

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA
ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN FONKSİYONLARI İÇİN
GRÜSS TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ SONUÇLAR**

Remziye TUNÇ

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2020**



© 2020 [Remziye TUNÇ]

TEZ ONAYI

Remziye TUNÇ tarafından hazırlanan "**Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaylarında Özeşlenik Operatörlerin Fonksiyonları İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler Ve İlgili Sonuçlar**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman

Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Prof. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi

Dr. Öğr. Üyesi Işıl AÇIK DEMİRCİ
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Şule Sultan UĞUR

.....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Remziye TUNÇ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. BEREZİN SEMBOLÜ VE GRÜSS TİPLİ EŞİTSİZLİKLER	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	16
4.1. İki Operatör İçin Berezin Sayı Eşitsizlikleri	16
4.2. Grüss Tipli Eşitsizlik	20
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	23
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ.....	28

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN FONKSİYONLARI İÇİN GRÜSS TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE İLGİLİ SONUÇLAR

Remziye TUNÇ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

Yüksek lisans tez çalışmasında üretici çekirdekler ve Berezin sembolü yardımıyla üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde $C_{\alpha,\beta}(A)$ dönüşümü kullanılarak Berezin sayı eşitsizlikleri çalışılmış ve üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde özeşlenik operatörler için Grüss tipindeki eşitsizlikler verilmiştir. Üretici çekirdek teorisi Hilbert uzaylarındaki lineer dönüşümlerle temel bağlantısı olan matematiksel bilimlerdeki bir çok alanda uzun bir tarihe ve büyük çalışmalara sahiptir. Birçok bilim alanında ortak olan konu üretici çekirdek ve Berezin sembolü olduğu için bu kavramlar üzerinde sonuçlar verilmiştir. Teorinin gerekli olan temel içeriğini kapsadığı, bununla beraber incelemek için daha rahat olduğundan Grüss tipli eşitsizlikler ile çalışılmasının daha uygun olduğu düşünülmüştür. Grüss tarafından verilen iki fonksiyonun çarpımının integrali ve onların integralinin çarpımı arasındaki farkın tahminini veren ilginç ve yararlı Grüss eşitsizliği, istatistik, kodlama teorisi, nümerik analiz, fonksiyonel analiz ve uygulamalarını içeren matematiğin bir çok branşında önemli bir yer tutmaktadır. Son zamanlarda bu eşitsizlik geliştirilmiş ve pek çok genelleştirilmesi elde edilmiştir. Böylece Grüss tipli eşitsizlikler ve uygulamaları operatörler teorisinde yerini almıştır. Bu sebeple Grüss tipli eşitsizlikler ve bazı iyi bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda özeşlenik (self-adjoint) operatörlerin ve fonksiyonların Berezin sayısı için yeni tipli eşitsizlikler ile ilgili sonuçlar ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler: Grüss eşitsizliği, Berezin sembolü, Berezin sayısı, Özeşlenik operatörler, Üretici çekirdek, Özeşlenik operatörlerin fonksiyonları.

2020, 29 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

GRÜSS TYPE INEQUALITIES FOR FUNCTIONS OF SELFADJOINT OPERATORS IN REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE AND RELATED RESULTS

Remziye TUNÇ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In this master's thesis, we examined the Berezin number inequalities by using the transform $C_{\alpha,\beta}(A)$ defined in terms of reproducing kernels and Berezin symbol on reproducing kernel Hilbert spaces, and give Grüss-type inequalities for selfadjoint operators in reproducing kernel Hilbert spaces. The theory of reproducing kernel has fundamental ties to linear transformations in Hilbert spaces, has a long history in many other fields in mathematical sciences and there has been major work on this subject. The results of these concepts are given because the subject that is common in many fields of science is reproducing kernel and the Berezin symbol, we have results on these. Since it encompasses the fundamental contents of the theory necessary for our work and because of the ease of using Grüss-type inequalities, we have implemented their use in our work. Grüss proved an interesting and useful inequality that gives an estimate of the difference between the integral of the product of two functions and the product of their integrals. Applications of the Grüss type inequalities have been found in many branches of Mathematics including statistics, coding theory, numerical analysis, functional analysis and applications. In a recent, proved more general inequalities of the Grüss type. Thus, Grüss type inequalities and applications have taken place in the theory of operators.

Keywords: Grüss inequality, Berezin symbols, Berezin number, Selfadjoint operators, Reproducing kernel, Functions of Selfadjoint operators.

2020, 29 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırmamın her safhasında kıymetli katkı ve eleştirileriyle beni yönlendiren, karşılaştığım problemleri bilgi ve deneyimi ile çözmemde yardımcı olan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a içtenlikle teşekkür ederim.

FYL-2018-6696 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Aynı zamanda tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteklerini esirgemeyen annem Ayşe TUNÇ ve Babam Fatih TUNÇ'a teşekkür ederim.

Remziye TUNÇ

ISPARTA, 2020

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki sınırlı lineer operatörler
$Sp(A)$	A operatörünün spektrumu
$\mathcal{F}(\Omega)$	Ω kompleks değişkenli fonksiyonların kümesi
$\widehat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{\ k_\lambda\ }$	$\mathcal{H}(\Omega)$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği
$C^*(A)$	$\mathcal{H}$ üzerinde A ve $1_{\mathcal{H}}$ özdeşlik operatörü ile üretilen cebir
$Ber(A)$	A operatörünün Berezin kümesi
$ber(A)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Range(\widetilde{A})$	A operatörünün Berezin sembolünün görüntüsü
C^*	$\mathcal{H}$ Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cebiri
$W(A)$	$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de A operatörünün nümerik değeri
$w(A)$	$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de A operatörünün nümerik yarıçapı
$C(Sp(A))$	A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezinde üretici çekirdek yardımıyla tanımlı bazı operatör eşitsizliklerin sağlandığı gösterilmiş ve bununla ilgili bazı incelemeler yapılmıştır. Ayrıca operatör teorisindeki bazı operatör eşitsizleri için üretici çekirdeklerin yeni uygulamaları gösterilmiştir. Bu konunun daha rahat algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonlar üçüncü bölümde sunulmuştur.

Günümüzün sürekli gelişmekte olan çalışma alanlarında, Berezin sembolü ve tanımında kullanılan üretici çekirdek metodunun büyük önem taşıdığı bilinmektedir. Üretici çekirdek ve Berezin sembolü metodu, kuantum fiziğinin problemlerinin araştırılması ve yorumlanmasında, diferansiyel denklemler teorisinde Riesz bazları konusunda kullanılmaktadır. Bu teori bir o kadar başka anlamda M. Krein tarafından kullanılmıştır. Bundan başka, olasılık teorisinde üretici çekirdekler tekniği ilk olarak dünyaca ünlü rus bilim adamı A.N. Kolmogorov tarafından 1941 yılında kullanılmış ve çok önemli sonuçlara imza atılmıştır (Kolmogorov, 1941). Bundan sonra, E. Parzen ve diğerleri bu konuyu daha da ileriye götürmüşlerdir. Üretici çekirdekler kullanılarak tanımlanabilen Berezin sembolleri kavramı ilk olarak Rus matematikçisi ve fizikçisi Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972, 1974). Berezin, aslında operatörler için kovaryant ve kontravaryant sembol kavramlarını vermiştir. Berger ve Coburn ise ilk olarak Toeplitz operatörünün kontravaryant sembollerini, yani Toeplitz operatörünün Berezin sembolünü kullanmışlardır (Berger ve Coburn, 1986, 1987). Berezin sembolü bir çok durumlarda çok etkileyicidir ve mevcut operatör için önemli bilgiler taşımaktadır.

Tarih boyunca, matematiksel analiz son üç yüz yıldır matematiğin önde gelen dallarından biri olmuştur. Aslında, eşitsizlikler, matematiksel analizin merkezi olmuştur. Bulunan kanıtlarla, matematiksel fiziğinde, teorik ve uygulamalı matematiğin bir çok alanında, faydalı uygulamaları ile birlikte pek çok yeni eşitsizliğin bulunmasını sağlayan bu konuya bir çok büyük matematikçi yeni gelişmeler ve önemli katkılar sağlamıştır. Aslında ilk defa 1934 yılında bir bilimsel araştırma olarak başlayan Hardy, Littlewood ve Polya tarafından çığır açan eseri "Eşitsizlikler" adlı kitap ile birlikte matematiksel eşitsizlikler yirminci yüzyılda da modern matematiğin önemli bir dalı haline gelmiştir (Hardy vd., 1967). Bu eşsiz yayın sağlam kanıtlar ve matematikteki faydalı uygulamalarıyla seçkin eşitsizliklerle dolu kesin mantıktaki bir paradigmayı

temsil eder. Burada Anthony Zygmund'ın eğlenceli sözünü söylemek yerinde olur. "Hardy, Littlewood ve Polyo'nun kitabı son yirmi, otuz yılda analiz alanındaki en önemli kitaplardan biri olmuştur. Kitabın araştırma trendleri üzerinde etkisi olmuştur ve hala etkilemeye devam etmektedir. Şu anda bir insan bu kitabı gözden geçirirken varolan metni değiştirmeyi ne kadar az istediğini farkeder" (Yang ve Debnath, 2014).

Üretici çekirdekler ve onların yardımıyla tanımlanan Berezin sembollerinin uygulamaları hakkında literatürde az sayıda çalışma yer aldığından, sunulan tez konusu literatürde önemli yer tutacaktır. Bu tezde verilecek sonuçlar Dragomir (2005) deki klasik durum için kullanılan metotları yakından takip edilerek elde edilmiştir. Grüss tarafından verilen iki fonksiyonun çarpımının integrali ve onların integralinin çarpımı arasındaki farkın tahminini veren ilginç ve yararlı Grüss eşitsizliği, istatistik, kodlama teorisi, nümerik analiz, fonksiyonel analiz ve uygulamalarını içeren matematiğin birçok branşında önemli bir yer tutmaktadır. Son zamanlarda bu eşitsizlik geliştirilmiş ve pek çok genelleştirilmesi elde edilmiştir. Böylece Grüss tipli eşitsizlikler ve uygulamaları operatörler teorisinde yerini almıştır.

Bu tez çalışması Grüss tipli eşitsizlikler ve bazı iyi bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda özeşlenik (self-adjoint) operatörlerin ve fonksiyonların Berezin sayısı için yeni tipli eşitsizlikler ile ilgili sonuçlar ortaya koyulmuştur. Böylece, Grüss tipli eşitsizlikler ve Berezin sembolü metodunun birlikte kullanılması ile operatörlerin Berezin sayısı eşitsizliklerine yeni bir bakış açısı kazandırılması hedeflenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu yüksek lisans tez çalışması, üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin uygulama alanlarıyla ilgilidir. Bilim alanındaki hızlı ilerlemelere bağlı olarak yeni uygulama arayışları, üretici çekirdekler ve onların yardımıyla tanımlanan Berezin sembollerinin uygulamaları ile ilgili çalışmaların en etkili yürütücü kuvveti olmuştur. Berezin sembollerinin Bergman uzaylarında ve Poisson çekirdeğinin Hardy uzaylarında önemli bir role sahip olduğu bilinen bir gerçektir. Eğer Berezin sembollerinin tanımladığı kümenin, yani Berezin kümesinin operatörün nümerik değer kümesinin alt kümesi olduğu dikkate alınır, bu kavramların haberleşme alanında geniş bir uygulamaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara ilaveten, elektronların Vieck ve anti-vieck sembollerinin Berezin sembolleri ile sıkı bir ilişkiye sahip olmasından dolayı da yine Berezin sembollerinin elektronların enerji seviyelerinin belirlenmesinde var olduğu görülmektedir. Üretici çekirdekler de geniş bir uygulama alanına sahiptir. Üretici çekirdekler teorisinin uygulamasının önemli olduğu öğrenme (learning) teorisinde (Mühendisler için önemli olan destek vektör makineleri teorisini kapsayan), yani sürekli fonksiyonlar ailesinin alt uzayları olarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarının diskleriyle örtü (covering) sayılarının tahminleri, üretici çekirdekler ve üretici çekirdekli Hilbert uzayları arasındaki düzgün bağıntılar ve Sobolev uzaylarıyla fonksiyonların yaklaşımlarında birçok sonuçlar bulunmaktadır. Üretici çekirdekler teorisi Hilbert uzayları üzerinde lineer dönüşümler ile birleştirildiğinde çeşitli alanlarda birçok bağıntılara ve diferansiyel denklemler, integral denklemler, Pythagorean teoreminin genelleştirilmesi, ters problemler, sampling teori, lineer dönüşümler ile birleştirilen nonlinear dönüşümler, Hilbert uzayları arasında çeşitli operatörler ve birçok geniş alanlar üzerine yayılmış verimli uygulamalara sahiptir.

Üretici çekirdekler konusu eskilere dayanan bir konu olup daha önce 1907-1909 yıllarında J. Mercer ve S. Zaremba tarafından integral denklemler teorisinde kullanılmaya başlanılmıştır (Zaremba, 1907). Bu konular için genel teori N. Aronszajn'ın adı ile tam olarak ortaya konulmuştur (Aronszajn, 1950). Daha sonraları üretici çekirdekler Fransız bilim adamı Fields ödülü ile mükafaatlandırılmış L. Schwartz tarafından geliştirilmiştir. Bu teori bir o kadar başka anlamda M. Krein tarafından kullanılmıştır. Bundan başka, olasılık teorisinde üretici çekirdekler tekniği ilk olarak

dünyaca ünlü rus bilim adamı A.N. Kolmogorov tarafından 1941 yılında kullanılmış ve çok önemli sonuçlara imza atılmıştır (Kolmogorov, 1941). Bundan sonra, E. Parzen ve diğerleri de bu konuyu daha da ileriye götürmüşlerdir. Günümüz matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburo Saitoh üretici çekirdekler metoduna sanki yeni bir hayat vererek, bu yöntemi analizde, diferensiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatörler teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orijinal sonuçlar almayı başarmışlardır. Bütün bu sonuçlar Saitoh'un iki kitabında toplanmıştır (Saitoh, 1988, 1997). İlk olarak Berezin tarafından üretici çekirdekler yardımıyla Berezin sembolü kavramı tanımlanmıştır (Berezin, 1972, 1974). İlerleyen zamanlarda üretici çekirdek ve Berezin sembolü bir çok araştırmacının çalışma konusu olmuş ve bu yönde literatüre katkı sağlayacak sonuçlar elde edilmiştir (Engliš, 1994; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Axler ve Zheng, 1998a,b).

Giriş kısmından da görüldüğü gibi, üretici çekirdekler ve Berezin sembolleri üretici çekirdekli Hilbert uzayındaki operatörler teorisinde fevkalade öneme sahiptirler. Buna göre, son yıllarda üretici çekirdekler ve Berezin sembollerinin iç dinamikmi geniş bir biçimde öğrenilmekle beraber bu iki kavramın çeşitli ve çok sayıda önemli uygulamaları da açıkça literatürde görülmektedir (Nikolski, 1986; Zhu, 1990; Korenblum, 1977; Sarason, 1994).

1935 yılında integrallerin çarpımları yardımıyla çarpımın integralinin yaklaşımını veren integral eşitsizliği olan Grüss eşitsizliği ilk olarak Grüss (1935) tarafından verilmiştir. Bu eşitsizliğin bir çok genelleştirilmesi Mitronovic vd. kitabında ve referanslarında bulunabilir (Mitronovic vd., 1993). Son yıllarda Fink çalışmasında Grüss tipli eşitsizliğin daha genel eşitsizliğini Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir uygulaması olarak ispatlamıştır (Fink, 1999). Devamında bir çok matematikçi bu konuyu geliştirdi. Bu eşitsizlik istatistik, kodlama teorisi, nümerik analiz, fonksiyonel analiz ve uygulamalarını içeren matematiğin bir çok alanında kullanılmıştır (Dragomir, 1999a,b,c; Dragomir ve Wang, 1997). 1950 yılında, M. Binernacki, H. Pidek ve C. Ryll-Nardjewski 3. kısımda verilen Grüss eşitsizliğinin ayrık versiyonunu oluşturdular. Grüss tipli bazı diğer integral eşitsizliği içinde Grüss eşitsizliğinin basit ispatı Mitronovic vd. (1993) kitabının 10. bölümünde mevcuttur. Bahsedilen eşitsizliğin diğer sonuçları Anastassiou (2007a,b,c), Cerone (2003, 2006a,b), Cerone ve Dragomir

(2004, 2005, 2007), Dragomir (1999b, 2000a,b); Dragomir ve Booth (2000), (Fink, 1999), Pachpatte (2008) ve ayrıca Zhao ve Cheung (2008) in çalışmalarında bulunabilir.

Üretici çekirdekler ve onların yardımıyla tanımlanan Berezin sembollerinin uygulamaları hakkında literatürde az sayıda çalışma yer aldığından, sunulan tez konusu literatürde önemli yer tutacaktır. Bu tez çalışmasında verilecek sonuçlar Dragomir (2005) deki klasik durum için kullanılan metotlar yakından takip edilerek elde edilmiştir.



3. BEREZİN SEMBOLÜ VE GRÜSS TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu tez çalışmasında, Grüss tipli eşitsizlikleri ve bazı iyi bilinen eşitsizlik tipleri kullanılarak üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında özeşlenik (self-adjoint) operatörlerin ve fonksiyonların Berezin sayısı için yeni tipli eşitsizlikleri incelemek hedeflenmektedir. Burada Grüss tipli eşitsizlikler ile Berezin sembolü metodunun birlikte kullanılması operatörlerin Berezin sayı eşitsizliklerine yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır. Bu kapsamda ortaya konan problemlerin ve bu problemlere yönelik üretilen çözüm yöntemleri ve sonuçlarının rahatlıkla algılanabilmesi için gerekli terim ve notasyonları bu bölümde sunacağız.

Tanım 3.1. Üzerinde bir norm tanımlanmış olan bir V vektör uzayına normlu uzay adı verilir. Bir tam normlu uzaya Banach uzayı denir. Bir V vektör uzayı üzerindeki norm ise V üzerinde tanımlı olup, bir $a \in V$ noktasındaki değeri

$$\|a\|$$

ile gösterilen ve a ve b , V de keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere

$$(N1) \quad \|a\| \geq 0,$$

$$(N2) \quad \|a\| = 0 \iff a = 0,$$

$$(N3) \quad \|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$$

$$(N4) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

özelliklerini sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Tanımlanmış olan normlu uzaylar $(V, \|\cdot\|)$ ya da V ile gösterilmiştir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.2. Aynı K cismi üzerinde $(V_1, \|\cdot\|_1)$ ve $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normlu uzaylar olsun. Eğer her $a \in V$ için

$$\|Ta\|_2 \leq M \|a\|_1$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif M sabiti mevcut ise bir $T : V_1 \rightarrow V_2$ lineer dönüşümü bir sınırlı lineer operatör olarak adlandırılır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.3. Bir iç çarpım uzayı ya da ön-Hilbert uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir L vektör uzayıdır. Bir Hilbert uzayı ise üzerindeki iç çarpım ile

tanımlanmış metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Burada ifade edilen iç çarpım, $L \times L$ den L nin bir skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür. Yani, L nin (u, v) vektör çifti u ve v nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle u, v \rangle$ ile gösterilen ve her u, v ve z vektörleri ve α skaleri için

$$(i\check{c} \ 1) \ \langle u, v + z \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, z \rangle$$

$$(i\check{c} \ 2) \ \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$(i\check{c} \ 3) \ \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \text{ (simetri)}$$

$$(i\check{c} \ 4) \ \langle u, u \rangle \geq 0; \ \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0 \text{ (pozitif tanımlılık)}$$

özelliklerini sağlayan bir skalerle eşlenmektedir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.4. Bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir $T : H \rightarrow H$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $T^* = T$ ise T operatörüne özeşlenik ya da Hermityen operatör adı verilir (Kreyszig, 1989).

Yardımcı Teorem 3.5. *Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve üçgen eşitsizliği hem teorik hem de pratik olarak yaygın olan önemli teknik eşitsizliklerdir:*

(C-S) *Eğer $u, v \in L$ ise o zaman*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

dir (Bu eşitsizlik Schwarz eşitsizliği olarak bilinir). Bu eşitsizliğin bir eşitlik olması için gerekli ve yeterli koşul u, v nin birinin diğerinin bir skaler çarpımı olmasıdır.

(Ü) *Eğer $u, v \in L$ ise o zaman*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)}$$

dir. Bu eşitsizliğin bir eşitlik olması için gerekli ve yeterli koşul u, v nin birinin diğerinin bir negatif olmayan çarpımı olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.6. Kompleks sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \rightarrow f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli H uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına üretici çekirdekli Hilbert

uzayı adı verilir. Literatürden bilinen Riesz temsil teoremi kullanılarak, $\lambda \in \Omega$ için

$$f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda} \rangle, f \in \mathcal{H}$$

olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonun mevcut olduğu elde edilir. $\Omega \times \Omega$ kümesi üzerinde $k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k(z, \lambda)$ ile tanımlanan bu $k_{\mathcal{H},\lambda}$ fonksiyonuna λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği denir (Halmos, 1982).

Yardımcı Teorem 3.7. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. O zaman $\mathcal{H}$ uzayının k üretici çekirdeği

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilir (Stroethoff, 1997).

Üstteki Yardımcı Teorem'den $k_\lambda(z) = \overline{k_z(\lambda)}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla her $\lambda, z \in \Omega$ için $k(z, \lambda) = \overline{k(\lambda, z)}$ dir. k_λ normu ise

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = k(\lambda, \lambda)$$

dir. $\widehat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{(k(\lambda, \lambda))^{\frac{1}{2}}} = \frac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ fonksiyonuna λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.8. $\widehat{k}_\lambda = \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}$ ifadesi $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı ve $\mathcal{H}$ uzayı üzerinde A herhangi bir sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\widetilde{A}(\lambda) = \langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \rangle_{\mathcal{H}}, \lambda \in \Omega$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna A operatörünün Berezin sembolü ya da Berezin dönüşümü denir (Berezin, 1972, 1974; Nordgren ve Rosenthal, 1994; Engliš, 1994, 1995; Zhu, 1990).

Tanım 3.9. Boş olmayan bir Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir A operatörünün Berezin kümesi ve Berezin sayısı, sırasıyla

$$\begin{aligned}\text{Ber}(A) &= \text{Range}(\tilde{A}) = \left\{ \tilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} \\ &= \left\{ \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle : \lambda \in \Omega \right\}\end{aligned}$$

ve

$$\text{ber}(A) = \sup_{\lambda \in \Omega} \left| \tilde{A}(\lambda) \right|$$

ifadeleriyle tanımlanır (Karaev, 2006).

Aşağıda Berezin sembolünün bazı temel özellikleri verilmiştir (Kılıç, 1994).

1. A pozitif operatör ise o zaman $\tilde{A}$ pozitif fonksiyondur.
2. Sınırlı lineer bir A operatörünün $\tilde{A}$ Berezin sembolü de sınırlı br fonksiyondur. Yani,

$$\begin{aligned}\left| \tilde{A}(\lambda) \right| &= \left| \left\langle A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle \right| \leq \|A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| \|\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| \\ &\leq \|A\| \|\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| \|\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\| = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega)\end{aligned}$$

dır.

3. A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü, $\tilde{A}$ kompleks eşleniğine eşittir. Yani

$$\tilde{A}^*(\lambda) = \left\langle A^*\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle = \overline{\left\langle \hat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A\hat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle} = \overline{\tilde{A}(\lambda)}$$

dir.

4. Her $\lambda \in \Omega$ için $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{B}(\lambda)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $A = B$ olmasıdır.
5. A operatörü kompakt ise $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) dır. Ancak ifadenin tersi genelde doğru değildir. Yani $\tilde{A}(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \partial\Omega$) ise A operatörü kompakt olmayabilir.

Tanım 3.10. Herhangi $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ operatörü $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. Aynı zamanda $|A|^2 = A^*A$ dır (Zamani, 2017).

Tanım 3.11. Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün nümerik değer kümesi ve nümerik yarıçapı, sırasıyla

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H} \text{ ve } \|x\| = 1 \}$$

ve

$$w(A) := \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathcal{H} \text{ ve } \|x\| = 1 \}$$

ile tanımlanır.

Üstteki tanımdan

$$\text{Ber}(A) \subseteq W(A) \text{ ve } \text{ber}(A) \leq w(A) \leq \|A\|$$

dır (Halmos, 1982).

Nümerik yarıçap ve onun uygulamaları için (Abu-Omar ve Kittaneh, 2014, 2015; Bakherad ve Kittaneh, 2019; Bakherad ve Shebrawi, 2018; Dragomir, 2000b,a, 2013; Karaev, 2013) numaralı referansları ve bunların içindeki var olan referansları baz alınmıştır. İki operatörün çarpımı için nümerik yarıçap eşitsizliği aşağıdaki şekildedir:

$\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde A, B sınırlı lineer operatörleri için

$$w(AB) \leq 4w(A)w(B)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda $AB = BA$ ise o zaman

$$w(AB) \leq 2w(A)w(B)$$

dir (Gustafson ve Rao, 1997). Bu sebeple aşağıdaki soru doğal olarak ortaya çıkar:

Soru 3.12. Üstteki eşitsizlik operatörlerin Berezin sayısı için de doğru mudur ? Hangi operatör sınıfları için

$$\text{ber}(AB) \leq C \text{ber}(A) \text{ber}(B) \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır ?

Bu tez çalışmasında üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde $C_{\alpha,\beta}(A)$ dönüşümünü kullanılarak (3.1) numaralı eşitsizlik çalışılmıştır. Bununla birlikte üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında özeşlenik operatörler için Grüss tipindeki eşitsizlikler verilmiştir.

1935 yılında Grüss (1935) integrallerin çarpımının yardımıyla çarpımın integralinin bir yaklaşımını veren aşağıdaki integral eşitsizliğini ispatladı: Eğer f ve g fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir reel fonksiyonlar ve her $x \in [a, b]$ için

$$\phi \leq f(x) \leq \Phi, \gamma \leq g(x) \leq \Gamma$$

olacak şekilde ϕ , Φ , γ ve Γ reel sabitleri mevcut ise o zaman

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)d(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)d(x) \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)d(x) \right| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma)$$

dir. Burada eşitsizlikte kullanılan $\frac{1}{4}$ sabiti daha küçük bir sayı ile yer değiştirilemez olduğu bilinen bir gerçektir. Bu eşitsizlik matematiğin iç çarpım uzayları, kareleme formülleri, sonlu Fourier dönüşümleri, lineer fonksiyoneller gibi farklı alanlarda birçok matematikçi tarafından uygulaması ve genelleştirmesi incelenmiştir.

1950 de Biernacki vd. (1950) tarafından Grüss eşitsizliğinin aşağıdaki farklı bir versiyonu kurulmuştur (Biernacki vd., 1950; Mitronovic vd., 1993).

$i = 1, \dots, n$ için $r \leq a_i \leq R$ ve $s \leq b_i \leq S$ olacak şekilde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel sayıların iki n -lisi olsun. O zaman

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right] \left(1 - \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right] \right) (R - r)(S - s)$$

dir. Burada $[x]$ ifadesi $x \in \mathbb{R}$ nin tam değerini göstermektedir. Grüss tipindeki eşitsizlikler için Anastassiou (2007a,b,c), Biernacki vd. (1950), Dragomir ve Fedotov (1998) ve

Dragomir (1999b, 2008) in çalışmaları ve bunların içindeki var olan referansları baz alınmıştır.

Tanım 3.13. Bir kompleks Hilbert uzayda sürekli lineer operatörlerin bir A kompleks cebiri

- i) A operatörlerin norm topolojisi üzerinde topolojik olarak kapalı kümedir,
- ii) A operatörlerin adjointleri alınarak oluşturulan bir işlem altında kapalıdır, özelliklerini sağlıyorsa C^* -cebiri olarak adlandırılır (Halmos, 1982).

C^* -cebirleri fonksiyonel analizin bir araştırma alanı olup ilk olarak kuantum mekanik problemlerinde kullanılmıştır. İlk olarak John von Neumann tarafından bu cebirler için genel çerçeve kurulmuş ve von Neumann cebirleri adıyla bilinen özel C^* -cebir sınıfı tanımlanmıştır. 1943'te Gelfand ve Naimark Hilbert uzayını kullanmadan C^* -cebirlerini karakterize etmiştir. C^* -cebirinin temel örneği kompleks $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında sınırlı lineer operatörlerin $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ cebiridir. Burada x^* ifadesi $x : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ operatörünün eşlenik operatörünü tanımlar.

A operatörü bir $\mathcal{H}$ kompleks Hilbert uzayı üzerinde bir özeşlenik lineer operatör olsun. Gelfand dönüşümü aşağıdaki gibi $\mathcal{H}$ üzerinde $1_{\mathcal{H}}$ özdeşlik operatörü ve A ile üretilen $C^*(A)$ C^* -cebiri ile $Sp(A)$ ile tanımlı A nın spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar kümesi olan $C(Sp(A))$ arasında bir Φ *-izometrik izomorfizm dönüşümü oluşturur (örnek için bk. Furuta vd. (2005)).

Tanım 3.14. Herhangi bir $f, g \in C(Sp(A))$ ve herhangi bir $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

- (i) $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g)$,
- (ii) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f) = \Phi(f)^*$,
- (iii) $\|\Phi(f)\| = \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$,
- (iv) $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$ olmak üzere $\Phi(f_0) = 1_{\mathcal{H}}$ ve $\Phi(f_1) = A$ dir.

Bu notasyonlar ile birlikte

$$\text{her bir } f \in C(Sp(A)) \text{ için } f(A) := \Phi(f)$$

tanımlayabiliriz ve bu ise bir A özeşlenik operatörü için sürekli fonksiyonel kalkülüs olarak adlandırılır.

Tanım 3.15. Eğer A bir özeşlenik operatör ve f fonksiyonu $Sp(A)$ üzerinde bir reel değerli sürekli fonksiyon ise o zaman herhangi $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ ifadesi $\mathcal{H}$ üzerinde $f(A) \geq 0$ olduğunu verir. Bu sebeple, eğer f ve g fonksiyonları $Sp(A)$ üzerinde reel değerli fonksiyonlar ise o zaman aşağıdaki temel özellik sağlanır: $B(\mathcal{H})$ nin operatör mertebesinde

$$\text{herhangi bir } t \in Sp(A) \text{ için } f(t) \geq g(t) \text{ ise } f(A) \geq g(A) \quad (3.2)$$

dir.

Şimdi Dragomir (2013) tarafından verilen Hilbert uzaylarında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için Grüss tipli eşitsizlikle ilgili sonuçlarını verelim.

Teorem 3.16. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayı $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) üzerinde bir iç çarpım uzayı ve $e \in H$, $\|e\| = 1$ olsun. Eğer

$$\operatorname{Re} \langle \phi e - x, x - \phi e \rangle \geq 0 \text{ ve } \operatorname{Re} \langle \Gamma e - y, y - \gamma e \rangle \geq 0$$

koşulları sağlanacak şekilde $\phi, \gamma, \phi, \Gamma$ reel veya kompleks sayılar ve x, y değerleri H uzayında vektörler ise o zaman

$$|\langle x, y \rangle - \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle| \leq \frac{1}{4} |\phi - \phi| \cdot |\Gamma - \gamma|$$

eşitsizliği vardır (Dragomir, 1999b).

Grüss eşitsizliğinin aşağıdaki operatör versiyonu Mond ve Pecaric (1994) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 3.17. $C_j, j \in \{1, \dots, n\}$ operatörü 1_H operatörü H üzerinde özdeş operatör olmak üzere $j \in \{1, \dots, n\}$ için $m_j \cdot 1_H \leq C_j \leq M_j \cdot 1_H$ olacak şekilde $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert

uzayı üzerinde özeşlenik operatörler olsun. Diğer taraftan herbir $j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\phi 1_H \leq g_j(C_j) \leq \phi 1_H \text{ ve } \gamma 1_H \leq h_j(C_j) \leq \Gamma 1_H$$

olacak şekilde $g_j, h_j : [m_j, M_j] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ fonksiyonlar olsun. Eğer $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ olacak şekilde $x_j \in H$, $j \in \{1, \dots, n\}$ ise o zaman

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \langle g_j(C_j) h_j(C_j) x_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle g_j(C_j) x_j, x_j \rangle \cdot \sum_{j=1}^n \langle h_j(C_j) x_j, x_j \rangle \right| \\ & \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi) \cdot (\Gamma - \gamma) \end{aligned}$$

dir.

Eğer C_j , $j \in \{1, \dots, n\}$ operatörleri $j \in \{1, \dots, n\}$ için $Sp(C_j) \subseteq [m, M]$ olacak şekilde özeşlenik operatörler ve bazı $m < M$ skalerleri için $g, h : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ise o zaman Mond ve Pečarić eşitsizliğinden operatörler için Grüss eşitsizliğinin aşağıdaki versiyonu

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \langle g_j(C_j) h_j(C_j) x_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle g_j(C_j) x_j, x_j \rangle \cdot \sum_{j=1}^n \langle h_j(C_j) x_j, x_j \rangle \right| \\ & \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi) \cdot (\Gamma - \gamma) \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ olacak şekilde $x_j \in H$, $j \in \{1, \dots, n\}$ ve $\varphi = \min_{t \in [m, M]} g(t)$, $\phi = \max_{t \in [m, M]} g(t)$, $\gamma = \min_{t \in [m, M]} h(t)$ ve $\Gamma = \max_{t \in [m, M]} h(t)$ dir.

Özel durumda eğer C özeşlenik operatörü bazı $m < M$ skalerleri için $Sp(C) \subseteq [m, M]$ koşulunu sağlar ise o zaman $\|x\| = 1$ özelliğine sahip herhangi $x \in H$ için

$$|\langle g(C) h(C) x, x \rangle - \langle g(C) x, x \rangle \cdot \langle h(C) x, x \rangle| \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi) \cdot (\Gamma - \gamma)$$

dir.

Teorem 3.18. A operatörü $(H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert uzayı üzerinde bir özeşlenik operatör ve bazı $m < M$ skalerleri için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ olduğunu kabul edelim. Eğer f ve g fonksiyonları $[m, M]$ üzerinde sürekli ve $\gamma : \min_{t \in [m, M]} f(t)$, $\Gamma : \max_{t \in [m, M]} f(t)$ ise o

zaman $\|x\| = 1$ özelliğine sahip her bir $x \in H$ için

$$\begin{aligned} & |\langle f(A)g(A)x, x \rangle - \langle f(A)x, x \rangle \cdot \langle g(A)x, x \rangle| \\ & \leq \frac{1}{2} \cdot (\Gamma - \gamma) \left[\|g(A)x\|^2 - \langle g(A)x, x \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma) \cdot (\Delta - \delta) \right) \end{aligned}$$

dir. Burada $\delta : \min_{t \in [m, M]} g(t)$ ve $\Delta : \max_{t \in [m, M]} g(t)$ dir.

Teorem 3.19. A_j operatörleri $j \in \{1, \dots, n\}$ ve bazı $m < M$ skalerleri için özeşlenik operatörler olsun. Eğer $f, g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve $\gamma : \min_{t \in [m, M]} f(t)$, $\Gamma : \max_{t \in [m, M]} f(t)$ ise o zaman $\delta : \min_{t \in [m, M]} g(t)$ ve $\Delta : \max_{t \in [m, M]} g(t)$ olmak üzere $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ özelliğine sahip her bir $x_j \in H$, $j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)g(A_j)x_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle \cdot \sum_{j=1}^n \langle g(A_j)x_j, x_j \rangle \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \cdot (\Gamma - \gamma) \left[\sum_{j=1}^n \|g(A_j)x_j\|^2 - \left(\sum_{j=1}^n \langle g(A_j)x_j, x_j \rangle \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \left(\leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma) (\Delta - \delta) \right) \end{aligned}$$

dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde $C_{\alpha,\beta}(A)$ dönüşümü kullanılarak Berezin sayı eşitsizlikleri çalışılmış ve üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde özdeşlenik operatörler için Grüss tipindeki eşitsizlikler verilmiştir.

4.1. İki Operatör İçin Berezin Sayı Eşitsizlikleri

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bir sınırlı lineer operatör olsun. A^* , A operatörünün eşleniği olmak üzere

$$C_{\alpha,\beta}(A) := (A^* - \bar{\alpha}I)(\beta I - A)$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz (Dragomir, 2008). $C_{\alpha,\beta}(\cdot)$ dönüşümü $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki gibi bazı ilginç özelliklere sahiptir:

- (i) $C_{\alpha,\beta}(I) := (1 - \bar{\alpha})(\beta - 1)I$ ve $C_{\alpha,\alpha}(A) := -(\alpha I - T)^*(\alpha I - A)$,
- (ii) $[C_{\alpha,\beta}(A)]^* = C_{\beta,\alpha}(A)$ ve $C_{\bar{\beta},\bar{\alpha}}(A^*) - C_{\alpha,\beta}(A) = A^*A - AA^*$.

Eğer herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için $\operatorname{Re} \tilde{A}(\lambda) \geq 0$ ise o zaman üretici çekirdekli $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde bir A sınırlı lineer operatörü artan adını alır. Bu özelliği kullanarak herhangi bir $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalerleri ve $\lambda \in \Omega$ için,

$$\operatorname{Re} \widetilde{C_{\alpha,\beta}(A)}(\lambda) = \operatorname{Re} \widetilde{C_{\beta,\alpha}(A)}(\lambda) = \frac{1}{4} |\beta - \alpha|^2 - \left\| \left(A - \frac{\beta + \alpha}{2} I \right) \hat{k}_\lambda \right\|^2$$

elde edilir. Buradan basit bir sonuç verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.1. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $C_{\alpha,\beta}(A)$ ve $C_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(A^*)$ dönüşümleri artandır

(ii) Herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için $\left\| A \hat{k}_\lambda - \frac{\beta + \alpha}{2} \hat{k}_\lambda \right\| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|$ ve $\left\| A^* \hat{k}_\lambda - \frac{\bar{\beta} + \bar{\alpha}}{2} \hat{k}_\lambda \right\| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|$ dir.

Teorem 4.2. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ için $C_{\alpha, \beta}(A)$ ve $C_{\gamma, \delta}(B)$ artan bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\text{ber}(BA) \leq 3\text{ber}(A)\text{ber}(B) + \frac{1}{4}|\beta - \alpha||\gamma - \delta|$$

dir.

İspat. Hipotezden $C_{\alpha, \beta}(A)$ ve $C_{\gamma, \delta}(B)$ artan olmak üzere Yardımcı Teorem 4.1 den herhangi bir $\lambda \in \Omega$ için $\left\| A\hat{k}_\lambda - \frac{\beta + \alpha}{2}\hat{k}_\lambda \right\| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$ ve $\left\| B^*\hat{k}_\lambda - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\lambda \right\| \leq \frac{1}{2}|\bar{\gamma} - \bar{\delta}|$ yazabiliriz.

Schwarz eşitsizliğini kullanarak, her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\ & \leq \left\| A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda \right\| \left\| B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\| \end{aligned} \quad (4.1)$$

elde edilir.

Herhangi $f \in \mathcal{H}$ ve $\lambda \in \Omega$ için $\left\| f - \langle f, \hat{k}_\lambda \rangle \hat{k}_\lambda \right\| = \inf_{\phi \in \mathbb{C}} \left\| f - \phi \hat{k}_\lambda \right\|$ olduğundan her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\left\| A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda \right\| \leq \left\| A\hat{k}_\lambda - \frac{\beta + \alpha}{2}\hat{k}_\lambda \right\| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

ve

$$\left\| B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\| \leq \left\| B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\eta \right\| \leq \frac{1}{2}|\bar{\gamma} - \bar{\delta}|$$

elde edilir. Bu sebeple her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\left\| A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda \right\| \left\| B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\| \leq \frac{1}{4}|\beta - \alpha||\gamma - \delta| \quad (4.2)$$

eşitsizliğine sahibiz. Diğer taraftan, her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\rangle \\ & = \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle + \tilde{A}(\lambda)\tilde{B}(\eta)\left\langle \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \\ & \quad - \tilde{A}(\lambda)\left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle - \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \tilde{B}(\eta) \end{aligned}$$

dir. Üstteki eşitsizlikte modül alınarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& \geq \left| \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| - \left| \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| + \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \tilde{B}(\eta) - \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\eta) \left\langle \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& \geq \left| \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| - \left| \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| - \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \tilde{B}(\eta) \right| - \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\eta) \left\langle \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right|
\end{aligned}$$

ifadesi her bir $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \tilde{B}^*(\eta)\hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& + \left| \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| + \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \tilde{B}(\eta) \right| + \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\eta) \left\langle \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& \geq \left| \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right|
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ifadesine denkliği elde edilir. Böylece (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerinden $\lambda = \eta$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta| + \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| + \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| + \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| \\
& \geq \left| \tilde{BA}(\lambda) \right|
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitsizliğinde $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınırsa

$$\text{ber}(BA) \leq 3\text{ber}(A)\text{ber}(B) + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta|$$

elde edilir. Buradan istenilen sonuç elde edilir. $\square$

Şimdi ise aşağıdaki sonuçta farklı bir yaklaşım gösterilmiştir.

Teorem 4.3. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ için $C_{\alpha, \beta}(A)$ ve $C_{\gamma, \delta}(B)$ artan bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\text{ber}(BA) \leq \text{ber}(A)\text{ber}(B) + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| (|\gamma - \delta| + |\gamma + \delta|)$$

dir.

İspat. Kabüllerden ve Schwarz eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliği her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\lambda \right\rangle \right| \\
& \leq \left\| A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda \right\| \left\| B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\lambda \right\| \\
& \leq \left\| A\hat{k}_\lambda - \frac{\beta + \alpha}{2}\hat{k}_\lambda \right\| \left\| B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\eta \right\| \\
& \leq \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta|
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ifade edebiliriz. Bu eşitsizlikte modülüs alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\eta \right\rangle \\
& = \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle - \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle - \frac{\gamma + \delta}{2} \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& \geq \left| \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| - \left| \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right| \\
& \quad - \left| \frac{\gamma + \delta}{2} \right| \left| \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \right|
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizliği elde edilir. O zaman (4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinden $\lambda = \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}
\left| \widetilde{BA}(\lambda) \right| & \leq \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| + \left| \frac{\gamma + \delta}{2} \right| \left| \widetilde{A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda} \right| + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta| \\
& \leq \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| + \left| \frac{\gamma + \delta}{2} \right| \left\| A\hat{k}_\lambda - \frac{\beta + \alpha}{2}\hat{k}_\lambda \right\| + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta| \\
& \leq \left| \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \right| + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| (|\gamma - \delta| + |\gamma + \delta|)
\end{aligned}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alarak

$$ber(BA) \leq ber(A) ber(B) + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| (|\gamma - \delta| + |\gamma + \delta|)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Yukarıdaki teoremin argümanlarını kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Özellik 4.4. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ için $C_{\alpha, \beta}(A)$ ve $C_{\gamma, \delta}(B)$ artan bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\text{ber}(BA) \leq \text{ber}(A) \text{ber}(B) + |\gamma + \delta| \text{ber}(A) + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta|$$

dir.

İspat. Gerçekten her bir $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left\langle A\hat{k}_\lambda - \tilde{A}(\lambda)\hat{k}_\lambda, B^*\hat{k}_\eta - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\delta}}{2}\hat{k}_\eta \right\rangle \\ &= \left\langle BA\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle - \tilde{A}(\lambda) \left\langle B\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \\ & \quad - \frac{\gamma + \delta}{2} \left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle + \frac{\gamma + \delta}{2} \tilde{A}(\lambda) \left\langle \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\eta \right\rangle \end{aligned}$$

dir. $\lambda = \eta \in \Omega$ üzerinden supremum alarak ve üstteki teoremin ispatındaki aynı argümanları kullanarak $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörleri için

$$\text{ber}(BA) \leq \text{ber}(A) \text{ber}(B) + |\gamma + \delta| \text{ber}(A) + \frac{1}{4} |\beta - \alpha| |\gamma - \delta|$$

eşitsizliği elde edilir. □

4.2. Grüss Tipli Eşitsizlik

Bu kısımda üretici çekirdekli Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayı üzerinde özeşlenik operatörler için bir Grüss tipli eşitsizlik verilmiştir.

Teorem 4.5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bir özeşlenik operatör olsun ve bazı $m < M$ skalerleri için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ olduğunu kabul edelim. Eğer f ve g fonksiyonları $[m, M]$ üzerinde sürekli ise o zaman herhangi $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \widetilde{f(A)g(A)}(\mu) - \widetilde{f(A)}(\mu) \widetilde{g(A)}(\lambda) - \frac{\gamma + \Gamma}{2} [\widetilde{g(A)}(\mu) - \widetilde{g(A)}(\lambda)] \\ & \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) \left[\|g(A)\|^2 + \left(\widetilde{g(A)}(\lambda) \right)^2 - 2\widetilde{g(A)}(\lambda) \widetilde{g(A)}(\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

dir. Burada $\gamma = \min_{t \in [m, M]} f(t)$ ve $\Gamma = \max_{t \in [m, M]} f(t)$ ile tanımlıdır.

İspat. Gerçekten her bir $\xi \in \mathbb{R}$ ve $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left\langle (f(A) - \xi \cdot 1_H) \left(g(A) - \left\langle g(A) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \cdot 1_H \right) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle \\ &= \left\langle f(A) g(A) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle - \xi \left[\left\langle g(A) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle - \left\langle g(A) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right] \\ & \quad - \left\langle g(A) \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \left\langle f(A) \widehat{k}_\mu, \widehat{k}_\mu \right\rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

özdeşliğine sahibiz.

(4.8) eşitliğinde modülüs alınarak herhangi $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(\widetilde{A})(\mu) - \xi \cdot \left[g(\widetilde{A})(\mu) - g(\widetilde{A})(\lambda) \right] - g(\widetilde{A})(\lambda) f(\widetilde{A})(\mu) \right| \\ &= \left| \left\langle (g(A) - g(\widetilde{A})(\lambda) \cdot 1_H) \widehat{k}_\mu, (f(A) - \xi \cdot 1_H) \widehat{k}_\mu \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| g(A) \widehat{k}_\mu - g(\widetilde{A})(\lambda) \widehat{k}_\mu \right\| \left\| f(A) \widehat{k}_\mu - \xi \widehat{k}_\mu \right\| \\ &= \left[\left\| g(A) \widehat{k}_\mu \right\|^2 + \left(g(\widetilde{A})(\lambda) \right)^2 - 2g(\widetilde{A})(\lambda) g(\widetilde{A})(\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left\| f(A) \widehat{k}_\mu - \lambda \widehat{k}_\mu \right\| \\ &\leq \left[\left\| g(A) \right\|^2 + \left(g(\widetilde{A})(\lambda) \right)^2 - 2g(\widetilde{A})(\lambda) g(\widetilde{A})(\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \|f(A) - \lambda \cdot 1_H\| \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

Burada (3.1) özelliği ve $\gamma = \min_{t \in [m, M]} f(t)$, $\Gamma = \max_{t \in [m, M]} f(t)$ den her $\mu \in \Omega$ için

$$\gamma \leq \widetilde{f(A)}(\mu) \leq \Gamma$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise

$$\left| \widetilde{f(A)}(\mu) - \frac{\gamma + \Gamma}{2} \left\| \widehat{k}_\mu \right\|^2 \right| \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma)$$

veya her bir $\mu \in \Omega$ için

$$\left| \left(\widetilde{f(A) - \frac{\gamma + \Gamma}{2} \cdot 1_H} \right) (\mu) \right| \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma)$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizlikte supremum alınır

$$\left\| f(A) - \frac{\gamma + \Gamma}{2} \cdot 1_H \right\| \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma)$$

elde edilir. Burada (4.9) eşitsizliği ile beraber $\xi = \frac{\gamma + \Gamma}{2}$ için uygulanırsa arzulanan sonuç elde edilir. $\square$

Yukarıdaki teoremin özel bir durumu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.6. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ özeşlenik operatör olsun ve bazı $m < M$ skalerleri için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde her bir $\lambda \in \Omega$ için

$$\text{ber}(f^2(A) - (f(A))^2) \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) \left[\|f(A)\|^2 - \text{ber}((f(A))^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

dir. Burada $\gamma = \min_{t \in [m, M]} f(t)$, $\Gamma = \max_{t \in [m, M]} f(t)$ dir.

İspat. (4.7) eşitsizliğinde $f = g$ ve $\lambda = \mu$ alınır o zaman her $\lambda \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left| \widetilde{f^2(A)}(\lambda) - \left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) \left[\|f(A)\|^2 - \left(\widetilde{f(A)}(\lambda) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dir. Üstteki eşitsizlikte $\lambda \in \Omega$ üzerinden supremum alınır herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ özeşlenik operatörü için

$$\text{ber}(f^2(A) - (f(A))^2) \leq \frac{1}{2} (\Gamma - \gamma) \left[\|f(A)\|^2 - \text{ber}((f(A))^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında aşağıdaki dönüşüm tanımlanmıştır. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bir sınırlı lineer operatör olsun. A^* , A operatörünün eşleniği olmak üzere

$$C_{\alpha, \beta}(A) := (A^* - \bar{\alpha}I)(\beta I - A)$$

dir (Dragomir, 2008). $C_{\alpha, \beta}(\cdot)$ dönüşümü $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki gibi bazı ilginç özelliklere sahiptir:

- (i) $C_{\alpha, \beta}(I) := (1 - \bar{\alpha})(\beta - 1)I$ ve $C_{\alpha, \alpha}(A) := -(\alpha I - T)^*(\alpha I - A)$
- (ii) $[C_{\alpha, \beta}(A)]^* = C_{\beta, \alpha}(A)$ ve $C_{\beta, \bar{\alpha}}(A^*) - C_{\alpha, \beta}(A) = A^*A - AA^*$

Tanımlanan bu dönüşümün bazı temel özellikleri incelenmiştir. Özel olarak, üretici çekirdekli Hilbert uzayları üzerinde $C_{\alpha, \beta}(A)$ dönüşümünü kullanarak Berezin sayı eşitsizlikleri çalışılmış ve üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde özeşlenik operatörler için Grüss tipindeki eşitsizlikler verilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

1. Literatürde, tezde kullanılan Grüss tipli eşitsizliği haricinde bir çok Grüss tipli eşitsizlikler vardır. Bu eşitsizlikler kullanılarak Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler elde edilebilir mi?
2. Grüss Tipli eşitsizlikler dışındaki eşitsizlikler yardımıyla Berezin sayı eşitsizliği elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

- Abu-Omar, A., Kittaneh, F., 2014. Estimates for the numerical radius and the spectral radius of the Frobenius companion matrix and bounds for the zeros of polynomials. *Annals of Functional Analysis*, 5(1), 56–62.
- Abu-Omar, A., Kittaneh, F., 2015. Notes on some spectral radius and numerical radius inequalities. *Studia Mathematica*, 227, 97–109.
- Anastassiou, G.A., 2007a. Chebyshev-Grüss type and comparison of integral means inequalities for the Stieltjes integral. *Panamerican Mathematical Journal*, 17(3), 91–109.
- Anastassiou, G.A., 2007b. Chebyshev-Grüss type inequalities via Euler type and Fink identities. *Mathematical and Computer Modelling*, 45(9-10), 1189–1200.
- Anastassiou, G.A., 2007c. Grüss type inequalities for the Stieltjes integral. *Nonlinear Function Analysis Applications*, 12(4), 583–593.
- Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3), 337–404.
- Axler, S., Zheng, D., 1998a. The Berezin transform on the Toeplitz algebra. *Studia Mathematica*, 1(2), 113–136.
- Axler, S., Zheng, D., 1998b. Compact operators via the Berezin transform. *Indiana University Mathematics Journal*, 47, 387–400.
- Bakherad, M., Kittaneh, F., 2019. Numerical Radius Inequalities Involving Commutators of G1 Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, 13(4), 1557–1567.
- Bakherad, M., Shebrawi, K., 2018. Upper bounds for numerical radius inequalities involving off-diagonal operator matrices. *Annals of Functional Analysis*, 9(3), 297–309.
- Berezin, F.A., 1972. Covariant and contravariant symbols of operators. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 6(5), 1117–1151.
- Berezin, F.A., 1974. Qutaization. *Mathematics of yhe USSR-Izvestiya*, 8(5), 1109–1163.
- Berger, C., Coburn, L., 1986. Toeplitz operators and quantum mechanics. *Journal of Functional Analysis*, 68(3), 273–299.
- Berger, C., Coburn, L., 1987. Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space. *Transaction of the American Mathematical Society*, 301(2), 813–829.
- Biernacki, M., Pidek, H., Ryll-Nardzewski, C., 1950. Sur une inégalité entre des intégrales définies. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Sectio*

A-Mathematica, A4, 1–4.

- Cerone, P., 2003. On some results involving the Chebyshev functional and its generalisations. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4(3), 1–17.
- Cerone, P., 2006a. On a Cebysev-type functional and Grüss-like bounds. *Mathematical Inequalities and Applications*, 9(1), 87–102.
- Cerone, P., 2006b. On Chebyshev functional bounds: Differential and difference equations and applications. Hindawi Publishing Corporation.
- Cerone, P., Dragomir, S., 2004. Chebyshev functional bounds using Ostrowski seminorms. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 28(2), 219–228.
- Cerone, P., Dragomir, S., 2005. New bounds for the Chebyshev functional. *Applied Mathematics Letters*, 18(6), 603–611.
- Cerone, P., Dragomir, S., 2007. A refinemet of the Grüss inequality and applications. *Tamkang Journal of Mathematics*, 38(1), 37–49.
- Dragomir, S.S., 1999a. A generalization of Grüss inequality in inner product spaces and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 237, 74–82.
- Dragomir, S.S., 1999b. Grüss inequality in inner product spaces. *The Australian Mathematical Society Gazette*, 26(2), 66–70.
- Dragomir, S.S., 1999c. Some discrete inequalities of Grüss type and applications in guessing theory. *Honam Mathematical Journal*, 21(1), 145–156.
- Dragomir, S.S., 2000a. A Grüss type integral inequality for mappings of r -Hölder's type and applications for mappings of r -Hölder's type and applications for trapezoid formula. *Tamkang Journal of Mathematics*, 31(1), 43–47.
- Dragomir, S.S., 2000b. Some integral inequalities of Grüss type. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31(4), 397–415.
- Dragomir, S.S., 2005. Advances in inequalities of the Schwarz, Grüss, and Bessel type in inner product spaces. Nova Publishers.
- Dragomir, S.S., 2008. Chebyshev type inequalities for functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces. Preprint RGMIA Research Report Collection, 11(e), 1–9.
- Dragomir, S.S., 2013. Inequalities for the numerical radius linear operators in Hilbert space. Springer Briefs in Mathematics, Cham.
- Dragomir, S.S., Booth, G., 2000. On a Grüss-Lupa s type inequality and its applications for the estimation of p -moments of guessing mappings. *Mathematical Communications*, 5, 117–126.

- Dragomir, S.S., Fedotov, I., 1998. An inequality of Grüss type for Riemann-Stieltjes integral and applications for special means. *Tamkang Journal of Mathematics*, 29(4), 286–292.
- Dragomir, S.S., Wang, S., 1997. An inequality of Ostrowski Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. *Computers and Mathematics with Applications*, 33(11), 15–20.
- Engliš, M., 1994. Functions invariant under the Berezin transform. *Journal of Functional Analysis*, 121, 223–254.
- Engliš, M., 1995. Toeplitz operators and the Berezin transform on H^2 . *Linear Algebra Application*, 223/224, 171–204.
- Fink, A., 1999. A treatise on Grüss inequality: Analytic and Geometric Inequalities.
- Furuta, T., Hot, J.M., Pecaric, J., Seo, Y., 2005. Mond–Pecaric Method in Operator Inequalities, in: *Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space*. vol. 1, Element, Zagreb.
- Grüss, G., 1935. Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1), 1432–1823.
- Gustafson, K., Rao, D., 1997. Numerical range. Springer Verlag, New York.
- Halmos, P.R., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., 1967. Inequalities. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.
- Karaev, M.T., 2006. Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis*, 238(1), 181–192.
- Karaev, M.T., 2013. Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator theory. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7(4), 983–1018.
- Kılıç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44p, New Hampshire.
- Kolmogorov, A.N., 1941. Stationary sequences in Hilbert space. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 2(6), 1–40.
- Korenblum, B.I., 1977. A Beurling type theorem. *Acta Mathematica Scientia*, 138, 265–293.

- Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications. New York, London-Sydney.
- Mitronovic, D., Pecaric, J., Fink, A., 1993. Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mond, B., Pecaric, J.E., 1994. Converses of Jensen's inequality for linear maps of operators. Annals of West University of Timisoara, Series Mathematics-Information, 31(2), 223–228.
- Nikolski, N.K., 1986. Treatise on the Shift Operator. Springer Verlag, Heidelberg.
- Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary values of Berezin symbols. Operator Theory: Advances and Applications, 73, 362–368.
- Pachpatte, B., 2008. A note on Grüss type inequalities via Cauchy's mean value theorem. Mathematical Inequalities and Applications, 11(1), 75–80.
- Saitoh, S., 1988. Theory of reproducing kernels and its applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Saitoh, S., 1997. Integral transforms, Reproducing kernels and their applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series.
- Sarason, D., 1994. Products of Toeplitz operators in. Linear and Complex Analysis ProblemBook 3, Part I, Lecture Notes in Mathematics, v.1573; Springer Verlag, New York.
- Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. Linear Operators Banach Center Publications, 38, 361–380.
- Yang, B., Debnath, L., 2014. Half-Discrete Hilbert-Type Inequalities. World Scientific.
- Zamani, A., 2017. Some lower bounds for the numerical radius of Hilbert space operators. Advances in Operator Theory, 2, 98–107.
- Zaremba, S., 1907. L'équation Biharmonique et Une Classe Remarquable de Fonctions Fondamentales Harmoniques. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, 147–196.
- Zhao, C., Cheung, W., 2008. On multivariate Grüss inequalities. Journal of Inequalities and Applications, 249438, 1–8.
- Zhu, K., 1990. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, 280, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Remziye TUNÇ
Doğum Yeri ve Yılı : Isparta, 1992
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : remziyetuncmat32@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Gazi Lisesi, 2011
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2016

Mesleki Deneyim

Final Dershaneleri (Öğretmen) : 2017-devam ediyor

Yayınlar

- Yamancı, U., Tunç, R., Gürdal, M. 2019. Berezin numbers, Grüss type inequalities and their applications, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, <https://doi.org/10.1007/s40840-019-00804-x>
- Gürdal, M., Tunç, R., 2018. On statistical Convergence via Moduli in 2-normed spaces, V. Uluslararası Multidispliner Çalışmaları Sempozyumu (ISMS), November 16-17, p. 220, Ankara, Türkiye.
- Yamancı, U., Tunç, R., 2018. Gürdal, M., Refinement of some inequalities for Berezin Numbers of operators, V. Uluslararası Multidispliner Çalışmaları Sempozyumu (ISMS), Kasım 16-17, Sayfa 419, Ankara, Türkiye.
- Gürdal, M., Tunç, R., 2018. On statistical Convergence via Moduli in 2-normed spaces, 5th International Symposium on Multidisciplinary studies (ISMS), Gece Kitaplığı Yayınevi, Ankara, ISBN: 978-605-288-843-8, Vol. II, 49-56.
- Gürdal, M., Tunç, R., 2019. Lineer n -normlu uzaylarda I -istatistiksel yakınsaklık, Uluslararası Multidisipliner Akademik Çalışmalar Sempozyumu, April, 19-21, Sayfa 49, İzmir, Türkiye.

Gürdal, M., Tunç, R., 2019. *I*-statistical convergence in Linear n -normed spaces, International Symposium on Multidisciplinary Academic Studies (IMASES), İzmir, ISBN: 978-605-80486-1-4, 140-148.

