GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

BLACK SCHOLES DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ

Cihan ASAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2019

Cihan ASAR tarafından hazırlanan "BLACK SCHOLES DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………………………

Başkan: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………………………

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Kadir KANAT

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………………………

Tez Savunma Tarihi: 30/09/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu çalışmanın Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Cihan ASAR
30/09/2019

BLACK SCHOLES DENKLEMİNİN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Cihan ASAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2019

ÖZET

Bu tez, Opsiyon Değerleme yöntemlerinden Black Scholes denkleminin sonlu eleman çözümleri üzerine tasarlanmıştır. Araştırmanın ilk bölümünde sonlu elemanlar yöntemi, opsiyonlar ve opsiyon fiyatlandırma yöntemi olan Black Scholes denklemi hakkında kavramsal çerçeve verilmiştir. Sonrasında örnek bir Avrupa tipi opsiyon için verilen girdiler kullanılarak, Black Scholes denklemi sonlu elamanlar yöntemi ile çözülmüştür. Son olarak örnekte yer alan opsiyon sepeti için en iyi opsiyon fiyatları bulunmuştur.

Bilim Kodu	: 20406
Anahtar Kelimeler	: Black Scholes, Sonlu Elemanlar, Opsiyonlar, Nümerik Çözümler
Sayfa Adedi	: 57
Danışman	: Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

FINITE ELEMENT SOLUTIONS OF THE BLACK SCHOLES EQUATION

(M. Sc. Thesis)

Cihan ASAR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2019

ABSTRACT

The focus of this thesis is the finite element solutions of the Black Scholes equation. In the first part of this study, finite element method, options, option pricing method and Black Scholes equation are mentioned in general. Then, the price of a European option is solved by using the finite element method. Lastly, it is decided which option prices are the best for the option.

Science Code : 20406

Key Words : Black Scholes, Finite Element, Options, Numerical Solutions

Page Number : 57

Supervisor : Assoc. Prof. Aytekin Bayram CIBIK

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince bana bilgileriyle ve bu tezin yazılmasında önemli bir zaman ayırarak değerli görüşleriyle destek olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK'a ve bu tezin yazılmasında bana iş yerimde desteklerini esirgemeyen arkadaşım Murat AKYOKUŞ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……………………………..………………..…………………………... iv

ABSTRACT…………………………………………………………………… v

TEŞEKKÜR…………………………………………………………………… vi

İÇİNDEKİLER………………………………………………………………… vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ……………………………………………………….. x

ÇİZELGELERİN LİSTESİ…………………………………………………..... xii

1. GİRİŞ…………………………………………………………………... 1

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ……………………………………... 3

2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?... 3

2.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Gelişimi……………………………………….. 3

2.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanıldığı Alanlar………………………............ 4

2.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Analizi ve Çözüm Basamakları………………… 5

2.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları…………………... 8

2.5.1 Avantajları………………………………………………………….... 8

2.5.2. Dezavantajları………………………………………………………. 8

2.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırma……………….. 8

3. OPSİYON SÖZLEŞMELERİ……………………………………………. 11

3.1. Opsiyonun Tanımı ve Tarihi………………………………………………... 11

3.2. Opsiyon Sözleşmelerinin Yapılma Nedenleri………………………………. 13

3.2.1. Riskten korunma……………………………………………... 13

3.2.2. Kar sağlama………………………………………………………... 13

3.2.3. Kaldıraç etkisi…………………………………………………... 14

3.2.4. Arbitraj etkisi………………………...………………………….. 14

Sayfa

3.3. Opsiyonlar ile İlgili Temel Kavramlar………………………………………… 14
3.3.1. Dayanak varlık…………………………………………………………. 14
3.3.2. Kullanım (Uygulama) fiyatı (strike-exercise price)……………………. 15
3.3.3. Opsiyon vadesi…………………………………………………………. 15
3.4. Opsiyon primi (fiyatı)….…………………………………………......... 16
3.4. Temel Opsiyon Türleri………………………………………………………. 16
3.4.1. Alınan pozisyona göre opsiyon türleri………….……………………. 16
3.4.2. Kullanım sürelerine göre opsiyonlar…………………………………… 17
3.4.3. Karlılık durumuna göre opsiyon türleri…….…………………………... 18
3.5. Opsiyon Sözleşmelerine Ait Örnekler……………….………………………. 19
3.6. Alım Opsiyonu Stratejisi ve Yatırımcının Kar Zarar Durumu…………………. 20
3.7. Satım Opsiyonu Analizi ve Yatırımcının Kar Zarar Durumu….……………….. 23
3.8. Opsiyonlara Yatırım Yapmanın Avantajları ve Riskleri……………………….. 25
3.8.1. Avantajları…………………………..……………………………….. 26
3.8.2. Riskleri………….………………………..……………………………… 26
3.9. Bazı Temel Opsiyon Stratejileri…………………………………………... 26
3.9.1. Çanak stratejisi (Strangle)…………………………………………….... 27
3.9.2. Pergel stratejisi (Straddle)…………………………………..………… 28
3.9.3. Kelebek stratejisi (The Butterfly)…………………………….……... 28
3.10. Opsiyonların Fiyatlandırılması……………………………………….……… 29
3.10.1. Opsiyon fiyatını etkileyen faktörler…..……………………………….. 29
3.10.2. Opsiyon fiyatlama modelleri……………..………………………… 31
4. BLACK SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ………….. 33
4.1. Black Scholes Kısmi Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi……………….. 33

Sayfa

4.2. Black Scholes Denkleminin Formulü………………………………………….... 40

4.3. Black Scholes Denkleminin Sonlu Eleman Çözümleri………………………… 41

5. NÜMERİK ÇÖZÜMLER………………………………………………… 45

6. SONUÇ VE ÖNERİLER…………………………………………………. 51

KAYNAKLAR……………………………………………………………………… 53

ÖZGEÇMİŞ………………………………………………………………………. 57

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Bir boyutlu sonlu eleman modeli………………………………………….... 5

Şekil 2.2. İki boyutlu sonlu eleman modeli…………………………………….…… 5

Şekil 2.3. Üç boyutlu sonlu eleman modeli…………………………………………… 6

Şekil 2.4. Sonlu elemanlar modelinde düğüm ve eleman örnekleri…………………… 6

Şekil 2.5. Değişik yapılara ait sonlu eleman örnekleri……………………………….... 6

Şekil 3.1. Alım opsiyonu alan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı…………….…. 21

Şekil 3.2. Alım opsiyonu satan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı ……..……..... 22

Şekil 3.3. Satım opsiyonu alan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı ……………... 23

Şekil 3.4. Kısa pozisyon sahibi yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı ……..…..…. 25

Şekil 3.5. Çanak stratejisi örneği………………………………………...………...….. 27

Şekil 3.6. Pergel stratejisi örneği……………....…………………………...…….. 28

Şekil 3.7. Kelebek stratejisi örneği……………………………………….……... 29

Şekil 5.1. σ = 0.1 ve σ = 0.5 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)…………………………..………………..... 45

Şekil 5.2. σ = 0.1 ve σ = 0.9 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)…………………………………….……………... 46

Şekil 5.3. σ = 0.9 ve σ = 0.1 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)……………………………………………........... 46

Şekil 5.4. σ = 0.5 ve σ = 0.1 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)………………………………..……………...... 47

Şekil 5.5. σ = 0.1 ve σ = 0.1 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)……………………………………………...….... 47

Şekil 5.6. σ = 0.9 ve σ = 0.9 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptifağ ağ örgüsü (sağ)………...…………………………...…….. 48

Şekil **Sayfa**

Şekil 5.7. σ = 0.5 ve σ = 0.5 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)………………..…………………........... 48

Şekil 5.8. Normal ağ örgüsü ile tüm değerleri için elde edilen opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve ağ örgüsü (sağ)…………………………………..... 49

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 3.1. Örnek bir opsiyon sözleşmesi.…………………………………………… 19

Çizelge 3.2. Örnek bir hisse senedi opsiyonu için bilgiler…………………………..... 20

Çizelge 3.3. Opsiyon primini etkileyen faktörler……………………………………… 31

1. GİRİŞ

Günümüzde ekonomi ve finans disiplinlerinin gelişmesinde matematiksel yöntemler ile nicel ilişki analizlerinden yararlanılmaktadır. Özellikle finansal büyümenin gerçekleşmesinde finansal türev araçların fiyatlandırılması önemli etkenlerin başında gelmektedir. Opsiyon fiyatlama yöntemlerinden Black Scholes opsiyon fiyatlama modeli, matematik ile finans ve ekonominin ortak olarak çalıştığı ve en iyi sonucu verdiği denklemlerden bir tanesidir. 1997 yılında, mucitleri Fischer Black'e ve Myron Scholes'a Nobel ödülü kazandıran Black Scholes denklemi gelecekte yapılacak bir ticaretin hangi fiyat üzerinden yapılması gerektiği üzerine bir çalışmadır (Black ve Scholes, 1993).

Finans ve ekonomi alanında önemli bir yeri bulunan bu denklemin çözümlenmesi için birçok yöntem kullanılmaktadır. Ancak, Black Scholes opsiyon fiyatlama modeline ait kısmi diferansiyel denklemin sonlu eleman yöntemi ile çözümlenmesi üzerine sınırlı sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışma Black Scholes opsiyon fiyatlama modeline ait kısmi diferansiyel denklemin, sonlu eleman yöntemi ile çözümlenmesini amaçlamaktadır.

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde uygulamalı matematik dalında nümerik bir çözüm metodu olan Sonlu Elemanlar Yöntemi açıklanmıştır. Sonlu elemanlar yönteminin tarihi, kullanılmasındaki avantajlar, dezavantajlar, çözüm adımları gibi temel başlıklar üzerinde durulmuştur. Sonlu elemanların kullanıldığı alanlar hakkında kısa ve genel bilgiler de verilmiştir.

Yaklaşık çözüm veren bir metot olmasına rağmen, bir çok alanda karmaşık ve analitik olarak çözülmesi zor olan durumlarda Sonlu elemanlar üzerinde özet bir bilgi verildikten sonra ikinci bölümde, türev piyasalarda kullanılan opsiyon sözleşmeleri hakkında açıklamalar yapılmıştır. Opsiyonların tanımı, alan ve satan tarafın beklentileri üzerine sağladıkları kar-zarar durumları ve opsiyon stratejileri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise Black Scholes denklemi üzerinde durulmuştur. Black Scholes denkleminin önemi ve finanstaki yeri hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra Black Scholes kısmi diferansiyel denkleminin çıkarılışı verilmiş, örnek bir opsiyon için Black Scholes denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü üzerinde durulmuştur. Araştırmanın değerlendirme bölümde ise Black Scholes Denkleminin Sonlu Eleman

Yöntemiyle çözülmesinden çıkarılan sonuç yorumlanmış, Sonlu Eleman Yöntemi ve opsiyon fiyatı arasındaki ilişki analiz edilmiştir.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi Nedir?

Sonlu elemanlar yöntemi genellikle mühendislikte ve matematiksel fizikte kullanılan nümerik bir çözüm metodudur (Logan, 2002). Bu yöntemde amaç, karmaşık bir problemin basite indirgenerek çözümlenmesidir. Basite indirgenen problemin çözümleri nümerik çözümlerin de doğası gereği kesin sonuç yerine yaklaşık bir sonuç vermektedir. Ancak, kullanılan değerlerde değişiklik yapılarak çıkan sonucun kesin sonuca yakın bir sonuç vermesi amaçlanır.

Sonlu elemanlar yönteminin uygulanması için karmaşık bir yapının matematik formülleri (kısmi diferansiyel denklem vb.) türünden belirtilmesi gerekir. Belirtilemeyen karmaşık yapıların daha basit yapılara bölünerek, bu yapılara ait denklemlerin elde edilmesi veya matematiksel formüllerin çıkarılması gerekir. Elde edilen denklemin de sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmesi gerekir. Çözülen denklemden bütüne gidilerek, genel yapının çözümü elde edilir.

2.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Gelişimi

Sonlu elemanlar yöntemi ilk kez 1956 yılında Profesör Ray Clough tarafından uçak gövdelerinin gerilme analizi üzerine yaptığı çalışma esnasında ortaya çıkmıştır ve 1960 yılında ise "Sonlu Elemanlar" terimi kullanılmıştır (Reddy, 1993). 1965 yılında NASA (National Aeronautics and Space Administration) yapı analizinin geliştirilmesinde kullanılmasını istediği sonlu elemanlar yazılımı NASTRAN'ın geliştirilmesi için talep yayınlamıştır (Krizek ve diğerleri, 1994). 1967 yılında Dr. Zienkiewicz tarafından yayınlanan "Sonlu Elemanlar Yöntemi" isimli kitap, bu konu hakkında yayınlanan ilk kitaptır. 1968 yılında NASA'nın talep ettiği NASTRAN yazılım programı Computer Sciences Corporation (CSC) tarafından geliştirilmiştir. 1970li yıllardan itibaren sonlu elemanlar yöntem modellemelerine ait uygulamalar geliştirilmeye başlamıştır ve matematiksel olarak ispatlanmıştır. Örneğin, 1-D ve 3-D teorileri bir arada kullanılarak aynı matematiksel model içinde çözülmesi geliştirilmiştir. Bu uygulama ise bilinmeyen, belirlenemeyen ifadelerin sonlu elemanlar yöntemi ile bilinebilir bir ifadeye dönüştürülmesini sağlamıştır (He ve Zhu, 2009). 1972 yılında da, I. Babuska ve A. K. Aziz tarafından “Lectures on mathematical foundations of the finite element method” isimli sonlu elemanlar yöntemi hakkında ilk matematiksel makale yayınlanmıştır. 1973 yılında Myron Scholes ve Fisher Black’in üzerinde çalıştığı Black Scholes denklemi geliştirilmiş, takip eden yıllarda ise bu kısmi diferansiyel denklem üzerinde sonlu eleman çözümleri aranmıştır.

1980li yıllarda, sonlu elemanlar yöntemi p-serisi yakınsaklık testinin ispatı ve bu model üzerine geliştirilen matematiksel model ve programlar ile geliştirilmiştir. Bu matematiksel programlardan en önemlileri FIESTA, PROBE ve MECHANICA’dır. 2000li yıllardan günümüze kadar kullanılan bu matematiksel modeller ve programlar bilgisayarda kullanılarak geliştirilmiştir. Bu programlardan en önemli olanları SAP 2000 ve Plaxis 2D’dir. SAP 2000 programı ile karmaşık yapı sistemlerinin analizini yapmak, matematiksel olarak modellemek ve tasarlama yapmak mümkündür. Plaxis 2D ile karmaşık yapıdaki geometrik yapılar modellenebilir ve çözümelenebilir (Aksop ve Güler, 2017).

Uygulamaları gelişen sonlu elemanlar yöntemi; daha sonraki yıllarda matematiksel olarak ifade edilebilen hemen hemen her alanda kullanılmaya başlanmıştır ve birçok kompleks yapıların çözülmesine imkân sağlamıştır.

2.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanıldığı Alanlar

Sonlu elemanlar yöntemi birçok alanda matematiksel olarak formüle edilebilen ifadelere çözüm bulmaktadır. Uygulandığı alanların önemli olanları aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

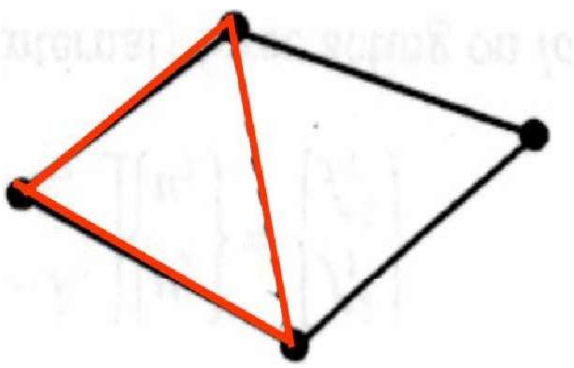
- Yapısal Analiz (Statik, Dinamik, Lineer/Nonlineer)
- Uçak, Makine, İnşaat, Otomotiv Uygulamaları,
- Isı Transferi
- Akışkanlar Mekaniği
- Yeraltı Sularının Akışı
- Manyetik Alan
- Medikal Uygulamalar
- Opsiyon Değerlemesi
- Biomekanik Uygulamaları (Ergin ve diğerleri, 2000)

2.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Analizi ve Çözüm Basamakları

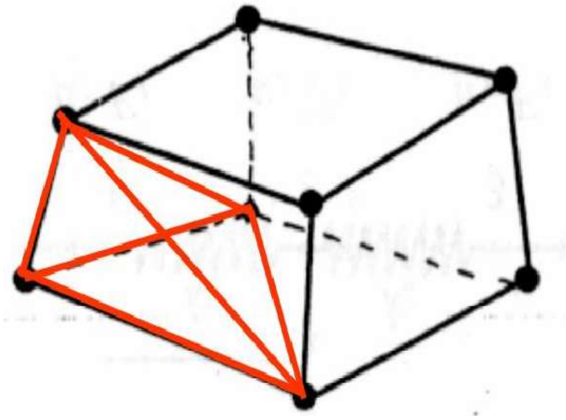
Sonlu elemanlar yönteminin analizinde temel mantık parçadan tümevarımdır. Kompleks olan yapıların daha basit parçalara bölünmesi ve bu parçaların ayrı ayrı çözülmesi amaçlanmaktadır. Daha sonra bu parçaların çözümleri birleştirilerek temel yapının problemi çözülmeye çalışılmaktadır. Ayrıklaştırma işleminde tüm nümerik çözümlerde olduğu gibi hata payının olması bize kesin sonuç yerine yaklaşık sonuç vermektedir. Bazı problemler için hem analitik hem de nümerik çözümlerden sonuca varılabilir. Bu tarz problemlerde aslında nümerik çözümün ne kadar az hata payıyla sonuca yaklaştığı tespit edilebilir. Ancak matematikte ve mühendislikte analitik olarak çözülemeyen bir çok kompleks problem olması, nümerik çözümlerin önemini artırmaktadır. Çünkü hiçbir çözüm olmamasından, yaklaşık bir çözümün bulunması her zaman daha avantaj sağlamaktadır.

Aşağıda bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu sonlu elemanlar modeline ait örnek şekiller verilmiştir. Her bir modelde eleman ve düğüm noktaları gösterilmektedir.

Şekil 2.1. Bir boyutlu sonlu eleman modeli

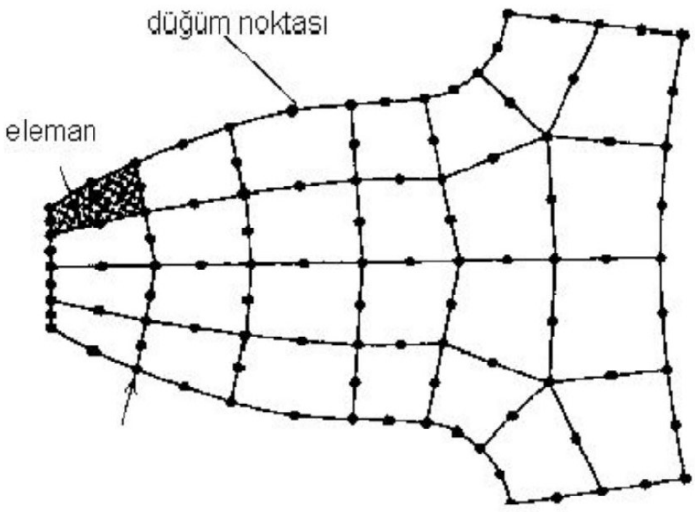


Şekil 2.2. İki boyutlu sonlu eleman modeli



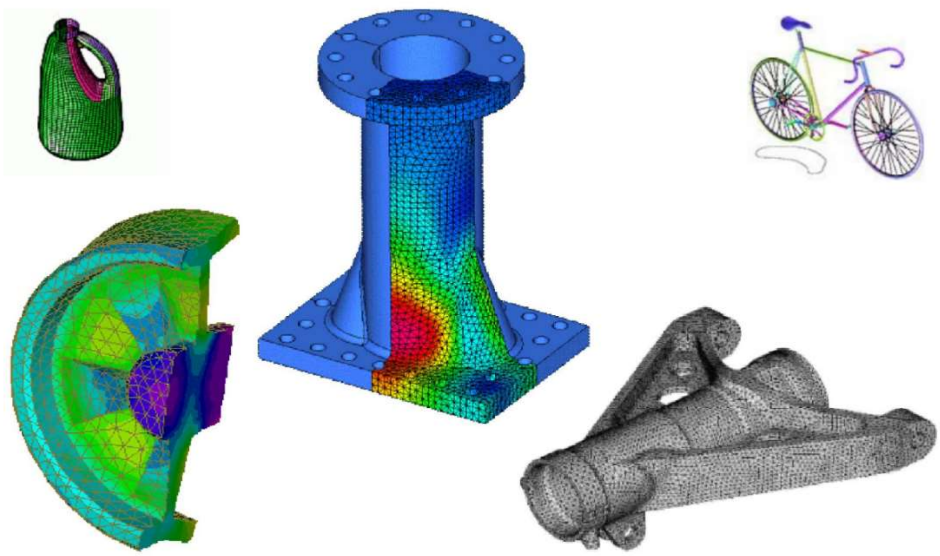
Şekil 2.3. Üç boyutlu sonlu eleman modeli

Sonlu elemanlar yönteminde ilk adım, ayrıklaştırma işlemidir. Çözüm bölgesinin *sonlu eleman* olarak ifade edilen sonlu sayıda ve birbirine bağlı geometrik alt bölgelere ayrılmasıdır. Bu elemanlar düğüm noktası (nod, bağlantı noktası) adı verilen noktalarda tekrar birleştirilir (Şekil: 4). Ayrıklaştırma işleminde önemli olan problemin bölüneceği sonlu eleman sayısıdır. Sonlu eleman sayısı arttıkça problemin çözümü gerçek çözüme yakın olacaktır. Az sayıda sonlu eleman ile daha genel gerçek çözümden uzak çözümler elde edilecektir. Ancak, en doğru sonuca ulaştıracak sonlu eleman sayısını da belirlemek kolay değildir. Çünkü her bir sonlu eleman bir bilinmeyen demek olduğundan, problemin çözümündeki bilinmeyen sayısının artmasına sebep olacaktır. Her bir eleman içindeki sürekli fonksiyonlar kullanılarak matematiksel bir denklem elde edilir. Yapının durumuna, karmaşıklığına göre bu tarzda yüzlerce denklem elde edilebilir. Bu denklemlerin çoğu bilgisayar kullanılarak çözülmektedir.



Şekil 2.4. Sonlu elemanlar modelinde düğüm ve eleman örnekleri

Şekil 2.4. de görüldüğü üzere amaç, genel yapıya ait modeli, bölgesel sürekli fonksiyonlar ile temsil etmektir. Şekildeki elemanlar üzerinde düğüm noktalarındaki değerler kullanılarak bir interpolasyon kurulması amaçlanır. Sonlu elemanlar yönteminde bulunması istenen değerler düğüm noktalarının değerleridir. Özetle, düğüm noktalarından denklemler takımı oluşturmak gerekmektedir.



Şekil 2.5. Değişik yapılara ait sonlu eleman örnekleri

Yukarıda kompleks yapıların sonlu elemanlara ayrılmış örnek çizimleri verilmiştir.

2.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları

Matematiksel denklemlerin çözümlenmesinde birden fazla yöntemin uygulanması mümkündür. Her bir yöntemin kendine ait avantajı ve dezavantajı olduğu gibi, kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu elemanlar yöntemiyle çözülmesinin de birtakım avantajları ve dezavantajları vardır.

2.5.1 Avantajları

- Sonlu elemanlar yöntemi kompleks geometrik şekillere ya da yapılara çözüm sunabilir.
- Mühendisliğin farklı alanlarındaki problemlere çözümler sunabilir.
- Kullanılan sonlu elemanlar yöntemi matematiksel olarak genelleştirilebilir ve bu genel sistem diğer alanlarda da çözüm tekniği olarak kullanılabilir.
- Değişik sınır koşullarında çözüm üretebilir.
- Metotta yapılacak bir değişikliğin çok maliyetli olmamasını sağlar.
- Farklı materyallerin oluşturduğu yapılara çözüm üretebilir.
- Kompleks geometrik problemlerinin çözümünde analitik ve sürekli yöntemlere göre daha az zaman almaktadır (Thiele ve diğerleri, 2017).

2.5.2. Dezavantajları

- Nümerik bir çözüm metodu olduğundan kesin sonuçlar değil de yaklaşık çözümler elde edilir.
- Doğru veriler işleme alınmadığı taktirde çıkan sonuçların gerçekten uzak olmasına sebep olur.
- Sınır koşullarında yapılacak belirleme hatası, sonucu gerçek sonuçtan farklı vermektedir.

2.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırma

Sonlu elemanlar yöntemi nümerik bir çözüm metodudur. Nümerik çözümlerin analitik çözümlerden temel farkı çözümlerin kesin sonuç değil de yakın çözüm vermesidir. Ancak analitik çözümler her yapıya ya da modele kolaylıkla uygulanamadığı için nümerik çözüm yöntemlerinin önemi büyüktür. Nümerik çözüm yöntemlerinden başlıca bilinenleri sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi ve sonlu hacimler yöntemidir (Yıldırım, 2016).

Sonlu Farklar yöntemi ile sonlu elemanlar yöntemi, sonlu hacimler yöntemine göre daha sık kullanılan yöntemlerdir. Aslında iki metot birbirine çok benzemektedir. Her iki metot da bir bütünü parçalara ayırarak ve bu parçalardan matematiksel denklemler çıkartarak, bu denklemlerden tümevarım gerçekleşir. Ayrıca, bu metotlar da, bilinmeyen büyüklükteki yapıyı temsil edecek fonksiyonu ayrıklaştırarak diferansiyel denklem elde etmeye çalışılır.

İki yöntemi ayıran fark ise sonlu farklar yönteminde noktasal yaklaşım tekniği kullanılırken sonlu elemanlar yönteminin ise bölgesel yaklaşıma dayanarak çözümler geliştirmesidir.

Sonlu hacimler yönteminde ise sonlu sayıda hacimlere bölünen bir yapının parçalarından elde edilen denklemlerin kullanılarak tümevarım yöntemi ile çözüm aranır (Yıldırım, 2016).

3. OPSİYON SÖZLEŞMELERİ

1960'lı yılların sonuna kadar etkin bir şekilde kullanılan Bretton Woods sisteminin çöküşü ve yaşanan petrol krizi, dünya çapında etkisini göstermiştir (Özkan, 2011). Artan döviz kuru riskleri ve dalgalı kur politika uygulamalarının yaygınlaşması risk yönetimi kavramının ortaya çıkmasına sebep olmuştur, bu da türev araçlarının gelişmesine ön ayak olmuştur (Yumurtacı, 2012).

Finansal türevler değeri başka bir varlığın değerine bağlı olan finansal araçlardır. Örneğin; herhangi bir şirketin hisse senedi değerine bağlı bir sözleşme yapıldığında, hisse senedi değeri değiştikçe buna bağlı olan sözleşmeler de değişiklik gösterecektir. Bu tarz belirsizlik ve değişiklik durumlarında, finansal türev araçları; riskleri önleme avantajı, yatırım yapma imkânı, geleceğe yönelik fiyat oluşumu ve arbitraj gibi özellikleri içermektedir (Abanoz, 2005; Apak ve Uyar, 2011; Eda, 20016). Günümüzde kullanılan türev araçları; futures, forward, swap ve opsiyonlar olmak üzere 4 tanedir. Futures işlemleri, herhangi bir varlığın gelecek tarihte teslimatı yapılmak üzere bugünden belirlenen bir miktar üzerinden alım satım işlemlerinin yapılmasıdır. Forward sözleşmeleri, belirli bir miktarda kıymetli varlığın önceden anlaşılmış bir fiyat üzerinden ileri bir tarihte alım satım işlemlerinin yapıldığı sözleşmelerdir. Swap ise alıcı ve satıcı tarafın belirli yükümlülükler dâhilinde farklı faiz ödemelerini ya da döviz türlerini değiştiği sözleşmelerdir (Tanyel, 2016).

Bu çalışmanın diğer bölümünde Türev araçlarından opsiyon kavramı üzerinde durulacaktır.

3.1. Opsiyonun Tanımı ve Tarihi

Bir finansal türev aracı olan opsiyon sözleşmeleri iki taraf arasında yapılan ve alıcıya bugünden belirlenen bir fiyat üzerinden, opsiyon primi ödeyerek, bir malı gelecekte satın alma ya da satma hakkı veren sözleşmelerdir (Apak ve Uyar, 2011; Kütük, 2014; Yalçıner ve diğerleri, 2014). Opsiyon sözleşmelerinde, alıcı opsiyona dayanak teşkil eden malı vade sonu geldiğinde alma ya da satma hakkına sahiptir. Bir zorunluluk söz konusu değildir. Alıcı isterse sözleşmenin vadesi geldiğinde malı almama ya da satmama hakkına sahiptir. Ancak, satıcı vadesi geldiğinde malı almakla ya da satmakla yükümlüdür (Saunders ve Cournet, 2012).

Türev piyasaları tarihine bakıldığında ilk türevsel ürünle ilgili işlemin ünlü Matematikçi Thales (MÖ 624- MÖ 546) tarafından yapıldığı bilinmektedir. Bu zamana kıyasla, yaptığı işlem tam olarak da günümüzle aynı olmasa da aslında Thales'in zeytin üzerinde yaptığı işlem vadeli işlemdir. O dönemde Thales, kışın ortasında zeytin fiyatlarının yükseleceğini öngörmüş ve zeytin hasadı için yağhaneler ile belirli bir fiyat üzerinden anlaşma sağlamıştır. Zeytin hasadı zamanı da öngörüsü doğru çıktığı için yağhanelere olan talep artmış ve Thales daha yüksek bir fiyat üzerinden satışını yaparak kar elde etmiştir. Aslında Thales, dayanak varlığın fiyatının yükseleceği beklentisi ile opsiyonu alan bir yatırımcı davranışı sergilemiştir (Ilkiw J.H., 2006).

Vadeli işlemler piyasasına verilebilecek ilk örnek ise 1730 yılında Japonya'nın Osaka şehrinde kurulan Dojima Prinç Piyasasıdır. Bu vadeli işlem borsasında sadece vadeli işlem sözleşmeleri işlem görmüştür (Karatepe, 2000).

1848 yılında Amerika'nın Chicago kentinde kurulan Chicago Board of Trade türev piyasalarının gelişmesinde önemli bir adım olmuştur (Eda, 2016). O dönemde çiftçilerin ürettiği tarımsal ürünlerin fiyatlarında mevsimlik farklılıkların olması arz ve talep dengesinin bozulmasına neden olmuştur. Ayrıca Chicago için ulaşım sorunu, ürünlerin depolanma sorunu gibi nedenler de piyasalardaki durumu daha zorlaştırmıştır. Bu gibi zorlukları, belirsizlikleri çözmek adına 1848 yılında Chicago'da bazı tüccarlar bir araya gelerek Chicago Board of Trade'i kurmuşlardır. Böylelikle alıcı ve satıcıların işlem yapacakları bir merkez kurulmuş ve ticareti geliştirecek önemli bir adım atılmıştır. 1851 yılında ise mısır üzerinden yapılan sözleşme vadeli işlemler piyasasının ilk sözleşme örneği olmuştur (Eda, 2016).

Türkiye'de ise türev piyasalarının tarihi gelişimi incelendiğinde, ilk opsiyon ve vadeli işlem sözleşmeleri ile ilgili düzenleme 1995 yılı 22352 sayılı Resmi Gazete'de yayınlanan "Vadeli işlem ve Opsiyon Borsalarının Kuruluş ve Çalışma Esasları Hakkında Genel Yönetmelik" ile yapılmıştır. 1996 yılı 22791 sayılı Resmi Gazetede altın ve dövize dayalı opsiyon alım ve satımına ilişkin düzenlemeler belirlenmiştir. 1997 yılı 22892 sayılı hisse senedi, faiz getirili menkul kıymetler, endeks ve diğer finansal menkul kıymetler üzerine opsiyonlu sözleşmeler yapılmasına ilişkin düzenlemeler yapılmıştır. Son olarak da mal üzerine opsiyon sözleşmesine dair düzenleme Sanayi ve Ticaret Bakanlığı tarafından düzenlenmiştir (Karatepe, 2000: 7).

3.2. Opsiyon Sözleşmelerinin Yapılma Nedenleri

Opsiyon sözleşmelerinin sağladığı temel faydalar opsiyon sözleşmelerinin işlem hacimlerini daha cazip hale getirmiştir (Bloomberg, erişim tarihi:10.06.2019). Opsiyon sözleşmelerinin artmasının en büyük sebepleri arasında opsiyonun sağladığı riski azaltma özelliği ve kar getirisidir. Aynı şekide opsiyonların kaldıraç etkisi ve arbitraj imkanı da opsiyonları cazip hale getirmektedir. Aşağıda bu özelliklere ait açıklamalar detaylı olarak verilmiştir (Saltoğlu, 2014).

3.2.1. Riskten korunma

Yatırımcılar opsiyon sözleşmesi ile yatırımlarının risklerini azaltabilirler. Yatırım yapılan bir menkul kıymetin fiyatının düşme riskine karşı yatırımcı alım opsiyonu alarak riskini azaltabilir. Bu durumda fiyat yükseldiğinde kar eden yatırımcı için fiyat beklediği değerin altına düştüğünde ise riski ödediği prim ile sınırlıdır (Hull, 2015). Alım opsiyonu, yatırımcısı için tam bir sigorta işlevi görmektedir. Örneğin, 50,000 TL değerinde bir otomotiv alan ve yıllık 1000 TL değerinde kasko yaptıran bir vatandaş ile 50,000 TL değerinde bir hisse senedi alım opsiyonu alan ve bu opsiyon için 1000 TL prim ödeyen bir yatırımcı karşılaştırıldığında; aracın bir kaza sonucu kaybedilmesi durumunda araç sahibi kaskodan 50,000 TL alacaktır. Araç sahibinin kaybı sadece ödenen 1000 TL sigorta bedelidir. Ancak, araç sahibi aracına kasko yaptırmadığı durumda ise kaybedeceği tutar 50,000 TL olacaktı. Aynı şekilde hisse senedinin de değerinin sıfır olduğu durumda; opsiyonu alan yatırımcı opsiyonu kullanmak istemeyecektir. Bu nedenle başlangıçta ödediği opsiyon primi 1000 TL yatırımcının zararıdır. Yatırımcı opsiyon sözleşmesini kullanmadığı ve sadece hisse senedini aldığı durumda kaybı 50,000 TL olacaktır. Özetle, opsiyon sözleşmeleri bir sigorta görevi görerek, yatırımcıları büyük risklerden korumaktadır.

3.2.2. Kar sağlama

Yatırımcıların amaçları arasında her zaman kar sağlama vardır. Opsiyon sözleşmelerinde opsiyonu alan taraf dayanak varlığın fiyatı yükseldiğinde kar elde edecektir. Satıcı ise opsiyona konu alan dayanak varlığın fiyatı düştüğünde kar elde edecektir. Opsiyonlar dayanak varlığın fiyatının hem düşmesi hem de yükselmesi durumunda yatırımcının aldığı pozisyona göre kar sağlayabilir (Yumurtacı, 2012).

3.2.3. Kaldıraç etkisi

Kaldıraç etkisi, finansal piyasalarda düşük sermaye ile büyük hacimli işler yapılmasına denir. Yatırımcılar yatırımlarına göre çok daha büyük getiri elde edebilirler, ancak zararları da büyük ölçüde olabilir. Kaldıraç oranı arttıkça yatırımcının elde edeceği getiri ve buna bağlı olarak risk de artar (Gözgör, 2008: 92). Örneğin hisse senedi opsiyon sözleşmesi satın alan bir yatırımcı kaldıraç etkisi sayesinde sadece hisse senedine yatırım yapmış bir yatırımcıya kıyasla daha fazla işlem yapabilmektedir.

3.2.4. Arbitraj etkisi

Arbitraj, aynı menkul kıymetler için piyasalarda farklı fiyatlar oluşması durumunda, menkul kıymetin fiyatın ucuz olduğu piyasadan alınıp, fiyatın yüksek olduğu piyasada satılması işlemine denir (Tanyel, 2016:7). Opsiyon piyasaları için de arbitraj imkânı doğabilir. (Cox and Rubinstein, 1985). Örneğin, herhangi bir dayanak varlığın kullanım fiyatı 90 TL, spot fiyatının o an 100 TL ve alım opsiyon priminin 5 TL olduğu varsayıldığında, yatırımcı alım opsiyonunu 5 TL ödeyerek kullanacaktır ve 90 TL ye o menkul kıymeti opsiyonu kullanarak alacak, piyasada 100 TL üzerinden satış yapacaktır. Ödediği prim düşürüldüğünde ise yatırımcı bu durumda risk almadan 5 TL kar sağlayacaktır. Özetle, arbitraj farklı piyasalardaki fiyat değişikliğinden faydalanmaktır.

Yukarıda opsiyon sözleşmelerinin yapılma nedenleri kısaca özetlenmiştir, çalışmanın devamında ise opsiyonlarla ilgili temel kavramlar ve temel opsiyon türlerine yer verilecektir.

3.3. Opsiyonlar ile İlgili Temel Kavramlar

Opsiyon sözleşmelerinin tam olarak kavranabilmesi için kullanılan terimlerin ve sözleşmede adı geçen temel kavramların bilinmesi gerekmektedir. Dayanak varlık, kullanım fiyatı, opsiyon vadesi ve opsiyon fiyatı burada açıklayacağımız en temel unsurlardır (Ross ve diğerleri, 2002).

3.3.1. Dayanak varlık

Opsiyonlar değeri başka bir varlığa bağlı olan türev araçlardır. Opsiyonların ya da genel olarak türev araçların temsil ettiği bu varlıklar dayanak varlık olarak tanımlanmaktadır.

Türev araçları dayanak varlıkları temsil eden finansal enstrümanlardır (Ross ve diğerleri, 2002).

Bu enstrümanlara örnek olarak: Hisse Senedi Opsiyonları, Endeksli Opsiyonlar ve Forex Opsiyonları verilebilir.

Hisse Senedi Opsiyonları: Kullanım fiyatı hisse senedi fiyatına bağlıdır. Opsiyon borsasında işlem gören hisse senedi opsiyonları, alım opsiyonu ya da satım opsyionu alan yatırımcıya belirli bir tarihte, belirlenmiş bir fiyattan hisse senedini alma ya da satma hakkı verir.

Endeksli Opsiyonlar: Kullanım fiyatı, hisse senedi endeks seviyesine bağlıdır (S&P 500).

Forex Opsiyonları: Kullanım fiyatı döviz kurlarına bağlıdır (Ross ve diğerleri, 2002; Tekbacak, 2010).

3.3.2. Kullanım (Uygulama) fiyatı (strike-exercise price)

Opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın vadesi geldiğinde alınıp satılacağı fiyatı temsil eder. Opsiyon kullanım fiyatını, opsiyon alan ve satan taraf kendi arasında belirler. Örneğin; altın alış-satışına dair, kullanım fiyatı 300 TL olan bir opsiyon sözleşmesi düzenlendiğinde, opsiyonu alan kişi altını vadesi gelmeden 300 TL den alma hakkına sahiptir. Satan kişi ise 300TL den satmakla yükümlüdür.

3.3.3. Opsiyon vadesi

Opsiyonun geçerli olacağı son günü ifade eder. Aynı şekilde türev araçlarının kullanılacağı son gündür. Vadesine göre iki tür opsiyon vardır. Bunlar Avrupa tipi ve Amerikan tipidir. Avrupa tipi opsiyonlar belirli bir tarihte kullanılır, ancak Amerikan tipi opsiyonlar vadesinden önce herhangi bir tarihte kullanılabilir (Ross ve diğerleri, 2002).

Amerikan tipi opsiyonlar için; haftalık opsiyonlar, aylık opsiyonlar ve çeyrek dönemli opsiyonlar gibi vadesi değişken olan opsiyon türleri mevcuttur.

3.3.4. Opsiyon primi (fiyatı)

Opsiyonu alan yatırımcının opsiyonu satan tarafa ödediği ücrete opsiyon primi denir. Opsiyonu satan tarafın sözleşme için talep ettiği tutardır. Bu tutar için belirli bir standart yoktur, tamamen opsiyona ve opsiyonu satan kişiye bağlıdır. Amerikan tipi opsiyonların vade avantajı olduğu için opsiyon primleri daha yüksektir (Kurar ve Çetin, 2016: 409).

3.4. Temel Opsiyon Türleri

Opsiyon türlerini 3 farklı grupta ayrıştırabiliriz. Alınan pozisyona göre alım opsiyonu (call option) ve satım opsiyonu (put option) olmak üzere iki gruba ayrılır. Kullanım sürelerine göre opsiyonlar; Amerikan tipi ve Avrupa tipi olmak üzere iki çeşittir. Son olarak da karlılık durumuna göre 3 çeşit opsiyon türü vardır. Bunlar da opsiyon karda, opsiyon zararda ve başa baş pozisyonlarıdır.

3.4.1. Alınan pozisyona göre opsiyon türleri

<u>Alım opsiyonu (Call option)</u>

Alım opsiyonu alan tarafa (uzun pozisyon sahibi) belirli bir vadeye kadar, opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim ödeyerek alma hakkı verir. Yatırımcı bu hakkı kullanmak zorunda değildir. Alım opsiyonunu satan yatırımcı (kısa pozisyon sahibi) ise opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir vadeye kadar belirli bir prim alarak satmakla yükümlüdür (Thomsett, 2007: 75). Alım opsiyonuna aşağıdaki Amazon (AMZN) hisse senedi örnek olarak verilebilir:

Amazon(AMZN) hisse senedi alım opsiyonu için:

AMZN alım opsiyonu kullanım fiyatı $560, vadesi Ocak 2020 ve opsiyon primi $35 olduğu varsayıldığında; alım opsiyonu alan yatırımcı; $35 ödeyerek Ocak 2020 ve öncesinde AMZN hisse senedini $560 ödeyerek alma hakkına sahip olur, ancak senedi almak zorunda değildir. Sözleşme yapıldığı zaman $35 ödemek zorundadır. Hisse senedi için ise değerine göre karar verecektir. Opsiyonu satan yatırımcı $35 opsiyon primi karşılığında opsiyonu alan yatırımcıya karşı yükümlülük altına girer. Ocak 2020 ve öncesinde opsiyonu alan yatırımcı opsiyonu kullanmak isterse satan kişi, AMZN hisse senedini $560 karşılığında satmakla yükümlüdür.

Satım opsiyonu (Put option)

Satım opsiyonunu alan yatırımcı(uzun pozisyon sahibi) belirli bir vadeye kadar, opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim bedeli karşılığında satma hakkına sahiptir. Yatırımcı bu hakkını kullanmak zorunda değildir. Dayanak varlığı alacak yatırımcı(kısa pozisyon sahibi) ise opsiyona konu olan dayanak varlığı belirli bir prim karşılığında almakla yükümlüdür (Clarke, 1996**).** Aşağıdaki Amazon (AMZN) hisse senedi örneği ile satım opsiyonu daha anlaşılır olacaktır:

AMZN satım opsiyonu kullanım fiyatı $560, vadesi Ocak 2020 ve opsiyon primi $35 olduğu varsayıldığında; uzun pozisyon sahibi $35 ödeyerek Ocak 2020 ve öncesinde AMZN hissesini $560 karşılığında satma hakkına sahip olur, ancak opsiyon hakkını kullanmak zorunda değildir. Kısa pozisyon sahibi ise $35 opsiyon primi karşılığında opsiyonu alan yatırımcıya karşı yükümlülük altına girer. Ocak 2020 ve öncesinde opsiyonu alan kişi kullanmak isterse AMZN hissesini $560 ödeyerek almak zorundadır.

3.4.2. Kullanım sürelerine göre opsiyonlar

Gemmill (1992) kullanım sürelerine göre opsiyonları ikiye ayırmıştır. Bunlar, Avrupa tipi ve Amerikan tipi opsiyonlardır.

Avrupa tipi opsiyonlar

Avrupa tipi opsiyonlarda opsiyonu alan taraf, opsiyonu vade gününde kullanabilir. Sadece vade gününde kullanma kısıtı olduğundan Amerikan tipi opsiyonlara göre opsiyon primi daha uygundur. Avrupa tipi opsiyonlar genellikle Black Scholes yöntemi ile değerlendirilir (Şeker ve diğerleri, 2018). Bu tezin devamında Black Scholes denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde yine Avrupa tipi opsiyonlar üzerinde durulacaktır.

Amerikan tipi opsiyonlar

Amerikan tipi opsiyonlarda opsiyonu alan taraf, opsiyonun vadesine kadar herhangi bir tarihte opsiyonu kullanabilir. Vadeye kadar kullanma serbestliği olduğundan Avrupa tipi opsiyonlara göre genelde opsiyon primi, daha fazladır. Amerikan tipi opsiyonlar daha esnek olması dolayısıyla en az Avrupa tipi opsiyonlar kadar değerlidir.

3.4.3. Karlılık durumuna göre opsiyon türleri

Opsiyonun alım ve satım opsiyonu olmasına göre, opsiyonların karlılık durumları opsiyonun kullanım fiyatı ve spot fiyatı karşılaştırmasına göre yapılmaktadır.

Opsiyon karda durumu (In the money)

Alım opsiyonu için, dayanak varlığın kullanım fiyatı spot fiyattan yani opsiyona konu olan dayanak varlığın o anki fiyatından düşük ise opsiyona karda opsiyon adı verilir. Çünkü opsiyonu alan yatırımcı dayanak varlığı daha düşük fiyattan almıştır ve vadesi geldiği gün dayanak varlığın fiyatı yüksektir. Yatırımcı dayanak varlığı o an yüksek fiyattan satarak spot fiyatla arasındaki fark kadar kar etmektedir.

Satım opsiyonunda ise, satım opsiyonu kullanım fiyatı spot fiyattan yani opsiyona konu olan dayanak varlığın o anki fiyatından yüksek ise opsiyona karda opsiyon adı verilir. Çünkü opsiyonu satan yatırımcı fiyatın düşeceği beklentisiyle dayanak varlığı yüksek fiyattan satma hakkını almıştır. Kullanım fiyatı ve spot fiyat arasındaki fark kadar yatırımcının karı söz konusudur.

Opsiyon zararda durumu (Out of the money)

Alım opsiyonu için, dayanak varlığın kullanım fiyatı spot fiyattan büyükse opsiyon zarardadır. Yani opsiyonu alan yatırımcı fiyatın yükseleceğini beklentisiyle dayanak varlığı kullanım fiyatından almayı istemiştir. Ancak dayanak varlığın spot fiyatı daha düşük olduğu için zarar edecektir. Bu durumda yatırımcı opsiyonu satan kişiden değil de piyasadan almak isteyecektir. Ancak opsiyon için ödediği prim kadar zararı olacaktır (Saunders ve Cournet, 2012).

Satım opsiyonunda ise, satım opsiyonu kullanım fiyatı spot fiyattan düşük ise opsiyona zararda opsiyon adı verilir. Çünkü satma hakkını alan yatırımcı, spot fiyatının düşeceği beklentisiyle dayanak varlığı kullanım fiyatından satma hakkına sahip olmak ister. Bu durumda dayanak varlığı spot fiyattan daha düşük fiyata satmak yatırımcının zararına olacaktır (Saunders ve Cournet, 2012).

Opsiyonun başa baş durumu (At the money)

Alım opsiyonu ve satım opsiyonu için, opsiyona konu olan dayanak varlığın kullanım fiyatı spot fiyatına eşit ise opsiyon başa baştır denir. Bu durumda ne kar ne de zarar söz konusudur. Yatırımcı için opsiyonu satan taraf ile piyasadan alma arasında hiçbir fark yoktur.

Aşağıda yer alan tabloda genel olarak bir opsiyon sözleşmesinde belirtilen unsurlar gösterilmiştir. Bu özellikler standart ve vadeli işlem sözleşmelerinde belirtildiği şekildedir.

3.5. Opsiyon Sözleşmelerine Ait Örnekler

Aşağıda Tablo 3.1. de varsayılan bir opsiyon sözleşmesinin özellikleri verilmiştir.

Çizelge 3.1. Örnek bir opsiyon sözleşmesi

Tanımlar	Açıklamalar
Sözleşme	BIST 100 Endeksi
Sözleşme Büyüklüğü	Endeks*100 000
Sözleşme Ayları	Yılın Her Ayı
Asgari Fiyat Adımı	1 Endeks Puanı * 100 000
Son İşlem Günü	Vade Ayının 3. Haftasının Son İş Günü
Vade Sonu Tarihi	Son İşlem Gününü Takip Eden Birinci İş Günü
İşlem Saatleri	10.00-16.45
Uzlaşma Fiyatı	Geçen Son İşlem İle Adil Değerinin Ortalaması
Uzlaşma Şekli	Türk Lirası İle Aynı Gün Nakdi Uzlaşma
Başlangıç Teminatı	Sözleşmenin Parasal Büyüklüğünün %15'i (Kısa Pozisyon)
Sürdürme Teminatı	Sözleşmenin Parasal Büyüklüğünün %5'i

Çizelge 3.2. Örnek bir hisse senedi opsiyonu için bilgiler

ARCLK Hissesi, İşleme Koyma Fiyatı	2,75 TL
Opsiyon Sözleşmesi Fiyatı (Primi)	0,04 TL
Sözleşme Büyüklüğü	100 Lot (adet)
Vade Sonu Fiyatı	4 TL

3.6. Alım Opsiyonu Stratejisi ve Yatırımcının Kar Zarar Durumu

Yukarıda da belirttiğimiz gibi alım opsiyonu alan yatırımcı (call buyer) vadesi geldiğinde opsiyonu kullanma hakkına sahiptir, ancak yükümlülüğü yoktur. Ancak, opsiyonu satan yatırımcı (call writer) vadesi geldiğinde karşı tarafa sözünü tutmakla zorunludur.

Burada yine yukarıdaki AMZN hisse senedi örneği üzerinden, yatırımcıların beklentilerini, ödeme grafiğini ve yatırımcıların kar-zarar grafiğini inceleyerek konuya daha hakim olabiliriz.

AMZN hisse senedi üzerinde alım opsiyonu alan bir yatırımcının düşünceleri ve beklentileri aşağıdaki gibi olacaktır.

- Yatırım yapmak istiyorum.
- Sınırsız karım, sınırlı zararım olsun.
- Kaybedeceğim tutar en fazla ödeyeceğim prim kadar olsun.
- AMZN hisse senedinin değeri artacaktır.
- Bunun için 1 yıl süre yeterlidir.
- 1 yılsonunda başka bir yatırım yapabilirim.

Alım opsiyonu yatırımcısı yukarıdaki nedenlerden dolayı AMZN hisse senedi için $35 ödeyerek Ocak 2020 ve öncesinde opsiyonu $560 üzerinden kullanma hakkına sahip olacaktır. Bunun için ödeme tutarına ve yatırımcının kar-zarar durumuna ilişkin şekil aşağıda verilmiştir.

Şekil 3.1. Alım opsiyonu alan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı

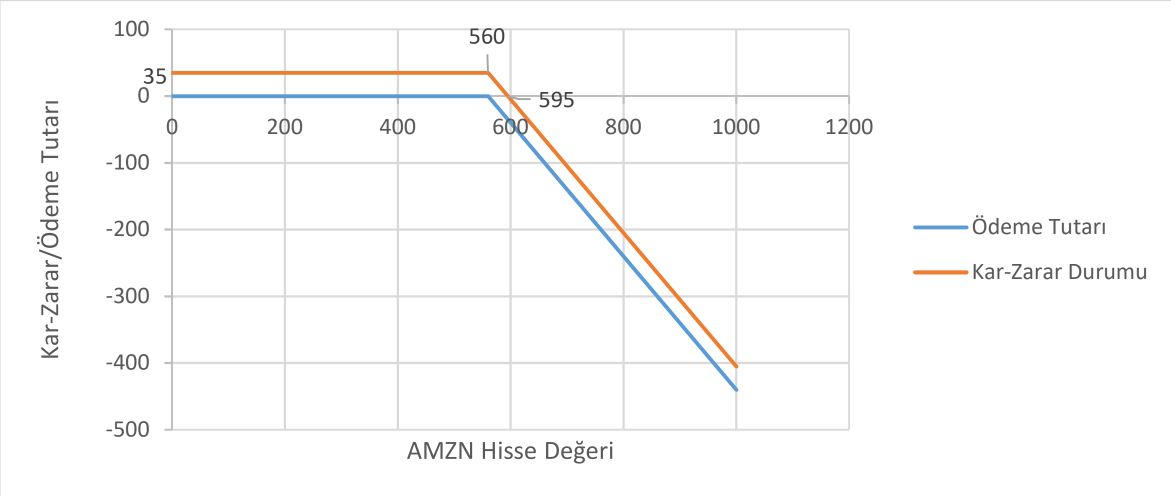
Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi; alım opsiyonu sahibi yatırımcı, kullanım fiyatı $560 olan AMZN hissesi üzerinden, piyasa fiyatı $595 dan itibaren kar yapmaya başlayacaktır. $595 noktası yatırımcı için başa baş noktası olup, bu noktada yatırımcı ne kar ne de zarar etmektedir. Hisse senedinin cari değeri $560'ın altında olduğu her durum için aslında yatırımcının zararı şekilde görüldüğü gibi $35'dır. Yani uzun pozisyon sahibi yatırımcının riski sınırlıdır. Çünkü yatırımcının opsiyonu kullanma zorunluluğu olmadığı için burada opsiyonu işleme almayacaktır. Hisse senedinin değeri $595'ın üzerinde olduğu durumda ise şekilde görüldüğü gibi artan bir eğilim söz konusu olup, yatırımcının karı sınırsızdır. Bu durumda yatırımcı opsiyonu kullanmak isteyecektir ve hisse senedini $560 üzerinden alacaktır, sonuç olarak cari değer üzerinden satarak büyük bir kar elde edecektir.

Şekilde görüldüğü gibi uzun pozisyon sahibi yatırımcı hem büyük kayıp yaşamayacak şekilde kendisini garantiye almıştır. Hem de sınırsız bir kar potansiyeline sahip olma imkânı yakalamıştır. Ayrıca burada şekil üzerinde opsiyonların riskten koruma sağlama özelliği daha net anlaşılmaktadır.

AMZN hisse senedi üzerinde alım opsiyonu satan bir yatırımcının düşünceleri ve beklentileri aşağıdaki gibi olacaktır.

- AMZN hisse senedinin değeri 1 yıl içerisinde ya çok az düşecektir ya da değeri çok fazla değişmeyecektir.
- Opsiyondan elde edeceğim kar opsiyonun değeri kadar olsun.

Bu yatırımcı AMZN hisse senedini opsiyonu alan kişiye $560 kullanım fiyatı üzerinden $35 prim alarak vermeyi kabul eder. Opsiyonu satan yatırımcı için kar-zarar durumunu ve ödeme tutarını gösteren şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.2. Alım opsiyonu satan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, alım opsiyonu satan kişi kullanım fiyatı $560 olan AMZN hissesi üzerinden, piyasa fiyatı $595 a kadar kar yapmaktadır. $595 noktası yatırımcı için başabaş noktası olup, bu noktada yatırımcı ne kar ne de zarar elde etmektedir.

Hisse senedinin cari değeri $560'ın üzerinde olduğu durumda yatırımcının zararı gittikçe büyümektedir. Burada aslında opsiyon sözleşmelerinin bazı durumlarda ne kadar riskli olabileceği net olarak şekilde görülmektedir. Yatırımcının zararı ve riski sınırsızdır. Çünkü opsiyonu alan yatırımcı bu tutarın üzerinde opsiyonu kullanmak isteyecektir. Ve satan kişi de bu işlemi yapmakla yükümlüdür. Bu nedenden dolayı opsiyonu satan kişinin iyi bir analiz yapması gerekmektedir. Hisse senedinin değeri $560'ın altında olduğu sürece opsiyonu alan yatırımcı opsiyonu kullanmayacaktır ve bu durumda opsiyonu satan kişi $35 prim karı elde edecektir. Aslında yatırımcının karı en fazla $35 olmaktadır.

Şekilde görüldüğü gibi opsiyon satan kişi sınırlı bir kar ile kendini sınırlandırmıştır, ancak riski sınırsızdır. Burada dayanak varlığın fiyatının çok fazla yükselmeyeceğini düşünen yatırımcının önemli bir analiz yapması gerekmektedir.

3.7. Satım Opsiyonu Analizi ve Yatırımcının Kar Zarar Durumu

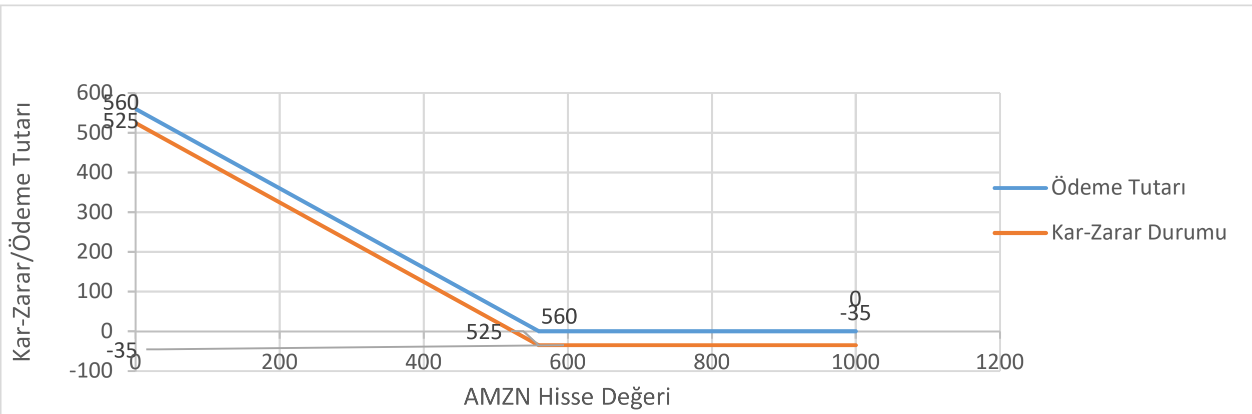
Daha önce tanımladığımız gibi satım opsiyonu alan yatırımcı (put buyer) vadesi geldiğinde opsiyonu kullanma hakkına sahiptir, ancak yükümlülüğü yoktur. Kısa pozisyon sahibi yatırımcı vadesi geldiğinde şayet uzun pozisyon sahibi opsiyonu kullanmak isterse dayanak varlığı almakla yükümlüdür.

Burada yine yukarıdaki AMZN hisse senedi örneği üzerinden, yatırımcıların beklentilerini, ödeme grafiğini ve yatırımcıların kar-zarar durumu grafiğini inceleyerek konuya daha hakim olabiliriz.

AMZN hisse senedi üzerinden satım opsiyonu alan bir yatırımcının düşünceleri ve beklentileri aşağıdaki gibi olacaktır:

- Yatırım yapmak istiyorum.
- Karım da zararım da sınırlı olsun.
- Kaybedeceğim tutar en fazla ödeyeceğim prim kadar olsun.
- AMZN hisse senedinin değeri azalacaktır.
- 1 yıl süre yeterli olacaktır.
- 1 yıl sonunda başka bir yatırım yapabilirim.

Satım opsiyonu yatırımcısı yukarıdaki nedenlerden dolayı AMZN hisse senedi için $35 ödeyerek Ocak 2020 ve öncesinde opsiyonu $560 üzerinden satma hakkına sahip olacaktır. Bunun için ödeme tutarına ve yatırımcının kar-zarar durumuna ilişkin şekil aşağıda verilmiştir.



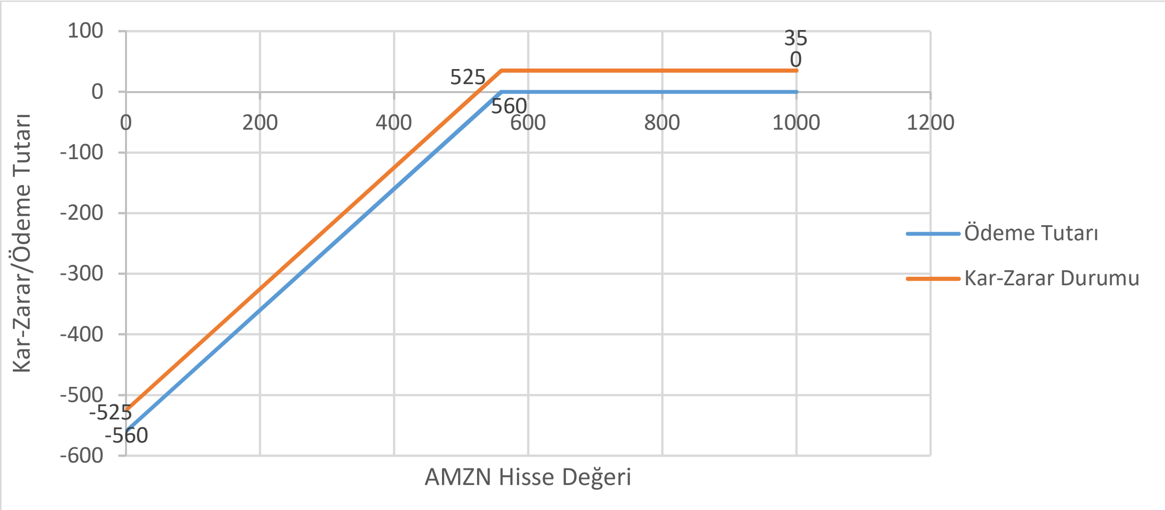
Şekil 3.3. Satım opsiyonu alan yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı

Yukarıdaki şekil de görüldüğü gibi, uzun pozisyon sahibi yatırımcı kullanım fiyatı $560 olan AMZN hissesi üzerinden, piyasa fiyatı 0 ile $525 arasında kar yapacaktır. $525 noktası yatırımcı için başabaş noktası olup, bu noktada yatırımcı ne kar ne de zarar elde etmektedir. Çünkü elindeki AMZN hisse senedini $560 karşılığında satma hakkını kullanacaktır. Ve ödediği prim $35 düşüldüğünde, $525 üzerinden hisseyi tekrar alacaktır. Hisse senedinin cari değeri $525'ın üzerinde olduğu her durumda yatırımcının zararı başlayacaktır. Fiyat $560 olana kadar yatırımcının zararı $35'a kadar artacaktır. $560 ve sonrası için yatırımcının zararı $35 ile sınırlı olacaktır. Çünkü opsiyonu alan yatırımcı opsiyonu kullanmak zorunda olmadığından işlem yapmayacaktır. Şekilde görüldüğü gibi yatırımcının maksimum zararı ödediği opsiyon primi $35'dır. Yani uzun pozisyon sahibi yatırımcının riski sınırlıdır. Şekil üzerinde uzun pozisyon sahibi yatırımcının riskten koruma sağladığı daha net anlaşılmaktadır. Ayrıca, şekilde görüldüğü gibi uzun pozisyon sahibi yatırımcı hem büyük kayıp yaşamayacak şekilde kendisini garantiye almıştır. Hem de bir menkul kıymetin değeri düşerken kar sağlayacaktır.

AMZN hisse senedi üzerinde kısa pozisyon sahibi (put writer) yatırımcının düşünceleri ve beklentileri aşağıdaki gibi olacaktır:

- AMZN hisse senedinin değeri 1 yıl içerisinde ya çok az yükselecektir ya da değeri çok fazla değişmeyecektir.
- Opsiyondan elde edeceğim kar opsiyonun değeri kadar olsun.

Bu yatırımcı AMZN hisse senedini $560 karşılığında ve $35 prim alarak, almayı kabul eder. Bu yatırımcı için kar-zarar durumunu ve ödeme tutarını gösteren şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.4. Kısa pozisyon sahibi yatırımcı için kar-zarar ve ödeme tutarı

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, kısa pozisyon sahibi yatırımcı kullanım fiyatı $560 olan AMZN hissesi üzerinden, cari fiyat $525'dan itibaren kar elde etmeye başlayacaktır. $525 noktası yatırımcı için başabaş noktası olup, bu noktada yatırımcı ne kar ne de zarar elde etmektedir. Çünkü AMZN hisse senedini $560 üzerinden alma zorunluluğu vardır ve bunun için opsiyonu alan kişiden $35 almıştır. Hisse senedinin cari değeri $525'ın üzerinde olduğu durumda yatırımcının karı başlayacaktır. Fiyat $560 olana kadar yatırımcının karı $35'a kadar artacaktır. $560 ve sonrası için yatırımcının karı $35 ile sınırlı olacaktır, çünkü opsiyonu alan yatırımcı opsiyonu kullanmak zorunda olmadığından işlem yapmayacaktır. Şekilde görüldüğü gibi yatırımcının maksimum karı aldığı opsiyon primi $35'dır. Şekil de görüldüğü gibi kısa pozisyon sahibinin riski en fazla sözleşmede kabul ettiği dayanak varlığın kullanım fiyatı kadardır. AMZN hisse senedinin cari değeri 0 olduğu durumda, yatırımcının zararı bu tutardan prim kadar düşüktür, yani $525'dır. Cari değer arttıkça da zararı düşmektedir.

3.8. Opsiyonlara Yatırım Yapmanın Avantajları ve Riskleri

Sermaye piyasası işleminde ya da genel tabirle her bir yatırımın riski olduğu gibi opsiyon yatırımlarının da avantajları ve riskleri vardır.

3.8.1. Avantajları

- Opsiyon piyasasında yatırımcılar düşük bütçeli yatırımlarla yüksek oranda getiri sağlayabilirler.
- Opsiyon yatırımlarında piyasanın yükseliş ya da düşüş trendine bakılmaksızın kar elde edilebilir. Dayanak varlığın fiyatı yükselirse alım opsiyonu, dayanak varlığın fiyatı düşecekse satım opsiyonu kar ettirecektir.
- Diğer piyasalara göre daha uygun teminat şartları ile yatırım yapma imkânı sağlayabilirler.
- Yatırımcılar risk düzeyinin aynı olduğu piyasalara göre daha yüksek getiri sağlayan portföyler oluşturabilirler.
- Opsiyonlar, piyasalardaki ani fiyat dalgalanmalarına karşı yatırımcılara korunma imkânı verir (MEGEP, 2007).
- Opsiyonlar, açığa satış pozisyonlarında meydana gelen riskleri azaltmak için kullanılabilir.
- Opsiyonlar için riskin opsiyon primi ile sınırlı olup, kar haddinde sınır olmaması.

3.8.2. Riskleri

- Getiriyi yükseltmek için alınan yüksek riskli pozisyonlar nedeniyle, ortaya çıkacak zarar miktarı, teminat kaybına yol açıp, işlemlerin durdurulmasına neden olabilir.
- İyi risk analizi yapılmamış opsiyonlar, zaman geçtikçe ve vade yaklaştıkça değer kaybedebilir.
- Opsiyonlardan getiri sağlamak için dayanak varlığın fiyatının artması gerekir. Diğer durumlarda yatırılan opsiyon primi kaybedilecektir.
- Opsiyon piyasaları düşük hacimlere sahip olduğundan biraz daha riskli piyasalardır. Çünkü düşük hacim göstergesi alım ve satım işlemlerinin daha zor ve uzun zamanlı yapılması anlamına gelir.
- Kısa pozisyon sahibi iyi analiz edemediği bir yatırım için sınırsız bir riskle karşı karşıya kalabilir.

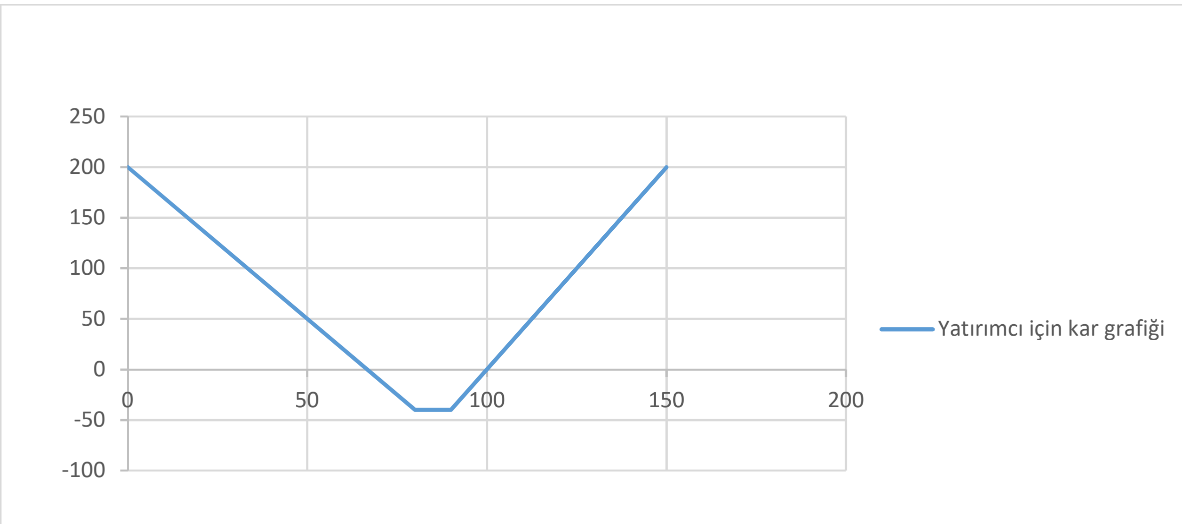
3.9. Bazı Temel Opsiyon Stratejileri

Piyasalarda iki tane önemli dönem vardır. Bunlardan bir tanesi boğa piyasası (Bullish Market) ve diğeri de ayı piyasasıdır (Bearish Market). Boğa piyasası, piyasanın yükselişte olacağı, fiyatların artacağı, beklentilerin iyimser olduğu ve yatırımcıların alım yapması gereken dönemi tanımlamaktadır. Ayı piyasası ise tam tersi olarak, piyasanın düşüş trendinde olduğunu, fiyatların düşeceğini, beklentilerin kötümser olduğunu ve yatırımcıların satım yapması gerektiği yönünde olduğu dönemdir (Mehmood ve Hanif, 2014).

Opsiyonlar bilindiği üzere bir menkul kıymetin değerinin hem yükselirken hem de düşerken yani hem boğa sezonunda hem de ayı sezonunda yatırımcıların kazanç sağlanabileceği bir yatırım aracıdır. Opsiyonların bu özelliği birçok alım ve satım stratejisini oluşturmaktadır. Bu stratejilerden büyük çoğunluğu hem alım opsiyonunun hem de satım opsiyonunun birlikte kullanılmasından oluşmaktadır. Yatırımcılar bu stratejileri kullanarak, hem risklerini düşürmeyi hem de karlarını maksimize etmeyi amaçlamaktadırlar. Zaten finans ve ekonomide temel düşünce minimum risk ile maksimum getiri elde etmektir. Bu beklentiyi karşılamak için kullanılan bazı opsiyon stratejileri; çanak stratejisi (strangle), pergel stratejisi (straddle), ve kelebek stratejisi (the butterfly) aşağıda sırasıyla verilmiştir.

3.9.1. Çanak stratejisi (Strangle)

Çanak stratejisinde yatırımcı aynı dayanak varlık üzerinde ve aynı vade süresinde olan ancak farklı kullanım fiyatları olan iki tane opsiyon satın alır. Bunlardan bir tanesi alım opsiyonu ve diğeri satım opsiyonudur. Çanak stratejisini kullanacak yatırımcının temel beklentisi dayanak varlığın fiyatının çok değişken olacağı, fiyat farklarının yüksek olacağıdır. Ancak fiyatın yükselen trend mi yoksa düşen trend mi olacağını öngörememektedir. İşte çanak stratejisi bu büyük fiyat dalgalanmalarında yatırımcıya kar getirecek önemli bir stratejidir. Aşağıda örnek bir çanak stratejisinde yatırımcının karını gösteren şekil verilmiştir. Şekilde de görüleceği gibi yatırımcının karı fiyat değişimi arttıkça daha çok artmaktadır, risk de sınırlıdır. Riskin sınırlı olmasındaki temel neden ise yatırımcının hem alım hem de satım opsiyonu kullanmasıdır.

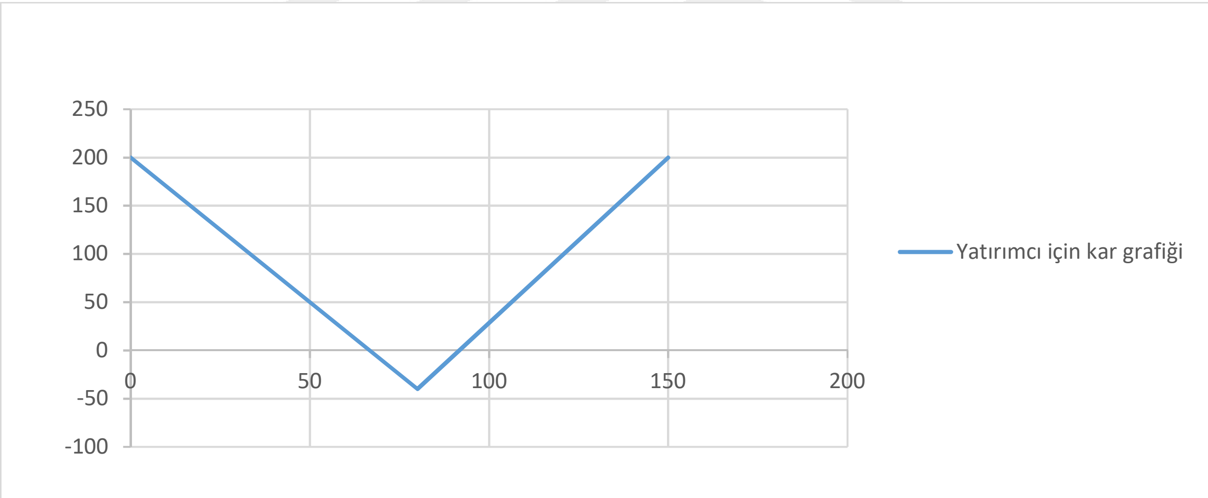


Şekil 3.5. Çanak stratejisi örneği

3.9.2. Pergel stratejisi (Straddle)

Pergel stratejisinde yatırımcı aynı dayanak varlık üzerinde, aynı vade süresinde olan ve aynı kullanım fiyatları olan iki tane opsiyon satın alır. Bunlardan bir tanesi alım opsiyonu, diğeri satım opsiyonudur. Pergel stratejisini kullanacak yatırımcının temel beklentisi çanak stratejisindeki yatırımcının beklentisi ile hemen hemen aynıdır. Yatırımcı, dayanak varlığın fiyatının çok değişken olacağını ve fiyat farklarının yüksek olacağını beklemektedir. Ancak fiyatın yükselen trend mi yoksa düşen trend mi olacağını öngörememektedir. Fiyatların çok değişken olmadığı durumda iki tane opsiyon aldığı için opsiyon primini fazla ödeyen yatırımcı zarar edecektir.

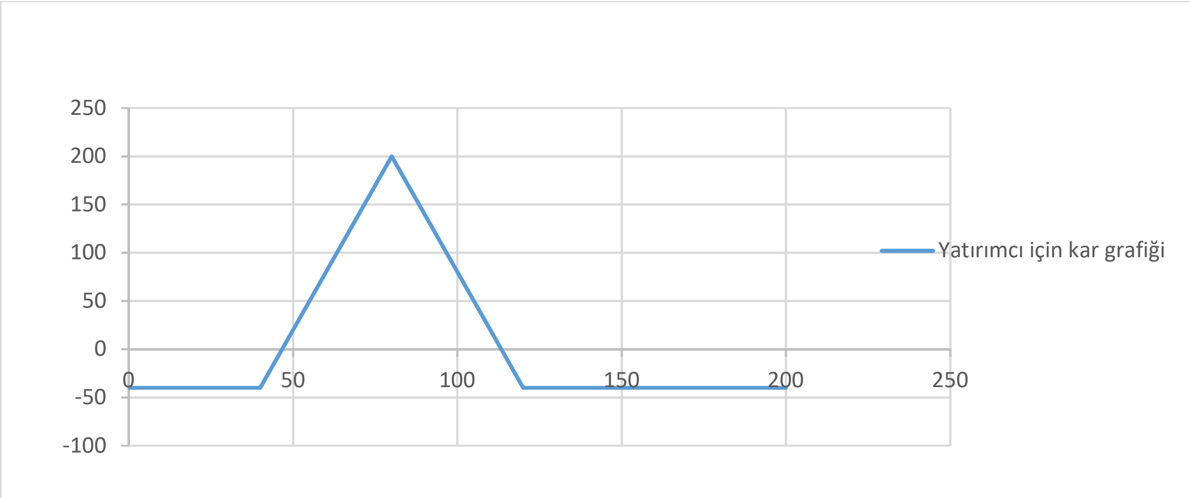
Aşağıda örnek bir pergel stratejisinde yatırımcının karını gösteren şekil verilmiştir. Şekil üzerinde de görüleceği gibi yatırımcının karı fiyatın çok dalgalı olması ile doğru orantılıdır. Stratejiyi kullanan yatırımcı yüksek kar ve sınırlı risk istemektedir.



Şekil 3.6. Pergel stratejisi örneği

3.9.3. Kelebek stratejisi (The Butterfly)

Kelebek stratejisi karmaşık göründüğü için az tercih edilen ve kullanılan bir opsiyon stratejisidir. Bu stratejide genel olarak 2 tane alım opsiyonu ve 2 tane satım opsiyonu kullanılmaktadır. Alım opsiyonunun ilki düşük kullanım fiyatı üzerinden alınır, daha sonra 2 opsiyon daha yüksek kullanım fiyatı üzerinden satılır. Ve en son en yüksek kullanım fiyatı üzerinden diğer alım opsiyonu kullanılır. Kelebek stratejinin temel konsepti 1-2-1 oranını takip etmektedir. Yani 1 alım, 2 satım ve sonra tekrar 1 alım opsiyonu kullanılmaktadır. Stratejiye kelebek ismi de aslında şekil de görülen simetrik (1-2-1) yapısından dolayı verilmiştir. Aşağıda kelebek alım stratejisine ait şekilde görüldüğü üzere yatırımcının riski sınırlıdır ancak karı da sınırlıdır (OIC).



Şekil 3.7. Kelebek stratejisi örneği

3.10. Opsiyonların Fiyatlandırılması

3.10.1. Opsiyon fiyatını etkileyen faktörler

Opsiyon primini (fiyatını) etkileyen temel faktörler; dayanak varlığın cari fiyatı, opsiyonun kullanım fiyatı, volatilite (dayanak varlığın standart sapması) ve vadeye kalan süredir. Kar payı ve piyasa faiz oranının da yine temel unsurlar kadar olmasa da opsiyon primi üzerinde etkileri vardır.

Dayanak varlığın fiyatı

Opsiyon primi, sözleşmeye konu olan dayanak varlığın ya da menkul kıymetin fiyatındaki değişmeye bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Dayanak varlığın fiyatına bakılarak ne zaman fiyatların yükseldiği, yükseliş ivmesi, yükseliş aralıkları analiz edilebilir. Ve fiyatındaki dalgalanmalara bakılarak da opsiyon sözleşmeleri imzalanabilir. Bu nedenlerden dolayı da dayanak varlığın fiyatı opsiyon fiyatlarını etkileyecektir.

Alım opsiyonu için, opsiyon primi dayanak varlığın fiyatı ile doğru orantılıdır. Satım opsiyonu için opsiyonun fiyatı dayanak varlığın fiyatı ile ters orantılıdır (Damodaran, 1995**).**

Kullanım fiyatı

Alım opsiyonu için, opsiyon fiyatı kullanım fiyatı ile ters orantılıdır. Satım opsiyonu kullanım fiyatı ise opsiyon primi ile doğru orantılıdır. Yani kullanım fiyatı arttıkça opsiyonun getirisi alım opsiyonu için düşer, satım opsiyonu için artar (ASX, 2000).

Vadeye kalan süre

Genel olarak yatırımlar için vadenin fazla olması piyasa belirsizliklerinin artacağı ve tahminlerin daha yetersiz olacağı anlamına gelir. Yani riskin daha fazlası olması demektir. Bu durumda getiri de yüksek olacaktır.

Aynı şekilde opsiyonlar için de alım opsiyonu satım opsiyonu farketmeksizin vade uzadikça opsiyon primi artacaktır. Vade azaldıkça da opsiyonun cari değerini tahmin etmek kolaylaşacaktır, dolayısıyla opsiyon primi düşecektir (Cox and Rubinstein, 1985).

Oynaklık (Volatilite)

Opsiyona konu olan dayanak varlığın üzerindeki volatilite arttıkça belirsizlikler artacaktır, fiyat dalgalanması artacaktır ve tahminlerde zorluk meydana gelecektir. Bu durumda opsiyon üzerindeki risk de arttacaktır. Riskin artması demek getirinin de artması ya da zararın da artması demektir. Bu nedenlerden dolayı volatilitesi yüksek olan opsiyonların fiyatlarıda yüksektir (Cox and Rubinstein, 1985).

Piyasa risksiz faiz oranı

Piyasadaki risksiz faiz oranındaki değişmeler opsiyonların fiyatları üzerinde etkilidir. Piyasa faiz oranının yüksek olması demek, yatırımcılar için borçlanmanın artması demektir. Bu da opsiyon piyasasasını daha cazip hale getirecektir. Bu durumda opsiyon alım primi artacak, satım opsiyon primi düşecektir (Seth, 2018).

Kar payı

Dayanak varlığın ait olduğu şirket kar payı ödediği taktirde dayanak varlığın fiyatını düşürecektir. Dayanak varlığın fiyatındaki düşme alım opsiyonu fiyatını düşürecektir, satım opsiyon primini artıracaktır.

Yani alım opsiyonu ile kar payı arasında negatif, satım opsiyonu ile kar payı arasında pozitif bir ilişki vardır (www.yf.com.tr. erişim tarihi: 17.06.2019).

Çizelge 3.3. Opsiyon primini etkileyen faktörler

Opsiyon Primini Etkileyen Faktörlere Ait Tablo		
Değişken	Alım Opsiyonu	Satım Opsiyonu
Dayanak Varlığın Fiyatı ↑	↑	↓
Kullanım Fiyatı ↑	↓	↑
Vade ↑	↑	↑
Oynaklık(Volatilite) ↑	↑	↑
Faiz Oranı ↑	↑	↓
Kar Payı(Temettü) ↑	↓	↑

3.10.2. Opsiyon fiyatlama modelleri

Binom modeli

1979 yılında Cox Ross ve Rubinstein tarafından geliştirilen Binom modeli, opsiyon fiyatlamasında kullanılan basit bir yöntemdir. Bu model market koşullarının iyi olduğu durumu varsaymaktadır. Binom modelinde amaç, belirli bir gündeki opsiyonun fiyatını çıkarmaktır. Bunun için de, vadelerinden önce kullanılan Amerikan tipi opsiyonların fiyatlandırılmasında kullanılır (Hull, 1991).

Binom modelinde dayanak varlığın fiyatının zamanla yukarı ya da aşağı yönlü olacağı göz önünde bulundurulur. Bu durumda, verilen dayanak varlık fiyatı ve kullanım fiyatı ile opsiyona ait ödeme çıkarılarak opsiyon fiyatına ulaşılmaktadır. Bu model de iki tane varsayım sözkonusudur. Birincisi, vade sonunda opsiyonun iki farklı fiyatının olabileceğidir. İkinci varsayım ise, sadece bir dönemlik fiyat değişimi hesaba katılarak modelin kurulmasıdır (Taş ve diğerleri, 2007).

Black Scholes opsiyon fiyatlama modeli

En önemli opsiyon değerleme yöntemi olan Black&Scholes denklemi 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından Avrupa tipi opsiyonların değerini bulmak için geliştirilmiştir. Geliştirilen modelin amacı, dayanak varlığın fiyatının vade sonunda hangi fiyata sahip olacağını belirlemektir. Black&Scholes denklemi de Binom modeli gibi bazı varsayımlar kullanarak opsiyon fiyatını bulmaktadır. Bu varsayımlar aşağıdaki gibidir:

- Opsiyonun vadesi geldiğinde kullanılması gerekir. Avrupa tipi opsiyonlar zaten vadesi geldiğinde kullanılır, ancak amerikan tipi için vade sabit bir gün olmalıdır.
- Opsiyona konu olan dayanak varlık Geometrik Brownian hareketi izler.
- Opsiyona konu olan dayanak varlık faiz ya da kar payı ödemesi yapmamaktadır.
- Etkin piyasa koşulları geçerlidir. Herkes her bilgiye ulaşabilir.
- Piyasada işlem maliyetleri ve vergi yoktur.
- Dayanak varlığın oynaklığı sabittir.
- Piyasa faiz oranı herkes tarafından bilinir ve sabittir. Alıcı ve satıcı yatırımcılar bu oran üzerinden borç verirler ve borçlanırlar (Black ve Scholes,1973).

4. BLACK SCHOLES KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİ

4.1. Black Scholes Kısmi Diferansiyel Denkleminin Elde Edilmesi

Belli bir varlığın t anındaki fiyatı S olsun. Küçük bir zaman aralığındaki değişim dt ve varlığın değerindeki değişimi dS ile gösterelim. Bu durumda değişim sonrası yeni fiyat S+ dS olur. Fiyattaki net değişim olan dS i ölçmek yerine varlıktaki getiri oranını kullanabiliriz.

O da $\frac{dS}{S}$ ile tanımlanır.

NOT: Bu getiri oranı, varlığın fiyatındaki değişimi orjinal fiyatı türünden vermektedir.

Getiri ile ilişkilenen yaygın bir matematik modeli iki tane temel bileşene sahiptir. Bunlardan bir tanesi öngörülebilir, belirleyici bileşen (risksiz yatırımdaki getiri ile benzerdir) μdt dir.

Burada μ parametresi sapma olarak bilinir. Varlığın fiyatındaki ortalama büyüme hızını ölçmeye yarayan parametredir (Wilmott ve diğerleri, 1995).

$\frac{dS}{S}$ getirisine ikinci katkıyı yapan bileşen ise σdX dir. σ fiyatlarda görülen dalgalanma olarak tanımlanır. Getirinin standart sapmasını ölçen parametredir.

dX ise ortalaması 0 ve varyansı dt olan normal dağılıma sahip olan rasgele değişkendir. Yani

$$dX \sim N(0,(\sqrt{dt})^2) \ .$$

μ ve σ değerleri geçmiş değerlerden yola çıkarak tahmin edilebilir.

Böylece aşağıdaki stokastik diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX \tag{4.1}$$

Önemli Notlar:

1) Eğer σ =0 ise, varlığın fiyatının davranışı tamamen deterministiktir ve bu durumda denklem adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Bu denklem kolaylıkla çözülebilir ve genel çözümü $S = S_0 e^{\mu dt}$ elde edilir. Burada S_0, varlığın t=0 anındaki değeridir.

2) Aslında (4.1) denklemi rassal yürüyüş (random walk) örneğidir. Random walk varlığın net değişimi hakkında bilgi vermez, ancak S değerinin davranışı hakkında yol gösterir.
3) (4.1) denklemi hisse değeri ile oluşturulan bir zaman serileri modelinin şeması olarak da düşünülebilir.

Örnek: ARCLK hisse senedinin bugünkü değeri 10 TL olsun. Hisse değeri üzerine kurulacak 3 aralıklı zaman serileri için kullanılacak değerleri bulalım.

μ=0,4 , σ =0,2 , $dt = \frac{1}{250}$ (dt değeri 1 gün olarak alınsın, ve 1 yılda 250 iş günü olduğu varsayılsın).

Çözüm: $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$ kısmi diferansiyel denklemini çözmek için;

$\frac{dS}{S} - \mu dt + \sigma dX = 0,4(\frac{1}{250})$ + 0,2 dX, burada dX her bir adım için normal dağılımdan elde edilir. Normal dağılımın ortalaması sıfır(0) ve standart sapması $\frac{1}{\sqrt{250}} \approx 0,063$ dır.

Adım1: S_0 =10. Normal dağılım N(0, 1/250) den dX = -0,05 bulunur. Bu durumda;

$$\frac{dS}{10} = 0,4/250 + 0,2(-0,05)$$

$dS = 10(0,4/250 + 0,2(-0,05))$

$= -0,084.$

$S_1 = 10 – 0,084$

$= 9,916.$

Adım 2: $S_1 = 9,916$, bu durumda dX =0,12 olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{dS}{9,916} = 0,4/250 + 0,2(0,12)$$

dS =9,916(0,4/250 + 0,2(0,12))

= 0,254

S_2 =9,916 + 0,254

= 10,17

3.Adım: $S_2 = 10,17$, bu durumda dX =0,08 olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{dS}{10,17} = 0,4/250 + 0,2(0,08)$$

=10,17(0,4/250 + 0,2(0,08))

=0,179

$S_3 = 10,17 + 0,179$

= 10,35

Yukarıdaki örnekte random walk yöntemi ile fiyat tahminlemesi yapılmıştır. Bu tahminleri geliştirmek için sürekli bir yöntem kullanılabilir ve bu da $dt \to 0$ limiti ile bulunabilir. Daha iyi tahminleme modeli kullanmamız için Taylor Serisinin bir versiyonu olan *Ito Lemmasını* kullanabiliriz.

Bir *I* aralığındaki x=a noktalarını içeren f fonksiyonunun Taylor Serine açılımı:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ dir.}$$

Eğer bu seri I aralığında f fonksiyonuna yakınsarsa;

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ elde edilir.}$$

x yerine $x + \Delta x$, a yeine de x yazılırsa:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f^{\mathrm{I}}(x) + \frac{f^{\mathrm{II}}(x)}{2!}(\Delta x)^2 + ... \qquad \text{elde edilir.}$$

Burada x deki Δx kadarlık bir değişim f fonksiyonundaki Δf kadarlık değişim ile ilişkilidir.

Tekrardan $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX$ eşitliğini $t \to 0$ için göz önünde bulunduralım.

$dt \to 0$ iken $(dX)^2 \to dt$ olur.

$f(S)$, varlığın değeri S nin bir fonksiyonu olsun. S yi küçük bir miktarda dS kadar değiştirdiğimiz takdirde, Taylor teoremi gereği aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dS^2}(dS)^2 + ...$$

Böylelikle $dS = S(\mu dt + \sigma dS)$ olur ve

$(dS)^2 = S^2(\mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma dtdX + \sigma^2(dX)^2)$ elde edilir.

Şimdi $dt \to 0$ iken $(dX)^2 \to dt$ olduğundan, dt ifadesi küçüldükçe $S^2\sigma^2(dX)^2$ ifadesi yerine

$S^2\sigma^2 dt$ yazılır. Ve sonrasında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{dt^2}(S^2\sigma^2 dt)$$

$$= \frac{df}{dS}(S\mu dt + \sigma dX) + \frac{d^2S}{dt^2}(S^2\sigma^2 dt)$$

$$df = \sigma S\frac{df}{dS}dX + (\mu S\frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{d^2S}{dt^2})dt$$

Burada f fonksiyonu, S dayanak varlık fiyatının fonksiyonu f(S) olarak alırsa, (4.1) denklemi kullanılarak Taylor serisi ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$df = \sigma S\frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt \tag{4.2}$$

V(S,t) opsiyonun değeri, S dayanak varlığın fiyatı, r risksiz faiz oranı ve μ ile σ yukarıda verildiği gibi tanımlansın. *Ito Lemması* ve (3.3) denklemi kullanılarak opsiyon üzerindeki denklem aşağıdaki gibi olur.

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt \tag{4.3}$$

Bir tane opsiyon ve bu opsiyonda - Δ miktarında hisse senedi içeren bir pörtfoy düşünelim.

Bu pörtfoyun değeri: $\Pi = V - \Delta S$ olur.

Yani, $d\Pi = dV - \Delta dS$ dir.

$$d\Pi = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt - \Delta S\mu dt - \Delta S\sigma dX$$

$$= \sigma S\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt$$

$\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ seçilirse,

$d\Pi = \left(\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \dfrac{\partial V}{\partial t}\right)dt$ elde edilir.

Π , risksiz bir varlığa yatırım yapıldığı durumda dt aralığındaki büyüme artışı $r\Pi$ *dt olur.* Bu durumda opsiyon için kabul edilebilir fiyat aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$r\Pi\ dt = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt$$

$\Rightarrow \quad r\left(V - \dfrac{\partial V}{\partial S}S\right) = \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \dfrac{\partial V}{\partial t}$ ve buradan da Black Scholes denklemi elde edilir:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.4}$$

(4.4) Black Scholes kısmi diferansiyel denklemi bir dayanak varlık üzerindeki opsiyon fiyatı V yi vermektedir. Bu denklem bir dayanak varlık üzerindeki Avrupa tipi opsiyonun fiyatını hesaplamaktadır. Avrupa tipi opsiyonlar için sadece vade sonundaki opsiyonun fiyatı bilinmektedir. Bu da başlangıç opsiyon fiyatını belirlemek için Black Scholes denkleminin geriye doğru çözülmesini gerektirir. Bunu başarmak için t zamanının yerine $\tau = T - t$ olacak şekilde, geriye dönük zaman noktasını veren “ τ ” ifadesini kullanmamız gerekecektir.

Şimdi ise aslında sonlu elemanlar yönteminin daha kesin sonuç verdiği iki boyutlu diferansiyel denklem örneği olan iki dayanak varlık üzerindeki Black Scholes kısmi diferansiyel denklemini gösterelim:

S_1 ve S_2 Avrupa tipi opsiyon üzerinde kullanılacak iki dayanak varlık olmak üzere, bu opsiyonun fiyatını bulmak için kullanılacak Black Scholes denkleminin kısmi diferansiyel denklem gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - r\sum_{k=1}^{2} S_k \frac{\partial V}{\partial S_k} = \sum_{kl=1}^{2} D_{kl}(t, S_1, S_2)\frac{S_k S_l}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S_k \partial S_l} - \lambda \mathrm{I}_{\mathrm{I}x(\Re^2 \setminus \Omega_b)} V - rV \tag{4.5}$$

Burada V opsiyonun fiyatını r, risksiz faiz oranını ve λ ise engelli bir durum olduğunda opsiyon fiyatını sıfır yapan sabit bir değerdir.

(4.5) kısmi diferansiyel denklemi (4.4) kısmi diferansiyel denkleminin iki boyutlu halidir. Bu denklem aynı zamanda mühendislikte kullanılan taşınım-yayılım denklemi olarak kullanılır.

Bu modelde oynaklık matrisi D aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2{}_{11}(t, S_1, S_2) & \rho\sigma_{11}(t, S_1, S_2)\sigma_{22}(t, S_1, S_2) \\ \rho\sigma_{11}(t, S_1, S_2)\sigma_{22}(t, S_1, S_2) & \sigma^2{}_{22}(t, S_1, S_2) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Bu matrisin değeri, opsiyon üzerindeki iki varlığın oynaklıklarına yani standart sapma değerlerine ve bunlar arasındaki ilişkiyi veren ρ korelasyon değerine bağlıdır.

(4.5) denkleminde verilen $\lambda \mathrm{I}_{\mathrm{I}x(\Re^2 \setminus \Omega_b)} V$ değeri bazı keskin zaman aralıklarındaki opsiyonun bariyerini temsil eder. Bariyerin içerisinde λ değeri 0, dışında ise bu değer 1`dir.

(4.5) denklemi kullanılarak iki dayanak varlık üzerindeki Avrupa tipi opsiyonun fiyatı hesaplanır. (4.5) denklemi zamanla geriye yönelik çözüldüğü için eşitliğin başlangıç koşulları opsiyonun ödeme fonksiyonu tarafından belirlenir. S_1 ve S_2 dayanak varlıklı opsiyon üzerindeki C alım opsiyon fiyatı ve P satım opsiyon fiyatı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Alım Opsiyonu:

- Max Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\max(S_1, S_2) - K, 0)$
- Min Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\min(S_1, S_2) - K, 0)$ (4.7)
- Basket Alım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(\alpha S_1 + (1-\alpha) S_2 - K, 0)$

Burada α, 0 ile 1 arasında tanımlanan basketin sabitidir ve S_1 ile S_2 hesaplanan alanın sınırı üzerindedirler.

Satım Opsiyonu:

- Max Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \max(S_1, S_2), 0)$
- Min Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \min(S_1, S_2), 0)$ (4.8)
- Basket Satım : $V(\tau = 0, S_1, S_2) = 1_\Omega \max(K - \alpha S_1 - (1-\alpha) S_2), 0)$

Her bir başlangıç koşuluna uygulanacak sınır koşulları, $\nabla V.n = 0$ biçiminde sınır üzerinde hesaplanan homojen Neumann sınır koşulları kullanılarak araştırılır:

Dirichlet sınır koşulları her bir opsiyon çeşiti kullanılarak çıkarılan opsiyon ödemeleri ile karar verilir. Dirichlet sınır koşulları, alım opsiyonu için (4.7) ve satım opsiyonu için (4.8) de verilen eşitliklerdir (Pham, 2007).

4.2. Black Scholes Denkleminin Formulü

Black Scholes formulü verilen sınır değerler için yukarıda verilen (4.4) kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Avrupa tipi opsiyonların alım ve satım fiyatını hesaplamak için kullanılır. Bu formül aslında yapılacak sözleşmenin bedelini hesaplayacağı için önemlidir. Verilen bir alım ve satım opsiyonları için sınır değerler aşağıdaki gibi olacaktır:

Alım opsiyonu, $C_{E,T} = \max(0, S_T - X)$

Satım opsiyonu, $P_{E,T} = \max(0, X - S_T)$

Black ve Scholes (1973) yukarıda verilen sınır koşulları ile (4.4) kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümünü verecek olan formulü aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

Alım opsiyonu için opsiyon fiyatı $C_E(S,T) = N(d_1)S - N(d_2)Xe^{-rT}$

Satım opsiyonu için opsiyon fiyatı $P_E(S,T) = N(-d_2)Xe^{-r(T-t)} - SN(-d_1)$

Burada S dayanak varlığın fiyatını, T opsiyonun vadesini, t o anı, X kullanım fiyatını, r risksiz faiz oranını, σ oynaklığı yani dayanak varlığın standart sapmasını ve N standart normal dağılım fonksiyonunu temsil eder. d_1 ve d_2 fonksiyonları ise:

$$d_1 = \frac{In(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{ve} \quad d_2 = \frac{In(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$ olarak verilir.

4.3. Black Scholes Denkleminin Sonlu Eleman Çözümleri

Vadesi T, kullanım fiyatı K olan Avrupa tipi satım opsiyonu için Black Scholes modeli göz önünde bulundurulursa, dayanak varlığın fiyatı Geometrik Brownian hareketini izler:

$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, ve burda σ; S_t ve t ye bağlıdır.

Eğer oynaklık fonksiyonu normal şartları sağlarsa, $t < T$ vadesi için opsiyonun fiyatı Black Scholes formulünden

$P_t = E^*(e^{-r(T-t)}(K - S_t)^+ \mathrm{I} F_t)$ elde edilir. Burada $E^*(IF_t)$ koşullu beklenti değeridir.

$\sigma = \sigma(S_t, T-t)$ ve $P_{T-t} = u(S_{T-t}, T-t)$ için, u fonksiyonu aşağıdaki denklemin çözümüdür:

$$\begin{cases} \partial_t u - \dfrac{\sigma^2 x^2}{2}\partial_{xx} u - rx\partial_x + ru = 0, \\ u(x,0) = (K-x)^+ \end{cases} \quad \text{for x>0, 0<t}\leq\text{T,} \tag{4.9}$$

(4.5) denkleminin varyasyonel formulü aşağıda verilen V Hilbert Uzayında tanımlanan u fonksiyonunun [0,T] aralığında bulunmasını içermektedir. Varyasyonel formülü elde etmek için (4.5) denklemi V uzayından alınan bir w test fonksiyonu ile taraf tarafa iç çarpılır. Böylelikle

$$\frac{d}{dt}(u,w)+a_t(u,w)=0 \quad t\in(0,T),\ \forall w\in V \text{ için} \quad u(x,0)=(K-x)^+ \tag{4.10}$$

elde edilir. Öyleki,

$$V=\left\{v\in L^2(\mathbb{R}_+): x\frac{dv}{dx}\in L^2(\mathbb{R}_+)\right\},$$

$$a_t(u,w)=\left(\frac{\sigma^2x^2}{2}\partial_x u,\partial_x w\right)+(x\partial_x u,(\sigma^2+x\sigma\partial_x\sigma-r)w)+(ru,w), \tag{4.11}$$

$$(u,w)=\int_0^\infty u(x)w(x)dx$$

Sonlu elemanlar yöntemi gereği problemi $\Omega:=(0,L_x)\times(-L_y,L_y)$ ile sınırlanmak gerekmektedir. x=0 ekseninde sınırlama yapmaya gerek yoktur. $x\to\infty$ iken $u\to 0$ dır. Sonlu eleman çözümleri için Neumann sınır şartları kullanılarak problem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{d}{dt}(u,w)+a(u,w)=0,\ \forall w\in V_0 \tag{4.12}$$

Verilen $u(x,y,0)$ için.

$$a(u,w)=\int_\Omega \frac{y^2x^2}{2}\partial_x u\partial_x w+\frac{\beta^2}{2}\partial_y u\partial_y w+(y^2-r)x\partial_x u+(e+\beta\partial_y\beta)\partial_y u+fu)w \tag{4.13}$$

olur. Bir boyutlu durum için:

$u_m^h(x,y)=\sum_1^N u_i^m w^i(x,y)$ ifadesi $u(t_m)$ nin yaklaşık halidir ancak ve ancak u_i^{m+1} ler aşağıdaki denklemin çözümü olduğunda:

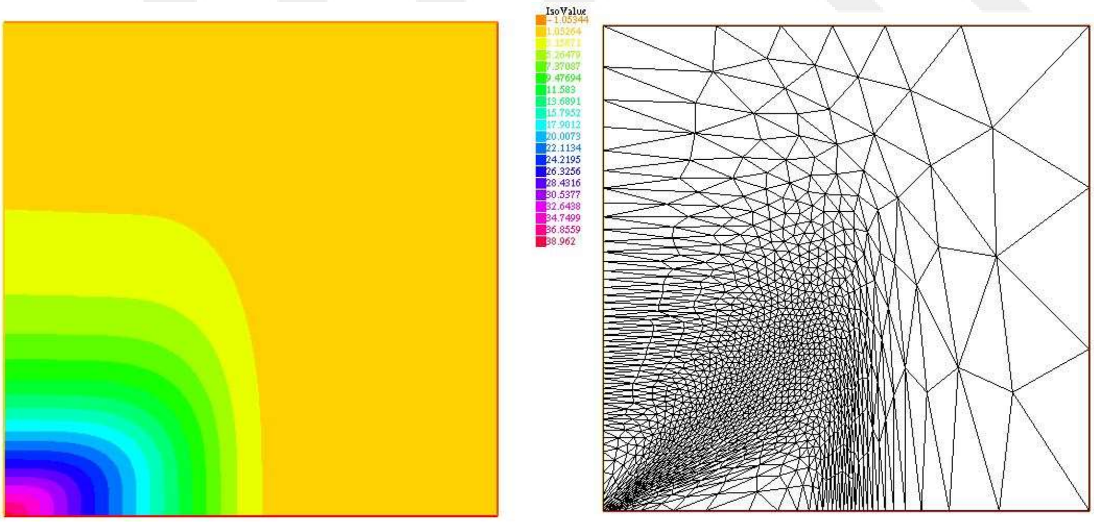
$$B\frac{U^{m+1}-U^m}{\delta t_m}+AU^{m+1}=0\,, \quad B_{ij}=(w^j,w^i)\,\text{ve}\,A_{ij}=a(w^j,w^i)\ \text{dir.} \tag{4.14}$$

Burada $u_m^h(x,y)$ yaklaşımı V Hilbert Uzayının sonlu bir alt kümesi olan V^h üzerinde tanımlanmıştır.

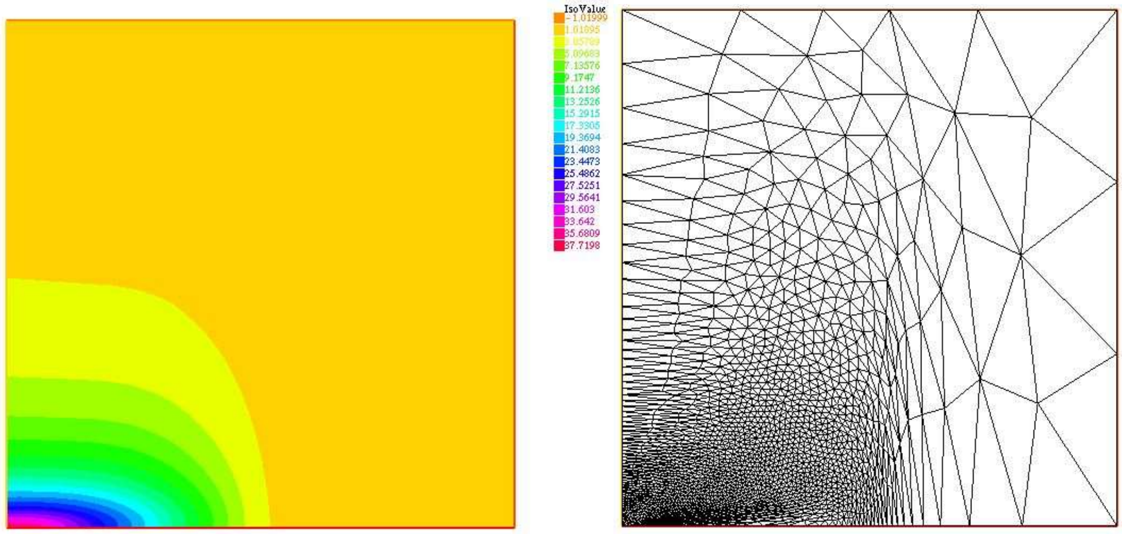
5. NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Sonlu Elemanlar yönteminin çözümünde kullanılan FreeFem++ programı 2. dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için daha kesin sonuç verdiğinden nümerik uygulamala için opsiyon üzerindeki dayanak varlığı bir tane değil de iki tane olarak alacağız ve çözümümüzü bu şekilde elde edeceğiz.

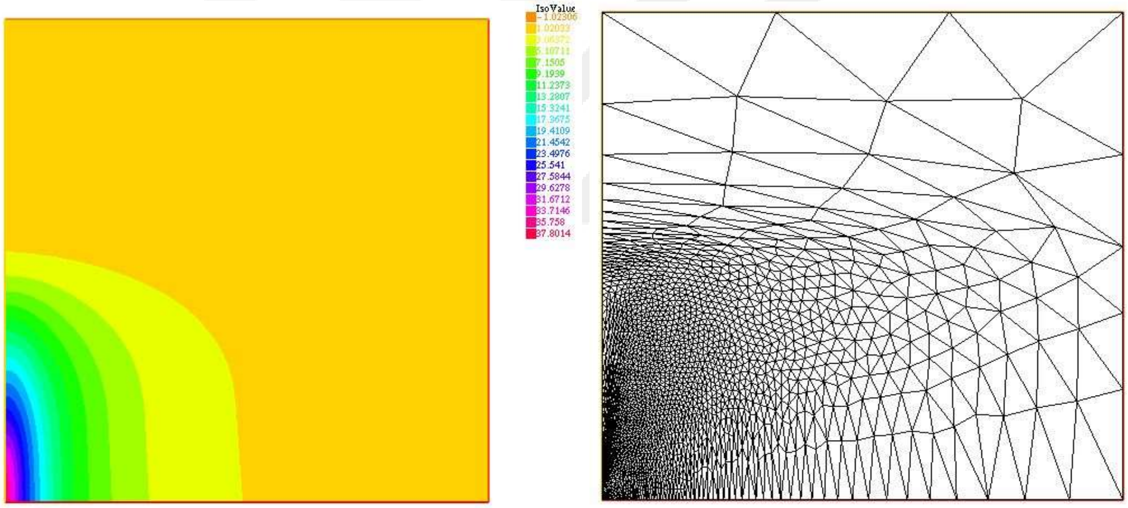
Bu kısımda (4.14) ile verilen denklemi çözmek için, FreeFem++ programı kullanılarak bir kod hazırlanmıştır. Çeşitli σ volatiliteleri için test tekrarlanarak elde edilen sonuçlar şekiller halinde sunulmuştur. Herbir sonuç sunulurken normal ağ örgüsü ve adaptif ağ örgüsü ile elde edilen sonuçlar ayrı ayrı verilmiştir. Sonuçlardan da görüleceği üzere bir çok durumda problemin çözümünü normal ağ örgüsü üzerinde tam olarak elde etmek mümkün değilken ağ adaptasyonu ile çözümler çok daha kaliteli bir şekilde elde edilmiştir. Tüm hesaplamalar için dayanak varlıklar arasındaki korelasyon değeri ρ=0.3, risksiz faiz oranı r=0.05, kullanım fiyatı K=40 ve vade T=0.5 olarak alınmıştır. Çeşitli volatilite durumları için opsiyon fiyatını veren sonuçlar aşağıda ayrıntısı ile sunulmuştur.



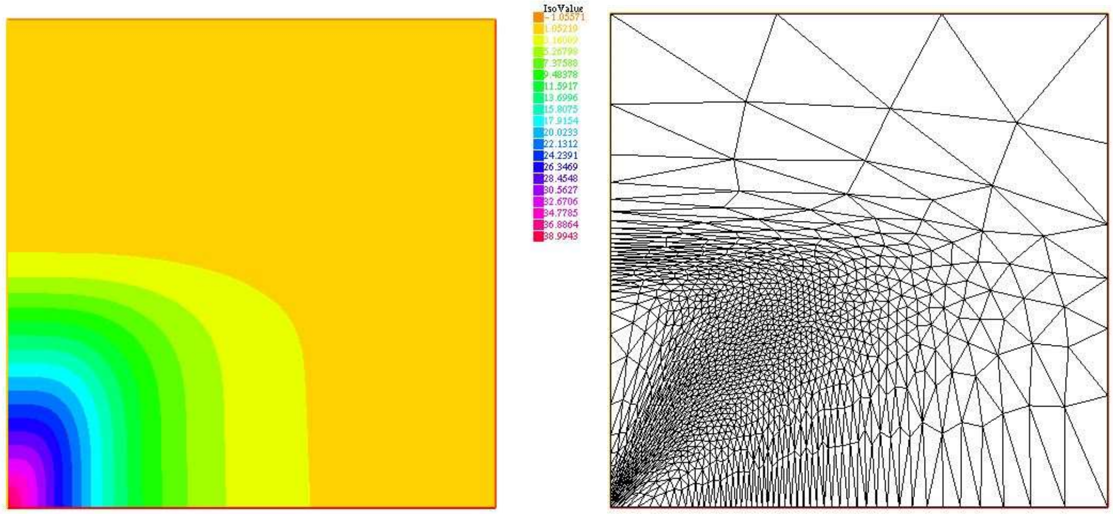
Şekil 5.1. σ_1 = 0.1 ve σ_2 = 0.5 için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



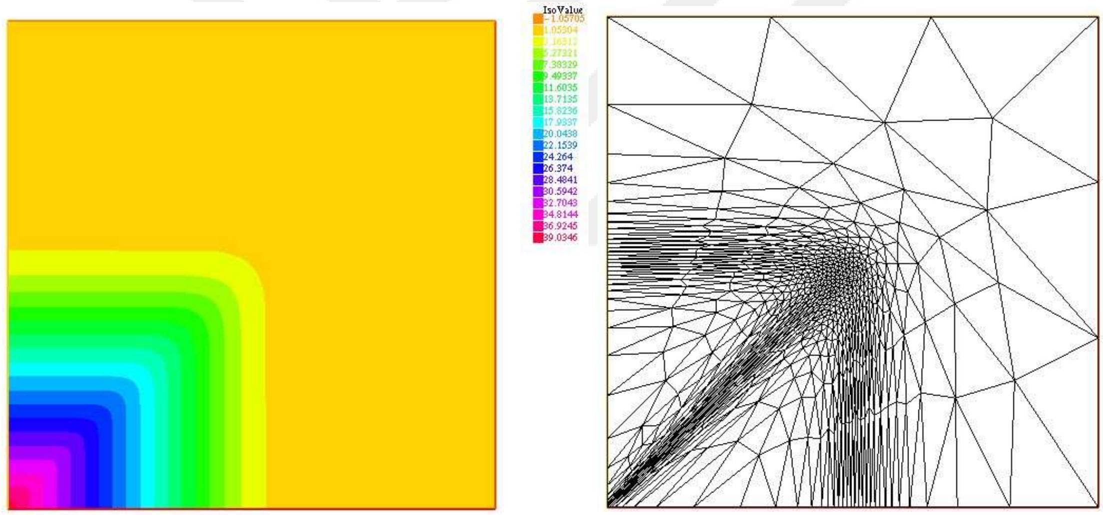
Şekil 5.2. $\sigma_1 = 0.1$ ve $\sigma_2 = 0.9$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



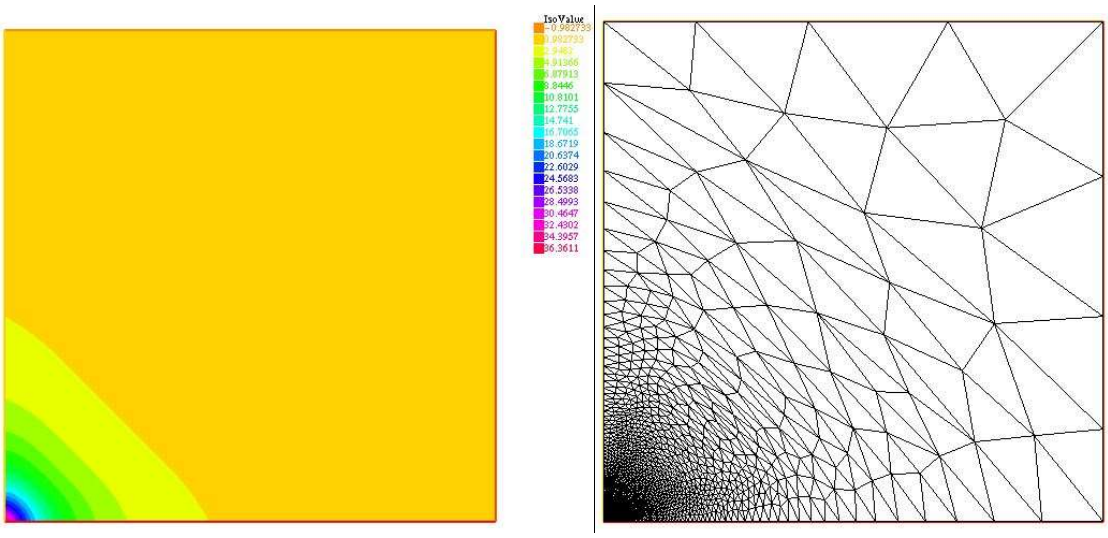
Şekil 5.3. $\sigma_1 = 0.9$ ve $\sigma_2 = 0.1$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



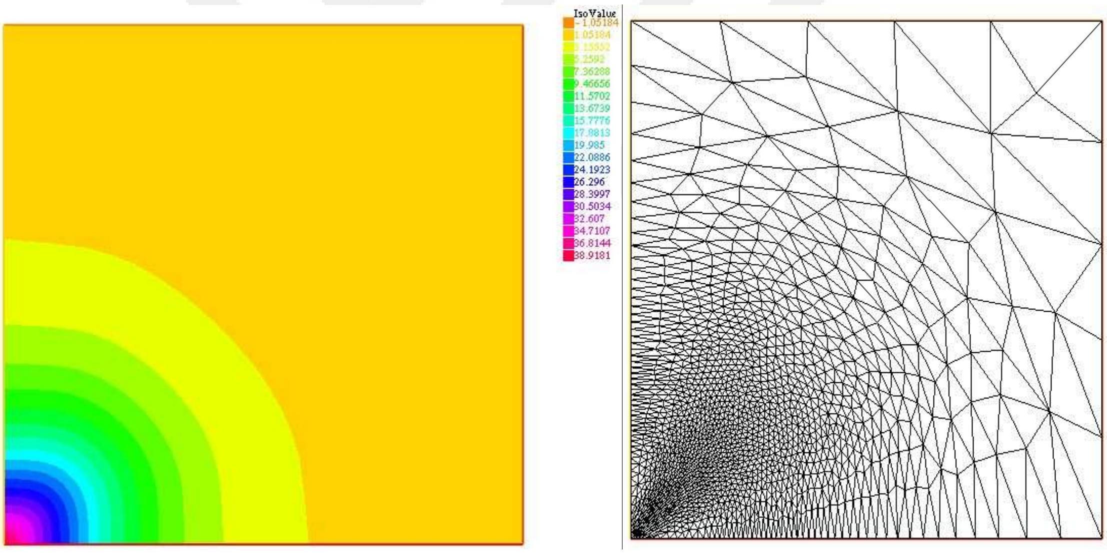
Şekil 5.4. $\sigma_1 = 0.5$ ve $\sigma_2 = 0.1$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



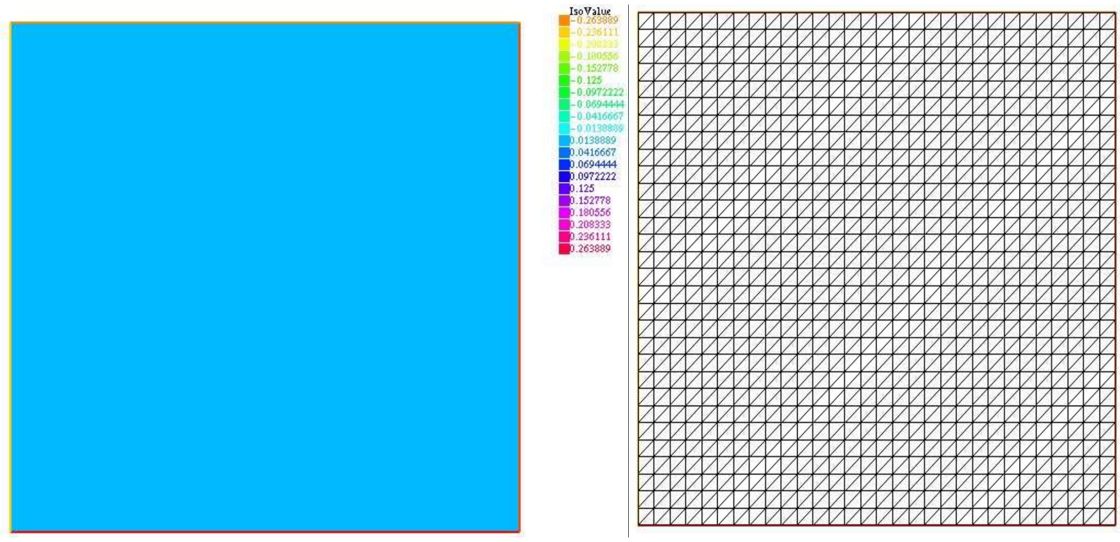
Şekil 5.5. $\sigma_1 = 0.1$ ve $\sigma_2 = 0.1$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



Şekil 5.6. $\sigma_1 = 0.9$ ve $\sigma_2 = 0.9$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



Şekil 5.7. $\sigma_1 = 0.5$ ve $\sigma_2 = 0.5$ için opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve kullanılan adaptif ağ örgüsü (sağ)



Şekil 5.8. Normal ağ örgüsü ile tüm σ değerleri için elde edilen opsiyon fiyatı kontör grafiği (sol) ve ağ örgüsü (sağ)

Yukarıda verilen Sonlu Eleman Çözümlerinden aşağıdaki yorum ve çıkarımlar yapabilir:

- Oynaklık değeri arttıkça çözümü bulmak daha zorlaşacaktır ve bunun için kullanılan kod adaptif sonlu elemanlar sistemi ile ağ örgüsünü sıklaştıracaktır. Şekil 5.6 ve şekil 5.7`ye bakıldığında oynaklıkların büyük olduğu durumda, ağ örgüsünün sıklaştığı görülmektedir.
- Riske atılacak opsiyon değeri oynaklığın en küçük olduğu durum şekil 5.5`de görülmektedir.
- Oynaklık azaldığında opsiyon için ödenecek tutar en düşüktür. Şekil 5.6`da her iki dayanak varlık üzerindeki oynaklık fazla olduğundan, riskli bir yatırım olması ve bunun için de maksimum ödenecek opsiyon fiyatının diğer durumlara göre daha düşük olduğu görülür.
- Şekil 5.8`de elde edilen sonuç aslında diğer tüm 3 durumda uygulanan adaptifliğin kaldırılması sonucu elde edilen çözümdür ve bu her değişen volatiliteler için aynı grafiği vermektedir. Yani ağ örgüsünün adaptifliği kaldırıldığında beklenen çözüm elde edilememiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Black Scholes denkleminin sonlu eleman çözümü için kısmi diferansiyel denklemin elde edilişi ve bu denklemin analitik çözümü için çıkarılan Black Scholes formülü verilmiştir. Opsiyonların değerlendirilmesinde kullanılan Black-Scholes denkleminin öneminden bahsedilerek verilen bir Avrupa tipi opsiyon için sonlu eleman yöntemi kullanılarak, değişen oynaklıklar üzerinde opsiyon değerlerinin elde edilişi gösterilmiştir. Daha sonraki çalışmalar için denklemin kararsızlaştığı durumlarda nümerik kararlaştırma kullanılarak denklem için güvenilir çözümlerin elde edilmesi problemi düşünülecektir.

KAYNAKLAR

Abanoz, M. (2005). Türkiye'nin İlk Türev Ürünler Borsası ve İlk Özel Borsa: Vadeli İşlem Opsiyon Borsası (VOB). *Yaklaşım*, 152, 79-83.

Achdou, F. and Pironneau, O. (2007). Finite Element Methods for Option Pricing. *Université Pierre et Marie Curie*, 1-12.

Aksop, E.Y. ve Güler, H. (2017, 29-30 Eylül). *Demiryolu Altyapı ve Üstyapı Hesaplarının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Analizi ve Hat Bileşenlerinin Boyutlandırılması.* Paper presented at the fifth International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science, Baku, Azerbaijan.

Apak, S. ve Uyar, M. (2011). *Türev Ürünler ve Finansal Teknikler* (Birinci Baskı). Türkiye: Beta Yayınevi, 3-14, 48, 73, 108, 114-115.

Australian Security Exchange. (2000). *Understanding Options Trading.* Sydney, Australia: NSW 2000, 1-40.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy.* 81(3), 637-654.

Clarke, R.G. (1996). Options and Futures: A Tutorial. *The Research Foundation of The Institue of Chartered Financial Analysits.* 1-124.

Ergin, A., Bayraktarkatal, E. ve Ünsal, Y. (2000). *Sonlu Elemanlar Metodu ve Gemi İnşaatı Sektöründeki Uygulamaları.* (Seminer Kitabı). İstanbul: Yapım Matbaacılık, 1-89.

Damodaran, A. (1995). *Investment Valuation.* Tools and Techniques for Determining the Value of any Asset (Third edition). New York: John Wiley & Sons, 1, 17.

Gemmill, G. (1992). *Options Pricing: An International Perspective.* London: McGraw-Hill Publishing, 6.

Gözgör, G. (2008). *Finansal Türev Piyasaları: Forward, Futures, Opsiyon ve Döviz Üzerine Bir Uygulama.* Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 1-218.

Hull, J.C. (1991). *Introduction to Futures and Options Markets* (Third Edition). Engelwood Cliffs, New Jersey: Pearson Prentice Hall, Inc., 15, 144.

Hull, J.C. (2015). *Options, Futures and Other Derivatives* (Ninth Edition). Boston: Pearson, 1-869.

He, K. and Zhu, W.D. (2009). Modelling of Fillets in Thin-walled Beams Using Shell/Plate and Beam Finite Elements. *Journal of Vibration.* 131 (5). 1-35.

Ilkiw, J.H. (2006). 2600 Years of Options: Will They Ever Reach Their Tipping Point? *Canadian Investment Review.* 4-11.

İnternet: Seth, S. (2018). How and Why Interest Rates Affect Options. Investopedia. URL: https://www.investopedia.com/articles/active-trading/051415/how-why-interest-rates-affect-options.asp adresinden 17 Haziran 2019'da alınmıştır.

Karatepe, Y. (2000). *Türev Piyasaları*. Ankara: Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını, Yayın No: 587, 1-174.

Krizek, M., Neittanmaki, P., Stenberg, R. (1994). *Finite Elemant Mothods fifty years of the Courant element*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1, 52.

Kurar, İ. ve Çetin, C. (2016). Türev Araçlarının Risk Yönetim Fonksiyonu: Vadeli İşlem Piyasası Risk Yönetimi Üzerine Bir Araştırma. *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 21 (2), 403-425.

Kütük, Ö. (2014). *Türev Araçlar ve Türk Bankacılık Sistemindeki Uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi. Başkent Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara, 3-76.

Logan, D.L. (2002). *A First Course In The Finite Element Method* (Third Edition). Canada: Brooks/Cole Pub. Co, 1-254.

MEGEP (Mesleki Eğitim ve Öğretim Sisteminin Güçlendirilmesi Projesi) (2007). *Muhasebe ve Finasnman Türev Piyasa Araçları*. Ankara: 1-51.

Mehmood, Y. ve Hanif, W. (2014). Impact of Bullish and Bearish Market on Investor Sentiment. *Innovative Space of Scientific Research Journals*, 9 (1), 142-151.

Pham, K. (2007). *Finite Element Modeling of Multi-Asset Barrier Options*. Master Thesis. University of Reading, Reading, 1-57.

Reddy, J.N. (1995). *An Introduction to the Finite Element Method* (Second Edition). New York: McGraw-Hill,Inc, 1-680.

Saltoğlu. B. (2014). *Türev Araçlar, Piyasalar ve Risk Yönetimi*. Lisanslama Sınavları Çalışma Kitapları. İstanbul: Boğaziçi Üniversitesi ve Risktürk, 1-179.

Saunders, A. and Cornett, M.M. (2012). *Financial Markets and Institutions* (Fifth Edition). New York: Mcgraw-Hill Higher Education, 1-754.

Şeker, K., Çemberlitaş, İ., Altundağ, S. (2018). Opsiyon Sözleşmeleri ve Opsiyon Sözleşmelerinden Doğan Kar/Zararın Hesaplanması. *Sosyal Bilimler Akademi Dergisi.* 120-140.

Tanyel, E. (2016). *Türev Ürünler, Türkiye'de ve Dünyada Türev Piyasaların Gelişimi ve Kalkınma ve Yatırım Bankalarında Kullanımı*. İller Bankası Anonim Şirketi Uzmanlık Tezi. Ankara,1-130.

Tekbacak, S. (2010). *Opsiyonlar ve Döviz Opsiyonlarının Merkez Bankalarında Döviz Kuruna Müdahale Aracı Olarak Kullanımı*. T.C. Merkez Bankası Uzmanlık Yeterlilik Tezi. Ankara, 1-80.

Thiele, M., Bigalke, S. and Lienig, J. (2017). *Exploring the Use of the Finite Element Method for Electromigration Analysis in Future Physical Design*. Presented at the Twenty Fifth IFIP/IEEE International Conference on Very Large Scale Integration, Abu Dhabi, UAE.

Thomsett, M.C. (2007). *Getting Started in Options* (Seventh Edition). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1-383.

Yalçıner, K., Tanrıöven, C., Bal, H., Aksoy, E. E. ve Kurt, Ç. (2011). *Finansal Teknikler ve Türev Araçlar* (Üçüncü Baskı) . Ankara: Detay yayıncılık, 114-116, 124-126, 159, 182-183, 233, 255-258.

Yıldırım, M. (2016). *Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Tipli Denklemlerin Sonlu Eleman Çözümleri*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yumurtacı, G. (2012). Opsiyon Sözleşmeleri. *Sermaye Piyasasında Gündem*. 121, 5-19.

Wilmott, P., Howison, S. ve Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*, A student Introduction. Cambridge: Cambridge Univesity Press, 71-83.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ASAR, Cihan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 24.11.1988, Çankırı
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (505) 050 72 18
e-mail	: cihanasr@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Universitesi Matematik	Devam Ediyor
Yüksek lisans	Drexel Üniversitesi / Finans	2017
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2011
Lise	Yeşilöz Y.D.A.L.	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2017-Halen	Türkiye Petrolleri A.O.	Uzman Yardımcısı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Satranç, Playstation

GAZİ GELECEKTİR...