text{dış}} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (\text{C.17})$$

(C.17) ifadesi *D'Alembert prensibi* olarak adlandırılır. Böylece kısıt kuvveti içermeyen bir denklem elde etmiş olduk. Şimdi kısıt denklemleri de işin içine katılabilir. Alışlageldik koordinatlar r_i 'lerin, genelleştirilmiş koordinatlar q_j 'ler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabildiği varsayılın:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \quad , \quad i = 1, \dots, 3N \quad ; \quad 3N > n \quad (\text{C.18})$$

Bu denklemden kısmi türetme ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$v_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (\text{C.19})$$

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{C.20})$$

Sözde iş hesaplanırken zamanın geçmediği varsayıldığı için (C.20) ifadesi zamana ait kısmi türev barındırmaz. Şimdi (C.19) ve (C.20) kullanılarak (C.17) aşağıdaki gibi yeniden oluşturulabilir:

$$\begin{aligned}\sum_i F_i^{\text{dış}} \cdot \delta r_i &= \sum_i F_i^{\text{dış}} \cdot \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} F_i^{\text{dış}} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j,i} F_i^{\text{dış}} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

$$\sum_i \dot{p}_i \cdot \delta r_i = \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j,i} m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (\text{C.22})$$

$$\sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (\text{C.23})$$

(C.21) ve (C.23) denklemlerindeki Q_j ,

$$Q_j \triangleq \sum_i F_i^{\text{dış}} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.24})$$

şeklinde tanımlanır ve *genelleştirilmiş kuvvet* olarak adlandırılır. Şimdi aşağıdaki bağıntı göz önüne alınsın:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\} \quad (\text{C.25})$$

Bu ifadedeki son terim (C.19) yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 r_i}{\partial t \partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_k \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}\end{aligned}\quad (\text{C.26})$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (C.19) denkleminde,

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.27})$$

elde edilir. Bu sonuçların (C.25)'e uygulanması ile de

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)\end{aligned}\quad (\text{C.28})$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin (C.23)'e uygulanmasıyla

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (\text{C.29})$$

ifadesi elde edilir. Şimdi sistemin toplam kinetik enerjisi, parçacıkların kinetik enerjileri cinsinden

$$T \triangleq \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{C.30})$$

şeklinde tanımlanırsa (C.29) denklemi,

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (\text{C.31})$$

şeklini alır. Kısıtlar holonom (sadece konuma bağlı) ise bu eşitliğin sağlanması ancak δq_j 'lerin katsayılarınının sıfır olması ile mümkündür. Bu sebeple (C.31)'un çözümü,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.32})$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sisteme dair kısıtların holonom olması durumunda Euler-Lagrange denklemlerine varmayı sağlayan temel eşitliktir.

Bu denklemdeki Q_j 'ler, genelleştirilmiş koordinatlarda sisteme etkiyen kuvvetlerdir. Eğer (C.32) denklemi ile tanımlanan genelleştirilmiş kuvvet Q_j 'ler, alışlageldik koordinatların bir fonksiyonu olan skaler bir V potansiyel enerji fonksiyonundan,

$$F_i^{\text{dış}} = -\nabla_i V \quad (\text{C.33})$$

şeklinde konuma göre türetilabiliyor ise bu kuvvetler *korunumlu kuvvetler* olarak adlandırılır. Bu durumda genelleştirilmiş kuvvetler aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Q_j = \sum_i F_i^{\text{dış}} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.34})$$

(C.34) denklemindeki skaler V potansiyel enerji fonksiyonu,

$$V \triangleq V(r_1, r_2, \dots, r_N) \quad (\text{C.35})$$

şeklinde tanımlandığı için gradyen tanımı kullanılarak (C.34) denklemi,

$$Q_j = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (\text{C.36})$$

şeklinde yazılabilir. Bu da genelleştirilmiş koordinatların bir fonksiyonu olan skaler bir V potansiyel enerji fonksiyonundan, genelleştirilmiş kuvvetler Q_j 'lerin elde edilebileceği anlamına gelir. Böylece (C.32) denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{C.37})$$

halini alır. V konumun, T ise hızın bir fonksiyonu olmak üzere olduğundan bu denklem,

$$L \triangleq T - V \quad (C.38)$$

şeklinde tanımlanan bir L Lagrange fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (C.39)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler *Euler-Lagrange denklemleri* olarak adlandırılır.

Örnek C.2 : Şekil_C.1'deki basit sarkaç sisteminin Euler-Lagrange denklemleri ile çözünüz.

Şekil C.1(b) sistemin genelleştirilmiş koordinatlardaki gösterimidir. θ sisteme ait genelleştirilmiş koordinattır. Bu sistem için L Lagrange fonksiyonunu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v_\theta^2 - mgh = \frac{1}{2} m (r\theta')^2 + mgr \cos \theta = \frac{1}{2} m l^2 \theta'^2 + mgl \cos \theta \quad (C.40)$$

Şimdi (C.39) Euler-Lagrange denklemi, (C.40) Lagrange fonksiyonu için çözülebilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta'} &= \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\frac{1}{2} m l^2 \theta'^2 + mgl \cos \theta \right) = m l^2 \theta' \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} m l^2 \theta'^2 + mgl \cos \theta \right) = -mgl \sin \theta \end{aligned} \quad (C.41)$$

$$\frac{d}{dt} (m l^2 \theta') + mgl \sin \theta = m l^2 \theta'' + mgl \sin \theta = 0 \quad (C.42)$$

Böylece sistemin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (C.43)$$

C.3. Korunumsuz Kuvvetler Olduğunda Euler-Lagrange Denklemleri

Bir önceki bölümde (C.24) denklemi ile tanımlanan genelleştirilmiş kuvvetler Q_j 'lerin, alışlageldik koordinatların bir fonksiyonu olan skaler bir V potansiyel enerji fonksiyonundan türetilbildikleri varsayılmıştı. Şimdi bu varsayım kaldırılın ve genelleştirilmiş kuvvetler Q_j 'ler 3 gruba ayrılın:

- Q_j^V : Alışlageldik koordinatların bir fonksiyonu olan skaler bir $V = V(r_1, r_2, \dots, r_N)$ potansiyel enerji fonksiyonundan türetilen *korunumlu kuvvetler*,
- Q_j^R : Alışlageldik hızların bir fonksiyonu olan skaler bir $R = R(\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_N)$ fonksiyonundan türetilen *korunumsuz kuvvetler*,
- Q_j : Diğer *korunumsuz kuvvetler*.

Bu durumda (C.32) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^V + Q_j^R + Q_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (C.44)$$

Bu denklemden hareketle Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki şekilde türetilir.

$$\begin{aligned} F_i^{\text{dis},V} &\triangleq -\nabla_i V \\ F_i^{\text{dis},R} &\triangleq -\nabla_i R \end{aligned} \quad (C.45)$$

$$\begin{aligned} Q_j^V &= \sum_i F_i^{\text{dis},V} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \\ Q_j^R &= \sum_i F_i^{\text{dis},R} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i R \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial R}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial R}{\partial \dot{r}_i} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (C.46)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (C.47)$$

Şimdi (C.38) denklemi ile tanımlanan L Lagrange fonksiyonu kullanılırsa Euler-Lagrange denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (C.48)$$

C.4. Hamilton Denklemleri

Bir $f(x, y, t)$ fonksiyonundan $g(u, y, t)$ fonksiyonuna baz dönüşümü yapılmak istensin. Bu işlem *Legendere dönüşümü* yardımıyla aşağıdaki gibi yapılabilir:

$f(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyeli,

$$df = u dx + v dy + z dt \quad (C.49)$$

yapısındadır. Bu denklemdeki u , v ve z ,

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (C.50)$$

dir. g ; u , y ve t 'nin,

$$g = f - ux \quad (C.51)$$

şeklinde bir fonksiyonu olsun. Şimdi $g(u, y, t)$ 'nin diferansiyeli yazılır ve bulunan ifadede (C.49) denklemi yerine konursa,

$$dg = df - u dx - x du = -x du + v dy + z dt \quad (C.52)$$

denklemi elde edilir. Bu aradığımız formda bir diferansiyeldir. Böylece, (C.51) ile tanımlanan $g(u, y, t)$ fonksiyonu için,

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} , \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} , \quad z = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad (C.53)$$

eşitliklerinin geçerli olduğu sonucuna varılır.

Bir önceki bölümde (C.30) ile tanımlanan T toplam kinetik enerji fonksiyonu, (C.35) ile tanımlanan V potansiyel enerji fonksiyonu, (C.38) ile tanımlanan L Lagrange fonksiyonu ve alışlageldik koordinatlar r_i 'lerin, genelleştirilmiş koordinatlar q_j 'ler cinsinden ifadesini veren (C.18) denklemi aşağıda hatırlatma amacıyla tekrar yazılmıştır.

$$T \triangleq \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (C.30)$$

$$V \triangleq V(r_1, r_2, \dots, r_N) \quad (C.35)$$

$$L \triangleq T - V \quad (C.38)$$

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t) , \quad i = 1, \dots, 3N ; 3N > n \quad (C.18)$$

Bu denklemler yardımıyla L Lagrange fonksiyonunun; genelleştirilmiş konum, genelleştirilmiş hız ve zamanın bir fonksiyonu olduğu görülebilir.

$L(\dot{q}_i, q_i, t)$ Lagrange fonksiyonu yardımıyla,

$$p_i \triangleq \frac{\partial L(\dot{q}_i, q_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (C.54)$$

şeklinde tanımlanan büyüklükler *genelleştirilmiş momentumlar* olarak adlandırılır. Şimdi Legendre dönüşümü yardımıyla $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ fonksiyonundan $H(p_i, q_i, t)$ fonksiyonuna dönüşüm denklemleri elde edilebilir. (C.51) denklemi göz önüne alınarak $H(p_i, q_i, t)$ fonksiyonu bir eksi işaret farkıyla,

$$H \triangleq \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad (C.55)$$

şeklinde tanımlanır. Legendre dönüşümü yardımıyla tanımlanan H 'ye Hamiltonyan fonksiyonu denir. Bu tanımda Lagranjyan fonksiyonunun katsayısının negatif olmasına daha sonra değinilecektir. Legendre dönüşümü için yazılan (C.53) denklemlerinin H için sağlanması gerektiği için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (C.56)$$

(C.54) ile tanımlanan genelleştirilmiş momentumun türevi alınır ve elde edilen eşitliğe (C.39) Euler-Lagrange denklemleri uygulanırsa,

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (C.57)$$

ifadesi elde edilir. (C.57)'nin (C.56) denklemlerinde yerine konmasıyla da aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}\tag{b}$$

Bu denklemler *Hamilton denklemleri* olarak adlandırılır.

Lagrange fonksiyonunun, dolayısıyla kinetik enerjinin zamana direkt olarak bağlı olmadığı bir sistem göz önüne alalım. Böyle bir sistemde L 'nin zamana göre türevi,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt}\tag{C.59}$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemde Euler-Lagrange denklemleri kullanılırsa,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)\tag{C.60}$$

ifadesi elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0\tag{C.61}$$

(C.61)'nin sağlanması için parantez içindeki ifade bir sabit olmalıdır. Bu da (C.55) ile tanımlanan Hamilton fonksiyonunun bir sabit olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak kinetik enerjinin zamana bağlı olmadığı sistemler için H Hamilton fonksiyonu korunumlu bir büyüklüktür. Böyle bir sistemde Hamilton denklemleri sadece (C.58)(a) denklemlerinden oluşur. Bu yapıdaki Hamilton denklemleri *kanonik Hamilton denklemleri* olarak adlandırılır.

Hamilton fonksiyonunun tanımlandığı (C.55) denklemini yeniden ele alınsın. alım. V konumun, T ise hızın bir fonksiyonu olduğundan bu denklem,

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - L\tag{C.62}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan (C.30) ve (C.19) denklemleri yardımıyla da,

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2\tag{C.63}$$

yazılabilir. Eğer kinetik enerji zamana direkt olarak bağlı değil ise $\frac{\partial r_i}{\partial t}$ sıfırdır. Bu da sistemin kanonik Hamilton yapıda olmasına karşı düşer. Böylece (C.63) denklemi,

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{j,k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \sum_{j,k} \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k
\end{aligned} \tag{C.64}$$

haline gelir. (C.64) denklemini a_{jk} ,

$$a_{jk} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{C.65}$$

olmak üzere,

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{C.66}$$

şeklinde yazılabilir. Bu da kinetik enerjinin, genelleştirilmiş hızlar $\dot{q}_j$ ve $\dot{q}_k$ 'in 2. dereceden bir fonksiyonu olduğu anlamına gelir.

Euler'in homojen fonksiyonlara ait teoremi, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bir x_k değişken takımının n . dereceden homojen bir fonksiyonu ise,

$$\sum_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = n f \tag{C.67}$$

olduğunu söyler. Şimdi (C.62) denklemini ele alalım. Bu denklemdeki ilk terime Euler'in teoremi uygulanırsa Hamiltonyan için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - L = 2T - (T - V) = T + V \tag{C.68}$$

Böylece H sistemin toplam enerjisi olarak elde edilmiş oldu. Hamiltonyan'ın kinetik ve potansiyel enerjinin toplamı olması istendiği için (C.55) ifadesinde Lagranjyan teriminin katsayısı negatiftir. Böylece Hamiltonyan bir sistemin toplam enerjisi olarak elde edilmiş oldu.

Örnek C.3: Şekil C.1'deki basit sarkaç sisteminin Hamilton denklemleri ile çözünüz.

Şekil C.1(a)'daki alışlageldik koordinatlar x ve y 'yi Şekil C.1(b)'deki genelleştirilmiş koordinat θ 'ya bağlayan, $x = r \sin \theta$ ve $y = r \cos \theta$ denklemleri zamana direkt bağlı olmadığından bu sistemde kinetik enerji T de zamana direkt bağlı değildir. Dolayısıyla Hamilton denklemleri kanonik yapıdadır.

Şekil C.1(b)'deki genelleştirilmiş koordinat θ için genelleştirilmiş momentumu hesaplayalım.

$$q_\theta = \theta, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = m l^2 \theta' \tag{C.69}$$

Şimdi (C.40) Lagrange fonksiyonu yardımıyla Hamilton fonksiyonunu hesaplanabilir.

$$H = \dot{q}_\theta p_\theta - L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl \cos q_\theta \quad (C.70)$$

Aynı sonuca $H = T + V$ ile de varılabilirdi. Şimdi H 'den hareketle (C.58)(a) kanonik Hamilton denklemleri,

$$\begin{aligned} \dot{q}_\theta &= \frac{p_\theta}{ml^2} \\ \dot{p}_\theta &= -mgl \sin q_\theta \end{aligned} \quad (C.71)$$

şeklinde elde edilir.

C.5. Korunumsuz Kuvvetler Olduğunda Hamilton Denklemleri

Bir önceki bölümde (C.39) Euler-Lagrange denklemleri ile yola çıkılmıştı. (C.55) ile tanımlanan Hamiltonyan için (C.53) Legendre dönüşümü denklemleri kullanılarak (C.56) denklemleri elde edilmişti. Ardından da genelleştirilmiş konum ve (C.54) ile tanımlanan genelleştirilmiş momentum için (C.58) Hamilton denklemleri bulunmuştu.

Korunumsuz kuvvetler olduğunda Euler-Lagrange denklemleri olarak (C.39) yerine (C.48) denklemleri kullanılmalıdır. Bu durumda genelleştirilmiş momentumun türevi (C.57) yerine aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \quad (C.72)$$

Bu denklemlerin (C.56)'ya uygulanması ile de korunumsuz kuvvetler içeren sistemler için Hamilton denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \end{aligned} \quad (a) \quad (C.73)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (b)$$



EK D. Elektrik Devrelerinin Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri

Klasik mekanikte potansiyel enerji ve kinetik enerjiyi birbirlerine ihtiyaç olmaksızın tanımlayabilmemiz zamanla enerji temelli etkin yöntemler geliştirilmesini sağlamıştır. Euler-Lagrange denklemleri ile Hamilton denklemleri potansiyel enerji ve kinetik enerjiyi kullanarak yazılır. İlki farkını, ikincisi de toplamını kullanır. Bu yöntemlerde öncelikle kısıt denklemlerinin devre dışı bırakıldığı genelleştirilmiş koordinatlara geçilir, ardından denklemler oluşturulur. Genelleştirilmiş koordinatlar EK C’de izah edilmiştir.

Klasik mekanikte potansiyel enerji harekete dönüşmemiş statik enerjidir. Bir cismin Dünya ile etkileşiminde yerçekimine karşı ya da daha genel olarak noktasal yükler arası etkileşimde kütleçekim kuvvetine karşı bir iş yaparak bir cismin bir noktaya getirilmesi ile oluşur. Kinetik enerji ise hareket ile sağlanan enerjidir. Yerçekimi ivmesi ile ya da kütleçekim kuvveti ile harekete geçen kütlenin enerjisidir.

Bir yay için, yay sıkıştırıldığında yayın itme gücüne karşı yapılan iş potansiyel enerjidir. Kinetik enerji ise yayın hareketi esnasında ortaya çıkan enerjidir. Bir akışkan için potansiyel enerji akışkanın sıkıştırılması iken, kinetik enerji akışkanın bir boru içinde hareketidir.

Elektrik devreleri için durum çok karmaşıktır. Öncelikle iki farklı enerji tanımı ile yola çıkılması gerektiği için ilk akla gelene göre tanımlar yapılabilir. Enerji depolayabilen elemanlardan birinin, kondansatörün enerjisi potansiyel enerji olarak; diğersinin, endüktansın enerjisi de kinetik enerji olarak ele alınsın. Elbette tam tersi de mümkündür.

Böylece bir benzetim kurulabilmiş olmasına karşın klasik mekanik ile elektrik devreleri arasında enerjinin oluşumu ve diferansiyel denklemlerin yapısı açısından farklar vardır.

Bu farkları görmek için Dünya’nın çekim kuvveti etkisindeki bir noktasal yükün yerçekimi etkisindeki dikey hareketi ile bir LC tank devresinin dinamiği kıyaslansın:

- Cismin potansiyel enerjisi sabit olduğunda konumu sabittir, dolayısıyla hızı sıfırdır. Bu cismin yerden belli bir yüksekliğe konmasına karşı gelir. LC devresinde kondansatörün bir anahtar ile devreden ayrılması durumunda potansiyel enerjisi sabit kalır.
- Cisim yüksekte bırakıldığında kinetik enerjisi sıfırdan artmaya başlar, bu esnada potansiyel enerji azalır. Dünya’ya çarpana kadar bu devam eder. Dolu bir kondansatör bir endüktansa bağlanırsa kondansatör boşalana kadar oluşan dinamik benzerdir. Kondansatördeki potansiyel enerji azalırken endüktanstaki kinetik enerji artar.
- LC devresinde potansiyel ve kinetik enerji tanımları tam tersi alınırsa endüktansın potansiyel enerjisini sabit tutabilmek için endüktansı kısa devre yapmak gerekir. Bu teorik olarak mümkündür ancak fiziksel olarak yapılamaz!
- Cisim çok uzak olmadıkça Dünya’dan ne kadar uzakta olursa olsun potansiyel enerjisi tanımlıdır, sadece Dünya üzerinde potansiyel enerjisi sıfırdır. LC devresinde ise elemanlar paralel bağlandığı takdirde benzer bir dinamik sistem oluşturur. Dolu bir kondansatör bir endüktansa seri bağlandığında ise potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşmez. Yani elektrik devresi bağlantılarının nasıl olduğu da önemlidir.

Bir grup noktasal yükün kütle çekimi ile hareketi ele alındığında bu yükler birbirlerine temas etmedikçe bir dinamik sistem tanımlar; oysa bir grup endüktans ve kondansatör her durumda bir dinamik sistem tanımlamaz, elektrik devre bağlantıları önemlidir.

Enerjinin ne olduğuna bakıldığında ise akla şu sorular gelir: Doğrusal olmayan bir kondansatör için enerjisi en genel halde geriliminin ve yükünün bir fonksiyonudur. Gerilimler için Kirchhoff'un gerilimler yasası sağlanırken, yükler için ise Kirchhoff'un akımlar yasası sağlanır. Bu durumda gerilime bağlı kondansatörler için devre grafında dallar ile ilgili denklemler kullanılır, yüke bağlı kondansatörler için ise girişler ile ilgili denklemler kullanılır. Bu durumlarda genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş hızların seçimi sorunları karşımıza çıkar. Endüktanslar için de benzer durum vardır. Elektrik devresi giriş olan kondansatörler ve dal olan endüktanslar içerdiğinde de benzer sorun vardır.

Benzer olarak doğrusal olmayan bir endüktans için enerjisi en genel halde akımının ve akısının bir fonksiyonu da olabilir. Bu durumda daha karmaşık bir hal ortaya çıkar.

Euler-Lagrange denklemlerinde bir grup değişken ve bu değişkenlerin türevleri cinsinden bir diferansiyel denklem yazılması gerekir. Hamilton denklemlerinde ise iki ayrı grup değişkenin birbirleri cinsinden yazılabilmesi gerekir.

Bütün bu sorunlar hangi büyüklüklerin genelleştirilmiş koordinat olarak alındığı ile ve kinetik enerji ve potansiyel enerjinin nasıl tanımlandığı ile aşılmaya çalışılır.

Elektrik devrelerinin Euler-Lagrange formülasyonlarında iki temel güçlük vardır: Genelleştirilmiş koordinatların seçiminin nasıl yapılacağı ve enerjilerin -kinetik ve potansiyel enerjinin- nasıl tanımlanacağı. Genelleştirilmiş koordinatlar olarak kapasite ya da endüktanslara ait yük ya da akı büyüklükleri kullanılır. Gösterimde bu büyüklüklerinden sadece biri kullanılabileceği gibi iki büyüklük birarada da kullanılabilir. Kinetik enerji olarak kondansatörlerin (ya da endüktansların) toplam enerjisi, potansiyel enerji olarak da endüktansların (ya da kondansatörlerin) toplam enerjisi alınır. Literatürde kinetik ve potansiyel enerjinin ayrı ayrı tanımlanmayıp sisteme ait tek bir toplam enerjinin kullanıldığı çalışmalar da mevcuttur. Bağımsız kaynakların denklemlere nasıl katılacağı da bir diğer sorundur. Bağımsız kaynakların enerjilerinin kinetik, potansiyel ya da toplam enerjiye katılması ya da bu elemanların genelleştirilmiş kuvvet olarak denklemlere katılması mümkündür. Dirençler ve bağımlı kaynaklar denklemlere genelleştirilmiş kuvvet olarak katılır. Bütün bu çeşitliliğe ilaveten fiziksel anlamı üzerinde durmaksızın elde edilen devre denklemlerin uygun matris işlemleri neticesinde istenen Euler-Lagrange ya da Hamilton denklemleri formuna getirilmesi de mümkündür.

Bu konudaki belli başlı çalışmalara aşağıda değinilmiştir:

Wells 1938 tarihli çalışmasında endüktansların enerjisini kinetik enerji, kondansatörlerin ve kaynakların enerjilerinin toplamını da potansiyel enerji olarak bir Euler-Lagrange formülasyonu vermiştir [71]. Bu çalışmada genelleştirilmiş koordinatlar olarak kondansatör yükleri ve endüktans akıları alınmıştır. Çalışma kondansatörlerin ve endüktansların tanım bağıntılarının lineer olma kısıtlamasını içermektedir. Ayrıca devre denklemlerinde Euler-Lagrange formülasyonuna ulaşılmadan önce kondansatör yükleri ve endüktans akılarına ilişkin cebrik denklemlerin elenmesiyle lineer bağımsız bir değişken takımı elde edilmesi gerektiği not edilmiş, ancak bu konuda bir sistematik verilmemiştir. Çalışma özellikle hareketli parçalara sahip elektrik devrelerinin analizinde Euler-Lagrange denklemlerinin kullanılabileceğine değinmesi açısından önemlidir.

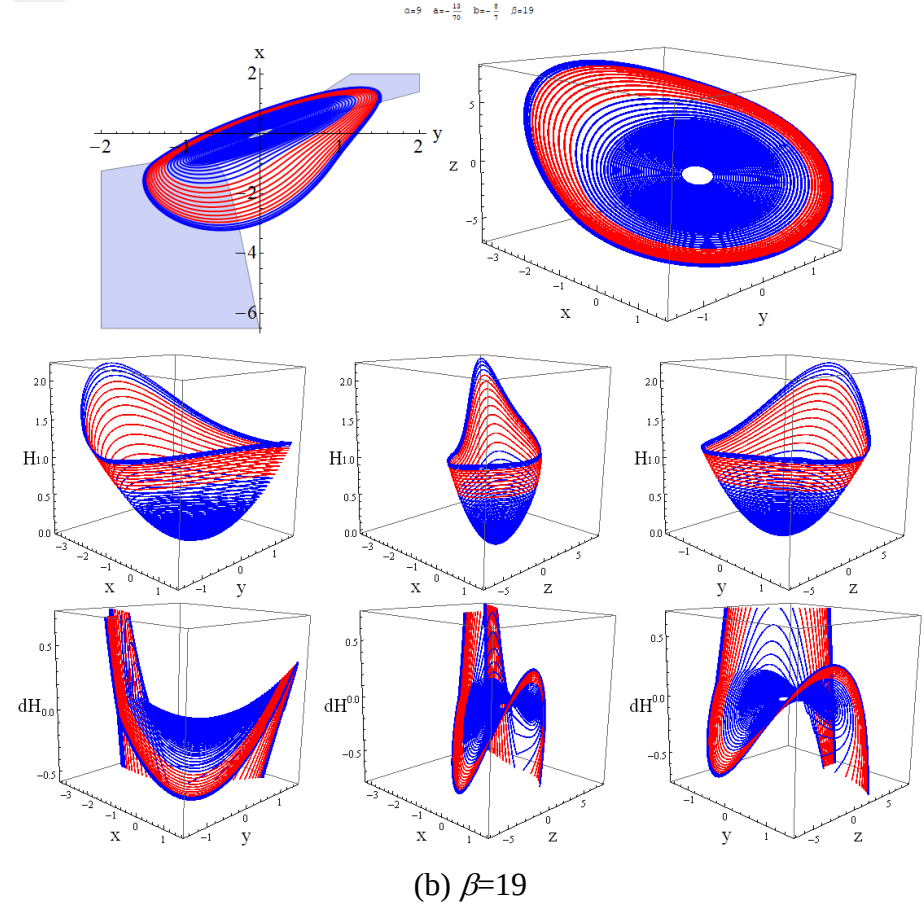
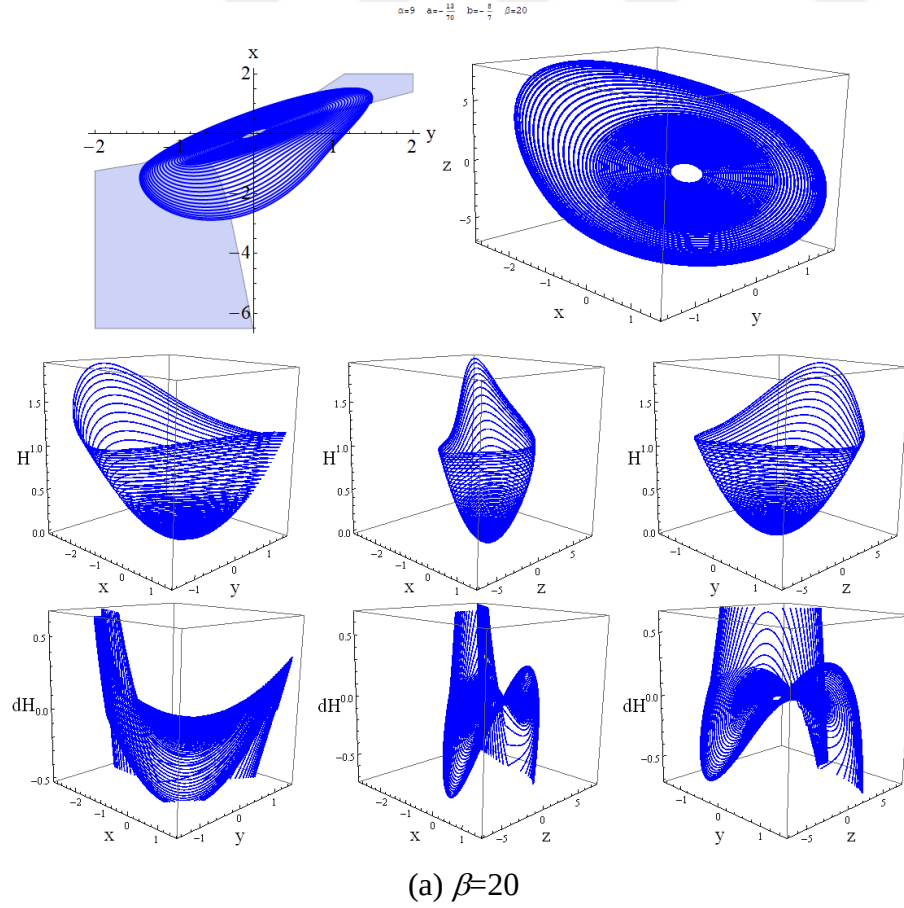
Daha sonra Brayton ve Moser, doğrusal olmayan devrelerin analizine dair genel bir yaklaşım vermişlerdir. Çalışmalarında bir Euler-Lagrange gösterimi vermemiş olmalarına rağmen bu konudaki temel fikirlerin oluşmasında katkıları büyüktür. Bu çalışmada devre denklemleri, bileşenleri devredeki kapasite, endüktans ve dirençlerin enerjileri olan bir toplam enerji yardımı ile yazılmıştır [72, 73].

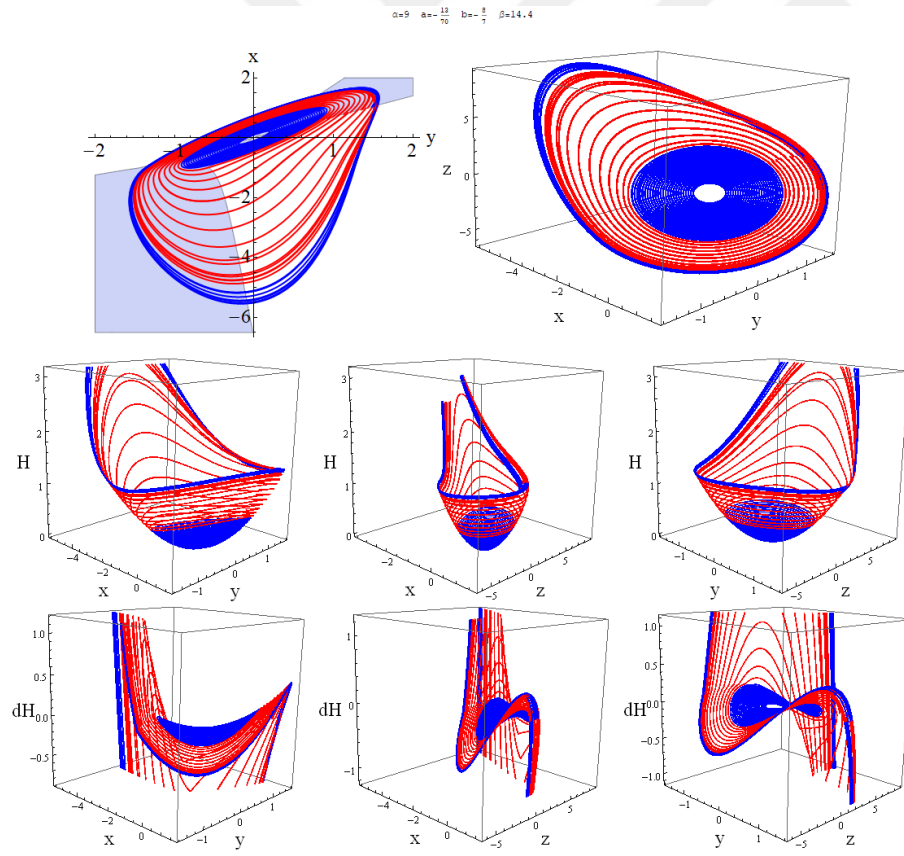
Chua ve McPearson kondansatör akıları ve endüktans yüklerini durum değişkenleri olarak kullanan bir Euler-Lagrange gösterimi vermişlerdir. Çalışmalarında literatürdeki daha önceki çalışmalarda olmayan bağımlı kaynaklar da denklemlere katılmıştır [57]. Bu çalışmanın önemli bir sakıncası, durum değişkenleri olarak alışlageldik büyüklükler olmayan kondansatör akıları ve endüktans yüklerinin kullanılmış olmasıdır [74]. Kwatny ve diğerlerinin çalışmasında durum değişkeni olarak yeniden kondansatör yükü ve endüktans akısına dönülmüştür ancak bu defa durum değişkenleri kondansatör yükleri ve kondansatör akılarının lineer bir kombinasyonu olarak ele alınmıştır. Bu da genelleştirilmiş koordinatların ve buna bağlı olarak genelleştirilmiş hızların fiziksel anlamı olmayan değişkenler olması sonucunu getirmiştir [75]. Elektrik devrelerinin Hamilton gösteriminin eldesi çalışmalarda genelde ikincil bir sonuç olarak yer almış ve bu gösterim, Euler-Lagrange gösteriminden Legendere dönüşümü yardımıyla elde edilmiştir. Bu da bazı sorunlara yol açmaktadır. Örneğin [57] numaralı referansta Hamilton gösterimi için kapasite ve endüktans tanım bağıntılarının birebir ve üzerine olması kısıtlaması vardır. Bu sıkıntı Bernstein ve Lieberman'ın çalışması ile kısıtlı bir şekilde giderilmiştir. Bu çalışmada Euler-Lagrange denklemleri elde edilmeksizin devre topolojisinden hareketle kanonik Hamilton denklemleri elde edilmiştir [76]. Ancak verilen yöntem sadece LC devreleri için geçerli olduğu için uygulanabilirliği düşüktür.



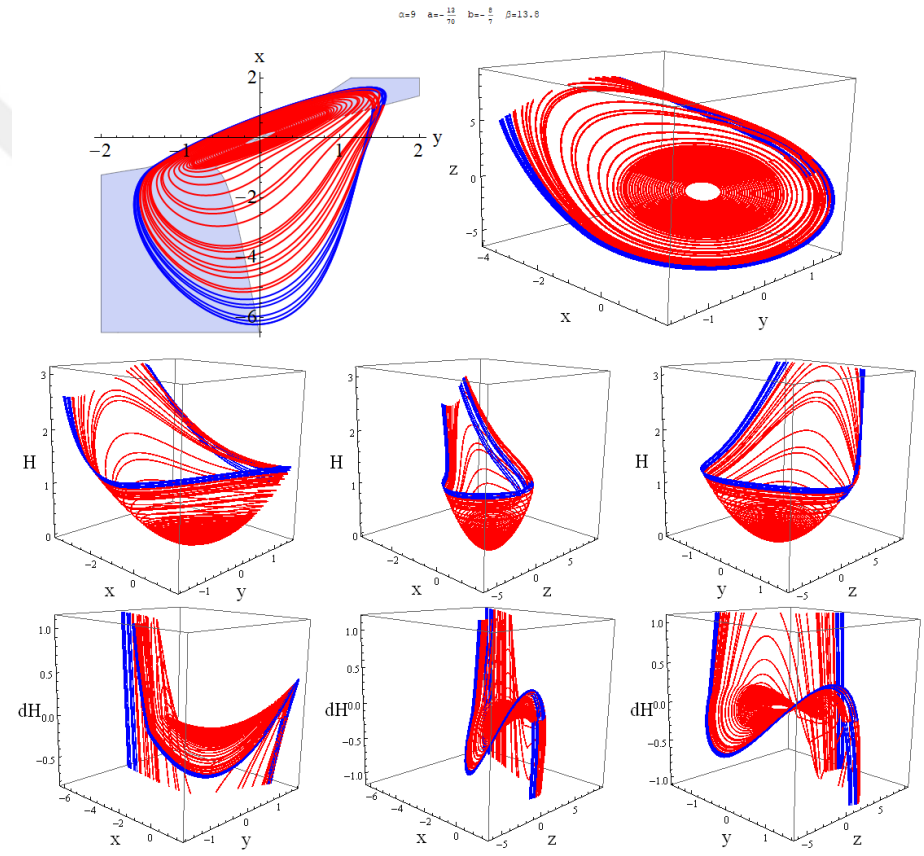
EK E. Şekil 5.9 $a=-13/70$, $b=-8/7$ Parametreleri İçin H ve dH'nin Değişimi

Bu bölümde Bölüm 5.2.2.4'teki Şekil 5.9 verilmiştir.

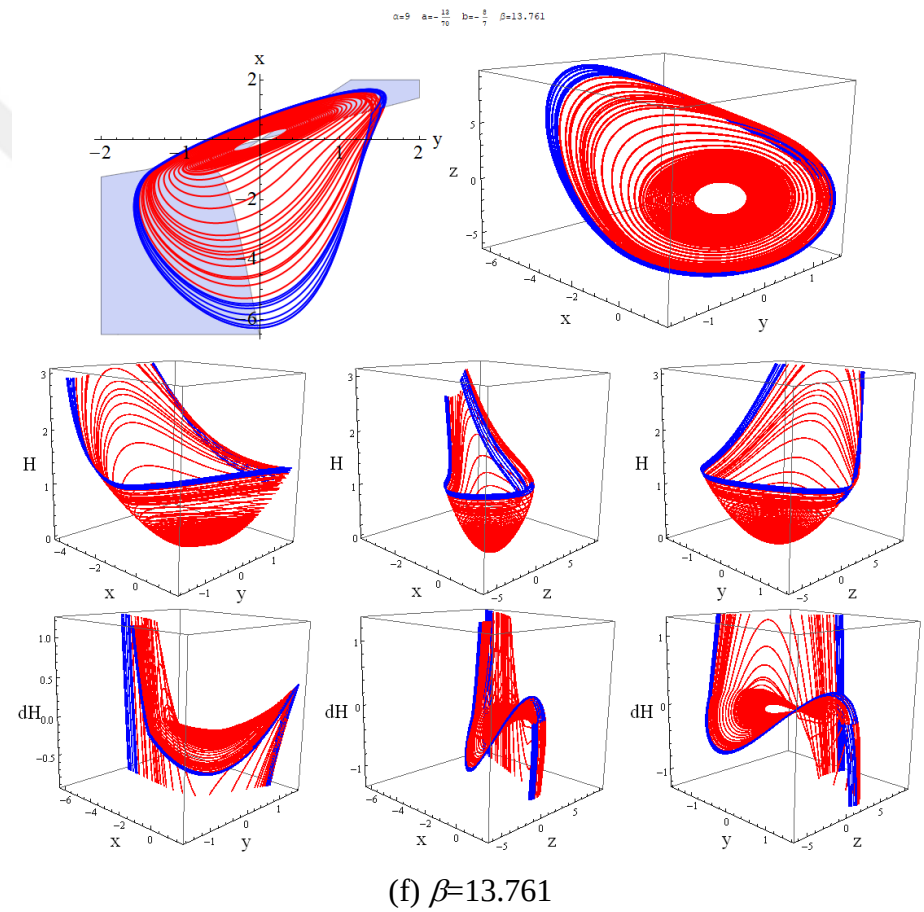
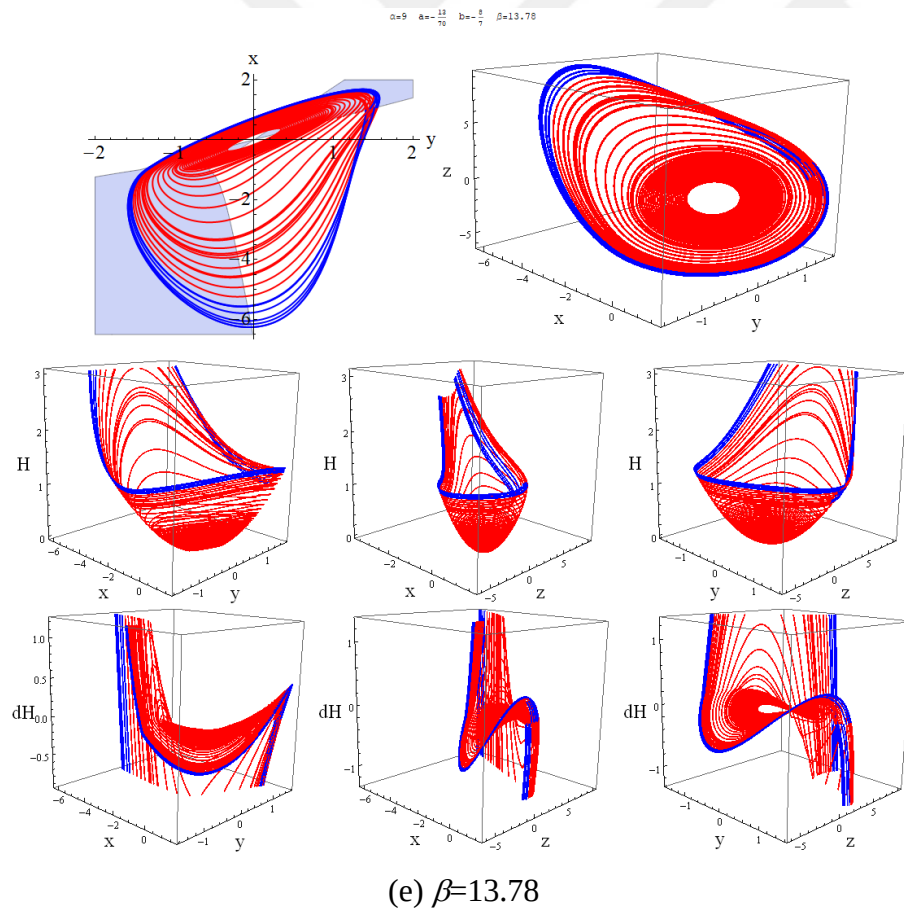


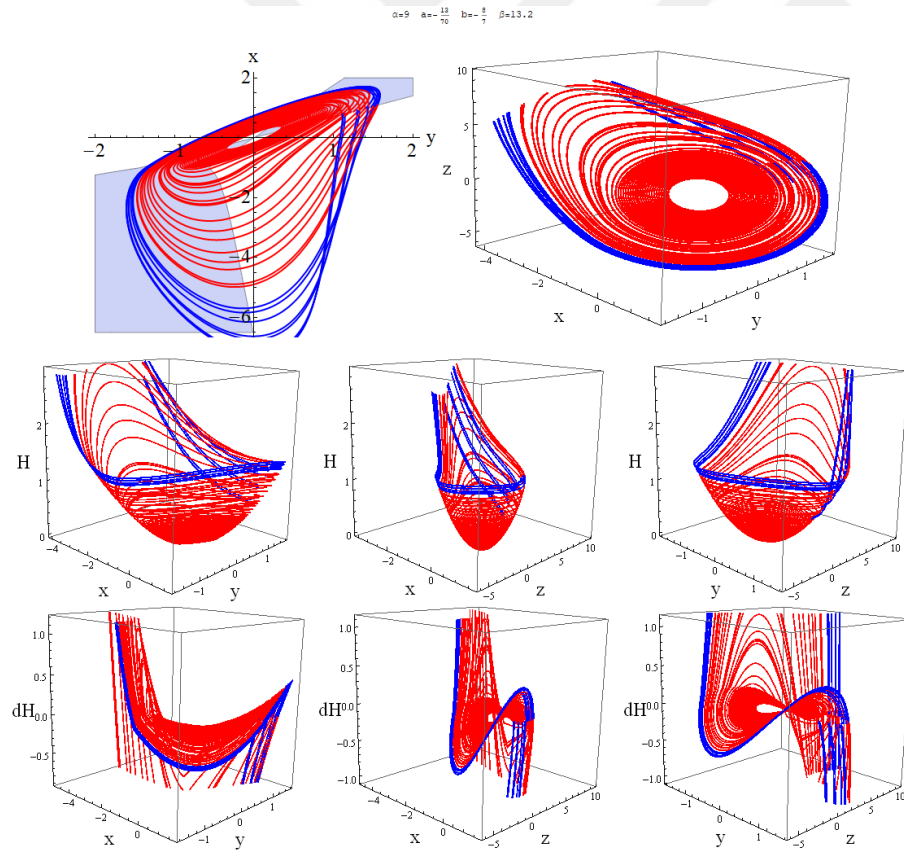


(c) $\beta=14.4$

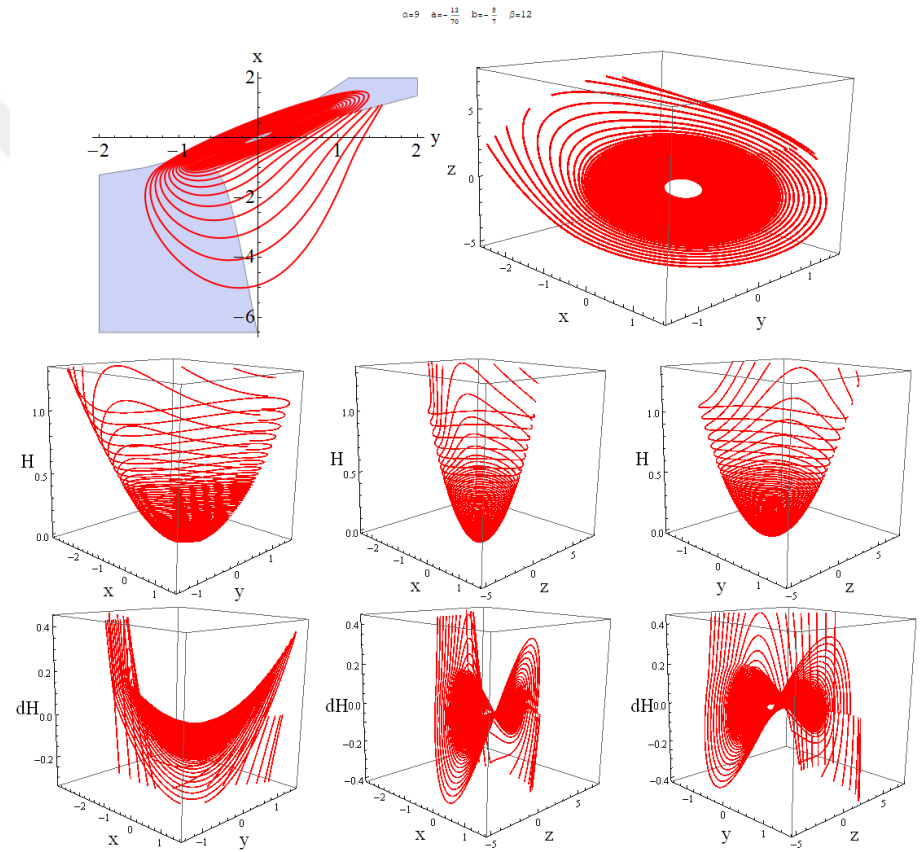


(d) $\beta=13.8$





(g) $\beta=13.2$



(h) $\beta=12$

Şekil 5.9 Peryot katlaması ile kaos oluşumu esnasında H ve dH 'nin değişimi

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Mustafa KÖSEM

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 1995, İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2003. İ.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Programı, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN BİLDİRİ:

- **Kösem, M. Şengör, N. S.** 2010. An Energy Based Investigation of Rössler Type Chaos on Chua's Circuit, NOLTA10, International Symposium on. Nonlinear Theory and its Applications. IEICE. NOLTA, 5-8 Eylül, MCK (International Cultural Center), Krakow, Polonya.