GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BRENKE TİP GENELLEŞTİRİLMESİYLE YAKLAŞIM

Mehmet ESER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2019

Mehmet ESER tarafından hazırlanan "SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BRENKE TİP GENELLEŞTİRİLMESİYLE YAKLAŞIM" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ..…………………

Başkan: Prof. Dr. Birol ALTIN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Özge DALMANOĞLU

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Tez Savunma Tarihi: 24/10/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mehmet ESER
24/10/2019

SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BRENKE TİP GENELLEŞTİRİLMESİYLE YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet ESER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2019

ÖZET

Bu tezde, Varna, Sucu ve İçöz tarafından çalışılan Brenke tip polinomlar aracılığıyla tanımlanan Szász operatörlerinin bir genellemesi incelenmiştir. Giriş bölümünde operatörlerin ortaya çıkışı anlatılmıştır. İkinci bölümde yaklaşım teorisine ait temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ise bu operaörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Sonuç bölümünde ise operatörlerin parametrik genelleştirmelerinin çalışılabileceği ifade edilmiştir.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Szász operatör, Korovkin teoremi, Brenke tip polinomlar
Sayfa Adedi	:	49
Danışman	:	Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY GENERALIZATION OF SZÁSZ OPERATORS INVOLVING BRENKE TYPE POLYNOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Mehmet ESER

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2019

ABSTRACT

In this thesis, a generalization of Szász operators defined by Brenke type polynomials studied by Varna, Sucu and İçöz is investigated. In the introduction, the emergence of operators is explained. In the second part, basic definitions and concepts of approximation theory are given. In the third chapter, the approach characteristics of these operators are analyzed. In the conclusion part, it is stated that parametric generalizations of operators can be studied.

Science Code : 20404
Key Words : Szász operator, Korovkin teorem, Brenke type polinomials
Page Number : 49
Supervisor : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübesiyle yardımcı olan, desteğini asla esirgemeyen ve iyi bir çalışma ortamı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. İsmet YÜKSEL'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Yazım aşamasında bana yardımcı olan kıymetli meslektaşım Kübra GÜZEL'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\boldsymbol{L(f,x)}$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\boldsymbol{fn \rightrightarrows f}$	(f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
C[a,b]	[a,b] aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{CB[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{\omega(f;\delta)}$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\boldsymbol{\rho(x)}$	Ağırlık fonksiyon
$\boldsymbol{Bp[0,\infty)}$	$\lvert f(x)\rvert \leq M_f\rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_p[0,\infty)}$	$B_p[0,\infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_p^*}$	$\left\{f \in C_p : \lim_{\lvert x\rvert \to \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} \in \mathrm{R}\right\}$ alt uzayı
$\boldsymbol{\lVert f \rVert_p}$	$B_p[0,\infty)$ uzayında tanımlanan norm
$\boldsymbol{S_n(f,x)}$	Szász Operatörü
$\boldsymbol{L_n(f,x)}$	Szász Operatörünün Brenke tip genelleştirmesi
$\boldsymbol{C^2[a,b]}$	$f, f', f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
$\lVert \cdot \rVert_{C[a,b]}$	$C[\mathrm{a,b}]$ uzayındaki $\lVert \cdot \rVert_{C[a,b]} = \underset{a \leq x \leq b}{maks}\lvert \cdot \rvert$ ile tanımlı olan norm
$\lVert \cdot \rVert_{C^2[a,b]}$	$\lVert f \rVert_{C^2[a,b]} = \lVert f \rVert_{C[a,b]} + \lVert f' \rVert_{C[a,b]} + \lVert f'' \rVert_{C[a,b]}$ ile tanımlı olan norm
$\boldsymbol{C^2[0,\infty)}$	$f, f', f'' \in C[0,\infty)$ olan fonksiyon uzayı
$\boldsymbol{C_B^2[0,\infty)}$	$f, f', f'' \in C_B\,[0,\infty)$ olan fonksiyon uzayı

1. GİRİŞ

Fonksiyon uzaylarında "sürekli fonksiyonlara yaklaşım" problemi ilk defa 1885 yılında Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Weierstrass, $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir [1]. Ancak Weierstrass bu polinomların bulunma koşulları ve ne tür polinomlar olduğunu hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Ardından birçok matematikçi bu teoremde ifade edilen polinomları açık bir şekilde ifade etmişlerdir. Bernstein bu polinomların açık bir formu 1912 yılında

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (\mathrm{n} = 1,2,\dots)$$

biçiminde verilmiştir [2].

Bernstein polinomlarının sınırsız aralığa bir genelleştirmesi 1950 yılında Szász tarafından verilmiştir [3].

Bu çalışmalar analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan ve matematiğin birçok dalıyla ilişkili olan araştırma konularından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusunu ortaya çıkmasını sağlamıştır. Birinci olarak, 1951 yılında Bohmann toplam biçimindeki lineer pozitif bir operatör dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir [4]. İkinci olarak, 1953 yılında yaklaşım teorinin temel teoremi Korovkin tarafından verilmiştir. Bu teorem kullanılarak $[a,b]$ sonlu aralığındaki lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir [5].

Daha sonra Szász operatörleri gibi birçok operatörler sınırsız aralıklarda tanımlanmıştır. Sınırsız aralıklarda yaklaşım problemi, ağırlıklı uzaylarda araştırılmıştır. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teorem Gadjiev tarafından verilmiştir [6,7].

Lineer pozitif operatörler dizisi tanımlamada en genel yöntemlerden biri de doğurucu fonksiyonların kullanılmasıdır [8].

Bu tezde Varma, Sucu ve İçöz tarafından çalışılan Szász operatörlerinin Brenke tip genelleştirmesi olan bir lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenecektir [8].

Bu operatörler;

Burada A ve B

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r, \ \ a_0 \neq 0$$

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r \,, \qquad b_r \neq 0 \qquad (r \ \geq 0)$$

biçiminde tanımlı analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k, \qquad |t|<R$$

eşitliği ile üretilen

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r x^r, \qquad \mathrm{k} \ = \ 0, 1, 2 \,, \ldots$$

polinomları yardımıyla

$$L_n(f; x) := \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

[3, 9, 10] de bu operatörlerin özel hallerinide kapsayan Szász operatörlerinin genelleştirmeleri çalışılmıştır.

Bu tez birinci bölümü giriş olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır.
İkinci bölümde lineer operatörler dizilerinin temel kavramları yaklaşımına dair temel teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Varma, Sucu ve İçöz tarafından tanımlanan L_n operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAM VE TANIMLAR

Bu bölümde, Lineer pozitif operatörlerin tanımı, özellikleri ve yaklaşım hızı ile ilgili tanım ve lemmalara yer verilmiştir. Bilinmelidir ki yaklaşım teorisinin amacı herhangi bir fonksiyonunun daha kullanışlı olan farklı bir fonksiyon türünde gösterimini elde etmektir. Bundan dolayı bu kısımda Weierstrass tarafından 1885 yılında ifade edilen, sürekli her f fonksiyonuna polinomlar dizisi ile yaklaşılabileceğiyle ilgili teorem verilmiş ve $C[a,b]$ uzayında Korovkin teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, ağırlıklı uzayda yaklaşım ile ilgili tanım, önerme ve teoremlere değinilmiştir. Bunlara ek olarak, fonksiyonların değişim mertebesi ve sonsuz küçülenlerin karşılaştırılmasına ilişkin tanım ifade edilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım

X ve Y normlu fonksiyon uzayları olsun. X den alınan her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralına X den Y ye bir operatör denir. $f \in X$ ve x, g nin tanım kümesine ait olmak üzere $g(x) = L(f;\, x)$ biçiminde gösterilir [11].

2.1.2. Tanım

$L\colon X \to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1,\ f_2 \in X$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2;\ x) = \alpha L(f_1;\ x) + \beta L(f_2;\ x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir [11].

2.1.3. Tanım

$L\colon X \to Y$ lineer operatör olmak üzere, kabul edelim ki

$$X^{+} = \{\, f \in X \ : f\,(t) \geq 0\}$$

ve

$Y^+ = \{ g \in Y : g(x) \geq 0\}$

olsun. Eğer, X uzayında tanımlanan L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüşüyor ise L operatörüne, lineer pozitif operatör denir [11]. L lineer pozitif operatör ise $L\ (X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L\ (f; x) \geq 0$ olur.

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monotondur [11].

İspat

Gerçekten; $f \geq g$ ise $f - g \geq 0$ dır. L operatörünün pozitifliğinden

$$L(f - g; x) \geq 0$$

ve L operatörünün lineerliğinden

$$L(f; x) - L(g; x) \geq 0$$

olup

$$L(f; x) \geq L(g; x)$$

elde edilir.

2.2.2. Lemma

L lineer bir pozitif operatör ise, o takdirde

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği gerçeklenir [11].

İspat

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1}$$

olur. L operatörü lineer pozitif operatör olduğundan dolayı monoton artandır. O zaman Eş. 2.1 ifadesinden

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. L operatörünün lineerliğinden

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

olur. Son eşitliğin Eş. 2.2 ifadesinde kullanılmasıyla

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla lemma nın ispatı tamamlanır.

2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli problemi yaklaşım hızıdır. Yaklaşım hızı, n → ∞ iken $\varepsilon_n \to 0$ olmak üzere

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq C\varepsilon_n$$

eşitsizliğini gerçekleyen ε_n dizisinin bulunmasıyla belirlenir, burada C sabiti n indisinden bağımsız bir sabittir.

Yaklaşım teoresinin önemli problemi olan yaklaşım hızı kavramıyla ilgili hesaplamaları yapmak için birçok araç kullanılır. Bu amaçla, ilk olarak süreklilik modülü kavramı tanımlanıp daha sonra süreklilik modülünün özellikleri verilecektir.

2.3.1. Tanım

$f \in C[\mathrm{a,b}]$ olsun. $\delta > 0$ reel sayısı için

$$\omega(f;\ \delta) = \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|$$

biçiminde tanımlanan $\omega(f,\delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [5,12].

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

i) $\omega(f;\ \delta) \geq 0$,

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\ \delta_1) \leq \omega(f;\ \delta_2)$,

iii) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f,\delta) = 0$,

iv) Her $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;\ m\delta) = m\omega(f;\ \delta)$,

v) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\ \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f;\ \delta)$,

vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f;\ |t - x|)$

ve

vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f;\ \delta)$

İspat

i) Süreklilik modülü tanımından açıktır.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $\{|f(t) - f(x)|: t, x \in [a, b]$ ve $|t - x| \leq \delta_1\}$ kümesi $\{|f(t) - f(x)|: t, x \in [a, b]$ ve $|t - x| \leq \delta_2\}$ kümesinin bir alt kümesi olduğundan, bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceği özelliğinden dolayı ispat açıktır.

iii) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün süreklidir. Yani keyfi $\varepsilon > 0$ için en az bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|t - x| < \eta$ koşulunu sağlayan her $t, x \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Eğer $\delta < \eta$ seçilirse süreklilik modülünün tanımına göre;

$$\omega(f, \delta) := \sup_{x,y \in [a,b]} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olup buradan

$\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) = 0$ bulunur.

iv) Süreklilik modülü tanımından $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f; m\,\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq m\delta}} |f(t) - f(x)|$$

eşitliği yazılabilir. Eğer

$$|t - x| \leq m\delta$$

ise

$$x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olmak üzere $t = x + mh$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ için

$$\omega(f; m\,\delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + mh) - f(x)|$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|\le\delta}} |f(x+mh)-f(x)| = \sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|\le\delta}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} f(x+(k+1)h)-f(x+kh)\right|$$

olup, üstteki eşitlikte üçgen eşitsizliği uygulanırsa;

$$\sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|\le\delta}} |f(x+mh)-f(x)| \le \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|\le\delta}} |f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|$$

$$\le \omega(f;\ \delta)+\omega(f;\ \delta)+\cdots+\omega(f;\ \delta)$$
$$\le m\omega(f;\ \delta)$$

elde edilir.

v) $\lambda\ \in \mathbb{R}^+$ sayısının tam kısmı $[|\lambda|]$ ile gösterilsin. Tam değer fonksiyonunun tanımı gereğince

$$[|\lambda|]\ \le\ \lambda < [|\lambda|]+1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve $\omega(f;\ \delta)$ fonksiyonunun monoton artan özelliğini gözönünde bulundurursa

$$\omega(f;\ \delta\lambda) \le\ \omega(f;\ ([|\lambda|]+1)\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $[|\lambda|]$ pozitif bir tamsayı olduğundan elde edilen eşitsizliğin sağ tarafına (iv) özelliğini uygulanırsa

$$\omega(f;\ ([|\lambda|]+1)\delta)\ \ \le ([|\lambda|]+1)\ \omega(f;\ \ \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $\lambda\ \in \mathbb{R}^+$ için

$$[|\lambda|]+1 \le \lambda+1$$

olduğundan dolayı

$$\omega(f;([|\lambda|]+1)\,\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\,\delta)$$

olur. Buradan

$$\omega(f;\,\lambda\delta) \leq\ \omega(f;\,([|\lambda|]+1)\,\delta)$$

eşitsizliğiyle

$$\omega(f;\,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\,\delta)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

vi) $\omega(f;\,\delta)$ ifadesinde δ yerine $|t-x|$ yazılırsa

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;\,|t-x|)$$

olduğu açıktır.

vii) (vi) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)|\ \leq \omega\left(f;\ \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (v) özelliği kullanılırsa

$$|f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\,\delta)$$

yazılır. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.4. $C[a,b]$ Uzayında Korovkin Teoremi

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir [1].

2.4.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

Her $\varepsilon > 0$ ve $f \in C[a,b]$ için öyle bir p polinomu vardır öyleki her $x \in [a,b]$ için $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak bir (p_n) polinom dizisi vardır [1].

2.4.2. Tanım

Her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \max_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a,b]$ uzayında yakınsaktır denir ve

$$f_n \rightrightarrows f$$

ile gösterilir.

1953 yılında P. P. Korovkin tarafından verilen aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilecektir [5].

2.4.3. Korovkin Teoremi (1953)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olsun. Her ν=0, 1, 2 için $e_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_\nu) - e_\nu\|_{C[a,b]} = 0$$

koşulları gerçekleniyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği sağlanır [5,12].

İspat

$f \in C[a,b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki her $x,t \in C[a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. $|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise f fonksiyonunun sınırlılığından ve üçgen eşitsizliğinden dolayı $M > 0$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \tag{2.3}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $|t-x| \geq \delta$ ise

$$\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \tag{2.4}$$

sağlanır. Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 ifadesinden

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$|t - x| < \delta$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

ve

$|t - x| \geq \delta$ için $|f(t) - f(x)| \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$

olup, dolayısıyla her $t \in R$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. L_n operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}
&|L_n(f(t); x) - f(x)| \\
&=|L_n(f(t);\ x) - f(x) + L_n(f(x).1;\ x) - L_n(f(x).1;\ x)| \\
&=|L_n(f(t); x) - L_n(f(x).1; x) - f(x) + L_n(f(x).1; x)| \\
&= |L_n\left(\left(f(t) - f(x)\right);\ x\right) + f(x)L_n\left((1;\ x) - 1\right)|
\end{aligned}$$

dir.

Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq \left|\left(\left(f(t) - f(x)\right);\ x\right)\right| + |f(x)|\left|L_n\left((1; x) - 1\right)\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. L_n lineer pozitif operatör olduğundan

$$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|;\ x)) + |f(x)|\left|L_n\left((1; x) - 1\right)\right|$$

dir. f fonksiyonunun sınırlılığından

$$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|;\ x) + M|L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. L_n monoton artan olup Eş. 2.5 ifadesinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};\ x\right) + M|L_n|(1;x)| \tag{2.6}$$

bulunur. Diğer taraftan L_n operatörünün lineerliğinden

$=L_n\left(\varepsilon.1 + 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};\ x\right)$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n(t^2 - 2tx + x^2;\ x)$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)]$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)]$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) - x^2]$
$=\varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n((t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)) + x^2(L_n(1;x) - 1)]$

elde edilir. Bu ifade Eş. 2.6 ifadesinde kullanılırsa

$$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq \varepsilon\, L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n\big((t^2;x) - x^2\big) + 2x\big(x - L_n(t;x)\big) + x^2(L_n(1;x) - 1)] + M|L_n(1;x) - 1|$$

sağlanır. Her ν = 0, 1, 2 için $e_\nu(t) = t^\nu$ olmak üzere

$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$
$L_n(t;x) \rightrightarrows x$

ve

$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

oldukları dikkate alınırsa $n > n_0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ için

$|L_n(f(t);\ x) - f(x)| \leq \varepsilon$
elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

dır. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.5. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Bilinmelidir ki Korovkin teoremi sınırsız aralıklarda geçersizdir. Aralık sınırsız alındığında yaklaşım problemini çözmek için ağırlıklı uzaylar tanımlanmıştır. Bu yüzden sınırsız aralıklarda Korovkin teoremi ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. Bu bölümde ağırlıklı uzayların tanım ve teoremlerine değinilmiştir.

Korovkin teoremi reel eksenin sınırlı ve kapalı alt aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tanımında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını Gadjiev araştırmıştır [6,7].

2.5.1. Tanım

ρ foksiyoneli reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer ρ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde sürekli olmak üzere $\lim_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \ge 1$ özelliklerini sağlıyorsa ρ fonksiyonona ağırlıklı fonksiyon adı verilir.

Tüm reel eksende tanımlı ve $|f| \le M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $B_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Burada M_f sadece fonksiyonuna f bağlı bir sabittir. $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında ki sürekli fonksiyonların sınıfı da $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Yani

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : x \in \mathbb{R} \text{ için } |f| \le M_f \rho(x)\}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R}) \text{ ve } f \in C(\mathbb{R})\}$$

olup bu uzaylar $\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ normu ile birer normlu uzaydır, burada $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ağırlıklı uzay denir [6,7,11].

Yukarıda verilen tanımlarda $\mathbb{R}$ yerine $[0,\infty)$ aralığı alınırsa tanımlar yine geçerli olur.

2.5.2. Tanım

$\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(x) = \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ olsun. M_f sadece f fonksiyonuna bağlı sabit sayı olmak üzere

$$|f| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $B_p[0, \infty)$ ve $B_p[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesi ise $C_p[0, \infty)$ ile gösterilir. $B_p[0, \infty)$ ve $C_p[0, \infty)$ uzaylarına ağırlık uzay denir. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in [0, \infty)\right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır.

$C_p[0, \infty)$ uzayının

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\rho^*[0, \infty)$ ile gösterilir.

$C_\rho^*[0, \infty)$ ve $C_p[0, \infty)$ uzayları $B_p[0, \infty)$ uzayının alt uzayıdır [6,7,11].

2.5.3. Önerme

$C_p[0, \infty)$ uzayın da tanımlı lineer pozitif bir operatörün $C_p[0, \infty)$ uzayından $B_p[0, \infty)$ uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter şart

$$\|L(\rho)\|_\rho \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır [6,7,11].

İspat

$(\Rightarrow)\, L$ operatörü $C_p[0,\infty)$ uzayından $B_p[0,\infty)$ uzayına bir dönüşüm olsun. Yani her $f \in C_p[0,\infty)$ için $L(f) \in B_p[0,\infty)$ olsun. ρ fonksiyonu sürekli ve $|\rho(t)| \leq M_\rho\, \rho(t)$ koşulunu sağlayacak şekilde $M_\rho > 0$ sayısı mevcut olduğundan $\rho \in C_p[0,\infty)$ olup $L(\rho) \in B_p[0,\infty)$ dir. O halde $|L(\rho,x)| \leq M_{L(x)}\, \rho(x)$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır.

Buradan $\frac{|L(\rho;x)|}{\rho(x)} \leq M_{L(\rho)}$

eşitsizliği elde edilir. Böylece son eşitsizlikten $[0,\infty)$ aralığından üstten sınırlı olan her kümenin bir en küçük üst sınırı olduğundan

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|L(\rho;x)|}{\rho(x)}$$

mevcuttur. Buradan

$$\|L(\rho;x)\|_\rho \leq M_{L(\rho)}$$

sonucu elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $L(f) \in B_p[0,\infty)$ olduğunu göstereceğiz.

$\|L(\rho)\|_\rho \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısının mevcut olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $f \in C_p[0,\infty)$ olduğundan her $t \in [0,\infty)$ için

$$|f(t)| \leq M_f\, \rho(t)$$

olacak biçimde bir $M_f > 0$ sayısı vardır.

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$
$$= L\left(|f(t)|\frac{\rho(t)}{\rho(t)};x\right)$$
$$\leq \|f\|_\rho L(\rho;x)$$

$\leq M_f \, L(\rho, x)$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathrm{K} \coloneqq M.M_f$ olmak üzere $L(f;x) \leq \mathrm{K}\, \rho(x)$ olup bu ifade $L(f) \in B_p[0,\infty)$ olduğu gösterilir.

2.5.4. Önerme

$L: C_p[0,\infty) \to B_p[0,\infty)$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik

$$\|L\|_{C_p \to B_p} = \|L(\rho)\|_\rho$$

gerçeklenir [6,7,11].

İspat

Operatör normu tanımından ve lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$\|L\|_{C_p \to B_p} = \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(f;x)\|_\rho$$

$$= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\{ \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{|L(f;x)|}{\rho(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\{ \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{L(|f|;x)}{\rho(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\{ \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{L(\frac{|f|}{\rho}\rho;x)}{\rho(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\{ \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{L(\rho(t) \sup\limits_{x \in [0,\infty)} \frac{|f(t)|}{\rho(t)};x)}{\rho(x)} \right\}$$

$$= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \left\{ \|f\|_\rho \sup_{x \in [0,\infty)} \frac{L(\rho(t);x)}{\rho(x)} \right\}$$

$$= \|L(\rho)\|_\rho$$

$$\|L\|_{C_p \to B_p} \leq \|L(\rho)\|_\rho \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğundan

$$\|L(\rho)\|_\rho \leq \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(f)\|_\rho = \|L\|_{C_p \to B_p} \tag{2.8}$$

eşitsizliği bulunur. Eş. 2.7 ve Eş. 2.8 den ispat tamamlanır.

2.5.5. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L: C_p[0,\infty) \to B_p[0,\infty)$ lineer pozitif bir operatör olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\varphi^\nu) - \varphi^\nu\|_\rho = 0;\ \nu = 0,1,2$$

koşullarını sağlamasına rağmen

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_p[0,\infty)$ bulunabilir [6,7,11].

2.5.6. Teorem

(L_n) lineer pozitif bir operatör dizisi

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(\varphi^\nu) - \varphi^\nu\| = 0;\ \nu = 0,1,2$$

şeklinde üç şartı sağlıyorsa her $f^* \in C_p[0,\infty)$ için $n \to \infty$ iken

$$\|L_n(f) - f\| \to 0$$

dır.

Buradan da şu açıktır ki yakınsama $\rho -$ normundadır [6,7,11].

2.6. Fonksiyon Dizileri ve Düzgün Yakınsaklık

2.6.1. Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$s : \mathbb{N} \to F(A)$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna fonksiyon dizisi adı verilir [13].

2.6.2. Tanım

(f_n) $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun.(f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her bir $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir n_0 sayısının var olmasıdır [13].

2.6.3. Tanım

(f_n) bir A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, her $m, n \geq n_0$ olduğunda $x \in A$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise bu durumda (f_n) bir "Düzgün Cauchy dizisidir" denir [13].

2.7. Steklov Fonksiyonu

[a, b] kapalı ve sınırlı aralığındaki f integrallenebilir fonksiyonu için

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} f\,(u)du = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f\,(t+u)du$$

bu biçimdeki f_h fonksiyonuna Steklov fonksiyonu denir [14].
Steklov fonksiyonu

$$f'_h(t) = \frac{1}{h}\left\{f\,\left(t+\frac{h}{2}\right) - f\,\left(t-\frac{h}{2}\right)\right\}$$

hemen her noktada bu türeve sahiptir.

Eğer f türevi reel eksende düzgün sürekli ise

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f\ (t) - f_h(t)| \leq \omega\left(\frac{h}{2}, f\right)$$

ve

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f'_h(t)| \leq \frac{1}{h}\omega(h, f)$$

dir.

3. SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN BRENKE TİP GENELLEŞTİRMESİ

Szász operatörleri $f \in C[0,\infty]$ olmak üzere $x \geq 0$ için

$$S_n(f;x) \coloneqq e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanan lineer pozitif operatörlerdir [3]. Daha sonra Jakimovski ve Leviatan tarafından Appell polinomları kullanılarak Szász operatörlerinin bir genelleştirmesi verilmiştir [9].

Appell Polinomları; |z|<R (R>1) bölgesinde

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k (a \neq 0)$$

analitik bir fonksiyon ve $g(1) \neq 0$ olsun.

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) u^k \tag{3.2}$$

doğurucu fonksiyona sahip $p_k(x)$ polinomlarıdır.

Jakimovski ve Leviatan, Appell polinomları yardımıyla

$$P_n(f;x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\, f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.3}$$

şeklindeki $P_n(f,x)$ lineer pozitif operatörleri tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [9].

Bu operatörler $g(z) = 1$ için Eş. 3.2 ifadesi kullanılarak $P_k(x) = \frac{(x)^k}{k!}$ eşitliği elde edilir. Eş. 3.3 ifadesinden Eş. 3.1 ifadesinde verilen Szász operatörlerine indirgenir.

Daha sonra Ismail [10] tarafından Sheffer polinomları yardımıyla Eş. 3.3 ifadesindeki $P_n(f,x)$ operatörlerine indirgenen genelleştirilmiş bir operatör tanımlanmıştır. Dolayısıyla Eş. 3.1 ifadesindeki Szász operatörlerinin diğer bir genelleştirmesini vermiştir.
Sheffer polinomları; a_k ve h_k reel olmak üzere |z|<R (R>1) bölgesinde

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)^k (a_0 \neq 0)$$

ve

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k (h_1 \neq 0)$$

analitik fonksiyonlar olsun.

$$A(t)e^{xH(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k, \qquad |t|<R \tag{3.4}$$

biçiminde doğurucu fonksiyona sahip $p_k(x)$ polinomlarıdır.

i) $x \in [0,\infty]$ için, $p_k(x) \geq 0$
ve
ii) $A(1) \neq 0$ ve $\mathrm{H}'(1) = 1$ (3.5)

koşulları yardımıyla, Ismail tarafından

$$T_n(f;x) \coloneqq \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ için } n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

biçiminde verilen lineer pozitif operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu operatörlerde $H(t) = t$ için yazılırsa Eş. 3.4 ifadesindeki doğurucu fonksiyonlar Eş. 3.2 ifadesindekilere dönüşür ve bundan dolayı Eş. 3.6 ifadesindeki operatörler Eş. 3.3 ifadesindeki operatörlere indirgenir.

Ayrıca $H(t) = t$ ve $A(t) = 1$ için Eş. 3.6 ifadesindeki operatörler Eş. 1.1 de verilen Szász operatörlerine idirgenir.

Bu tezde, [8] de çalışılan Brenke tip polinomlar yardımıyla tanımlanan Szász operatörlerinin bir genelleştirmesi incelenecektir.
Brenke tip polinomlar;

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r\,,\ : a_0 \neq 0 \tag{3.7}$$

ve

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r\,,: b_r \neq 0 \qquad (r\ \geq 0) \tag{3.8}$$

analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k, |t|<R \tag{3.9}$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahip

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r x^r, \qquad \mathrm{k}\ =\ 0, 1, 2, ... \tag{3.10}$$

polinomlarıdır [15].

Şimdi de, aşağıdaki üç koşulu sağlayan Brenke tip polinomlar ile bir lineer pozitif operatörler dizisi verilecektir.

i) k = 0, 1, 2, … için

$$A(1) \neq 0,\ \ \frac{a_{k-r} b_r}{A(1)} \geq 0,\ \ \ 0 \leq r \leq k,$$

ii) B: $[0, \infty) \rightarrow\ (0, \infty)$

ve

iii) Eş. 3.7, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 ifadelerindeki üstel seriler $|t|<R$ (R>1) yakınsaklık bölgesinde tanımlı olsun.
Brenke tip polinomları içeren Lineer pozitif operatörler;

$$L_n(f;x):=\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\,f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.11}$$

biçiminde tanımlanmıştır [8].

Bu operatörler A ve B analitik fonksiyonların özel seçimiyle de Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 de verilen operatörlere indirgenir.
Durum 1: $B(t)=e^t$ olsun. Bu durumda: Eş. 3.11 operatörü Eş. 3.3 de verilen operatöre indirgenir. Bu durumda da Eş. 3.9 daki doğurucu fonksiyon Eş. 3.2 dekine indirgenir.

Durum 2: $B(t)=e^t$ ve $A(t)=1$ olsun. Bu durumda Eş. 3.11 operatörleri Eş. 3.1 deki Szász operatörlerine indirgenir.

3.1. L_n Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Eş. 3.9 da verilen Brenke tip polinomların doğurucu fonksiyonu aşağıda verilen lemmadaki eşitlikleri sağlar.

3.1.1. Lemma

i)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) = A(1)B(nx)$$

ii)

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k(nx) = A'(1)B(nx)+nxA(1)B'(nx)$$

iii)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(nx) = A''(1)B(nx) + 2nxA'(1)B'(nx) + (nx)^2 A(1)B''(nx) + A'(1)B(nx)$$
$$+ nxA(1)B'(nx)$$

İspat

i) Eş. 3.9 de verilen Brenke tip polinomların

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k$$

doğurucu fonksiyonunda $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) = A(1)B(nx)$$

elde edilir.

ii)

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)t^k$$

eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$A'(t)B(xt) + xA(t)B'(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(x)t^{k-1} \tag{3.12}$$

olur.

Buradaki eşitlikte $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k(nx) = A'(1)B(nx) + nxA(1)B'(nx)$$

eşitliği elde edilir.

iii)
Eş. 3.12 nin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$A''(t)B(xt) + xA'(t)B'(xt) + xA'(t)B'(xt) + x^2A(t)B''(xt)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k(x)t^{k-1}$$

olur. Bu eşitlik ve Eş. 3.12 eşitliği ile birlikte düşünülerek

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k(xt) = A''(t)B(xt) + 2xA'(t)B'(xt) + x^2A(t)B''(xt) + xA'(t)B(xt) + xA(t)B'(xt)$$

eşitliği yazılır.

Bu eşitlikte $t = 1$ ve x yerine nx yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k(nx) = [A''(1)B(nx) + 2nxA'(1)B'(nx) + (nx)^2A(1)B''(nx) + A'(1)B(nx) + nxA(1)B'(nx)]$$

elde edilir.

Şimdi de Eş. 3.11 de verilen L_n operatörlerinin test fonksiyonlarını verelim

3.1.2. Lemma

Her bir $x \in [0,\infty)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i)

$$L_n(1;x) = 1 \tag{3.13}$$

ii)

$$L_n(s;x) = \frac{B'(nx)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)} \tag{3.14}$$

iii)

$$\mathrm{L_n}(\mathrm{s}^2;x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{[A(1)+2A'(1)]B'(nx)}{nA(1)B(nx)}x + \frac{A''(nx)+A'(1)}{n^2A(1)} \tag{3.15}$$

İspat

i)

$$L_n(1;x) = \frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)$$

eşitliğinde,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)$$

yerine 3.1.1. Lemma (i) de aldığı değer yazılırsa,

$$L_n(1;x) = \frac{1}{A(1)B(nx)}A(1)B(nx)$$

$L_n(1;x) = 1$ elde edilir.

ii)

$$L_n(t;x) = \frac{1}{A(t)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n}p_k(nx)$$

$$= \frac{1}{A(t)B(tx)}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} kp_k(nx)$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k(x)$$

yerine 3.1.1. Lemma (ii) de aldığı değer yazılırsa,

$$L_n(t;x) = \frac{1}{A(s)B(nx)}\frac{1}{n}[A'(s)B(nx) + nxA(s)B'(nx)]$$

$$= \frac{B'(nx)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)}$$

elde edilir.

iii)

$$L_n(\mathrm{t}^2;x) = \frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2}p_k(nx)$$

$$= \frac{1}{A(t)B(tx)}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k(nx)$$

olup,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2p_k(nx)$$

yerine 3.1.1. Lemma (iii) de aldığı değer yazılırsa,

$$L_n(\mathrm{t}^2;x)=\frac{1}{nA(1)B(nx)}[A''(1)B(nx)+2nxA'(1)B'(nx)+(nx)^2A(1)B''(nx)$$
$$+A'(1)B(nx)+nxA(1)B'(nx)]$$

$$=\frac{B''(nx)}{B(nx)}x^2+\frac{[A(1)+2A'(1)]B'(nx)}{nA(1)B(nx)}x+\frac{A''(nx)+A'(1)}{n^2A(1)}$$

elde edilir.

3.1.3. Teorem

B analitik fonksiyonu

$$\lim_{y\to\infty}\frac{B'(y)}{B(y)}=1 \text{ ve } \lim_{y\to\infty}\frac{B''(y)}{B(y)}=1 \tag{3.16}$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde $E:=\{f:\forall\in\ [0,\infty),\ |f(x)|\ \leq\ ce^{bx},\ b\in\mathbb{R}\ ve\ c\in\mathbb{R}^+\}$ olmak üzere, eğer $f\in\ C[0,\infty)\cap E$ ise

$$\lim_{n\to\infty}L_n(f;x)=f(x)$$

olur ve L_n operatörü

için $[0,\infty)$ un her kompakt alt kümesinde düzgün olarak yakınsar.

İspat

Eş. 3.13 – Eş. 3.15 e göre Eş. 3.16 de düşünüldüğünde

$$\lim_{n\to\infty}L_n(t;x)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}L_n(t;x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{B'(nx)}{B(nx)}x+\frac{A'(1)}{nA(1)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1.x+\frac{1}{n}\right\}$$
$$=x$$

ve

$\lim_{n\to\infty} L_n(\mathrm{t}^2; x)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{B''(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{[A(1) + 2A'(1)]B'(nx)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{A''(nx) + A'(1)}{n^2 A(1)} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{B''(nx)}{B(nx)} \right\} x^2 + \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{[A(1) + 2A'(1)]B'(nx)}{nA(1)B(nx)} \right\} x + \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{A''(nx) + A'(1)}{n^2 A(1)} \right\}$$

$$= 1. x^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{[A(1) + 2A'(1)]B'(nx)}{A(1)B(nx)} \right\} x + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{A''(nx) + A'(1)}{A(1)} \right\}$$

$=x^2$

limitleri gerçeklenir.

Korovkin teoreminin uygulamasıyla, teorem kanıtlanmış olur. Yukarıdaki yakınsaklık $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde düzgünlüğü garantiler.

3.2. L_n Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Bu bölümde kullanılacak aşağıdaki tanımları ve lemmaları verelim.

3.2.1. Tanım

$f \in C_B\ [0, \infty)$ un ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2(f, \delta) := \sup_{0<t\leq\delta} \| f(.+2t) - 2f(.+t) + f(.) \|_{C_8}$$

olarak tanımlanır.

Burada $C_B\ [0, \infty)$, $[0, \infty)$ da sınırlı ve düzgün sürekli olan reel değerli fonksiyonların sınıfıdır.

Buradaki norm

$\|f\|_{C_B} = \sup_{x\in [0,\infty)} |f(x)|$ dir.

3.2.2. Tanım

$C_B^2[0,\infty) := \{g \in C_B\ [0,\infty): g'\ g'' \in C_B\ [0,\infty)\}$ uzayında bir g fonksiyonunun normu $\|g\|_{C_B^2} = \|g\|_{C_B} + \|g'\|_{C_B} + \|g''\|_{C_B}$ ile verilsin. $f \in C_B\ [0,\infty)$ fonksiyonunun Peetre's K-fonksiyonel

$$K(f,\delta) := \inf_{g \in C_B^2([0,\infty))} \{\|f-g\|_{C_B} + \delta\|g\|_{C_B^2}\}$$

biçiminde tanımlanır (Ditzian ve Totik [16]).
Bu fonksiyon, M sabiti f ve δ dan bağımsız olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$K(f,\delta) \le M\{\omega_2(f,\sqrt{\delta}) + \min(1,\delta)\|f\|_{C_B}\}$$

eşitsizliğini sağlar.

3.2.3. Lemma

$g \in C^2\,[0,\infty)$ bir fonksiyon ve (p_n) lineer pozitif operatörler dizisi her n doğal sayısı için $p_n(1;x) = 1$ koşulunu sağlasın.
O zaman

$$|p_n(g;x) - g(x)| \le \|g'\|\sqrt{p_n((s-x)^2;x)} + \frac{1}{2}\|g''\|p_n((s-x)^2;x) \tag{3.17}$$

eşitsizliği sağlanır (Gavrea and Rasa [18]).

3.2.4. Lemma

$f \in C[a,b]$ ve $h \in \left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ olsun. f_h, f fonksiyonunun ikinci mertebeden Steklov fonksiyonu olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Zhuk [19]).

$$(i)\ \ \|f_h - f\| \le \frac{3}{4}\omega_2(f;h)$$

ve

$$(ii)\ \ \|f_h''\| \leq \frac{3}{2h^2}\omega_2(f;h). \tag{3.18}$$

3.2.5. Lemma

L_n operaörleri her $x \in [0,\infty)$ için

$$L_n((t-x)^2;x) = \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{[A(1)B'(nx) + 2A'(1)]B''(nx) - B(nx)}{nA(1)B(nx)}x + \frac{A''(1) + A'(1)}{n^2A(1)}$$

eşitliğini sağlar.

İspat

L_n operatörünün lineer özelliğinden,

$$L_n((t-x)^2;x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2;x)$$
$$= L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)$$

yazabiliriz.

Burada 3.1.2. Lemma daki değerler yerine yazılırsa,

$$L_n((t-x)^2;x) = \frac{B''(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{[A(1) + 2A'(1)]B'(nx)}{nA(1)B(nx)}x$$
$$= \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)}x^2 + \frac{A''(1) + A'(1)}{n^2A(1)}$$
$$-2x\left(\frac{B'(1)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)}\right) + x^2$$

$$= \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{A(1)B'(nx) + 2A'(1)[B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)}$$
$$+ \frac{A''(1) + A'(1)}{n^2 A(1)}$$

elde edilir.

Aşağıdaki dört teorem kullanılarak yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

3.2.6. Teorem

$f \in \ [0, \infty) \ \cap E$ olsun. L_n operatörü

$$\lambda := \lambda_n(x) = L_n((t-x)^2; x)$$
$$= \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{A(1)B'(nx) + 2A'(1)[B'(nx) - B(nx)]}{nA(1)B(nx)} x$$
$$+ \frac{A''(1) + A'(1)}{n^2 A(1)} \tag{3.19}$$

olmak üzere,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \ 2\ \omega(f;\ \sqrt{\lambda_n(x)})$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat

$$|L_n(f; x) - f(x)| = \left| \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \ p_k(nx) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

olup

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f,\delta)$$

eşitsizliği kullanırsa,

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f,\delta)$$

$$=\left\{\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)+\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx)\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta}\right\}\omega(f,\delta)$$

olur.

$$\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)=1$$

olduğundan

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq \left\{1+\frac{1}{\delta A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|\right\}\omega(f,\delta) \qquad (3.20)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \left(\frac{1}{A(1)B(nx)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\right)^{\frac{1}{2}}\left(A(1)B(nx)\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sqrt{A(1)B(nx)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olup, ayrıca 3.2.3. Lemma dan

$$L_n((t-x)^2;x)A(1)B(nx) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|^2$$

eşitliği ile,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx)\left|\frac{k}{n}-x\right|$$

$$\leq A(1)B(nx)\left\{\frac{B''(nx)-2B'(nx)+B(nx)}{B(nx)}x^2\right.$$

$$\left. + \frac{A(1)B'(nx)+2A'(1)[B'(nx)-B(nx)]}{nA(1)B(nx)}x + \frac{A''(1)+A'(1)}{n^2A(1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik Eş. 3.20 de kullanırsa,

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\lambda_n(x)}\right)\omega(f,\delta) \tag{3.21}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\lambda_n(x)$ Eş. 3.19 teki gibidir. Eş. 3.21 de $\delta = \sqrt{\lambda_n(x)}$ seçilirse, teoremin sonucu elde edilir.

3.2.7. Teorem

$h := h_n(x) = \sqrt[4]{L_n((t-x)^2;x)}$ olmak üzere, $f \in C[0,\alpha)$ için

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{2}{\delta}\|f\|h^2 + \frac{3}{4}(\alpha + 2 + h^2)\omega_2(f,\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

f_h, f fonksiyonunun ikinci basamaktan Steklov fonksiyonu olsun.

$$|L_n(f;x) - f(x)| = |L_n(f - f_h + f_h + f_h(x) - f_h(x);x) - f(x)|$$

$$\leq |L_n(f - f_h;x)| + |L_n(f_h;x) - f_h(x)L_n(1;x)| + |f_h(x)L_n(1;x) - f(x)|$$

$$\leq \|f_h - f\|L_n(1;x) + |L_n(f_h;x) - f_h(x)L_n(1;x)| + |f_h(x)L_n(1;x) - f(x)|$$

olarak yazılabilir.

Eş. 3.13 den $L_n(1;x) = 1$ olduğundan dolayı

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2\|f_h - f\| + |L_n(f_h;x) - f_h(x)| \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir.

$f_h \in C^2[0,\infty)$ olduğu dikkate alınıp, 3.2.3. Lemma kullanılırsa,

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq \|f'_h(x)\|\sqrt{L_n((t-x)^2;x)} + \frac{1}{2}\|f''_h\|L_n((t-x)^2;x) \tag{3.23}$$

elde edilir.

Burada Landau eşitsizliği $\left(\|f'_h\| \leq \frac{2}{\alpha}\|f_h\| + \frac{\alpha}{2}\|f''_h\|\right)$ ve 3.2.4. Lemma dan

$$\|f'_h\| \leq \frac{2}{\alpha}\|f\| + \frac{3\alpha}{4}\frac{1}{h^2}\omega_2(f,h)$$

yazabiliriz.

Son eşitlikten Eş. 3.23 ifadesi

$$h = \sqrt[4]{L_n((s-x)^2;x)}$$

olmak üzere,

$$|L_n(f_h;x) - f_h(x)| \leq \frac{2}{\alpha}\|f\|h^2 + \frac{3\alpha}{4}\omega_2(f,h) + \frac{3}{4}h^2\omega_2(f,h) \tag{3.24}$$

olur.

Eş. 3.22 de Eş. 3.24 in yerine yazılmasıyla, 3.2.4. Lemma ile birlikte teoremin ispatı elde edilir.

Uyarı:

3.2.7. Teorem de $h \in \left(0,\ \frac{\alpha}{2}\right)$ için ispat verildi.

$B(t) = e^t, A(t) = 1$ ve $x = 0$ özel durumu için,

$$h := h_n(x) = \sqrt[4]{L_n((s-x)^2;x)}$$

eşitsizliğinden $h = 0$ a indirgenir. $h = 0$ olduğu zaman, 3.2.7. Teorem de elde edilen eşitsizlik hala geçerlidir.

3.2.8. Teorem

$f \in C_B^2[0,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\gamma := \gamma_n = \left\{ \frac{B''(nx) - 2B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 \right.$$

$$+ \frac{\big(B'(nx) - B(nx)\big)\big(nA(1) + 2A'(1)\big) + A(1)B'(nx)}{nA(1)B(nx)} x$$

$$\left. + \frac{A''(1) + (n+1)A'(1)}{n^2 A(1)} \right\}$$

olmak üzere,

$|L_n(f_h; x) - f_h(x)| \ \leq \ \gamma \|f\|_{C_B^2}$

dir.

İspat

f fonksiyonunun Taylor açılımı, L_n operatörünün lineerliği ve Eş. 3.13 den $\eta \in (x, t)$ olmak üzere

$$L_n(f; x) - f(x) = \ L_n\left(f(x) + f'(x) \frac{(t-x)}{1!} + f''(\eta) \frac{(t-x)^2}{2!}; x \right) - f(x)$$

$$= L_n(f(x); x) + f'(x) L_n(t - x; x) + \frac{1}{2} f''(\eta) L_n((t-x)^2; x) - f(x)$$

yazılabilir.

$L_n(f(x); x) = f(x) L_n(1; x) = f(x)$ olduğundan,

$$L_n(f; x) - f(x) = f'(x) L_n(t - x; x) + \frac{1}{2} f''(\eta) L_n((t-x)^2; x) \tag{3.25}$$

olur.

$x \leq t$ için

$$L_n(t-x;x) = \frac{B'(nx)+B(nx)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)} \geq 0$$

dir.

3.1.2. Lemma ve 3.2.5. Lemma ve Eş. 3.25 kullanılırsa,

$$|L_n(f;x) - f(x)|$$

$$\leq \left[\frac{\left(B'(nx)-B(nx)\right)}{B(nx)}x + \frac{A'(1)}{nA(1)}\right]\|f'\|_{C_B}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{B''(nx)-B'(nx)+B(nx)}{B(nx)}x^2\right.$$

$$+\frac{A(1)B'(nx)+\left(2A'(1)\right)\left(B'(nx)-B(nx)\right)}{nA(1)B(nx)}x$$

$$\left.+\frac{A''(1)+(n+1)A'(1)}{n^2A(1)}\right]\|g\|$$

$$|L_n(f;x) - f(x)|$$

$$\leq \left[\frac{B''(nx)-B'(nx)+B(nx)}{B(nx)}x^2\right.$$

$$+\frac{A(1)B'(nx)+\left(nA(1)+2A'(1)\right)\left(B'(nx)-B(nx)\right)}{nA(1)B(nx)}x$$

$$\left.+\frac{A''(1)+(n+1)A'(1)}{n^2A(1)}\right]\|f'\|_{C_B^2}$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

3.2.9. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ olsun. O zaman 3.2.8. Teorem de verilen $\lambda_n(x)$ ifadesi ile $\delta = \delta_n(x) = \frac{1}{2}\lambda_n(x)$ olmak üzere

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2M\{\omega_2(f,\sqrt{\delta}) + \min(1+\delta)\|f\|C_B\}$$

dir.

İspat

$g \in C_B^2[0,\infty)$ olsun. 3.2.8. Teorem den dolayı|

$$|L_n(f;x) - f(x)| = |L_n(f - g(t) + g(t) + g(x) - g(x); x) - f(x)|$$

$$\leq |L_n(f - g; x)| + |L_n(g;x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$\leq \|f - g\|_{C_8} + \left[\frac{B''(nx) - B'(nx) + B(nx)}{B(nx)} x^2 + \frac{A(1)B'(nx) + \big(nA(1) + 2A'(1)\big)\big(B'(nx) - B(nx)\big)}{nA(1)B(nx)} x + \frac{A''(1) + (n+1)A'(1)}{n^2 A(1)}\right] \|g\|_{C_B^2}$$

$$= 2\left[\|f - g\|_{C_8} + \delta\|g\|_{C_B^2}\right]$$

olup,

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2\left[\|f - g\|_{C_8} + \delta\|g\|_{C_B^2}\right] \tag{3.26}$$

olur.

Eş. 3.26 nın sol tarafı $g \in C_B^2[0,\infty)$ fonksiyonuna bağlı değildir. Bu yüzden

$$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2K(f,\delta) \tag{3.27}$$

elde edilir.

Peetre's K- fonksiyoneli ile ikinci süreklilik modülü arasındaki eşitsizlik kullanılırsa, Eş. 3.2.7 ifadesindeki eşitsizlikten

$|L_n(f;x) - f(x)| \leq 2M\{\omega_2(f, \sqrt{\delta}) + \min(1+\delta)\|f\|C_B\}$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı:

3.2.6. Teorem ile 3.2.9. Teorem arasındaki teoremlerde $n \to \infty$ iken Eş. 3.16 koşulu altında λ, h, γ ve δ sıfıra gider.

Örnek

Gould-Hopper polinomları [19]

$$e^{ht^{d+1}} \exp(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{d+1}(x,h) \frac{t^k}{k!} \tag{3.28}$$

formunda doğurucu fonksiyonlara sahiptir ve

$$g_k^{d+1}(x,h) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{d+1}\right]} \frac{k!}{s!\,(k-(d+1)s)!} h^s x^{k-(d+1)s} \tag{3.29}$$

açık gösterimine sahiptir.

Gould-Hopper polinomları $g_k^{d+1}(x,h)$, [20] deki Hermite tip d-ortagonal polinomlar kümesidir. d-ortagonallik notasyonu Van Iseghem [21] ve Maroni [22] tarafından gösterilmiştir.

Eş. 3.28 ifadesindeki Gould-Hopper polinomları $\mathrm{A(t)} = e^{ht^{d+1}}$ ve $\mathrm{B(t)} = e^t$ ile Brenke tip polinomlardır.

$h \geq 0$ kabulü altında Eş. 3.11 de verilen L_n operatörleri için Eş. 3.10 polinomlarına konulan kısıtlamalar ve Eş. 3.16 koşulu sağlanır. L_n operatörünün Gould-Hopper polinomlarını içeren açık formu

$$L(f;\, x) = e^{-nx-h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k^{d+1}(nx,h)}{(k)!}\, f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.30}$$

dir.

$h = 0$ için $g_k^{d+1}(nx, 0) = (nx)^k$ elde edilir ki, Eş. 3.30 ifadesindeki operatörler çok iyi bilinen Szász operatörlerine indirgenir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

$$A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r\,,\ : a_0 \neq 0$$

ve

$$B(t) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r t^r\,,: b_r \neq 0 \qquad (r\ \geq 0)$$

analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$A(t)B(xt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) t^k, |t|<R \text{ (R>1)}$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahip

$$p_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r x^r, \qquad \text{k} \ =\ 0, 1, 2, \ldots$$

Brenke tip polinomlar ile

i) k = 0, 1, 2,… için

$$A(1) \neq 0,\quad \frac{a_{k-r} b_r}{A(1)} \geq 0,\quad 0 \leq r \leq k,$$

ii) B: $[0, \infty) \rightarrow\ (0, \infty)$

ve

iii) Seriler $|t|<R$ (R>1) yakınsaklık bölgesinde tanımlı olsun,

koşulları altında

$$L_n(f; x) := \frac{1}{A(1)B(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(nx)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanan lineer pozitif operaörlerin yaklaşım özellileri incelenmiştir.

Bu operatörlerin parametrik genelleştirmeleri çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). '*Überdie analytische Darstellbarkeits ogenannter willkürlicher Functioneneinerreellen Veränderlichen*', Sitzungsberichte der Königlich Preuischen Akademie der Wissenschaftenzu Berlin, 633-639 and 89-805.

2. Bernstein S.N. (1912). *Démonstration du théoréme de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités Mathematical Communications*, 2(13) 1-2.

3. Szasz, O. (1950). "*Generalization of S. Bernstein's polynomial stothe infiniteinterval*, J. Research Nat. Bur. Standards 45, pp. 239–245.

4. Bohmann, H. (1951). *On approximation of continuous and analytic functions Arkif Für Mathematik*, 2(3), 43-56.

5. Korovkin, P. P. (1960). *Linear operators and approximation theory*. Russian Monographs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon/Breach.

6. Gadjiev, A. D. (1974)."*The converegence problem for a sequence of positivelinear operators on unboundedsets, and theorem sanalogoustothat of P. P. Korovkin*" Dokl. Akad. Nauk. SSS, 218(5): 1001-1004 (in Russian), Sov. Math. 15(5): 1433-1436.

7. Gadjiev, A.D. (1976)."*On Korovkin Type Theorems*", Math. Notes, 20(5-6): 996-998

8. Varna S., İçöz G. ve Sucu S. (2012). *Generalization of Szasz operators involving Brenke type polynomials*. Computers and Mathematics with Applications, 64(121-127).

9. Jakimovski, A., Leviatan D. (1969). *Generalized Szasz operdtors forthe approximation in the infinite interval Mathematica* (Cluj), 11 pp. 97-103

10. Ismail, M. E. H. (1974). "*On a generalization of Szasz operators, Mathematica* (Cluj), 39 pp. 259-267.

11. Hacısalihoğlu, H.H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı,* A.Ü.F.F. Döner Sermayesi İşletmesi Yayınlar, Ankara, 1-100

12. Altomare, F. and Campiti, M. 1993. *Korovkin-type approximation theoryandits applications*. Walter de Gruyter, 627 p., New York.

13. Rudin, W. (1953) *Principles of Mathematical Analysis*. Mcgraw-Hill, New York.

14. Steklov, V.A. (1957) "*On the asymptotic representation of certain functions defined by a linear differential equation of the second order, and their application to the problem of expanding an arbitrary function into a series of these functions*" , Khar'kov (In Russian).

15. Chihara, T.S. (1978). *An Introductionto Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, New York

16. Ditzian, Z., Totik, V. (1987). *Moduli of Smoothness Springer-Verlag*, New York

17. Gavrea, I., Rasa, I. (1993). *Remarks on somequantitative Korovkin-type results* Rev. Anal. Numér. Théor. Approx, 22 (2) pp. 173-176.

18. Zhuk, V.V. (1989). *Functions of the Lip 1 class and S. N. Bernstein's polynomials* Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astronom, 1 , pp. 25-30 (Russian)

19. Gould, H.W., A.T. (1962). *Hopper Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials.* Duke Math. J., 29, pp. 51-63.

20. Douak, K. (1996). "T*herelation of the d-orthogonal polynomial stothe Appell polynomials*," Journal of Computationaland Applied Mathematics, vol. 70, no. 2, pp. 279–295.

21. Van Iseghem, J. (1987). *Vector orthogonal relations. Vector QD-algorithm* Comput. Appl. Math., 19 , pp. 141-150.

22. Maroni, P. (1989). *L'orthogonalité et lesrecurrences de polynômes d'ordre superieur à deux.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 10 pp, 105-139.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ESER, Mehmet
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 28.03.1968, Yozgat
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (505) 395 99 68
e-mail	: wazba-mehmet@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi / Matematik	1990
Lise	Sorgun Lisesi	1985

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2019- Halen	MEB Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce, Rusça, Abhazca

Hobiler

Bisiklet, Hiking, Jogging

GAZİ GELECEKTİR...