WEYL YARI-SİMETRİK TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Alaa SALEH

Kütahya - 2025

T.C.
KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

WEYL YARI-SİMETRİK TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

Danışman:
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER

Hazırlayan:
Alaa SALEH

Kütahya – 2025

Kabul ve Onay

KÜTAHYA DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Matematik Ana Bilim dalında, 202085000017 öğrenci numaralı, Alaa SALEH'in hazırlamış olduğu "WEYL YARI-SİMETRİK TRANS SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI" başlıklı yüksek lisans tez çalışması ile ilgili tez savunma sınavı jüri tarafından yapılmış ve adayın tezinin OY BİRLİĞİ ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

08/01/2025

Tez Jürisi	İmza	
	Kabul	Ret
Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER		
Prof. Dr. Mine TURAN		
Prof. Dr. Sema KURTARAN		

Onay

Doç. Dr. Eray ACAR

Enstitü Müdürü

Bilimsel Etik Bildirimi

Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığım “*Weyl Yarı-Simetrik Trans-Sasakian Yarı Finsler Manifoldları*” adlı çalışmanın öneri aşamasından sonuçlandığı aşamaya kadar geçen süreçte bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle uyduğumu, tez içindeki tüm bilgileri bilimsel ahlak ve gelenek çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığımı, bu çalışmamda doğrudan veya dolaylı olarak yaptığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu beyan ederim.

08/01/2025

Alaa SALEH

Özgeçmiş

Ilk ve orta öğrenimini Suriye'de tamamladı. 2014 yılında Suudi Arabistan'da liseden mezun oldu. 2019 yılında Suudi Arabistan'da Prince Sattam Üniversitesi'nden Matematik Bölümünden mezun oldu. Şu anda Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nde Matematik Anabilim Dalı alanında yüksek lisans yapan yazarın bu çalışması Yüksek Lisans Tezi'dir.

ÖZET

WEYL YARI-SİMETRİK TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

SALEH, Alaa
Yüksek Lisans Tezi Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Pof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER
Ocak, 2025, 43 sayfa

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Çalışmamızın ilk bölümünde literatür taramasına yer verildi ve tezin literatürdeki yeri ifade edildi. İkinci bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde değme yapılar, hemen hemen değme Finsler yapılar, hemen hemen değme yarı metrik yapılar incelendi. Üçüncü bölümde ise özgün çalışmamız olan (α,β)-tipinden trans- Sasakian yarı Finsler manifoldları çalışıldı. Dördüncü bölümde Konformal flat ve Weyl yarı-simetrik trans Sasakian yarı Finsler manifoldları çalışıldı. Son bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrıldı.

Anahtar Kelimeler: Değme Manifold, Trans-Sasakian Manifold, Yarı Finsler Manifoldu, Yarı Finsler Metrik, Konformal flat Manifold, Weyl yarı-simetrik Manifold

ABSTRACT

WEYL SEMI-SYMMETRIC

TRANS-SASAKIAN INDEFINITE FINSLER MANIFOLDS

SALEH, Alaa
Master Thesis, Deparment of Matematik
Supervisor: Prof. Dr. Ayşe Funda SAĞLAMER
January, 2025, 43 pages

This thesis consists of four chapters. In the first part of our study, a literature review was included and the place of the thesis in the literature was stated. In the second part, contact structures on indefinite Finsler manifolds, almost contact Finsler structures, almost contact pseudo-metric structures were examined. In the third chapter, our original work, (α,β)-type trans- Sasakian indefinite Finsler manifolds are defined and studied. In the fourth section Conformal flat and Weyl semi-symmetric trans- Sasakian indefinite Finsler manifolds are studied.The last section is dedicated to discussion and conclusion.

Keywords: Contact Manifold, İndefinite Finsler Manifold, Pseudo Finsler Metric, Trans-Sasakian Manifold, Conformal flat Manifold, Weyl semi-symmetric Manifold

ÖNSÖZ

Tanıştığımız günden beri bana desteklerini ve güler yüzünü esirgemeyen, yüksek lisans eğitimimin her aşamasında beni destekleyen, engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, her daim yanımda olan danışman hocam Sayın Ayşe Funda SAĞLAMER hocama sonsuz teşekkürlerimi bildiriyorum. Her zaman benim yanımda ve bana destek olan eşim Kasem ALHARIRI'e sonsuz tesekkürlerimi sunarım. Mezuniyetimi, Allah'ın huşu ve hürmetle taçlandırdığı kişiye, bana karşılıksız vermeyi öğreten kişiye, adını gururla taşıdığım kişiye, rahmetli babam Abdullatif SALEH' in ruhuna ithaf ediyorum. Mezuniyetimi, hayattaki meleğime, sevginin anlamına, şefkatin anlamına, duaları başarımın sırrı olan kişiye, annem Etehad AHMED'e ithaf ediyorum. Benim için dua eden ve beni cesaretlendiren herkese teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklama**
$(M')^v$	Dikey vektör demeti
(T^*M')	TM' nün dual vektör uzayı
$(TM')^H$	Yatay distrübüsyon
$(TM')^V$	Dikey distrübüsyon
$(M')^h$	Yatay vektör demeti
M'	M nin bir açık altmanifoldu
$[\,,\,]$	Lie operatörü
∇	Konneksiyon
C^∞	Düzgün fonksiyonların kümesi
F^*	Yarı Finsler fonksiyonu
F^{2n+1}	Yarı Finsler manifoldu
F	Finsler fonksiyonu
G	Sasaki metrik
g^{F^*}	Yarı Finsler metrik
g^F	Finsler metrik
K^*	Kesit eğriliği
M	$2n+1$ boyutlu düzgün manifold
$\mathbf{R}$	Riemann eğrilik tensörü
$\mathbf{S}$	Ricci eğrilik tensörü
T	Torsiyon tensörü
TM'	M nin double tanjant demeti
TM	M nin tanjant demeti
π	Kanonik projeksiyon dönüşümü
π_*	Türev dönüşümü
Ω	İkinci temel form

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

1.1. GİRİŞ

Yarı metrik manifoldlar teorisi, modern diferensiyel geometri için önemli bir araştırma konusudur, özellikle matematiksel fizikte uygulama alanı bulmaktadır. Oubina, (α,β) tipinden trans-Sasakian manifoldun sınıflandırılması fikrini ortaya atmıştır. Yarı Sasakian manifoldu , α=1 ve β=0 için yarı trans-Sasakian manifoldunun dikkate değer bir kategorisidir. Ayrıca, yarı kosimplektik manifold , α=0 ve β=0 için yarı trans-Sasakian manifoldun diğer kategorisidir. Yarı Kenmotsu manifoldu , α=0 ve β=1 ile verilebilir.

Yarı metrikli manifoldlar birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bejancu ve Duggal (Bejancu ve Duggal, 1993) (ϵ)-Sasakian manifold kavramını tanıtmış ve Xufeng ve Xiaoli (Xufeng ve Xiaoli, 1998) bu manifoldların yarı Kahlerian manifoldların reel hiperyüzeyleri olduğunu ortaya koymuştur. Kumar ve diğerleri (Kumar, Rani ve Nagaich, 2007) bu manifoldların eğrilik koşullarını incelemiştir.

Bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde yarı-simetrik lineer koneksiyon kavramı Friedmann ve Schouten (Friedmann ve Schouten, 1924) tarafından tanıtılmış ve bir Riemann manifoldu üzerinde torsiyonlı (burulmalı) metrik koneksiyon Hayden (Hayden, 1932) tarafından çalışılmıştır. Riemann manifoldu üzerinde yarı simetrik metrik koneksiyon Yano (Yano, 1970) tarafından verilmiş ve daha sonra Bagewadi (Bagewadi, 1982), Amur ve Pujar (Amur Kumar ve Pujar, 1978), Sharafuddin ve Hussain (Hussain ve Sharafuddin, 1976), De ve diğerleri (De ve Absos Ali Shaikh, 1997) ve Bagewadi ve diğerleri (Bagewadi ve Gatti, 2003) tarafından çalışılmıştır. Daha önce K-değme, Kenmotsu ve trans-Sasakian manifoldlar üzerinde projektif, pseudo projektif, konformal, dairesel, quasi konformal eğrilik tensörleri üzerine bazı sonuçlar sunmuşlardır. Hem Sasakian hem de Kenmotsu manifoldlarının doğal bir genellemesi olarak, trans-Sasakian manifold kavramı Oubina tarafından tanıtılmıştır (Oubina, 1985). Trans-Sasakian manifold yerel konformal Kahler manifoldu ile yakından ilişkilidir. Ayrıca, trans-Sasakian manifoldların yerel yapıları ile ilgili çalışma Marrero tarafından yapılmıştır (Marrero,1992). (α,0), (0,β) ve (0,0) tipindeki trans-Sasakian manifoldlar α, β skaler fonksiyonlar olmak üzere, sırasıyla, α- Sasakian, β-Kenmotsu ve kosimplektik manifoldlar olarak adlandırılır. Dolayısıyla trans-Sasakian yapılar genelleştirilmiş quasi-Sasakian yapıların geniş bir sınıfını verir.

Klasik makaleler Riemann metrikli veya yarı Riemann metrikli değme yapıları ile ilgilenir, ancak bu tezimizde yarı Finsler metrikli değme yapılar ile çalıştık. Bilindiği gibi, Finsler eğriler ve yüzeyler hakkındaki tezini yayınladıktan sonra, Finsler geometrisine adanmış birçok makale yayınlandı, referanslara bakınız (Antonelli 2003, Miron 1982, Matsumoto 1986, Sinha ve Yadav 1988, Szilazi ve Vincze 2000, Asanov 1985), ancak İndefinite Finsler manifold teorisi birkaç araştırmacı tarafından incelenmiştir (Bejancu ve Farran 2013, Beem 1970, Bejancu ve Farran 1999). Bu nedenle, amacımız conformal flat, quasi constant eğrilikli ve Weyl yarı simetrik olan trans-Sasakian yarı Finsler manifoldlarını çalışmaktır.

İKİNCİ BÖLÜM

YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE DEĞME YAPILAR

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde yarı Finsler metriği kullanılarak hemen hemen değme, değme ve **ε**- Sasakian yapılar kuruldu. İlk olarak hemen hemen değme Finsler manifoldlarını ele alalım.

2.1. HEMEN HEMEN DEĞME FİNSLER YAPILAR

M' üzerinde ϕ tensör alanı, η 1-form ve ξ vektör alanı olmak üzere

$$\phi = \phi^{\mathcal{H}} + \phi^{\mathcal{V}} = \phi^i_j(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\phi}^i_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^j \tag{2.1}$$

$$\eta = \eta^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{V}} = \eta_i(x,y)dx^i + \tilde{\eta}_i(x,y)\delta y^i$$

$$\xi = \xi^{\mathcal{H}} + \xi^{\mathcal{V}} = \xi^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{\xi}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{2.2}$$

olsun.

2.1.1. Tanım

M' üzerinde, ϕ, η ve ξ (3.1) ve (3.2) deki gibi tanımlansın. Böylece

$$\eta^{\mathcal{H}} = \eta_i(x,y)dx^i, \qquad \eta^{\mathcal{V}} = \tilde{\eta}_i(x,y)\delta y^i$$

$$\xi^{\mathcal{H}} = \xi^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i}, \qquad \xi^{\mathcal{V}} = \tilde{\xi}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

olmak üzere

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2 = -I^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}} \otimes \xi^{\mathcal{H}}, (\phi^{\mathcal{V}})^2 = -I^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}} \otimes \xi^{\mathcal{V}} \tag{2.3}$$

$$\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 1 \tag{2.4}$$

eşitlikleri varsa, bu durumda ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$) yapıları, sırasıyla, $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde hemen hemen değme Finsler yapılar olarak adlandırılırlar. Burada M' = $(M')^h \oplus (M')^v$ bir Finsler vektör demetidir (Kılıç, N., 2019).

2.1.2. Teorem

$(M')^h$ ve $(M')^v$ Finsler vektör demetleri üzerindeki hemen hemen değme Finsler yapılar ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$) olsunlar. Böylece

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0, \ \eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0 \tag{2.5}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (2.3) yardımıyla

$$(\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = -\xi^{\mathcal{H}}+\eta^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$$

yazılır. Ayrıca $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ ya da $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$, sıfır özdeğerine karşılık gelen $\phi^{\mathcal{H}}$ın nontrivial özvektörüdür. (2.3) kullanılarak

$$0 = (\phi^{\mathcal{H}})^2(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})) = -\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) + \eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}}))\,\xi^{\mathcal{H}}$$

veya

$$\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}}))\,\xi^{\mathcal{H}}$$

elde edilir. Eğer $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})$ nontrivial özvektör ise $\eta^{\mathcal{H}}(\phi(\xi^{\mathcal{H}})) \neq 0$ olur. Böylece

$$0=(\phi^{\mathcal{H}})^2(\xi^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))\,\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})=(\eta^{\mathcal{H}}(\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}))^2\,\xi^{\mathcal{H}} \neq 0$$

elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. Yani $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}}) = 0$ olur. Benzer şekilde

$\phi^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{V}}) = 0$ ifadesi de elde edilir.

Diğer taraftan $\phi^{\mathcal{H}}(\xi^{\mathcal{H}})= 0$ olduğundan $\forall X^{\mathcal{H}} \in (TM')^{\mathcal{H}},\ X^{\mathcal{V}} \in (TM')^{\mathcal{V}}$ için

$$\eta^{\mathcal{H}}\left(\phi(X^{\mathcal{H}})\right)\xi^{\mathcal{H}} = \phi^3(X^{\mathcal{H}}) + \phi(X^{\mathcal{H}}) = \eta^{\mathcal{H}}\left(\phi^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\right)\xi^{\mathcal{H}} = 0$$

ve

$$\eta^{\mathcal{V}}\left(\phi^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\right)\xi^{\mathcal{V}} = 0$$

elde edilir. Böylece $\eta^{\mathcal{H}} \circ \phi^{\mathcal{H}} = 0$ ve $\eta^{\mathcal{V}} \circ \phi^{\mathcal{V}} = 0$ olur (Kılıç, N., 2019).

Teorem 2.1.2. $(M')^h$ ve $(M')^v$ üzerinde sırasıyla $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler yapılar ise $\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} = \mathrm{rank}\phi^{\mathcal{V}} = 2n$ dir.

İspat.

$$\phi^{\mathcal{H}}: \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}} \to \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{H}}\ ,\forall y_x \in M',$$

$$\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} + \ker\phi^{\mathcal{H}} = 2n + 1 = dimM'_x\ (\forall x \in M) \tag{2.6}$$

$\forall X^{\mathcal{H}} \in \ker\phi^{\mathcal{H}}$ için $\phi^{\mathcal{H}}X^{\mathcal{H}} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$0 = \phi^2X^{\mathcal{H}} = -X^{\mathcal{H}} + \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$ ya da $X^{\mathcal{H}} = \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\,\xi^{\mathcal{H}}$ elde edilir. Yani $X^{\mathcal{H}} \in Sp\{\xi^{\mathcal{H}}\} = ker\phi^{\mathcal{H}}$ olur. Buradan $ker\phi^{\mathcal{H}} = \dim(ker\phi^{\mathcal{H}}) = 1$ olur ve (3.6) dan $\mathrm{rank}\phi^{\mathcal{H}} = 2n$ bulunur.

Benzer şekilde

$\phi^{\mathcal{V}}: \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}} \to \left(T_{y_x}M'\right)^{\mathcal{V}}$, $\forall y_x \in M'$,

rank$\phi^{\mathcal{V}}$ + ker$\phi^{\mathcal{V}} = 2n + 1 = dimM'_x$ $(\forall x \in M)$. (2.7)

$\forall X^{\mathcal{V}} \in$ ker$\phi^{\mathcal{V}}$ için $\phi^{\mathcal{V}} X^{\mathcal{V}} = 0$ olduğundan $0 = \phi^2 X^{\mathcal{V}} = -X^{\mathcal{V}} + \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\,\xi^{\mathcal{V}}$ ya da $X^{\mathcal{V}} = \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\,\xi^{\mathcal{V}}$ elde edilir. Böylece $X^{\mathcal{V}} \in Sp\{\xi^{\mathcal{V}}\} = ker\phi^{\mathcal{V}}$ olur. Buradan $ker\phi^{\mathcal{V}} =$ dim$(ker\phi^{\mathcal{V}}) = 1$ olur ve (3.7) den rank$\phi^{\mathcal{V}} = 2n$ bulunur. (Kılıç, N. 2019)

2.1.3. Uyarı

$(M')^h$ ve $(M')^v$ tek boyutlu olmak üzere $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt demetleri üzerinde $(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme yapıları ile birlikte $((M')^h, \phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}})$ ve $((M')^v, \phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}})$ hemen hemen değme Finsler manifoldları olarak adlandırılırlar (Kılıç, N., 2019).

2.2. YARI FİNSLER MANİFOLDLARI ÜZERİNDE HEMEN HEMEN DEĞME YARI METRİK YAPILAR

F^{2n+1} = (M, M', F^*) yarı Finsler manifoldu olsun. (V^i) ve (W^j) lokal bileşenler ile birlikte V ve W vektör alanları için

$g^{F^*}_{ij}$, $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ $i,j \in \{1,2 \dots ,2n+1\}$ eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere,

$g^{F^*}: \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{V}} \to \mathfrak{H}(M')$

$$g^{F^*}(V,W)(x,y) = g^{F^*}_{ij}(x,y)V^i(x,y)\,W^j(x,y) \tag{2.8}$$

tanımlayalım. Böylece

$$g^{F^*}_{ij}(x,y) = g^{F^*}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x,y) \tag{2.9}$$

yazılır. Açık olarak g^{F^*} simetrik Finsler tensör alanı olur. g^{F^*} , yarı Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*}, $(TM')^{\mathcal{V}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı-Riemann metrik olarak düşünülebilir.

Benzer şekilde $g^{F^*}_{ij}$, $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ $i,j \in \{1,2 \dots ,2n+1\}$ deki gibi olmak üzere,

$g^{F^*}: \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \times \Gamma(TM')^{\mathcal{H}} \to \mathfrak{H}(M')$

$$g^{F^*}(V,W)(x,y) = g_{ij}^{F^*}(x,y)V^i(x,y)\, W^j(x,y) \tag{2.10}$$

$$g_{ij}^{F^*}(x,y) = \; g^{F^*}(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j})(x,y) \tag{2.11}$$

tanımlanabilir. g^{F^*}, yarı Finsler metrik olarak adlandırılır. Ayrıca g^{F^*}, $(TM')^{\mathcal{H}}$ Finsler vektör demeti üzerinde yarı Riemann metrik olarak düşünülebilir (Bejancu ve Farran, 2000).

Bir Finsler vektörü X ∈ $(TM')^{\mathcal{V}}$ (X ∈ $(TM')^{\mathcal{H}}$) için

g^{F^*} =$g_{y_x}^{F^*}(y_x), (y_x) = (x,y) \in M'$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &g_{y_x}^{F^*}(X,X) > 0 \text{ veya } X = 0 \Rightarrow space - like,\\ &g_{y_x}^{F^*}(X,X) < 0 \Rightarrow time - like,\\ &g_{y_x}^{F^*}(X,X) = 0 \;\; X \neq 0 \Rightarrow light - like(null) \end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Diğer taraftan bir Finsler normu (uzaklık)

$$\|X\| = \left|\, g_{y_x}^{F^*}(X,X)\right|^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

eşitliği ile verilir (Bejancu ve Farran, 2000).

$g_{y_x}^{F^*}(X,X) = 1$ ise X birim $space - like$ Finsler vektör $g_{y_x}^{F^*}(X,X) = -1$ ise X birim $time - like$ Finsler vektör olarak adlandırılır. X birim Finsler vektör ise ε= $g_{y_x}^{F^*}(X,X)$ ifadesinde yer alan ε, X in işareti olarak adlandırılır.

$\forall X,Y \in \; \Gamma(TM')$ için

$G: \Gamma(TM') \times \Gamma(TM') \to \mathfrak{H}(\,M')$

$$G(X,Y) = G^{\mathcal{H}}(X,Y) + G^{\mathcal{V}}(X,Y) \tag{2.14}$$

tanımlayalım. Açık olarak G, M' üzerinde (0,2) tipinde bir simetrik tensör alanı olur. Ayrıca G non-dejenere ve sabit indekslidir. q yarı Finsler metriğinin indeksi olmak üzere M' üzerinde G yarı Riemann metriğinin indeksi $2q$ olur.

$$G = g_{y_x}^{F^*}dx^i \otimes dx^j + g_{y_x}^{F^*}\delta y^i \otimes \delta y^j = G^{\mathcal{H}} + G^{\mathcal{V}} \tag{2.15}$$

M' üzerinde G Sasaki Finsler metriği olarak adlandırılır.

2.2.1. Tanım

$(M')^{\boldsymbol{h}}$ yatay vektör demeti ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ dikey vektör demeti üzerinde sırasıyla ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$) hemen hemen değme yapılar olsunlar. $G^{\mathcal{H}}$ ve $G^{\mathcal{V}}$ metrik yapıları

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}})\eta^{\mathcal{H}}(Y^{\mathcal{H}}),$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) - \varepsilon \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}})\eta^{\mathcal{V}}(Y^{\mathcal{V}}) \tag{2.16}$$

$$G(\phi X, \phi Y) = G^{\mathcal{H}}(\phi X, \phi Y) + G^{\mathcal{V}}(\phi X, \phi Y)$$

eşitliklerini sağlarsa bu durumda ($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$, $G^{\mathcal{H}}$) yapısı $(M')^{\boldsymbol{h}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı olarak ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$, $G^{\mathcal{V}}$) yapısıda $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı olarak adlandırılır. Burada $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\eta^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}) = \varepsilon G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}), \ \eta^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}) = \varepsilon G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}) \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.2.2. Sonuç

($\phi^{\mathcal{H}}$, $\xi^{\mathcal{H}}$, $\eta^{\mathcal{H}}$, $G^{\mathcal{H}}$) ve ($\phi^{\mathcal{V}}$, $\xi^{\mathcal{V}}$, $\eta^{\mathcal{V}}$, $G^{\mathcal{V}}$), sırasıyla, $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapılar olsunlar.

(2.16) ve (2.17) ifadelerinden

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}),$$

$$G^{\mathcal{V}}(\phi X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \tag{2.18}$$

ve

$$G^{\mathcal{H}}(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = -G^{\mathcal{H}}(\phi^2 X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) \tag{2.19}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikler yardımıyla

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = G^{\mathcal{H}}(X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}})$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = G^{\mathcal{V}}(X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) \tag{2.20}$$

İkinci temel form tanımlanabilir (Sinha ve Yadav,1991).

2.2.3. Önerme

Yukarıda tanımlanan ikinci temel form için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\Omega(\phi X^{\mathcal{H}}, \phi Y^{\mathcal{H}}) = \Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}),$$

$$\Omega(\phi X^{\mathcal{V}}, \phi Y^{\mathcal{V}}) = \Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) \tag{2.21}$$

ve

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = -\Omega(Y^{\mathcal{H}}, X^{\mathcal{H}}),$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = -\Omega(Y^{\mathcal{V}}, X^{\mathcal{V}}) \tag{2.22}$$

(Sinha ve Yadav,1991).

2.2.4. Önerme

∇, M' üzerinde Finsler koneksiyonu ve $\Omega; \Omega(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ şartını sağlayan ikinci temel form olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)(Y^{\mathcal{H}}) - \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)(X^{\mathcal{H}}) + \eta(\mathrm{T}(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}})),$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)(Y^{\mathcal{V}}) - \left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)(X^{\mathcal{V}}) + \eta(\mathrm{T}(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}})) \tag{2.23}$$

Böylece M' üzerinde hemen hemen değme yarı Finsler metrik yapı hemen hemen ε-Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır. Ayrıca

$(\phi^{\mathcal{H}}, \xi^{\mathcal{H}}, \eta^{\mathcal{H}}, G^{\mathcal{H}})$ ve $(\phi^{\mathcal{V}}, \xi^{\mathcal{V}}, \eta^{\mathcal{V}}, G^{\mathcal{V}})$ yapıları, sırasıyla, $(M')^{\boldsymbol{h}}$ ve $(M')^{\boldsymbol{v}}$ üzerinde hemen hemen ε-Sasakian yapılar olarak adlandırılır.

2.2.5. Teorem

Ω ikinci temel form ve M' üzerinde torsiyonu sıfır olan ∇ hemen hemen ε-Sasakian Finsler koneksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\Omega(X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)Y^{\mathcal{H}} - \left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)X^{\mathcal{H}},$$

$$\Omega(X^{\mathcal{V}}, Y^{\mathcal{V}}) = \left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)Y^{\mathcal{V}} - \left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)X^{\mathcal{V}} \tag{2.24}$$

(Sinha ve Yadav,1991).

2.2.6. Tanım

M' üzerinde hemen hemen ε-Sasakian Finsler yapı, η 1-formu Killing vektör alanı olduğunda ε-Sasakian Finsler yapı olarak adlandırılır.

$$\left(\nabla_X^{\mathcal{H}}\eta\right)(Y^{\mathcal{H}})+\left(\nabla_Y^{\mathcal{H}}\eta\right)(X^{\mathcal{H}})=0,$$

$$\left(\nabla_X^{\mathcal{V}}\eta\right)(Y^{\mathcal{V}})+\left(\nabla_Y^{\mathcal{V}}\eta\right)(X^{\mathcal{V}})=0. \tag{2.25}$$

M' üzerindeki ∇ torsiyonsuz Finsler koneksiyonu Sasakian Finsler koneksiyonu olarak adlandırılır (Sinha ve Yadav,1991).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

Bu bölümde yarı Finsler manifoldları üzerinde trans-Sasakian yapıları tanımlayıp bazı özelliklerini ve sonuçlarını veriyoruz. Bu yapılar $(M')^h$ ve $(M')^v$ vektör alt demetleri üzerinde kurulmuştur. M $(2n+1)$ boyutlu C^∞ manifoldu, M' TM nin boştan farklı bir açık alt manifoldunu, F^* temel Finsler fonksiyonunu göstermek üzere bir yarı Finsler manifoldu $F^{2n+1}=(M,M',F^*)$ şeklinde gösterilir.

$((M')^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M')^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ hemen hemen değme yarı Finsler metrik manifoldlarının trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlamalarıdır:

$$(\nabla_X^H\phi^H)Y^H=\frac{\alpha}{2}\{G^H(X^H,Y^H)\xi^H-\varepsilon\eta^H(Y^H)X^H\}+\frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^H(\phi X^H,Y^H)-\eta^H(Y^H)\phi X^H\} \quad (3.1)$$

$$(\nabla_X^V\phi^V)Y^V=\frac{\alpha}{2}\{G^V(X^V,Y^V)\xi^V-\varepsilon\eta^V(Y^V)X^V\}+\frac{\beta}{2}\{\varepsilon G^V(\phi X^V,Y^V)-\eta^V(Y^V)\phi X^V\} \quad (3.2)$$

burada α ve β, $(M')^h$ ve $(M')^v$ alt vektör demetleri üzerindeki düzgün fonksiyonları gösterir. O zaman deriz ki böyle bir yapı (α,β) tipli trans-Sasakian yarı Finsler metrik yapıdır. (3.1) den aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$(\nabla_X^H\xi^H)=-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^H+\frac{\beta}{2}(X^H-\eta^H(X^H)\xi^H) \quad (3.3)$$

$$(\nabla_X^V\xi^V)=-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\phi X^V+\frac{\beta}{2}(X^V-\eta^V(X^V)\xi^V) \quad (3.4)$$

$$(\nabla_X^H\eta^H)(Y^H)=\frac{\alpha}{2}G^H(X^H,\phi Y^H)+\frac{\beta}{2}G^H(\phi X^H,\phi Y^H) \quad (3.5)$$

$$(\nabla_X^V\eta^V)(Y^V)=\frac{\alpha}{2}G^V(X^V,\phi Y^V)+\frac{\beta}{2}G^V(\phi X^V,\phi Y^V) \quad (3.6)$$

3.1. Önerme $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olsunlar. O zaman

$$\begin{aligned}R^H(X^H,Y^H)\xi^H=&\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(Y^H)X^H-\eta^H(X^H)Y^H\}+\\&\varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(Y^H)\phi X^H-\eta^H(X^H)\phi Y^H\}\\&+\frac{\varepsilon}{2}\{Y^H(\alpha)\phi X^H-X^H(\alpha)\phi Y^H\}\\&+\frac{1}{2}\{X^H(\beta)Y^H-Y^H(\beta)X^H+Y^H(\beta)\eta^H(X^H)\xi^H-X^H(\beta)\eta^H(Y^H)\xi^H\}\end{aligned} \quad (3.7)$$

$$R^V(X^V,Y^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^V(Y^V)X^V - \eta^V(X^V)Y^V\}$$
$$+\varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^V(Y^V)\phi X^V - \eta^V(X^V)\phi Y^V\} +$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\{Y^V(\alpha)\phi X^V - X^V(\alpha)\phi Y^V\}$$
$$+\frac{1}{2}\{X^V(\beta)Y^V - Y^V(\beta)X^V + Y^V(\beta)\eta^V(X^V)\xi^V -$$
$$X^V(\beta)\eta^V(Y^V)\xi^V\} \tag{3.8}$$

İspat. (3.3) den

$$R^H(X^H,Y^H)\xi^H = (\nabla_X^H\nabla_Y^H\xi^H) - (\nabla_Y^H\nabla_X^H\xi^H) - \left(\nabla_{[X,Y]}^H\xi^H\right)$$

$$(\nabla_X^H\nabla_Y^H\xi^H) = \nabla_X^H(-\varepsilon\tfrac{\alpha}{2}\ \phi Y^H + \tfrac{\beta}{2}(Y^H - \eta^H(Y^H)\xi^H)$$
$$= -\tfrac{\varepsilon}{2}\nabla_X^H(\ \alpha\phi Y^H) + \tfrac{1}{2}\nabla_X^H(\beta(Y^H - \eta^H(Y^H)\xi^H)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \ [-\ \ \varepsilon\{\nabla_X^H(\ \alpha)\phi Y^H +\ \alpha\nabla_X^H(\ \phi Y^H)\ \} + \ \ \nabla_X^H(\beta)(Y^H - \eta^H(Y^H)\xi^H)\ +$$
$$\beta\ \nabla_X^H\ (Y^H - \eta^H(Y^H)\xi^H)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ [-\ \varepsilon\ \Big\{X^H(\ \alpha)\phi Y^H + \tfrac{(\alpha^2)}{2}G^H(X^H,Y^H)\xi^H - \varepsilon\ \tfrac{(\alpha^2)}{2}\eta^H(Y^H)X^H +$$
$$\varepsilon\tfrac{\alpha\beta}{2}G^H(\phi X^H,Y^H)\xi^H\ - \tfrac{\alpha\beta}{2}\eta^H(Y^H)\phi X^H + \alpha\phi(\nabla_X^H\ Y^H)\ \Big\} + X^H(\beta)Y^H$$
$$-X^H(\beta)\eta^H(Y^H)\xi^H + \beta\nabla_X^H Y^H - \beta\nabla_X^H(\eta^H(Y^H)\xi^H) - \beta\eta^H(Y^H)$$
$$(-\varepsilon\tfrac{\alpha}{2}\ \phi X^H + \tfrac{\beta}{2}(X^H - \eta^H(X^H)\xi^H)$$

$$= -\tfrac{\varepsilon}{2}\ X^H(\ \alpha)\phi Y^H - \varepsilon\ \ \tfrac{(\alpha^2)}{4}G^H(X^H,Y^H)\xi^H\ + \tfrac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\ \eta^H(Y^H)X^H -$$
$$\tfrac{\alpha\beta}{4}G^H(\phi X^H,Y^H)\xi^H\ +\ \varepsilon\tfrac{\alpha\beta}{2}\eta^H(Y^H)\phi X^H\ - \varepsilon\ \tfrac{\alpha}{2}\ \phi(\nabla_X^H\ Y^H)\ +$$
$$\tfrac{1}{2}\ X^H(\beta)Y^H - \tfrac{1}{2}\ X^H(\beta)\eta^H(Y^H)\xi^H + \tfrac{\beta}{2}\ \nabla_X^H\ Y^H - \tfrac{\beta}{2}\nabla_X^H\big(\eta^H(Y^H)\big)\xi^H +$$
$$\tfrac{(\beta^2)}{4}\eta^H(Y^H)\eta^H(X^H)\xi^H \tag{3.9}$$

$$-(\nabla^H_Y\nabla^H_X\xi^H) = \frac{\varepsilon}{2}\, Y^H(\alpha)\phi X^H + \varepsilon\, \frac{(\alpha^2)}{4} G^H(X^H, Y^H)\xi^H - \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\, \eta^H(X^H)Y^H$$

$$+ \frac{\alpha\beta}{4} G^H(\phi Y^H, X^H)\xi^H - \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\eta^H(X^H)\phi Y^H + \varepsilon\, \frac{\alpha}{2}\, \phi(\nabla^H_Y X^H) -$$

$$\frac{1}{2}Y^H(\beta)X^H + \frac{1}{2}Y^H(\beta)\eta^H(X^H)\xi^H - \frac{\beta}{2}\, \nabla^H_{Y^H}X^H + \frac{\beta}{2}\nabla^H_Y\left(\eta^H(X^H)\right)\xi^H -$$

$$\frac{(\beta^2)}{4}\, \eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)\xi^H \tag{3.10}$$

$$-\left(\nabla^H_{[X,Y]}\xi^H\right) = \varepsilon\, \frac{\alpha}{2}\, \phi(\nabla^H_X Y^H) - \varepsilon\, \frac{\alpha}{2}\, \phi(\nabla^H_Y X^H) - \frac{\beta}{2}\, \nabla^H_X Y^H$$

$$+ \frac{\beta}{2}\, \nabla^H_{Y^H} X^H + \frac{\beta}{2}\, \nabla^H_X(\eta^H(Y^H))\xi^H - \frac{\beta}{2}\, \nabla^H_Y(\eta^H(X^H))\xi^H$$

$$-\frac{\beta}{2}(\nabla^H_Y\, \eta^H)X^H\xi^H - \frac{\beta}{2}(\nabla^H_X\, \eta^H)Y^H\xi^H \tag{3.11}$$

(3.10), (3.11) ve (3.12) eşitlikleri (3.9) denkleminde yerlerine yazılarak (3.7) denklemi elde edilir.

$$R^V(X^V, Y^V)\xi^V = \left(\nabla^V_X\nabla^V_Y\xi^V\right) - \left(\nabla^V_Y\nabla^V_X\xi^V\right) - \left(\nabla^V_{[X,Y]}\xi^V\right) \tag{3.12}$$

$$\left(\nabla^V_X\nabla^V_Y\xi^V\right) = \nabla^V_X(-\varepsilon\frac{\alpha}{2}\, \phi Y^V + \frac{\beta}{2}(Y^V - \eta^V(Y^V)\xi^V)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\nabla^V_X(\alpha\phi Y^V) + \frac{1}{2}\nabla^V_X(\beta(Y^V - \eta^V(Y^V)\xi^V)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\, X^V(\alpha)\phi Y^V - \varepsilon\, \frac{(\alpha^2)}{4} G^V(X^V, Y^V)\xi^V + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\, \eta^V(Y^V)X^V -$$

$$\frac{\alpha\beta}{4} G^V(\phi X^V, Y^V)\xi^V + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\eta^V(Y^V)\phi X^V - \varepsilon\, \frac{\alpha}{2}\, \phi(\nabla^V_X Y^V) +$$

$$\frac{1}{2}\, X^V(\beta)Y^V - \frac{1}{2}\, X^V(\beta)\eta^V(Y^V)\xi^V + \frac{\beta}{2}\, \nabla^V_X Y^V -$$

$$\frac{\beta}{2}\nabla^V_X\left(\eta^V(Y^V)\right)\xi^V + \frac{(\beta^2)}{4}\, \eta^V(Y^V)\eta^V(X^V)\xi^V$$

$$\tag{3.13}$$

$$-\left(\nabla^V_Y\nabla^V_X\xi^V\right) = \frac{\varepsilon}{2}\, Y^V(\alpha)\phi X^V + \varepsilon\, \frac{(\alpha^2)}{4} G^V(X^V, Y^V)\xi^V - \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\, \eta^V(X^V)Y^V +$$

$$\frac{\alpha\beta}{4} G^V(\phi Y^V, X^V)\xi^V - \frac{\alpha\beta}{2}\eta^V(X^V)\phi Y^V + \varepsilon\, \frac{\alpha}{2}\, \phi(\nabla^V_Y X^V) -$$

$$\frac{1}{2}Y^V(\beta)X^V + \frac{1}{2}\, Y^V(\beta)\eta^V(X^V)\xi^V - \frac{\beta}{2}\, \nabla^V_{Y^V} X^V +$$

$$\frac{\beta}{2}\, \nabla^V_Y\left(\eta^V(X^V)\right)\xi^V - \frac{(\beta^2)}{4}\, \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V)\xi^V$$

$$\tag{3.14}$$

$$- \left(\nabla^{V}_{[X,Y]}\xi^{V}\right) = \varepsilon\ \frac{\alpha}{2}\ \phi(\nabla^{V}_{X}\, Y^{V}) - \varepsilon\ \frac{\alpha}{2}\ \phi(\nabla^{V}_{Y}\ X^{V}) - \frac{\beta}{2}\ \nabla^{V}_{X}\, Y^{V} + \frac{\beta}{2}\ \nabla^{V}_{Y^{V}}\, X^{V} + \frac{\beta}{2}\ \nabla^{V}_{X}(\ \eta^{V}(Y^{V}))\xi^{V} - \frac{\beta}{2}\ \nabla^{V}_{Y}(\ \eta^{V}(X^{V}))\xi^{V} - \frac{\beta}{2}(\ \nabla^{V}_{Y}\ \eta^{V})X^{V}\xi^{V} - \frac{\beta}{2}(\ \nabla^{V}_{X}\ \eta^{V})Y^{V}\xi^{V} \tag{3.15}$$

Benzer şekilde (3.13), (3.14) ve (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden (3.8) denklemi bulunur.

Teorem 3.1. $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans−Sasakian yarı Finsler manifoldlarında aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$R^H(\xi^H, Y^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}(\phi^2 Y^H) \tag{3.16}$$

$$\alpha\beta + \xi^H(\alpha) = 0 \tag{3.17}$$

$$R^V(\xi^V, Y^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}(\phi^2 Y^V) \tag{3.18}$$

$$\alpha\beta + \xi^V(\alpha) = 0 \tag{3.19}$$

İspat. Denlem (3.7) den

$$G^H(R^H(X^H, Y^H)\xi^H, W^H) = G^H(R^H(\xi^H, W^H)X^H, Y^H)$$

$$= G^H(\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\varepsilon\, G^H(X^H, W^H)\xi^H - \eta^H(X^H)W^H\} + \frac{\alpha\beta}{2}\{G^H(\phi X^H, W^H)\xi^H + \varepsilon\, \eta^H(X^H)\phi W^H\} + \frac{\varepsilon}{2}\{G^H(\phi X^H, W^H)\nabla(\alpha) + X^H(\alpha)\phi W^H\} + \frac{1}{2}\{X^H(\beta)W^H - G^H(X^H, W^H)\nabla(\beta) + \varepsilon\, \eta^H(X^H)\eta^H(W^H)\nabla(\beta) - X^H(\beta)\eta^H(W^H)\xi^H, Y^H\ )\}, \tag{3.20}$$

ve

$$R^H(\xi^H, W^H)X^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\varepsilon\, G^H(X^H, W^H)\xi^H\ - \eta^H(X^H)W^H\} + \frac{\alpha\beta}{2}\{G^H(\phi X^H, W^H)\xi^H + \varepsilon\, \eta^H(X^H)\phi W^H\}\ \frac{\varepsilon}{2}\{G^H(\phi X^H, W^H)\ \nabla(\alpha) + X^H(\alpha)\phi W^H\} + \frac{1}{2}\{X^H(\beta)W^H - G^H(X^H, W^H)\nabla(\beta) + \varepsilon\, \eta^H(X^H)\eta^H(W^H)\nabla(\beta) - X^H(\beta)\eta^H(W^H)\xi^H\ \} \tag{3.21}$$

(3.22) denkleminde $W^H = X^H$ ve $X^H = Y^H$ alırsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$R^H(\xi^H,X^H)Y^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\varepsilon G^H(X^H,Y^H)\xi^H - \eta^H(Y^H)X^H\} +$$
$$\varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(Y^H)\phi X^H - \varepsilon G^H(\phi X^H,Y^H)\xi^H\} +$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\{G^H(\phi Y^H,X^H)\nabla(\alpha) + Y^H(\alpha)\phi X^H\} + \frac{1}{2}\{Y^H(\beta)X^H -$$
$$(\beta)\eta^H(X^H)\xi^H - G^H(X^H,Y^H)\nabla(\beta) + \varepsilon\,\eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)\nabla(\beta)\} \quad (3.22)$$

denkleminde $Y^H = \xi^H$ alırsak da

$$R^H(\xi^H,X^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}\phi^2(X^H) + \frac{\varepsilon}{2}\{\alpha\beta + \xi^H(\alpha)\}\,\phi X^H \quad (3.23)$$

olur. Diğer yönden $X^H = \xi^H$ alarak (3.7) denkleminden

$$R^H(\xi^H,Y^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(Y^H)\xi^H - Y^H\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{-\phi Y^H\} + \frac{\varepsilon}{2}\{-\xi^H(\alpha)\phi Y^H\}$$
$$+\frac{1}{2}\{\xi^H(\beta)Y^H - \xi^H(\beta)\eta^H(Y^H)\xi^H\}$$

ya da

$$R^H(\xi^H,Y^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}(\phi^2Y^H) + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{-\phi Y^H\} - \frac{\varepsilon}{2}\{\xi^H(\alpha)\phi Y^H\}$$
$$-\frac{1}{2}\{\xi^H(\beta)(\phi^2Y^H)\}$$

buluruz. $Y^H = X^H$ aldığımızda

$$R^H(\xi^H,X^H)\xi^H = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}\phi^2(X^H) - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha\beta + \xi^H(\alpha))\,\phi X^H \quad (3.24)$$

(3.24) ve (3.25) denklemlerinden (3.17) ve (3.18) elde edilir.

Benzer şekilde

$$G^V(R^V(X^V,Y^V)\xi^V,W^V) = G^V(R^V(\xi^V,W^V)X^V,Y^V)$$

denkleminden

$$R^V(\xi^V,X^V)Y^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\varepsilon G^V(X^V,Y^V)\xi^V - \eta^V(Y^V)X^V\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^V(Y^V)\phi X^V -$$
$$\varepsilon G^V(\phi X^V,Y^V)\xi^V\} + \frac{\varepsilon}{2}\{G^V(\phi Y^V,X^V)\nabla(\alpha) +$$
$$Y^V(\alpha)\phi X^V\} + \frac{1}{2}\{Y^V(\beta)X^V - Y^V(\beta)\eta^V(X^V)\xi^V -$$
$$G^V(X^V,Y^V)\nabla(\beta) + \varepsilon\eta^V(X^V)\eta^V(Y^V)\nabla(\beta)\} \quad (3.25)$$

eşitliği bulunur. (3.26) denkleminde $Y^V = \xi^V$ alırsak

$$R^V(\xi^V, X^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^V(\beta))}{4}\phi^2(X^V) + \frac{\varepsilon}{2}\{\alpha\beta + \xi^V(\alpha)\}\,\phi X^V \quad (3.26)$$

olur. $X^V = \xi^V$ alarak denklem (3.8) den aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$R^V(\xi^V, X^V)\xi^V = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^V(\beta))}{4}\phi^2(X^V) - \frac{\varepsilon}{2}\{\alpha\beta + \xi^V(\alpha)\}\,\phi X^V \quad (3.27)$$

Önerme 3.2. (2n+1)- boyutlu trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları, $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\begin{aligned}\eta^H(R^H(X^H,Y^H)Z^H) = {} & \varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{G^H(Y^H,Z^H)\eta^H(X^H) - G^H(X^H,Z^H)\eta^H(Y^H)\} \\ & + \frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(X^H)G(\phi Y^H,Z^H) - \eta^H(Y^H)G^H(\phi X^H,Z^H)\} \\ & + \frac{1}{2}\{X^H(\alpha)G^H(\phi Y^H,Z^H) - Y^H(\alpha)G^H(\phi X^H,Z^H)\} \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\{Y^H(\beta)G^H(X^H,Z^H) - X^H(\beta)G^H(Y^H,Z^H) - \\ & \eta^H(X^H)Y^H(\beta)G^H(\xi^H,Z^H) + \\ & X^H(\beta)\eta^H(Y^H)G^H(\xi^H,Z^H)\}\end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}\eta^V(R^V(X^V,Y^V)Z^V) = {} & \varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{G^V(Y^V,Z^V)\eta^V(X^V) - G^V(X^V,Z^V)\eta^V(Y^V)\} \\ & + \frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^V(X^V)G(\phi Y^V,Z^V) - \eta^V(Y^V)G^V(\phi X^V,Z^V)\}\end{aligned}$$

(3.29)

İspat. $\eta^H(R^H(X^H,Y^H)Z^H) = \varepsilon\, G^H(R^H(X^H,Y^H)Z^H, \xi^H)$

$= -\,\varepsilon\, G^H(R^H(X^H,Y^H)\xi^H, Z^H)$

$= \varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{G^H(Y^H,Z^H)\eta^H(X^H) -$
$G^H(X^H,Z^H)\eta^H(Y^H)\}$
$+\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(X^H)G(\phi Y^H,Z^H) -$
$\eta^H(Y^H)G^H(\phi X^H,Z^H)\} + \frac{1}{2}\{X^H(\alpha)G^H(\phi Y^H,Z^H) -$
$Y^H(\alpha)G^H(\phi X^H,Z^H)\} + \frac{\varepsilon}{2}\{Y^H(\beta)G^H(X^H,Z^H) -$

$$X^H(\beta)G^H(Y^H,Z^H) - \eta^H(X^H)Y^H(\beta)G^H(\xi^H,Z^H) + X^H(\beta)\eta^H(Y^H)G^H(\xi^H,Z^H)\}$$

(3.29) denkleminde $Z^H = \xi^H$ alırsak,

$$\eta^H(R^H(X^H,Y^H)\,\xi^H) = 0. \tag{3.30}$$

$Y^H = \xi^H$ alırsak (3.29) denkleminden aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\eta^H(R^H(X^H,\,\xi^H)Z^H) = -\,\varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}G^H(\phi X^H,\phi Z^H) - \frac{1}{2}(\alpha\beta + \xi^H(\alpha))G^H(\phi X^H,Z^H) \tag{3.31}$$

Denklem (3.18) gereğince

$$\eta^H(R^H(X^H,\,\xi^H)Z^H) = -\,\varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}G^H(\phi X^H,\phi Z^H) \tag{3.32}$$

olur. Benzer şekilde

$$\eta^V(R^V(X^V,Y^V)Z^V) = \varepsilon\,G^H(R^V(X^V,Y^V)Z^V\,,\,\xi^V) = -\,\varepsilon\,G^H(R^V(X^V,Y^V)\xi^V\,,\,Z^V) \tag{3.33}$$

dir. (3.8) denklemini kullanırsak (3.34) denklemi denklem (3.30) u verir. (3.29) denkleminde $Z^V = \xi^V$ alırsak da

$$\eta^V(R^V(X^V,Y^V)\,\xi^V) = 0. \tag{3.34}$$

buluruz. $Y^V = \xi^V$ alarak (3.34) denkleminden de

$$\eta^V(R^V(X^V,\,\xi^V)Z^V) = -\varepsilon\frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4}G^H(\phi X^V,\phi Z^V) - \frac{1}{2}\left(\alpha\beta + \xi^V(\alpha)\right)G^V(\phi X^V,Z^V) \tag{3.35}$$

olduğu görülür. (3.20) denkleminden

$$\eta^V(R^V(X^V,\,\xi^V)Z^V) = -\,\varepsilon\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^V(\beta))}{4}G^V(\phi X^V,\phi Z^V) \tag{3.36}$$

dir.

Önerme 3.3. (2n+1)- boyutlu $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian yarı Finsler manifoldlarında aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$S^H(X^H,\xi^H) = \left(\frac{n(\alpha^2-\beta^2) - \xi^H(\beta)}{2}\right)\eta^H(X^H) - \frac{\varepsilon}{2}\phi X^H(\alpha) + \frac{(1-2n)}{2}X^H(\beta), \tag{3.37}$$

$$S^V(X^V,\xi^V) = \left(\frac{n(\alpha^2-\beta^2) - \xi^V(\beta)}{2}\right)\eta^V(X^V) - \frac{\varepsilon}{2}\phi X^V(\alpha) + \frac{(1-2n)}{2}X^V(\beta), \tag{3.38}$$

$$S^H(\xi^H,\xi^H) = \frac{n(\alpha^2-\beta^2 - 2\xi^H(\beta))}{2} = S^V(\xi^V,\xi^V), \tag{3.39}$$

$$Q\,\xi^H = \varepsilon\,(\frac{n(\alpha^2-\beta^2) - \xi^H(\beta)}{2})\xi^H + \frac{\varepsilon}{2}\phi\nabla(\alpha) + \frac{(1-2n)}{2}\nabla(\beta), \tag{3.40}$$

$$Q\,\xi^V = \varepsilon\,(\frac{n(\alpha^2-\beta^2) - \xi^V(\beta)}{2})\xi^V + \frac{\varepsilon}{2}\phi\nabla(\alpha) + \frac{(1-2n)}{2}\nabla(\beta), \tag{3.41}$$

burada, S^H, S^V Ricci tensörlerini ve Q Ricci operatörünü gösterir.

Eğer (1 - 2n)$\nabla(\beta) + \varepsilon\phi\nabla(\alpha) = \varepsilon\,(1 - 2n)\,\xi^H(\beta)\,\xi^H$, ise o zaman (3.38), (3.39) ve (3.40) denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$S^H(X^H,\xi^H) = n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2 - 2\,\xi^H(\beta)}{2})\,\eta^H(X^H), \tag{3.42}$$

$$S^V(X^V,\xi^V) = n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2 - 2\,\xi^V(\beta)}{2})\,\eta^V(X^V) \tag{3.43}$$

$$Q\,\xi^H = \varepsilon\,n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2 - 2\,\xi^H(\beta)}{2})\xi^H, \tag{3.44}$$

$$Q\,\xi^V = \varepsilon\,n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2 - 2\xi^V(\beta)}{2})\xi^V. \tag{3.45}$$

İspat. $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian indefinite Finsler manifoldlarında S Ricci tensörü ve r skalar eğriliği aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$S^H(X^H,Y^H) = \sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i\,G^H\,(R^H(E_i^H,X^H)Y^H,E_i^H) + \varepsilon\,G^H(R^H(\xi^H,X^H)Y^H,\xi^H),$$

$$r^H = \sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i\,S^H(E_i^H,E_i^H),\; r^V = \sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i\,S^V(E_i^V,E_i^V),$$

$$S^V(X^V,Y^V) = \sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i\,G^V(R^V(E_i^V,X^V)Y^V,E_i^V) + \varepsilon\,G^V(R^V(\xi^V,X^V)Y^V,\xi^V),$$

burada $\{E_1^H,E_2^H,\dots,E_{2n}^H,\ \xi^H\}$ $(M^0)^h$ manifoldunun ortonormal bazını gösterir ve $G^H(E_i^H,E_i^H) = \varepsilon_i$ dir.

(Benzer şekilde, $\{E_1^V,E_2^V,\dots,E_{2n}^V,\ \xi^V\}$ $(M^0)^v$ manifoldunun ortonormal bazını gösterir ve $G^v(E_i^v,E_i^v) = \varepsilon_i$ dir).

Y^H yerine ξ^H alarak

$$S^H(X^H,\ \xi^H) = \sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i\,G^H\,(R^H(E_i^H,X^H)\xi^H,E_i^H) + \varepsilon\,G^H(R^H(\xi^H,X^H)\xi^H,\xi^H)$$

buluruz. Burada $G^H(R^H(\xi^H,X^H)\xi^H,\xi^H)$ =0 olduğundan

$$S^H(X^H,\ \xi^H) = \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i G^H\Big(\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(X^H)E_i^H - \eta^H(E_i^H)X^H\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(X^H)\phi E_i^H - \eta^H(E_i^H)\phi X^H\} + \frac{\varepsilon}{2}\{X^H(\alpha)\phi E_i^H - E_i^H(\alpha)\phi X^H\} + \frac{1}{2}\{E_i^H(\beta)X^H - X^H(\beta)E_i^H + X^H(\beta)\eta^H(E_i^H)\xi^H - E_i^H(\beta)\eta^H(X^H)\xi^H\}, E_i^H\Big),$$

$$S^H(X^H,\ \xi^H) = \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \Big(\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\eta^H(X^H)G^H(E_i^H, E_i^H)\} + \varepsilon\frac{\alpha\beta}{2}\{\eta^H(X^H)G^H(\phi E_i^H, E_i^H)\} + \frac{\varepsilon}{2}\{X^H(\alpha)G^H(\phi E_i^H, E_i^H) - E_i^H(\alpha)G^H(\phi X^H, E_i^H)\} + \frac{1}{2}\{E_i^H(\beta)G^H(X^H, E_i^H) - X^H(\beta)G^H(E_i^H, E_i^H)\}\Big),$$

$$S^H(X^H,\ \xi^H) = \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}2n\eta^H(X^H) - \frac{\varepsilon}{2}\{\varepsilon_i\, G^H(\nabla\alpha, E_i^H)G^H(\phi X^H, E_i^H)\} + \frac{1}{2}\{\varepsilon_i\, G^H(\nabla\beta, E_i^H)G^H(X^H, E_i^H) - 2\mathrm{n}X^H(\beta)\}$$

$$S^H(X^H,\ \xi^H) = \Big(\frac{\mathrm{n}(\alpha^2-\beta^2)-\xi^H(\beta)}{2}\Big)\eta^H(X^H) - \frac{\varepsilon}{2}\phi X^H(\alpha) + \frac{(1-2\mathrm{n})}{2}X^H(\beta) \text{ dir.}$$

Önerme3.4. (2n+1)- boyutlu $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans-Sasakian indefinite Finsler manifoldlarında

$$\phi(\nabla\alpha) = -\,\varepsilon\,(1\text{-}2\mathrm{n})\nabla\beta \tag{3.46}$$

alırsak aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\frac{(1-2\mathrm{n})}{2}X^H(\beta) - \frac{\varepsilon}{2}\phi X^H(\alpha) = 0, \tag{3.47}$$

$$\frac{(1-2\mathrm{n})}{2}X^V(\beta) - \frac{\varepsilon}{2}\phi X^V(\alpha) = 0 \tag{3.48}$$

$\xi^H(\beta) = 0$, $\xi^V(\beta) = 0$.

Bu durumda

$$S^H(X^H,\xi^H) = \Big(\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}\Big)\eta^H(X^H),\ S^V(X^V,\xi^V) = \Big(\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}\Big)\eta^V(X^V) \tag{3.49}$$

dir.

İspat.

$$X^H(\beta) = G^H(\nabla\beta, X^H) = G^H\Big(-\frac{\varepsilon}{1-2\mathrm{n}}\phi(\nabla\alpha), X^H\Big) = \frac{\varepsilon}{1-2\mathrm{n}}G^H(\phi X^H, \nabla\alpha) = \frac{\varepsilon}{1-2\mathrm{n}}\phi X^H(\alpha),$$

ve

$$X^V(\beta) = G^V(\nabla\beta\,, X^V) = G^V(-\frac{\varepsilon}{1-2n}\phi(\nabla\alpha\,)\,, X^V) = \frac{\varepsilon}{1-2n} G^V(\phi X^V, \nabla\alpha\,) =$$

$$\frac{\varepsilon}{1-2n}\phi X^V(\alpha)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca Ricci operatörü olan Q aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$S^H(X^H, Y^H) = G^H(QX^H, Y^H)$ ve $S^V(X^V, Y^V) = G^V(QX^V, Y^V)$.

$S^H(X^H, \xi^H) = G^H(QX^H, \xi^H)$ ve $S^V(X^V, \xi^V) = G^V(QX^V, \xi^V)$

eşitliklerini kullanarak

$$QX^H = \varepsilon\,\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}(X^H), \quad \text{and } QX^V = \varepsilon\,\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}(X^V), \tag{3.50}$$

böylece de

$$S^H(\xi^H,\ \xi^H) = n\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2},\ S^V(\xi^V,\ \xi^V) = n\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{2} \tag{3.51}$$

$$Q\,\xi^H = \varepsilon\, n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2})\xi^H,\ Q\,\xi^V = \varepsilon\, n\,(\frac{\alpha^2-\beta^2}{2})\xi^V \tag{3.52}$$

buluruz.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

WEYL YARI-SİMETRİK TRANS-SASAKİAN YARI FİNSLER MANİFOLDLARI

4.1. Konformal Flat Trans-Sasakian Yarı Finsler Manifoldları

$((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları olsunlar. C Konformal eğrilik tensörü aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$C^H(X^H, Y^H)Z^H = R^H(X^H, Y^H)Z^H - \frac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H, Z^H)X^H - S^H(X^H, Z^H)Y^H + G^H(Y^H, Z^H)QX^H - G^H(X^H, Z^H)QY^H] + \frac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H] \quad (4.1.1)$$

ve

$$C^V(X^V, Y^V)Z^V = R^V(X^V, Y^V)Z^V - \frac{1}{(2n-1)}[S^V(Y^V, Z^V)X^V - S^V(X^V, Z^V)Y^V + G^V(Y^V, Z^V)QX^V - G^V(X^V, Z^V)QY^V] + \frac{r}{2n(2n-1)}[G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V] \quad (4.1.2)$$

burada R^H, S^H, Q^H ve r, $(M^0)^h$ manifoldu üzerinde, sırasıyla, eğrilik tensörü, ricci tensörü, ricci operatörü ve skalar eğriliktir. (R^V, S^V, Q^V ve r de $(M^0)^v$ manifoldu üzerinde, sırasıyla ,eğrilik tensörü, ricci tensörü, ricci operatörü ve skalar eğriliktir). Eğer $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$trans-Sasakian indefinite Finsler manifoldları conformall flat iseler, yani

$C^H = 0$ ve $C^V = 0$ ise o zaman (4.1.1) ve (4.1.2) denklemlerinden

$$R^H(X^H, Y^H)Z^H = \frac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H, Z^H)X^H - S^H(X^H, Z^H)Y^H + G^H(Y^H, Z^H)QX^H - G^H(X^H, Z^H)QY^H] - \frac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H]$$

ve

$$R^V(X^V, Y^V)Z^V = \frac{1}{(2n-1)}[S^V(Y^V, Z^V)X^V - S^V(X^V, Z^V)Y^V + G^V(Y^V, Z^V)QX^V - G^V(X^V, Z^V)QY^V] - \frac{r}{2n(2n-1)}[G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V, Z^V)Y^V]$$

olur.

Yukarıdaki denklemlerde eşitliğin her iki tarafının W^H ve W^V vektörleriyle skalar çarpımı alınarak

$$G^H(R^H(X^H,\, Y^H)Z^H,\, W^H) = G^H(\tfrac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H,\, Z^H)X^H - S^H(X^H,\, Z^H)Y^H + G^H(Y^H,\, Z^H)QX^H - G^H(X^H, Z^H)QY^H] - \tfrac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H,\, Z^H)X^H - G^H(X^H,\, Z^H)Y^H],W^H)$$

ve

$$G^V(R^V(X^V,\, Y^V)Z^V,\, W^V)= G^V(\tfrac{1}{(2n-1)}[S^V(Y^V,\, Z^V)X^V - S^V(X^V,\, Z^V)Y^V + G^V(Y^V,\, Z^V)QX^V - G^V(X^V, Z^V)QY^V] - \tfrac{r}{2n(2n-1)}[G^V(Y^V,\, Z^V)X^V - G^V(X^V,\, Z^V)Y^V],W^V)$$

eşitlikleri bulunur.

$$G^H(R^H(X^H,\, Y^H)Z^H,\, W^H) = \tfrac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H,\, Z^H)G^H(X^H,\, W^H) - S^H(X^H,\, Z^H)G^H(Y^H,\, W^H) + G^H(Y^H, Z^H)G^H(QX^H,\, W^H) - G^H(X^H, Z^H)G^H(QY^H,\, W^H)] - \tfrac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H,\, Z^H)G^H(X^H,\, W^H) - G^H(X^H, Z^H)G^H(Y^H,\, W^H)]$$

eşitliğinde $W^H = \xi^H$ alınarak

$$G^H(R^H(X^H,\, Y^H)Z^H, \xi^H) = \tfrac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H,\, Z^H)\varepsilon\, \eta^H(X^H) - S^H(X^H,\, Z^H)\, \varepsilon\, \eta^H(Y^H) + G^H(Y^H, Z^H)\, S^H(X^H, \xi^H) - G^H(X^H, Z^H)\, S^H(Y^H, \xi^H)] - \varepsilon\, \tfrac{r}{2n(2n-1)}\, G^H(Y^H,\, Z^H)\, \eta^H(X^H) - G^H(X^H, Z^H)\, \eta^H(Y^H)] \tag{4.1.3}$$

bulunur. (4.1.3) denkleminde Y^H yerine ξ^H alınırsa

$$G^H(R^H(X^H, \xi^H)Z^H, \xi^H) = \varepsilon\, \eta^H(R^H(X^H, \xi^H)Z^H)$$

$$= \tfrac{(\alpha^2-\beta^2)}{4}\{\varepsilon\, \eta^H(X^H)\eta^H(Z^H) - G^H(X^H, Z^H)\}$$

$$= \tfrac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(\xi^H,\, Z^H)\, \eta^H(X^H) - \varepsilon\, S^H(X^H,\, Z^H) + \varepsilon\, \eta^H(Z^H)S^H(X^H, \xi^H)G^H(X^H, Z^H)\, S^H(\xi^H,\, \xi^H)] -$$

$$\frac{r}{2n(2n-1)}\,\eta^H(Z^H)\,\eta^H(X^H)\,\varepsilon\,G^H(X^H\,Z^H)] \tag{4.1.4}$$

olur. (3.38) ve (3.39) denklemleri (4.1.4)denkleminde kullanılırsa

$$S^H(X^H,\,Z^H) = \left[-\varepsilon\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4} + \frac{2r}{4n}\right]G^H(X^H,Z^H) +$$
$$\left[\,(2n+1)\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4} - \varepsilon\frac{2r}{4n}\right]\eta^H(X^H)\eta^H(Z^H) \tag{4.1.5}$$

ve

$$S^V(X^V,\,Z^V) = \left[-\varepsilon\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4} + \frac{2r}{4n}\right]G^V(X^V,Z^V) +$$
$$\left[\,(2n+1)\,\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4} - \varepsilon\frac{2r}{4n}\right]\eta^V(Z^V)\,\eta^V(X^V) \tag{4.1.6}$$

elde edir, böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Theorem 4.1.1. Konformal flat trans-Sasakian indefinite Finsler manifoldları $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ için eğer $\phi(\nabla\alpha\,) = -\,\varepsilon\,(1-2\text{n})\nabla\beta$ ise $\eta-$ Einstein manifoldlarıdırlar, burada α ve β $(M^0)^h$ manifoldu üzerinde $\alpha\beta+\xi^H(\alpha) = 0$ şeklinde tanımlı düzgün fonksiyonlardırlar. (Benzer şekilde $(M^0)^v$ manifoldu üzerinde $\alpha\beta+\xi^V(\alpha) = 0$ dır).

Sonuç 4.1.1. Konformal flat olan $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)\alpha$ $-$ Sasakian indefinite Finsler manifoldları $\eta-$ Einstein manifoldlarıdırlar.

Sonuç 4.1.2. Konformal flat olan $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ β $-$ Kenmotsu indefinite Finsler manifoldları $\eta-$ Einstein manifoldlarıdırlar.

4.2. Weyl Yarı-Simetrik Trans-Sasakian Yarı Finsler Manifoldları

Bu bölümde Weyl yarı-simetrik trans-Sasakian yarı Finsler manifoldlarını çalıştık.$((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$ trans-Sasakian indefinite Finsler manifoldları Weyl yarı-simetriktir denir, eğer $R^H.C^H = 0$ ve $R^V.C^V = 0$ ise. Weyl konformal eğrilik tensörü $\text{C} = C^H + C^V$a şağıdaki gibi tanımlıdır:

$$C^H(X^H,\, Y^H)Z^H = R^H(X^H,\, Y^H)Z^H - \frac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H,\, Z^H)X^H - S^H(X^H,\, Z^H)Y^H + G^H(Y^H, Z^H)QX^H - G^H(X^H, Z^H)QY^H] + \frac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H)X^H - G^H(X^H, Z^H)Y^H] \qquad (4.2.1)$$

ve

$$C^V(X^V,\, Y^V)Z^V = R^V(X^V,\, Y^V)Z^V - \frac{1}{(2n-1)}[S^V(Y^V,\, Z^V)X^V - S^V(X^V,\, Z^V)Y^V + G^V(Y^V,\, Z^V)QX^V - G^V(X^V, Z^V)QY^V] + \frac{r}{2n(2n-1)}[G^V(Y^V, Z^V)X^V - G^V(X^V,\, Z^V)Y^V]$$

(4.2.2)

burada, $R^H,\ S^H, Q^H$ ve $r,\ (M^0)^h$ manifoldu üzerinde, sırasıyla, eğrilik tensörü, ricci tensörü, ricci operatörü ve skalar eğriliktir. ($R^V,\ S^V, Q^V$ ve r de $(M^0)^v$) manifoldu üzerinde,sırasıyla,eğrilik tensörü, ricci tensörü, ricci operatörü ve skalar eğriliktir).

(4.1.1) eşitliğinin her iki tarafının ξ^H vektörü ile skalar çarpımı alınırsa

$$G^H(C^H(X^H,\, Y^H)Z^H, \xi^H) = G^H(R^H(X^H,\, Y^H)Z^H, \xi^H) - \frac{1}{(2n-1)}[S^H(Y^H,\, Z^H)G^H(X^H, \xi^H) - S^H(X^H,\, Z^H)G^H(Y^H, \xi^H) + G^H(Y^H, Z^H)G^H(QX^H, \xi^H) - G^H(X^H, Z^H)G^H(QY^H, \xi^H)] + \frac{r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H)G^H(X^H, \xi^H) - G^H(X^H, Z^H)G^H(Y^H, \xi^H)]$$

bulunur.

$$\varepsilon\, \eta^H(C^H(X^H, Y^H)Z^H) = \varepsilon\, \eta^H(R^H(X^H, Y^H)Z^H) - \frac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(Y^H,\, Z^H)\, \eta^H(X^H) - \varepsilon\, S^H(X^H,\, Z^H)\eta^H(Y^H) + G^H(Y^H, Z^H) - G^H(X^H, Z^H)S^H(Y^H, \xi^H)] + \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H)\eta^H(X^H) - G^H(X^H, Z^H)\eta^H(Y^H)] \qquad (4.2.3)$$

(4.2.3) denkleminde $Z^H = \xi^H$ alarak

$$\varepsilon\, \eta^H(C^H(X^H, Y^H)\xi^H) = 0 \qquad (4.2.4)$$

bulunur. (4.2.3) denkleminde $X^H = Y^H$ alırsak da

$$\varepsilon\, \eta^H(C^H(X^H, X^H)Z^H) = \varepsilon\, \eta^H(R^H(X^H, X^H)Z^H) = 0 \qquad (4.2.5)$$

olur. (4.2.3) denkleminde $X^H = \xi^H$ aldığımızda

$$\varepsilon\, \eta^H(C^H(\xi^H, Y^H)Z^H) = \varepsilon\, \eta^H(R^H(\xi^H, Y^H)Z^H) - \tfrac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(Y^H, Z^H) - \varepsilon\, S^H(\xi^H, Z^H)\eta^H(Y^H) + G^H(Y^H, Z^H)\, S^H(\xi^H, \xi^H) - \varepsilon\, \eta^H\,(Z^H)S^H(Y^H, \xi^H)] + \tfrac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H) - \varepsilon\, \eta^H\,(Z^H)\eta^H(Y^H)] \qquad (4.2.6)$$

olur. (3.36) ve (3.43) eşitlikleri (4.2.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$\varepsilon\, \eta^H(C^H(\xi^H, Y^H)Z^H) = \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4} G^H(\phi Y^H, \phi Z^H) + \frac{1}{(2n-1)}\left[-\varepsilon\, S^H(Y^H, Z^H) + \varepsilon\left(\frac{\mathrm{n}(\alpha^2-\beta^2)}{2}\right)\eta^H(Z^H)\eta^H(Y^H) - \frac{\mathrm{n}(\alpha^2-\beta^2)}{2} G^H(Y^H, Z^H) + \varepsilon \frac{\mathrm{n}(\alpha^2-\beta^2)}{2}\eta^H(Y^H)\eta^H\,(Z^H)\right] + \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, Z^H) - \varepsilon\, \eta^H\,(Z^H)\eta^H(Y^H)]$$

ya da

$$\eta^H(C^H(\xi^H, Y^H)Z^H) = \left[-\varepsilon\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(Y^H, Z^H) + \left[(2\mathrm{n}+1)\,\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} - \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}\right]\eta^H\,(Z^H)\eta^H(Y^H) + \frac{-1}{(2n-1)}\, S^H(Y^H, Z^H) \qquad (4.2.7)$$

bulunur.

Eğer$((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ manifoldu Weyl yarı − simetrik ise, yani $R^H . C^H = 0$ ise, o zaman

$$R^H(X^H, Y^H)C^H(\mathrm{U}^H, V^H)\, W^H - C^H(R^H(X^H, Y^H)\mathrm{U}^H, V^H)\, W^H - C^H(\mathrm{U}^H, R^H(X^H, Y^H)\, V^H)\, W^H - C^H(\mathrm{U}^H, V^H)R^H(X^H, Y^H)\, W^H = 0 \qquad (4.2.8)$$

dir. (4.2.8) denkleminde X^H yerine ξ^H alınıp eşitliğin her iki tarafının ξ^H ile skalar çarpımı alınırsa

$$\varepsilon\, G^H(R^H(\xi^H, Y^H)C^H(U^H, V^H)\, W^H, \xi^H) - \varepsilon\, G^H(C^H(R^H(\xi^H, Y^H)U^H, V^H)\, W^H, \xi^H) - \varepsilon\, G^H(C^H(U^H, R^H(\xi^H, Y^H)\, V^H)\, W^H, \xi^H) - \varepsilon\, G^H(C^H(U^H, V^H)R^H(\xi^H, Y^H)\, W^H, \xi^H) = 0$$

olur . (3.29) denkleminden

$\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}$ [$\varepsilon\, G^H(Y^H, C^H(U^H, V^H)\, W^H)$ - $\eta^H(Y^H)\eta^H(\,C^H(U^H, V^H)\, W^H)$] -

$\frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4}$ [$\varepsilon\, G^H(Y^H, U^H)\, \eta^H(C^H(\,\xi^H\,, V^H)\, W^H) -$

$\eta^H(U^H)\eta^H(\,C^H(Y^H, V^H)\, W^H)$]

- $\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}$ [$\varepsilon\, G^H(Y^H, V^H)\, \eta^H(\,C^H(\,U^H\,, \xi^H)\, W^H) -$

$\eta^H(V^H)\eta^H(\,C^H(U^H, Y^H)\, W^H)$]

- $\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4}$ [$\varepsilon\, G^H(Y^H, W^H)\, \eta^H(C^H(\,U^H\,, V^H)\, \xi^H) -$

$\eta^H(W^H)\eta^H(\,C^H(U^H, V^H)\, Y^H)$] $=0$ (4.2.9)

dır.

(4.2.9) eşitliğinden $G^H(Y^H, C^H(U^H, V^H)\, W^H) = \check{C}(U^H, V^H, W^H, Y^H)$ alınarak

$\varepsilon\, \check{C}(U^H, V^H, W^H, Y^H)$ -$\eta^H(Y^H)\eta^H(C^H(U^H, V^H)\, W^H) -$

$\varepsilon\, G^H(Y^H, U^H)\eta^H(\,C^H(\,\xi^H\,, V^H)\, W^H) + \eta^H(U^H)\eta^H(\,C^H(Y^H, V^H)\, W^H)$

- $\varepsilon\, G^H(Y^H, V^H)\, \eta^H(\,C^H(\,U^H\,, \xi^H)\, W^H) + \eta^H(V^H)\eta^H(\,C^H(U^H, Y^H)\, W^H$ - $\varepsilon\, G^H(Y^H, W^H)$ $\eta^H(\,C^H(\,U^H\,, V^H)\, \xi^H) + \eta^H(W^H)\eta^H(\,C^H(U^H, V^H)\, Y^H) = 0$ (4.2.10)

elde edilir. (4.2.10) eşitliğinde $Y^H = U^H$ alıp (4.2.4), (4.2.5) denklemleri kullanılarak,

$\check{C}(U^H, V^H, W^H, U^H) - G^H(U^H, U^H)\eta^H(\,C^H(\,\xi^H\,, V^H)\, W^H)$

- $G^H(U, V^H)\, \eta^H(\,C^H(\,U^H\,, \xi^H)\, W^H) + \varepsilon\, \eta^H(W^H)\eta^H(\,C^H(U^H, V^H)\, U^H) = 0$ (4.2.11)

bulunur.

$(M^0)^h$ manifoldu üzerinde $\{E_1^H, E_2^H, \dots, E_{2n}^H, \xi^H\}$ ortonormal bazı için $U^H = E_i^H$ alıp i, $1 \le i \le 2n+1$, üzerinden toplam aınırsa ($(M^0)^v$ üzerindeki ortonormal baz da { $E_1^V, E_2^V, \dots, E_{2n}^V, \xi^V\}$, $G^v(E_i^v, E_i^v) = \varepsilon_i$, dir):

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, \check{C}\,(E_i^H,\, V^H,\, W^H, E_i^H)$$
$$- \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, G^H(E_i^H, E_i^H\,)\eta^H(\,C^H(\,\xi^H\,,\, V^H)\, W^H)$$
$$- \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, G^H(E_i^H, V^H)\eta^H(\,C^H(E_i^H\,,\, \xi^H)\, W^H)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, G^H(E_i^H, V^H)\eta^H(\,C^H(E_i^H\,,\, \xi^H)\, W^H)$$
$$+ \,\varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} \eta^H(W^H)\varepsilon_i\, \eta^H(\,C^H(E_i^H,\, V^H)E_i^H) = 0.$$

(4.2.12)

(4.2.7) denkleminden

$$\eta^H(C^H(\,\xi^H, V^H)W^H) = \left[-\varepsilon\, \frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4(2\mathrm{n}-1)} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(V^H, W^H) + \left[(2\mathrm{n}+1)\,\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} - \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}\right] \eta^H\,(V^H)\eta^H(\mathrm{W}^H) - \frac{1}{(2n-1)}\, S^H(V^H,\, W^H).$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i G^H(E_i^H, V^H)\eta^H(C^H(E_i^H\,,\, \xi^H)\, W^H) =$$

$$-\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\, G^H(E_i^H, V^H)\, \eta^H(\,C^H(\,\xi^H\,, E_i^H)\, W^H)$$

$$= -\left[-\varepsilon\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right] \sum_{i=1}^{2n+1}\, \varepsilon_i\, G^H(E_i^H, V^H)\, G^H(E_i^H, W^H)$$
$$-\left[(2\mathrm{n}+1)\frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4(2\mathrm{n}-1)} - \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}\right]\varepsilon G^H(\,\xi^H, V^H)\eta^H(\,\xi^H)\eta^H(\mathrm{W}^H) + \frac{1}{(2n-1)}\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\, G^H(E_i^H, V^H)\;\; S^H(E_i^H, W^H)$$

$$= -\left[-\varepsilon\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(V^H, W^H)$$
$$-\left[(2\mathrm{n}+1)\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} - \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}\right] \eta^H\,(V^H)\eta^H(\mathrm{W}^H) + \frac{1}{(2n-1)}\;\, S^H(V^H,\, W^H)$$

$$= \eta^H(C^H(\,\xi^H, V^H)W^H) \qquad (4.2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, \eta^H(C^H(E_i^H, V^H)E_i^H) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, \eta^H(R^H (E_i^H, V^H)E_i^H) -$$
$$\frac{1}{(2n-1)}\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, [S^H(V^H, E_i^H) \, \eta^H(E_i^H) -$$
$$S^H(E_i^H, E_i^H)\eta^H(V^H) - \varepsilon G^H(E_i^H, E_i^H) \, S^H(V^H, \xi^H) +$$
$$\varepsilon G^H(V^H, E_i^H)S^H(E_i^H, \xi^H)] +$$
$$\frac{r}{2n(2n-1)} G^H(V^H, E_i^H)\varepsilon_i \, \eta^H(E_i^H) -$$
$$\eta^H(V^H)\varepsilon_i G^H(E_i^H, E_i^H)] \qquad (4.2.14)$$

$$= -\varepsilon \, S^H(V^H, \xi^H) - \frac{\varepsilon}{(2n-1)} S^H(V^H, \xi^H) + \frac{r}{(2n-1)} \eta^H(V^H)$$

$$+\varepsilon \frac{2n+1}{(2n-1)} S^H(V^H, \xi^H) - \frac{\varepsilon}{(2n-1)} S^H(V^H, \xi^H) + \frac{r}{2n(2n-1)} \eta^H(V^H)$$

$$- \frac{r}{2n(2n-1)} (2n+1)\eta^H(V^H) = 0 \qquad (4.2.15)$$

(4.2.1) denkleminden

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \check{C}(E_i^H, V^H, W^H, E_i^H) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i G^H(E_i^H, C^H(E_i^H, V^H) \, W^H)$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} G^H(E_i^H, R^H(E_i^H, V^H) \, W^H -$$
$$\frac{1}{(2n-1)} [S^H(V^H, W^H)E_i^H - S^H(E_i^H, W^H) \, V^H +$$
$$G^H(V^H, W^H)QE_i^H - G^H(E_i^H, W^H)Q \, V^H] +$$
$$\frac{r}{2n(2n-1)} [G^H(V^H, W^H)E_i^H -$$
$$G^H(E_i^H, W^H) \, V^H] \,) \, \varepsilon_i$$
$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i \, G^H(E_i^H, R^H(E_i^H, V^H) \, W^H) +$$
$$\Big[\frac{-1}{(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n+1} S^H(V^H, W^H)\varepsilon_i G^H(E_i^H, E_i^H) +$$
$$\frac{1}{(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n+1} S^H(E_i^H, W^H)\varepsilon_i G^H(V^H, E_i^H) -$$
$$\frac{1}{(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n+1} G^H(V^H, W^H)\varepsilon_i G^H(QE_i^H, E_i^H) +$$
$$\frac{1}{(2n-1)} \sum_{i=1}^{2n+1} G^H(E_i^H, W^H)\varepsilon_i G^H(Q \, V^H, E_i^H) \Big] +$$
$$\frac{r}{2n(2n-1)} [\sum_{i=1}^{2n+1} G^H(V^H, W^H)\varepsilon_i G^H(E_i^H, E_i^H) -$$
$$\sum_{i=1}^{2n+1} G^H(E_i^H, W^H)\varepsilon_i G^H(V^H, E_i^H)]$$
$$= S^H(V^H, W^H) - \frac{(2n+1)}{(2n-1)} S^H(V^H, W^H) +$$

$$\frac{1}{(2n-1)}\ S^H\ \frac{r}{(2n-1)}\ G^H(\ V^H,\ W^H)+$$

$$\frac{1}{(2n-1)}\ S^H(\ V^H,\ W^H)+\frac{r}{(2n-1)}\ G^H(\ V^H,\ W^H) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\ \check{C}\ =\ \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\ G^H(E_i^H, E_i^H\ )\eta^H + \sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\ G^H(E_i^H, V^H)\ \eta^H(\ C^H(E_i^H\ ,\ \xi^H)\ W^H)$$
$$-\ \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} \eta^H(W^H)\varepsilon_i\ \eta^H(\ C^H(E_i^H,\ V^H)E_i^H) = 0$$

(4.2.13) ve (4.2.14) denklemleri (4.2.15) denkleminde yerlerine yazılarak

$$(2n+1)\eta^H(\ C^H(\ \xi^H\ ,\ V^H)\ W^H) - \eta^H(\ C^H(\ \xi^H\ ,\ V^H)\ W^H)$$
$$= 2n\left[-\varepsilon\ \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2n-1)} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(V^H, W^H) +$$
$$2n\left[(2n+\ 1)\ \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2n-1)}\ \ \frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}\right]\ \eta^H\ (V^H)\eta^H(W^H) +$$
$$\frac{-2n}{(2n-1)}\ S^H(V^H,\ W^H) = 0,$$

$$S^H(V^H,\ W^H) = \left[-\varepsilon\ \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4} + \frac{r}{2n}\right] G^H(V^H, W^H)$$
$$+\left[(2n+1)\frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4} - \frac{\varepsilon\, r}{2n}\right]\ \eta^H\ (V^H)\eta^H(W^H). \qquad (4.2.16)$$

$$S^H(V^H, E_i^H) = \left[-\varepsilon\ \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4} + \frac{r}{2n}\right] G^H(V^H, E_i^H),\ i=1,2,...,2n \qquad (4.2.17)$$

$$S^H(E_i^H, E_i^H) = \left[-\varepsilon\ \frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4} + \frac{r}{2n}\right] G^H(E_i^H, E_i^H)\ (4.18)$$

$$S^H(V^H,\ \xi^H) = \left[-\varepsilon\ \frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4} + \frac{r}{2n}\right] G^H(V^H,\ \xi^H)$$
$$+\left[(2n+1)\frac{\left(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta)\right)}{4} - \frac{\varepsilon\, r}{2n}\right]\ \eta^H\ (V^H)\eta^H(\ \xi^H)$$
$$= \left[\left(n\ \left(\frac{\alpha^2-\beta^2-2\ \xi^H\ (\beta)}{2}\right)\right)\right]\ \eta^H(V^H) \qquad (4.2.18)$$

$$S^H(\ \xi^H,\ \xi^H) = n\ (\frac{\alpha^2-\beta^2-2\ \xi^H\ (\beta)}{2}) \qquad (4.2.19)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \varepsilon_i\, S^H(E_i^H, E_i^H) = \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i\, S^H(E_i^H, E_i^H) + \varepsilon\, S^H(\ \xi^H,\ \xi^H)$$

$$= \left[-\varepsilon \, \frac{(\alpha^2 - \beta^2 - 2\xi^H(\beta))}{4} + \frac{r}{2n} \right] \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \, G^H(E_i^H, E_i^H)$$

$$+\varepsilon \, n \, (\frac{\alpha^2-\beta^2 \, -2 \, \xi^H \, (\beta)}{2}) = 2n \Big[-\varepsilon \, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4} + \frac{r}{2n} \Big] + \varepsilon \, n \, (\frac{\alpha^2-\beta^2 \, -2 \, \xi^H \, (\beta)}{2}) = r$$

bulunur. Böylece manifold η-Einstein manifoldudur.

Teorem 4.2.1. Weyl yarı-simetrik olan (2n+1)-boyutlu $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$ Trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları η-Einstein manifoldları olurlar, ve ancak

$$(1 - 2n)\nabla(\beta) + \varepsilon\phi\nabla(\alpha) = \varepsilon \, (1 - 2n) \, \xi^H(\beta) \, \xi^H.$$

İspat. α, β $(M^0)^h$ manifoldu üzerinde $\alpha\beta + \xi^H(\alpha) = 0$ şeklinde ve $(M^0)^v$manifoldu üzerinde $\alpha\beta + \xi^V(\alpha) = 0$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar iken eğer $\phi(\nabla\alpha) = -\varepsilon \, (1 - 2n)\nabla\beta$ ise , o zaman denklem (3.50) den,(4.2.16) denklemi

$$S^H(V^H, W^H) = \left[-\varepsilon \, \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} + \frac{r}{2n} \right] G^H(V^H, W^H)$$
$$+ \left[(2n + 1) \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4} - \frac{\varepsilon \, r}{2n} \right] \eta^H \, (V^H) \eta^H(W^H) \qquad (4.2.20)$$

$$S^H(X^H, \xi^H) = (\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}) \eta^H(X^H), S^V(X^V, \xi^V) = (\frac{n(\alpha^2-\beta^2)}{2}) \eta^V(X^V)$$

şeklinde yazılır. Böylece (3.50) ve (4.2.10) denklemleri (4.2.1) denkleminde kullanılırsa

$$\check{C}(U^H, V^H, W^H, Y^H) - \varepsilon \, \eta^H(Y^H)\eta^H(C^H(U^H, V^H) \, W^H) -$$
$$G^H(Y^H, U^H)\eta^H(C^H(\xi^H , V^H) \, W^H) + \varepsilon \, \eta^H(U^H)\eta^H(C^H(Y^H, V^H) \, W^H) - G^H(Y^H, V^H)$$
$$\eta^H(C^H(U^H , \xi^H) \, W^H) + \varepsilon \, \eta^H(V^H)\eta^H(C^H(U^H, Y^H) \, W^H - G^H(Y^H, W^H)$$
$$\eta^H(C^H(U^H , V^H) \, \xi^H) + \varepsilon \, \eta^H(W^H)\eta^H(C^H(U^H, V^H) \, Y^H) = 0 \qquad (4.2.21)$$

olur. (4.2.3)denkleminden,

$$\varepsilon \, \eta^H(Y^H)\eta^H(C^H(U^H, V^H) \, W^H) = \varepsilon \, \eta^H(Y^H)\eta^H(R^H(U^H, V^H) \, W^H) -$$
$$\frac{1}{(2n-1)} [\varepsilon \, S^H(V^H, W^H) \, \eta^H(U^H)\eta^H(Y^H) -$$
$$\varepsilon \, S^H(U^H, W^H)\eta^H(V^H)\eta^H(Y^H) +$$
$$G^H(V^H, W^H) \, S^H(U^H, \xi^H)\eta^H(Y^H) -$$
$$G^H(U^H, W^H) S^H(V^H, \xi^H)\eta^H(Y^H)] +$$

$$\frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(V^H, W^H)\eta^H(U^H)\eta^H(Y^H) -$$
$$G^H(U^H, W^H)\eta^H(V^H)\eta^H(Y^H)] \qquad (4.2.22)$$

$$-\varepsilon\, \eta^H(U^H)\eta^H(C^H(Y^H, V^H)W^H) = -\varepsilon\, \eta^H(U^H)\eta^H(R^H(Y^H, V^H)W^H)$$
$$+\frac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(V^H, W^H)\eta^H(Y^H)\eta^H(U^H) -$$
$$\varepsilon\, S^H(Y^H, W^H)\eta^H(V^H)\eta^H(U^H) +$$
$$G^H(V^H, W^H)S^H(Y^H, \xi^H)\eta^H(U^H) -$$
$$G^H(Y^H, W^H)S^H(V^H, \xi^H)\eta^H(U^H)] -$$
$$\frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(V^H, W^H)\eta^H(Y^H)\eta^H(U^H) -$$
$$G^H(Y^H, W^H)\eta^H(V^H)\eta^H(U^H)] \qquad (4.2.23)$$

$$-\varepsilon\, \eta^H(V^H)\eta^H(C^H(U^H, Y^H)W^H) = -\varepsilon\, \eta^H(V^H)\eta^H(R^H(U^H, Y^H)W^H)$$
$$+\frac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(Y^H, W^H)\eta^H(U^H)\eta^H(V^H) -$$
$$\varepsilon\, S^H(U^H, W^H)\eta^H(Y^H)\eta^H(V^H) +$$
$$G^H(Y^H, W^H)S^H(U^H, \xi^H)\eta^H(V^H) -$$
$$G^H(U^H, W^H)S^H(Y^H, \xi^H)\eta^H(V^H)] -$$
$$\frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(Y^H, W^H)\eta^H(U^H)\eta^H(V^H) -$$
$$G^H(U^H, W^H)\eta^H(Y^H)\eta^H(V^H)] \qquad (4.2.24)$$

$$-\varepsilon\, \eta^H(W^H)\eta^H(C^H(U^H, V^H)Y^H) = -\varepsilon\, \eta^H(W^H)\eta^H(R^H(U^H, V^H)Y^H)$$
$$+\frac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(V^H, Y^H)\eta^H(U^H)\eta^H(W^H) -$$
$$\varepsilon\, S^H(U^H, Y^H)\eta^H(V^H)\eta^H(W^H) +$$
$$G^H(V^H, Y^H)S^H(U^H, \xi^H)\eta^H(W^H) -$$
$$G^H(U^H, Y^H)S^H(V^H, \xi^H)\eta^H(W^H)] -$$
$$\frac{\varepsilon\, r}{2n(2n-1)}[G^H(V^H, Y^H)\eta^H(U^H)\eta^H(W^H) -$$
$$G^H(U^H, Y^H)\eta^H(V^H)\eta^H(W^H)] \qquad (4.2.25)$$

denklemleri bulunur. (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24) ve (4.2.25) denklemleri (4.2.21) denkleminde yerlerine yazılarak,

$$\check{C}(U^H, V^H, W^H, Y^H) = \varepsilon\, \eta^H(Y^H)\eta^H(R^H(U^H, V^H)W^H) -$$
$$\varepsilon\, \eta^H(U^H)\eta^H(R^H(Y^H, V^H)W^H) - \varepsilon\, \eta^H(V^H)\eta^H(R^H(U^H, Y^H)W^H) -$$
$$\varepsilon\, \eta^H(W^H)\eta^H(R^H(U^H, V^H)Y^H) - \frac{1}{(2n-1)}[G^H(V^H, W^H)S^H(U^H, \xi^H)\eta^H(Y^H) -$$

$G^H(U^H, W^H)S^H(V^H,\xi^H)\eta^H(Y^H)] + \frac{1}{(2n-1)}[G^H(V^H, W^H)\, S^H(Y^H,\xi^H)\eta^H(U^H) -$

$G^H(Y^H, W^H)S^H(V^H,\xi^H)\eta^H(U^H)] + \frac{1}{(2n-1)}[G^H(Y^H, W^H)\, S^H(U^H,\xi^H)\eta^H(V^H) -$

$G^H(U^H, W^H)S^H(Y^H,\xi^H)\eta^H(V^H)] + \frac{1}{(2n-1)}[\varepsilon\, S^H(V^H,Y^H)\,\eta^H(U^H)\eta^H(W^H) -$

$\varepsilon\, S^H(U^H,Y^H)\eta^H(V^H)\eta^H(W^H) + G^H(V^H,Y^H)\, S^H(U^H,\xi^H)\eta^H(W^H) -$

$G^H(U^H,Y^H)S^H(V^H,\xi^H)\eta^H(W^H)] - \frac{\varepsilon r}{2n(2n-1)}[G^H(V^H,Y^H)\eta^H(U^H)\eta^H(W^H) -$

$G^H(U^H,Y^H)\eta^H(V^H)\eta^H(W^H)] + \left[-\varepsilon\, \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4(2\mathrm{n}-1)} \frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(V^H,W^H)G^H(Y^H,U^H) +$

$\left[(2\mathrm{n}+1)\, \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{4(2\mathrm{n}-1)} - \frac{\varepsilon r}{2n(2n-1)}\right] \eta^H(V^H)\eta^H(\mathrm{W}^H)G^H(Y^H,U^H) -$

$\frac{1}{(2n-1)}\, S^H(V^H, W^H)G^H(Y^H,U^H) + \left[\varepsilon\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} -\right.$

$\left.\frac{r}{2n(2n-1)}\right] G^H(U^H, W^H)G^H(Y^H,V^H) + \left[-(2\mathrm{n}+1)\, \frac{(\alpha^2-\beta^2-2\xi^H(\beta))}{4(2\mathrm{n}-1)} +\right.$

$\left.\frac{\varepsilon r}{2n(2n-1)}\right] \eta^H(W^H)\eta^H(U^H)G^H(Y^H,V^H) + \frac{1}{(2n-1)}\, S^H(U^H, W^H)G^H(Y^H,V^H) = 0$

bulunur.

Teorem 4.2.2. $(2n+1)$-boyutlu $(n>1)$ $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$Weyl yarı-simetrik trans-Sasakian yarı Finsler manifoldlarında eğer $\phi(\nabla\alpha) = -\varepsilon\,(1-2\mathrm{n})\nabla\beta$ alınırsa, o zaman $\check{C}\,(U^H, V^H, W^H,Y^H) = 0$ ve $\check{C}\,(U^V, V^V, W^V,Y^V) = 0$ olur. Böylece $R^H.C^H = 0$ ise $C^H = 0$ ve $R^V.C^V = 0$ ise $C^V = 0$ dır.

Sonuç 4.2.1. $(2n+1)$-boyutlu $(n>1)$ $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$Weyl yarı-simetrik trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları eğer $\phi(\nabla\alpha) = -\varepsilon\,(1-2\mathrm{n})\nabla\beta$ ise conformal flattır.

Sonuç 4.2.2. $(2n+1)$-boyutlu $(n>1)$ $((M^0)^h,\phi^H,\xi^H,\eta^H,G^H)$ ve $((M^0)^v,\phi^V,\xi^V,\eta^V,G^V)$Weyl yarı-simetrik trans-Sasakian yarı Finsler manifoldları eğer $\phi(\nabla\alpha) = -\varepsilon\,(1-2\mathrm{n})\nabla\beta$ ise quasi constant eğriliklidir.

Örnek 4.2.1. $F^3 = (R^3,(R^3)^0,F^*)$ yarı Finsler manifoldunu düşünelim. $(R^3)^0 = R^6/\{0\}$, 6 boyutlu bir reel C^∞ manifolddur ve TR^3, R^3 'ün tanjant demetidir. R^3 ün bir koordinat sistemi $\{(U,\varphi): x_1,x_2,x_3\}$ şeklinde ifade edilebilir; burada U, R^3 'ün bir açık altmanifoldu ; herhangi bir $x \in U$ için, $\varphi: U \to R^3$, bir diffeomorfizmdir ve $\varphi(x) = (x_1,x_2,x_3)$ olarak tanımlanır.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}, (T(R^3)^0)^H$uzayında ve$\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\frac{\partial}{\partial y^2},\frac{\partial}{\partial y^3}\right\}, (T(R^3)^0)^V$ uzayında bir bazdır. $\forall\, X^V \in (T(R^3)^0)^V$ ve $\forall\, X^H \in (T(R^3)^0)^H$ için,

$$X^V = X_1^V(x,y)\frac{\partial}{\partial y^1} + X_2^V(x,y)\frac{\partial}{\partial y^2} + X_3^V(x,y)\frac{\partial}{\partial y^3},$$
$$X^H = X_1^H(x,y)\frac{\partial}{\partial x^1} + X_2^H(x,y)\frac{\partial}{\partial x^2} + X_3^H(x,y)\frac{\partial}{\partial x^2},$$

dir, böylece, herhangi bir $X \in T(R^3)^0$ için, $X = X_i^H(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} + X_i^V(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$

dir. η 1-form

u , $\eta = \eta^H + \eta^V = \eta_i^H(x,y)dx^i + \eta_i^V(x,y)\delta y^i$ ($i = 1,2,3$), $\eta^H \in (T^*(R^3)^0)^H$ ve $\eta^V \in (T^*(R^3)^0)^V$ şeklinde tanımlıdır.

$E_1^H = \frac{e^{x_1}}{{x_3}^2}\frac{\delta}{\delta x^1}$, $E_2^H = \frac{e^{x_2}}{{x_3}^2}\frac{\delta}{\delta x^2}$,$E_3^H = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{\delta}{\delta x^3} = \xi^H$ vektör alanları $(T(R^3)^0)^H$nin her noktasında lineer bağımsızdırlar. G Sasaki Finsler yarı metriğini aşağıdaki gibi alalım,

$G^H(E_1^H,\xi^H) = G^H(E_1^H,E_2^H) = G^H(E_2^H,\xi^H) = 0$

$G^H(E_1^H,E_1^H) = \varepsilon_1, G^H(E_2^H,E_2^H) = \varepsilon_2$, $G^H(\xi^H,\xi^H) = \varepsilon$.

$\forall\, Z^H \in (T(R^3)^0)^H$ için η^H 1-formu aşağıdaki gibidir:

$$\eta^H(Z^H) = \epsilon G^H(Z^H,\xi^H) = \epsilon G^H(z_1E_1^H + z_2E_2^H + z_3\xi^H,\xi^H) = z_3$$

$\varphi^H(1,1)$ tensör alanı da aşağıdaki gibidir:

$$\varphi^H(E_1^H) = E_2^H, \varphi^H(E_2^H) = -E_1^H, \varphi^H(\xi^H) = 0.$$

0 zaman φ^H tensörünün lineerlik özelliğini kullanarak,

$Z^H = z_1E_1^H + z_2E_2^H + z_3\,\xi^H$, $W^H = w_1E_1^H + w_2E_2^H + w_3\,\xi^H$

$\phi^H(Z^H) = \phi^H(z_1E_1^H + z_2E_2^H + z_3\,\xi^H) = z_1\phi^H(E_1^H) + z_2\phi^H(E_2^H) + z_3\,\phi^H(\xi^H)$

$\phi^H(Z^H) = z_1E_2^H - z_2E_1^H$

$\phi^H(W^H) = \phi^H(wE_1^H + wE_2^H + w_3\,\xi^H) = w_1\phi^H(E_1^H) + w_2\phi^H(E_2^H) + w_3\,\phi^H(\xi^H)$

$\phi^H(W^H) = w_1E_2^H - w_2E_1^H$

$(\phi^H)^2(Z^H) = -z_2E_2^H - z_1E_1^H = -Z + \eta^H(Z^H)\xi^H$

buluruz. Böylece her $Z^H \in (T(R^3)^0)^H$ ve her $W^H \in (T(R^3)^0)^H$ için şunu elde ederiz:

$$G^H(\phi^H(Z^H), \phi^H(W^H)) = G^H(Z^H, W^H) - \varepsilon\, \eta^H(Z^H)\, \eta^H(W^H)$$

Böylece $((R^3)^0)^H, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ üzerinde hemen hemen değme yarı metrik yapıyı kurmuş oluruz. (∇, G^H yarı -metriği ile ilgili Levi-Civita konneksiyonu gösteriyor.)

O zaman şunu elde ederiz:

$[E_1^H, E_2^H] = 0$, $[E_1^H, \xi^H] = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H$, $[E_2^H, \xi^H] = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_2^H$.

Koszul formülünü kullanarak,

$$2G^H\left(\nabla_{E_1^H}\xi^H, E_1^H\right) = -G^H(E_1^H, [\xi^H, E_1^H]) - G^H(\xi^H, [E_1^H, E_1^H]) + G^H(E_1^H, [E_1^H, \xi^H])$$

$$= 2G^H(-\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H, E_1^H).$$

Böylece,

$\nabla_{E_1^H}\xi^H = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H$, $\nabla_{\xi^H} E_1^H = 0.$

Yine Koszul formulünü kullanarak şunu elde ederiz:

$$2G^H\left(\nabla_{E_1^H}\xi^H, E_1^H\right) = -G^H(E_1^H, [\xi^H, E_1^H]) - G^H(\xi^H, [E_1^H, E_1^H]) + G^H(E_1^H, [E_1^H, \xi^H])$$

$$= 2G^H(-\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H, E_1^H).$$

Böylece,

$$\nabla^{E_2^H}\xi^H = -\frac{c}{x3} E_2^H, \ \nabla^{\xi^H} E_2^H = 0.$$

Ayrıca Koszul formulùnü kullanarak şunu elde ederiz:

$$2G^H\left(\nabla_{E_2^H}\xi^H, E_2^H\right) = -G^H(E_2^H, [\xi^H, E_2^H]) - G^H(\xi^H, [E_2^H, E_2^H]) +$$

$$G^H(E_2^H, [E_2^H, \xi^H]) = 2G^H(-\frac{\varepsilon}{x_3} E_2^H, E_2^H).$$

Böylece,

$\nabla_{E_2^H}\xi^H = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_2^H$, $\nabla_{\xi^H} E_2^H = 0.$

Benzer şekilde,

$$2G^H\left(\nabla_{E_1^H} E_1^H, E_2^H\right) = -G^H(E_1^H, [E_1^H, E_2^H]) + G^H(E_2^H, [E_1^H, E_1^H]) -$$

$$G^H(E_1^H, [E_1^H, E_2^H])$$

$$= 2G^H\left(-\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H, E_2^H\right) = 0 .$$

Böylece,

$\nabla_{E_1^H} E_1^H = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H, \nabla_{E_2^H} E_2^H = -\frac{\varepsilon}{x_3} E_2^H.$

Bulduğumuz denklemleri kullanarak, şu sonucu elde ediliriz:

$(\nabla_X^H \xi^H) = x_1 \nabla_{E_1^H} \xi^H + x_2 \nabla_{E_2^H} \xi^H = (-x_1) \frac{\varepsilon}{x_3} E_1^H - (x_2) \frac{\varepsilon}{x_3} E_2^H, \forall X^H \in (T(\mathbb{R}^3)^0)^H.$

Yukarıdaki denklemler, $((R^3)^0)^H, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ hemen hemen değme yarı metrik manifoldunun, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{2\varepsilon}{x_3}$ için (3.3)'ü sağladığını gösterir.Yukarıdaki sonuçlardan faydalanarak şu doğrulanabilir:

$$R^H(E_1^H, \xi^H)\,\xi^H = -\frac{1}{2{x_3}^2} E_1^H$$

$$R^H(E_2^H, \xi^H)\,\xi^H = -\frac{1}{2{x_3}^2} E_2^H,$$

$R^H(E_1^H, E_2^H) E_2^H = 0, R^H(E_1^H, E_1^H) E_1^H = 0$

$\varepsilon_3 G^H(R^H(E_1^H, \xi^H)\xi^H, E_2^H) + \varepsilon_1 G^H(R^H(E_1^H, E_1^H) E_1^H, E_2^H) +$
$\varepsilon_2 G^H(R^H(E_1^H, E_2^H) E_2^H, E_2^H) = S^H(E_1^H, E_2^H) = 0,$

$\varepsilon_3 G^H(R^H(E_1^H, \xi^H)\xi^H, \xi^H) +$
$\varepsilon_1 G^H(R^H(E_1^H, E_1^H) E_1^H, \xi^H) + \varepsilon_2 G^H(R^H(E_1^H, E_2^H) E_2^H, \xi^H) =$

$S^H(E_1^H, \xi^H) = 0,$

$\varepsilon_3 G^H(R^H(E_2^H, \xi^H)\xi^H, \xi^H) +$
$\varepsilon_1 G^H(R^H(E_2^H, E_1^H) E_1^H, \xi^H) + \varepsilon_2 G^H(R^H(E_2^H, E_2^H) E_2^H, \xi^H) =$

$S^H(E_2^H, \xi^H) = 0,$

$S^H(\xi^H, \xi^H) = \varepsilon_1 G^H(R^H(E_1^H, \xi^H)\xi^H, E_1^H) + \varepsilon_2 G^H(R^H(E_2^H, \xi^H)\xi^H, E_2^H) = -\frac{1}{{x_3}^2}$

$S^H(E_1^H, E_1^H) = S^H(E_2^H, E_2^H) = -\frac{1}{{x_3}^2}$

$S^H(E_1^H, E_1^H) + S^H(E_2^H, E_2^H) + S^H(\xi^H, \xi^H) = -\frac{3}{{x_3}^2}.$

$S^H(E_1^H, E_2^H) = S^H(E_1^H, \xi^H) = S^H(E_2^H, \xi^H) = 0$

$S^H(E_i^H, E_i^H) = -\frac{1}{{x_3}^2} \varepsilon_i G^H(E_i^H, E_i^H)$

i= 1, 2, 3, $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{2\varepsilon}{x_3}$

Buna göre, M bir Einstein manifoldudur.

BEŞİNCİ BÖLÜM

SONUÇ

5.1. SONUÇ

Bu çalışmamızda yarı Riemann manifoldlarında tanımlanmış olan trans-Sasakian yapıları yarı Finsler metriğini kullanarak yarı Finsler manifoldlarına taşıyıp bir genelleme yapmış olduk. Ayrıca $(2n+1)$-boyutlu $(n>1)$ $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$Weyl yarı-simetrik trans-Sasakian yarı Finsler manifoldlarında eğer $\phi(\nabla\alpha) = -\varepsilon(1-2\mathrm{n})\nabla\beta$ alınırsa, o zaman $\check{C}(U^H, V^H, W^H, Y^H) = 0$ ve $\check{C}(U^V, V^V, W^V, Y^V) = 0$ olur. Böylece $R^H.C^H = 0$ ise $C^H = 0$ ve $R^V.C^V = 0$ ise $C^V = 0$ dır.

KAYNAKÇA

Amur, K., & Pujar, S. S. (1978). On submanifolds of a Riemannian manifold admitting a metric semi-symmetric connection. *Tensor, NS*, *32*, 35-38.

Antonelli, P. L. (2003). *Handbook of finsler geometry* (1st Ed.). London: Springer Science and Business Media.

Asanov. G. S., (1985). *Finsler geometry, relativity and gauge theories* (1st Ed.). London: Reidel Publication Com Dordrecht.

Bagewadi, C. S. (1982). On totally real submanifolds of a Kahlerian manifold admitting Semi symmetric metric F-connection. *Indian. J. Pure. Appl. Math*, *13*(5), 528-536.

Beem, J. (1976). Characterizing Finsler spaces which are pseudo-Riemannian of constant curvature. *Pacific Journal of Mathematics*, *64*(1), 67-77.

Beem, J. K. (1970). Indefinite Finsler spaces and timelike spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, *22*(5), 1035-1039.

Beem, J. K., & Chern, S. S. (1971). Motions in two dimensional indefinite Finsler spaces. *Indiana University Mathematics Journal*, *21*(6), 551-555.

Bejancu, A., & Duggal, K. L. (1993). Real hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *16*, 545-556.

Bejancu, A., & Farran, H. R. (1999). On the vertical bundle of a pseudo-Finsler manifold. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *22*(3), 637-642.

Bejancu, A., & Farran, H. R. (2013). *Geometry of pseudo-Finsler submanifolds* (1st Ed.). London: Springer Science & Business Media.

De, U. C., & Shaikh, A. A. (1997). K-contact and Sasakian manifolds with conservative quasi-conformal curvature tensor. *Bull. Cal. Math. Soc*, *89*(5), 349-354.

Friedmann, A., & Schouten, J. A. (1924). Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen. *Mathematische Zeitschrift*, *21*(1), 211-223.

Gatti, N. B., & Bagewadi, C. S. (2003). On irrotational quasi-conformal curvature tensor. *Tensor New Series*, *64*(3), 248-258.

Hayden, H. A. (1932). Sub-Spaces of a space with torsion. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *2*(1), 27-50.

Hussain, S. I., & Sharafuddin, A. (1976). Semi-symmetric metric connections in almost contact mani-folds. *Tensor, 30*, 133-139.

Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *24*(1), 93-103.

Kılıç, N. (2019). *Yarı finsler manifoldları üzerinde değme yapılar* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya

Kumar, R., Rani, R., & Nagaich, R. K. (2007). On sectional curvatures of (ε)-Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2007*, 1-8.

Marrero, J. C. (1992). The local structure of trans-Sasakian manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, *162*(1), 77-86.

Matsumoto, M. (1986). *Foundations of finsler geometry and special finsler spaces* (1st Ed.). London: Kaiseisha Press.

Miron, R. (1982). On finsler spaces. *Proc. Nat. Semi, 2*, 147-188.

Oubiña, J. A. (1985). New Class of almost contact metric structure. *Publication Math. Debrecen*, *32*, 187-193.

Sağlamer, A. F., Kılıç, N., & Çalışkan, N. (2019). Kenmotsu pseudo-metric finsler structures. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 11*(2), 12-31.

Sinha, B. B., & Yadav, R. K. (1988). On almost contact Finsler strucutures on vector bundle. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 19*(1), 27-35.

Szilasi, J., & Vincze, C. (2000). A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (NS)*, *16*, 33-63.

Xufeng, X. U., & Xiaoli, C. (1998). Two theorems on (ϵ)-Sasakian manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *21*, 249-254.

Yano, K. (1970). On semi symmetric metric connection. *Revue Roumaine de Ha. Mathematiques Pures et Appliques*, *15*, 1579-1591.

Shukla, S. S. and Singh, D. D., 2010. On (ε)-Trans-Sasakian Manifolds. I*nt. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no. 49, 2401 - 2414.*

DİZİN