



GİRESUN  
ÜNİVERSİTESİ



Yüksek Lisans Tezi

# FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI KONVEKS STOKASTİK  
SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI  
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Vildan KARAHAN  
2020

MATEMATİK  
ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Vildan KARAHAN

172110014

2020

GİRESUN

T.C.  
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI KONVEKS STOKASTİK  
SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI  
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Vildan KARAHAN

Enstitü Ana Bilim Dalı : FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ/  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI  
Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Nurgül OKUR

Ocak 2020

T.C.  
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI KONVEKS STOKASTİK  
SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI  
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Vildan KARAHAN**

**Enstitü Anabilim Dalı**

**:**

**Matematik**

**Bu tez 16/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.**



**Prof.Dr.  
Erhan SET  
Üye**



**Dr.Öğr.Üyesi  
Nurgül OKUR  
Üye**



**Doç.Dr.  
İmdat İŞCAN  
Üye**

**Doç.Dr.  
Bahadır KOZ  
Enstitü Müdürü**

## **BEYAN**

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Vildan KARAHAN

31/12/2019

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu alıŐma Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez çalıŐmalarım süresince her türlü bilimsel ve manevi desteğini esirgemeyen ve yanında çalıŐmaktan onur duyduğum saygı değer danıŐman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nurgöl OKUR'a teşekkür ve Őükranlarımı sunarım.

Ayrıca tez çalıŐmamda değerli katkılarından dolayı sayın Prof. Dr. Erhan SET'e, sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a ve emeği geçen tüm hocalarıma en içten teŐekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemde önemli yeri olan kıymetli merhum babam Hasan BALTA ve annem Nebahat BALTA'ya, yüksek lisans eğitimim boyunca manevi desteklerini esirgemeyen kayınvalidem Fatma KARAHAN'a, beni her konuda destekleyip güvenen sabır ve sevgiyle her an yanımda olan canım oğlum Hasan Yücel KARAHAN ve sevgili eŐim Volkan KARAHAN'a sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER .....	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	V
ÖZET .....	VI
SUMMARY .....	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	6
2.1. Konveks Fonksiyonlar.....	6
2.2. Stokastik Süreçler.....	7
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	12
3.1. Materyal .....	12
3.1.1. Bir Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	12
3.1.2. Bir Boyutlu s-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	12
3.1.3. Bir Boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	13
3.1.4. Bir Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	14
3.2. Yöntem.....	15
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....	18

4.1. Çok Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler .....	18
4.1.1. Çok Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri .....	20
4.2. Çok Boyutlu s-Konveks Stokastik Süreçler .....	28
4.2.1. Çok Boyutlu Birinci Anlamda s-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite- Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri .....	30
4.2.2. Çok Boyutlu İkinci Anlamda s-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite- Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri .....	37
4.3. Çok Boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler .....	40
4.3.1. Çok Boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri .....	42
4.4. Çok Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler .....	49
4.4.1. Çok Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri .....	52
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	61
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	69

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$I^0$	: $I$ 'nin içi
$E(X), m_x$	: $X$ rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: $X$ rastgele değişkeninin varyansı
$l. i. m.$	: Ortalama anlamda limit
$\mathcal{C}_{st}$	: Reel konveks stokastik süreçler kümesi
$\leq_{st}$	: Stokastik sıralama
$\mathfrak{S}$	: $X$ 'in alt kümeleri üzerinde inşa edilen sigma cebir
$P$	: Olasılık fonksiyonu
$f'$	: $f$ fonksiyonun türevi
$max$	: Maksimum
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar
$A^c$	: $A$ kümesinin tümleyeni
a. e	: Hemen hemen her yerde
$\mathcal{C}_s^1$	: Birinci anlamda $s$ -konveks fonksiyon sınıfı
$\mathcal{C}_s^2$	: Birinci anlamda $s$ -konveks fonksiyon sınıfı

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.1 Konveks stokastik süreç.....	4
Şekil 2.1.1 Konveks küme.....	6
Şekil 2.1.2 Konveks olmayan küme.....	6
Şekil 2.1.3 Konveks fonksiyon.....	7



# ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

## ÖZET

Bu tezin amacı, çok boyutlu bazı konveks stokastik süreçleri tanımlamak ve bu süreçler ile ilgili Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde etmektir. Bu tezin giriş kısmında, literatürdeki araştırmalardan kısaca bahsedilmiştir. Sonraki kısımda, tezin konusu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu tezin materyal ve yöntem kısmında, konveks, s-konveks, harmonik konveks, preinvex stokastik süreçler ile ilgili gerekli bilgiler kısaca sunulmuştur. Araştırma bulguları kısmında, yukarıda bahsi geçen konvekslik çeşitleri için çok boyutlu stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks, s-Konveks, Harmonik Konveks, Preinvex, Çok Boyutlu Stokastik Süreçler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Kuadratik Orta Anlamda İntegral.

# **HERMITE-HADAMARD TYPE OF INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME MULTIVARIABLE CONVEX STOCHASTIC PROCESSES**

## **SUMMARY**

The aim of this study is to define some multidimensional convex stochastic processes and to obtain Hermite-Hadamard inequalities for these processes. In the introduction is mentioned related the researches in the literature. Thereinafter, basic concepts are given. In the material and methods, the necessary informations related to convex, s-convex, harmonically convex, preinvex stochastic processes are briefly presented. In the research findings, the multidimensional stochastic processes are defined for the above mentioned convexities and Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for these processes.

Keywords: Convex, s-Convex, Harmonically Convex, Preinvex, Multidimensional Stochastic Processes, Hermite-Hadamard Inequality, Mean-square Integrable.

## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik geometrik temel bir kavram olmasının yanı sıra diğer alanlarda genişçe kullanılmaktadır. Fonksiyonel analiz, grafik teorisi, olasılık teorisi ve daha birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmıştır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid'in [1] "Elements" adlı kitabıdır. Konveksliğin ilk tanım ve gösterimleri bu kitapta bulunmaktadır. Bu konudaki daha kesin bir tanımı ise Archimedes'in [2] "On The Sphere and Cylinder" adlı eserinde de bulmak mümkündür.

Eşitsizlik teorisi Gauss, Cauchy ve Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak birçok çalışma yapılmıştır. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite'in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.  $[a, b]$  aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için meşhur Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir [3]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Hermite'in 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması, 1905-1906 yıllarında ünlü Danimarkalı mühendis ve matematikçi Jensen ile başlar ve kendisi şunları öngörmüştür: "Bana göre, konveks fonksiyon kavramı temel olarak pozitif ve artan fonksiyonlarla alakalıdır. Bu konuda yanılmıyorsam, konveks fonksiyonlar teorisinin önemi zamanla anlaşılacaktır."

Son yıllarda modern matematikte araştırma makaleleri ve kitaplarda geniş bir şekilde yer alan konveks fonksiyon kavramının önemi gerçekten anlaşılmıştır. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin birçok uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu

matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-konveks fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-konveks ve r-konveks fonksiyonlar, p-konveks fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p-logaritmik ortalamalar, identik ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için bu eşitsizlikleri uygulamaya, genişletmeye ve genelleştirmeye çalışmış ve çalışmaya devam etmektedir.

19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya [4] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. İkinci çalışma ise Beckenbach ve Bellman [5] tarafından 1961'de yazılan, 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren, "Inequalities" adlı eserdir. Bunu Mitrinović'in [6] 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić [7] tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović [8,9] "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" ve "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte [10] "Mathematical Inequalities" ve Niculescu and Perssons [11] "Convex Functions and Their Applications" literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Hermite-Hadamard eşitsizlikleri konusu Dragomir ve Pearce [12] tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde detaylı olarak yer almaktadır. Bu alanda çalışan diğer matematikçiler Josip [13], Toader [14], İşcan [15,17], Okur ve Yalçın [16], Varošanec [18], Fang ve Shi [19], Hudzik ve Maligranda [20], Ngoc ve ark. [22], Antczak [23] Youness [24], Cristescu [25], Set ve ark. [26], Yalçın [27], Mohan ve Neogy [28], Weir ve Mond [29], Yang ve Li [30], Noor [31], Mishra ve Giorgi [32]'dir. Alomari [34] ise konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini genelleştirmiştir.

Konvekslik kavramı Fizik, Termodinamik, Ekonometri, Olasılık ve İstatistik Teorisi dahil olmak üzere birçok uygulama sahasında büyük öneme sahiptir.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlamıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı Bortkiyeviç'in (1868-1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden önem kazanmıştır.

Stokastik süreçler, esasen zaman içinde gelişen olasılıksal modelleri inceleyen olasılık teorisinin önemli bir dalıdır. 1900 yılında Fransız matematikçi Bachalier ilk kez Brown hareketinin matematiksel modelini kurmuştur. 1905 yılında Einstein ve Smoluhovski bazı fizik problemlerinin incelenmesinde olasılık teorisini kullanmak zorunda kalmışlar ve Bachalier'in kurmuş olduğu sürece benzer bir süreçle karşılaşmışlardır. 1914 yılında Planck ve Fokker, olasılık teorisini kullanarak difüzyon olayını incelemeye çalışmışlardır. Tüm bunlar matematikte yeni bir kavram olan stokastik süreç kavramının meydana çıkmasına yol açmıştır.

Stokastik süreçler teorisinin matematiksel temelleri 20. yüzyılda Markov, Slutski, Wiener, Hincin, Kolmogorov, Wald, Doob, Ito, Dynkin, gibi ünlü matematikçiler tarafından verilmiştir. Stokastik süreçler teorisinin sonraki gelişmesi Feller [35,36], Levy, [37, 38], Skorohod ve Gihman [39,40], Ross [41,42], Shiryayev [43], Smith [44-47], Spitzer [48], Çınlar [49-51], Takacs [52], Khaniyev [53,54], Aliyev [55], Okur [57-60] ve bazı bilim adamlarının çalışmaları ile devam etmektedir.

Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Bilhassa, stokastik süreçler için stokastik monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda özellikle optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

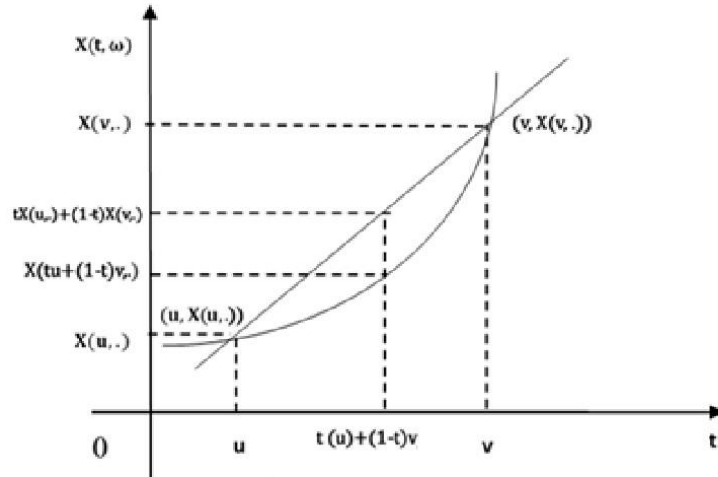
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  bir olasılık uzayı  $T \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  olsun. Reel değerli  $X(t, \omega)$  fonksiyonu her  $t \in T$  için  $\Omega$ 'da tanımlanmış rastgele değişken ise ona rastgele fonksiyon denir. Eğer  $T = \mathbb{R}^+$  ise ve  $t$  parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda  $X(t, \omega)$  rastgele fonksiyonuna “stokastik süreç” denir. Bu tanımdan görüldüğü gibi, rastgele

değişkenden farklı olarak, stokastik süreç  $\omega$ 'nın yanı sıra zamana da bağlı bir fonksiyondur. Eğer  $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin  $\omega$  parametresi sabit tutulursa bu durumda yalnız  $t$ 'ye bağlı olan bir fonksiyon elde edilir [55].

1980'de Nikodem [61], konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Jensen-konveks,  $\lambda$ -konveks stokastik süreçler 1992'de Skowronski [62] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Kotrys'in [63], her reel konveks  $X$  stokastik süreci için elde ettiği Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Bilinmelidir ki,  $X(t, \omega)$  konveks stokastik sürecinde  $\omega$  parametresi sabit tutularak yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.  $\omega_0$  parametresi sabit tutulursa, bu durumda aşağıdaki Şekil 1.1.1 elde edilir:



Şekil 1.1.1. Konveks stokastik süreç [61].

Alınan bu sonucu olasılıksal olarak aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(ET, \cdot) \leq_{st} EX(T, \cdot) \leq_{st} EX(T^*, \cdot), \quad T \in \mathcal{C}_{st}$$

Burada E beklenen değer,  $T$  ( $T^*$ )  $[u, v]$  aralığında ( $\{u, v\}$  kümesi üzerinde) düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken,  $\mathcal{C}_{st} [u, v]$  üzerinde tanımlı bütün reel konveks stokastik süreçler kümesi ve  $\leq_{st}$  ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır [64].

Son yıllarda, Sarıkaya ve ark. [65,78], Set ve ark. [73], Okur ve ark. [66-70,74, 79,80,82] farklı türden konveks stokastik süreçler için eşitsizlikler, bazı genelleştirmeler ve genişletmeler üzerinde çalışmaktadırlar.

Bu tezde literatürde ilk defa çok boyutlu konveks, s-konveks, harmonik konveks ve preinvex stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler ile ilgili Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.



## BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Konveks Fonksiyonlar

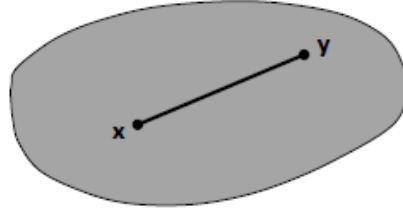
Öncelikle fonksiyonlardaki konvekslik ile ilgili kavramlar verilecektir.

**Tanım 2.1.1.**  $L$  bir lineer uzay  $A \subseteq L$  ve  $x, y \in A$  keyfi olmak üzere

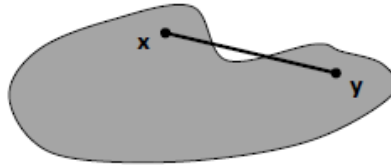
$$B = \{ z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1 \subseteq A \}$$

ise  $A$  kümesine “konveks küme” denir [13].

Eğer  $z \in B$  ise  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  eşitliğindeki  $x$  ve  $y$ 'nin katsayıları için  $\alpha + (1 - \alpha) = 1$  bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki  $\alpha, (1 - \alpha)$  yerine  $\alpha + \beta = 1$  şartını sağlayan ve negatif olmayan  $\alpha, \beta$  reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak  $B$  kümesi uç noktaları  $x$  ve  $y$  olan bir doğru parçasını içeren bir kümedir. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir [13].



Şekil 2.1.1. Konveks küme [13].

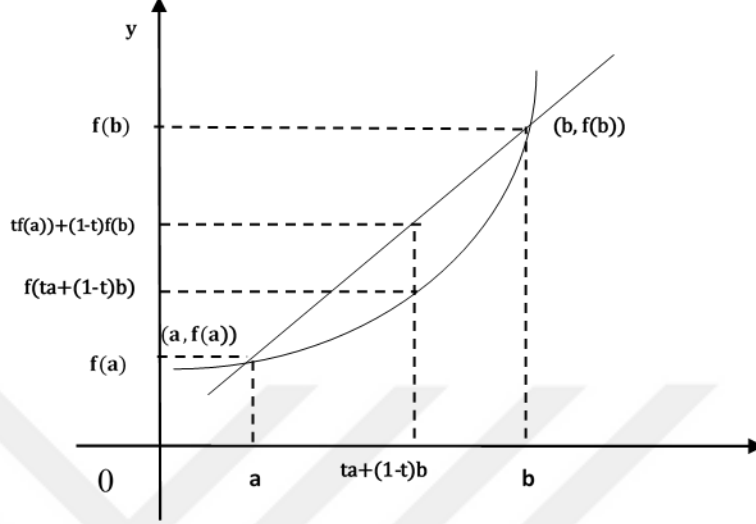


Şekil 2.1.2. Konveks olmayan küme [13].

**Tanım 2.1.2.**  $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere her  $x, y \in I$  ve  $a \in [0,1]$  için

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

şartını sağlayan  $f$  fonksiyonuna “konveks fonksiyon” denir. Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir [13]:



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon [13].

**Teorem 2.1.1.**  $f$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart  $f''$ 'nin artan olmasıdır [13].

**Teorem 2.1.2.**  $f$  fonksiyonunun  $I$  açık aralığında ikinci türevi varsa,  $f$  fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeterli şart  $x \in I$  için  $f''(x) \geq 0$  olmasıdır [13].

## 2.2. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle  $\sigma$ -cebiri, olasılık uzayı, olay, rastgele değişken gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir.

**Tanım 2.2.1.**  $\Omega \neq \emptyset$  kümesinin alt kümelerinden oluşan bir  $\mathfrak{S}$  sınıfı:

- 1)  $\Omega \in \mathfrak{S}$ ,
- 2)  $\forall A \in \mathfrak{S}$  için  $A^c \in \mathfrak{S}$ ,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu  $\forall (A_n) \in \mathfrak{S}$  dizisi için

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$$

özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde  $\mathfrak{F}$  sınıfına  $\Omega$ 'da bir “ $\sigma$ -cebiri”dir denir. Bir  $\sigma$ -cebiri, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır [55].

**Tanım 2.2.2.**  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların Bir  $\sigma$ -cebiri “Borel cebiri” denir. Borel cebirinin her bir elemanına “Borel kümesi” denir [55].

**Tanım 2.2.3.** Sonuçlarının kümesi belli olan ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere “olasılık deneyi” veya “stokastik deney” denir [55].

**Tanım 2.2.4.** Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine “örnek uzay” denir. Örnek uzayın her alt kümesine “olay” denir [55].

**Tanım 2.2.5.**  $\mathfrak{F}$ ,  $\Omega \neq \emptyset$  örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir  $\sigma$ -cebiri olmak üzere,  $P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

- 1)  $\forall A \in \mathfrak{F}$  için  $P(A) \geq 0$ ,
- 2)  $P(\Omega) = 1$ ,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu  $\forall (A_n) \in \mathfrak{F}$  dizisi için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise,  $P$  fonksiyonuna  $\mathfrak{F}$  üzerinde bir “olasılık ölçüsü” denir.  $P(A)$  değerine ise,  $A$  olayının olasılık ölçüsü veya “ $A$  olayının olasılığı” denir [55].

**Tanım 2.2.6.**  $\Omega \neq \emptyset$  bir örnek uzay,  $\Omega$ 'da tanımlanmış bir  $\sigma$ -cebiri ve ,  $P$ ,  $\mathfrak{F}$  üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere,  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  üçlüsüne bir “olasılık uzayı” denir [55].

Bir  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  olasılık uzayı, bir stokastik deneyin modeli olarak kullanıldığında  $\mathfrak{F}$ ,  $\sigma$ -cebiriindeki kümeler, deney ile ilgili olaylara karşılık gelir. Bir  $\sigma$ -cebiri, sayılabilir

birleşim, kesişim ve tümlene işlemine göre kapalı olduğundan  $\sigma$ -cebirdeki kümeler üzerinde bu işlemler sonucu elde edilen bir küme ise bir olaya karşılık gelir.

Bir stokastik deneyin sonuçlarının kümesi olan örnek uzayın elemanları çok değişik türde olabilir. Rastgele değişkenler yardımıyla örnek uzayın elemanlarına reel sayılar eşlenmekte ve böylece olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Bir stokastik deney sonucunda değerler alan fonksiyona rastgele değişken denir. Rastgele değişkenler tanım kümesine göre kesikli, mutlak sürekli ve singüler olmak üzere üç kısma ayrılırlar. Örneğin, bir madeni para 10 kez atıldığında yazı gelmesi sayısı kesikli, bir elektrik cihazının bozulmadan çalışma süresi ise sürekli rastgele değişkendir. Rastgele değişken matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

**Tanım 2.2.7.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x \in \mathbb{R}$  sayısı için  $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$  yani  $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir ise,  $\xi$  fonksiyonuna bir “rastgele değişken” denir [55].

Tanımından görüldüğü gibi rastgele değişken aslında, belli özellikleri olan bir değişkenli fonksiyondur. Birçok durumda ikinci bir değişkene de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, sıvı içerisinde oluşan bir hareket sonucunda bir parçacığın zaman geçtikçe konumu veya hızı veyahut borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişmesi, sadece bir rastgele değişken yardımıyla tanımlanamaz. Bu durumda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

**Tanım 2.2.8.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$  bir küme olsun. Reel değerli  $X(t, \omega)$  fonksiyonu, her  $t \in T$  için  $\Omega$  kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir “rastgele fonksiyon” denir.  $X(t, \omega)$ ,  $Y(t, \omega)$  sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada  $T = \mathbb{R}^+$  ise ve  $t$  parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda  $X(t, \omega)$  rastgele fonksiyonuna bir “stokastik süreç” denir [55].

**Tanım 2.2.9.**  $X(t, \omega)$  bir stokastik süreç,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  olsun. Bu durumda

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\}, x_i \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna “ $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin  $n$  boyutlu dağılım fonksiyonu” denir. Her  $t_1, t_2, \dots, t_n$  için  $n$  boyutlu  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  fonksiyonlarının  $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 1$  ailesine “stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları” denir [55].

Stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu temel kavramlardandır. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1.  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty)$ ,
2.  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ .

**Teorem 2.2.1.**  $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$ ,  $t_i \in T$ ,  $t_1 < \dots < t_n$ ,  $n \geq 1$  ailesi, yukarıdaki 1. ve 2. özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

dır. Bu teoreme göre, stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır.  $T$  ve  $D$  kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir [55].

**Tanım 2.2.10.**  $T \subseteq \mathbb{N}$  ise  $X(t, \omega)$ 'e kesikli zamanlı stokastik süreç,  $T$  aralık ise  $X(t, \omega)$ 'e sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer  $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin  $D$  durum (değerler) kümesi kesikli ise bu takdirde sürecin sonlu boyutlu dağılımları  $P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) = k_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = k_n\}$ ,  $t_n \in T$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , olasılıkları ile tanımlanmaktadır [55].

Eğer  $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin  $D$  durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise bu takdirde stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu [55]:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada  $P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$ , sürecin  $n$  boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

**Tanım 2.2.11.**  $X(t, \omega)$  bir stokastik süreç,  $F_t(x)$  bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her  $t$  için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty \text{ ise } E(X(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x)$$

integraline “ $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin beklenen değeri” denir. Stokastik sürecinin beklenen değeri  $m_X(t)$  sembolü ile de gösterilmektedir [55].



## BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

### 3.1. Materyal

Bu kısımda literatürde mevcut olan bir boyutlu konveks, s-konveks, harmonik konveks ve preinveks stokastik süreçlerin tanımları ve bu stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri kısaca sunulmuştur.

#### 3.1.1. Bir Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda bir boyutlu konveks stokastik süreç tanımı ve bu tip stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 3.1.1.1.**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde  $\lambda \in [0, 1]$  ve her  $t, s \in I$  için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece konvektir denir [63,72]:

$$X(\lambda t + (1 - \lambda)s, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1 - \lambda)X(s, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde konkav stokastik süreç elde edilir.

**Teorem 3.1.1.1.**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her  $u, v \in I$  ve  $u < v$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [63,72]:

$$X\left(\frac{u + v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

#### 3.1.2. Bir Boyutlu s-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda bir boyutlu birinci ve ikinci anlamda s-konveks stokastik süreçlerin tanımı ve bu tip stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 3.1.2.1 (Birinci Anlamda s-Konveks Stokastik Süreç).**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç ve  $s \in (0,1]$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  için  $\alpha^s + \beta^s = 1$  olsun. Her  $u, v \geq 0$  için

$$X(\alpha u + \beta v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot)$$

eşitsizliği mevcut ise bu sürece birinci anlamda s-konvektir denir. Bu s-konveks stokastik süreç sınıfı genellikle  $C_s^1$  olarak bilinir [72-73]. Birinci anlamda s-konveks stokastik süreçlerde  $s = 1$  için konvekslik kolayca elde edilir [72-73].

Eşitsizlik yön değiştirirse  $X$  stokastik süreci birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır.

**Teorem 3.1.2.1.**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  birinci anlamda s-konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde her  $u, v \in I$  ve  $u < v$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [72-73]:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + s X(v, \cdot)}{s+1}.$$

**Tanım 3.1.2.2 (İkinci Anlamda s-Konveks Stokastik Süreç).**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç,  $\alpha, \beta \geq 0$  için  $\alpha + \beta = 1$  ve  $s \in (0,1]$  olsun. Bu takdirde her  $u, v \geq 0$  için

$$X(\alpha u + \beta v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot)$$

eşitsizliği mevcut ise bu sürece ikinci anlamda s-konvektir denir. Bu s-konveks stokastik süreç sınıfı genellikle  $C_s^2$  olarak bilinir. İkinci anlamda s-konveks stokastik süreçlerde  $s = 1$  için konvekslik kolayca elde edilir [72-73].

**Teorem 3.1.2.2.** Eğer  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci ikinci anlamda s-konveks ise, her  $u, v \in I$  ve  $u < v$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [73]:

$$2^{s-1} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{s+1}.$$

### 3.1.3. Bir boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda bir boyutlu harmonik stokastik sürecin tanımını ve bu tip stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 3.1.3.1.**  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  reel bir aralık,  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her  $t, s \in I$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan  $X$ 'e harmonik konveks stokastik süreç denir [68]:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}, \cdot\right) \leq \lambda X(s, \cdot) + (1-\lambda)X(t, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde harmonik konkav stokastik süreç elde edilir.

**Teorem 3.1.3.1.**  $[u, v] \subseteq I$ ,  $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $[u, v]$  aralığı üzerinde harmonik konveks bir stokastik süreç ve kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu takdirde her  $u < v$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [68]:

$$X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right) \leq \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

### 3.1.4. Bir Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda bir boyutlu preinvex stokastik süreç tanımı ve bu tip stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatsız olarak verilecektir.

**Tanım 3.1.4.1.**  $I \subset \mathbb{R}^n$  ve  $\eta: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sürekli fonksiyon olsun. Eğer  $\forall x, y \in I$  ve  $t \in [0,1]$  için  $(y + t\eta(x, y)) \in I$  ise  $I$  ya  $\eta$ 'e göre invex bir küme denir. Her konveks kümenin  $\eta(x, y) = x - y$  fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Mohan ve Neogy [28] tarafından konulan aşağıdaki koşulu  $\eta$  fonksiyonu sağlamaktadır:

**C Koşulu:**  $I \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\eta: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'e göre invex bir küme olsun. Her  $u, v \in I$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için

$$\begin{aligned} \eta(u, u + \lambda\eta(v, u)) &= -\lambda\eta(v, u) \\ \eta(v, u + \lambda\eta(v, u)) &= (1-\lambda)\eta(v, u) \end{aligned}$$

dır. C koşulundan her  $u, v \in I$  ve  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$  için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(u + \lambda_2\eta(v, u), u + \lambda_1\eta(v, u)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(v, u).$$

**Tanım 3.1.4.2.** Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik sürecine her  $v, u \in I$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için  $\eta$ 'e göre preinvektir denir:

$$X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot).$$

Eğer  $\lambda$  sayısı  $(0,1)$  arasında sabit bir sayı ise süreç  $\lambda$ -preinvex stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer  $\eta(v, u) = v - u$  seçersek,  $X(t, \cdot)$  bir konveks stokastik süreç olur [72,79].

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise  $X(t, \cdot)$  stokastik sürecine prekonkavdır denir [28].

**Teorem 3.1.4.1.**  $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  preinveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu takdirde her  $u, v \in I$  ve  $u < v$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [72,79]:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

### 3.2. Yöntem

Bu çalışmada yöntem olarak, fonksiyonlar için yukarıda verilen tanım ve teoremleri stokastik süreçlere uygulayabilmek için kuadratik kuadratik orta anlamda yakınsama, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları kullanılmaktadır.

**Tanım 3.2.1.** Aynı bir  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  olasılık uzayında  $\{X_n\}$ ,  $n \geq 1$  rastgele değişkenler dizisi ve  $X$  rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra  $E|X_n| < \infty$  ve  $E|X| < \infty$  olsun. Eğer  $0 < r < \infty$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken

$$E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \rightarrow 0$$

ise, bu takdirde  $\{X_n\}$  dizisi  $X$ 'e  $r$ . mertebeden kuadratik orta anlamda yakınsıyor denir ve bu yakınsama  $n \rightarrow \infty$  iken  $X_n \xrightarrow{L_r} X$  şeklinde yazılır [55]. Bu yakınsama çeşidine analizde  $L_r$  anlamında yakınsama denir [55]. Özel olarak  $r = 2$  olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir [55]. Bu yakınsama

$$l. i. m. X_n = X$$

şeklinde yazılır. Burada l.i.m. “limit in mean” kelimelerinin kısaltmasıdır.

**Tanım 3.2.2.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  olasılık uzayında  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere  $\{X_n(t, \omega)\}$ ,  $n \geq 1$  stokastik süreçler dizisi ve  $X(t, \omega)$  stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra  $E|X_n(t, \omega)| < \infty$  ve  $E|X(t, \omega)| < \infty$  olsun. Eğer  $\forall t \in T$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (X_n(t, \omega) - X(t, \omega))^2 = 0$$

ise  $\{X_n(t, \omega)\}$ ,  $n \geq 1$  stokastik süreçler dizisi,  $X(t, \omega)$  stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir [55] ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$l. i. m. X_n(t, \omega) = X(t, \omega).$$

**Tanım 3.2.3.**  $X(t, \omega)$  stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(X(t+h, \omega) - X(t, \omega))^2 = 0 \quad (3.2.1)$$

ise, bu durumda  $X(t, \omega)$  stokastik sürecine  $t$  noktasında kuadratik orta anlamda süreklidir denir [55] ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir:

$$l. i. m. X(t+h, \omega) = X(t, \omega).$$

**Tanım 3.2.4.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  olasılık uzayında  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere  $X(t, \omega)$  stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite  $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir [55].

$$l. i. m. \frac{X(t+h, \omega) - X(t, \omega)}{h} = X'(t, \omega). \quad (3.2.2)$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X(t+h, \omega) - X(t, \omega)}{h} - X'(t, \omega) \right]^2 = 0. \quad (3.2.3)$$

(3.2.2) limitinin varlığı ve tekliği için bir koşulun sağlanması gereklidir. Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise  $X(t, \omega)$  stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır.

**Tanım 3.2.5.** Olasılık uzayında  $t \in T \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere  $X(t, \omega)$  stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca  $[u, v]$  aralığının parçalanışı  $u = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$ ,  $ht_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |ht_k| = 0$$

olsun. Bu durumda

$$l. i. m. \sum_{k=1}^n X(t_k, \omega) ht_k = \int_u^v X(t, \omega) dt$$

eşitliğine  $X(t, \omega)$  stokastik fonksiyonunun  $[u, v]$  aralığındaki integrali denir [55].

Bu tezde çalışma boyunca bütün yakınsama, süreklilik, türev ve integral işlemleri kuadratik orta anlamda kullanılmıştır.



## BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde sırasıyla çok boyutlu konveks, s-konveks, harmonik konveks ve preinveks stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler ile ilgili Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

### 4.1. Çok Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler

Bu bölümde öncelikle n boyutlu ekseninde konveks stokastik süreçler araştırılmış ve bu stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar iki ve üç boyutlu stokastik süreçlere eklenmiştir.

Burada  $u_i < v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 2$ ) reel sayılar olmak üzere, n boyutlu  $\Delta^n = \prod_{i=1}^n [u_i, v_i] \subseteq [0, \infty)^n$  aralığı dikkate alınsın.

Aşağıda n boyutlu ekseninde stokastik süreçler için konveksliğin tanımı verilmiştir:

**Tanım 4.1.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki stokastik süreçler  $[u_i, v_i]$  aralığında hemen hemen her yerde  $i = 1, 2, \dots, n$  için konveks ise bu takdirde  $X$  stokastik sürecine n boyutlu ekseninde konvektir denir [67]:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot). \quad (4.1.1)$$

**Tanım 4.1.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik bir süreç olsun. Aşağıdaki eşitsizliğin her  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Delta^n$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen hemen her yerde sağlanması halinde  $X$  stokastik süreci  $\Delta^n$  üzerinde konvektir denir [67]:

$$X((\lambda \mathbf{t} + (1 - \lambda) \mathbf{s}), \cdot) \leq \lambda X(\mathbf{t}, \cdot) + (1 - \lambda) X(\mathbf{s}, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik tersine çevrilirse,  $X$  stokastik süreci  $\Delta^n$  üzerinde konkavdır denir.

**Lemma 4.1.1.** Her konveks  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci hemen hemen her yerde  $n$  boyutlu ekseninde konvektir ancak tersi doğru değildir.

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $\Delta^n$  üzerinde konveks olsun.  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot), \quad t \in [u_i, v_i].$$

Şimdi  $t, s \in [u_i, v_i]$  için ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i((\lambda t + (1 - \lambda)s), \cdot) &:= X((t_1, \dots, t_{i-1}, \lambda t + (1 - \lambda)s, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &\leq \lambda X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) + (1 - \lambda) X((t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &= \lambda X_{t_n}^i(t, \cdot) + (1 - \lambda) X_{t_n}^i(s, \cdot). \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik  $X_{t_n}^i$  stokastik süreçlerinin  $[u_i, v_i]$  aralığında konveks, yani  $X$ 'in  $n$  boyutlu ekseninde konveks olduğunu gösterir. Bu lemmanın tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilebilir:

**Örnek 4.1.1.**  $X: [0, 1]^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  aşağıdaki gibi tanımlanan bir stokastik süreç olsun:

$$X((t_1, t_2, \dots, t_n), \cdot) = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Bu süreç, aşağıda gösterildiği gibi  $n$  boyutlu ekseninde konvektir:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i((\lambda t + (1 - \lambda)s), \cdot) &= t_1 t_2 \dots t_{i-1} (\lambda t + (1 - \lambda)s) t_{i+1} \dots t_n \\ &= \lambda (t_1 t_2 \dots t_{i-1} t t_{i+1} \dots t_n) + (1 - \lambda) (t_1 t_2 \dots t_{i-1} s t_{i+1} \dots t_n) \\ &= \lambda X_{t_n}^i(t, \cdot) + (1 - \lambda) X_{t_n}^i(s, \cdot). \end{aligned}$$

Ayrıca tüm  $\mathbf{t} = (1, 1, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{s} = (0, 1, \dots, 1) \in [0, 1]^n$  olmak üzere aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$X((\lambda \mathbf{t} + (1 - \lambda)\mathbf{s}), \cdot) = X((\lambda, 1, 1, \dots, (1 - \lambda)), \cdot) = \lambda(1 - \lambda).$$

Buradan aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\lambda X(\mathbf{t}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{s}, \cdot) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0.$$

Bu ise her  $\lambda \in [0,1]$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$X((\lambda \mathbf{t} + (1 - \lambda)\mathbf{s}), \cdot) > \lambda X(\mathbf{t}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{s}, \cdot).$$

Bu durumda,  $X$  stokastik süreci  $[0,1]^n$  üzerinde konveks değildir.

#### 4.1.1. Çok Boyutlu Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

$X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Buna göre,  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri konveks stokastik süreç olduğundan

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i \left( \frac{u_i + v_i}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \\ &\leq \frac{X_{t_n}^i(u_i, \cdot) + X_{t_n}^i(v_i, \cdot)}{2}, (a. e.). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

eşitsizliği elde edilir [74].

**Teorem 4.1.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{u_i + v_i}{2}, \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2} \right) dt_i \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^2} \left[ \begin{aligned} &X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{aligned} \right] \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri mevcuttur [74].

**İspat.** (4.1.2) eşitsizliği kullanarak,  $X_{t_n}^{i+1}$  için hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{v_{i+1} - u_{i+1}} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} \\
&\leq \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2}.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_i, v_i]$  üzerinde integrali alınır

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \\
&\leq \frac{1}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
&\leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2} \right) dt_i \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.4) eşitsizliğinin solunda her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılırsa

$$X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{u_i + v_i}{2}, \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right)$$

$$\leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \quad (4.1.5)$$

bulunur. Ayrıca (4.1.4) eşitsizliğinin sağ tarafı göz önüne alınırsa her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2} \right) dt_i \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) dt_i + \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot) dt_i \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2^2} \left[ \begin{aligned} & X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{aligned} \right] \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitsizlikleri (4.1.4) eşitsizliğinde kullanılıp yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n-1$ 'e kadar toplamı alınarak (4.1.3) eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.1.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve konveks stokastik süreç olsun.  $l_i(n) := \{\delta \in \mathbb{N}_0^n: \delta \leq 1, |\delta| = n+1-i, i = 1, \dots, n+1\}$ ;  $|\delta| := \delta_1 + \dots + \delta_n \in \mathbb{N}$ ;  $u\delta := (\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ve  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Delta^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [74]:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(\frac{u_1 + v_1}{2}, \dots, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\
& \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^n (v_i - u_i)} \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \dots dt_1 \\
& \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\delta \in I_i(n)} X(\delta \mathbf{u} + (1 - \delta) \mathbf{v}, \cdot). \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

**İspat.** (4.1.2) eşitsizliğini kullanarak,  $X_{t_n}^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v_n - u_n} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \leq \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_{n-1}, v_{n-1}]$  üzerinde integrali alınarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) dt_{n-1} \\
& \leq \frac{1}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} \\
& \leq \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2} dt_{n-1} \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\
& \leq \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) dt_{n-1}, \tag{4.1.9} \\
& \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \left(\frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2}\right) dt_{n-1} \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n(u_n, \cdot) dt_{n-1} + \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n(v_n, \cdot) dt_{n-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.1.10)$$

(4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} \\ & \leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.11) eşitsizliğinde  $[u_{n-2}, v_{n-2}]$  üzerinde integral alınarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) dt_{n-2} \\ & \leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n (v_i - u_i)} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2} \\ & \leq \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

bulunur. (4.1.11) ve (4.1.12) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{u_{n-2} + v_{n-2}}{2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) dt_{n-2}, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \\
& \leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.1.14)
\end{aligned}$$

(4.1.12), (4.1.13) ve (4.1.14) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{u_{n-2} + v_{n-2}}{2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\
& \leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n (v_i - u_i)} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2} \\
& \leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, yukarıdaki yöntemle tümevarım uygulanarak (4.1.7) eşitsizliği elde edilir. Bu da teoremin esas ifadesidir.

**Sonuç 4.1.1.**  $n = 1, 2$  için Teorem 4.1.2 varsayımlarına göre, sırasıyla reel eksen ve koordinatlarda tanımlı konveks stokastik süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği hemen hemen her yerde kolayca elde edilir [72, 83].

**Sonuç 4.1.2.**  $X: \Delta^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^3$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen konveks stokastik süreç olsun. O zaman hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{u_1 + v_1}{2}, \frac{u_2 + v_2}{2}, \frac{u_3 + v_3}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)(v_3 - u_3)} \int_{u_1}^{v_1} \int_{u_2}^{v_2} \int_{u_3}^{v_3} X((t_1, t_2, t_3), \cdot) dt_3 dt_2 dt_1 \\ & \leq \frac{1}{2^3} \begin{bmatrix} X((u_1, u_2, u_3), \cdot) + X((v_1, u_2, u_3), \cdot) \\ + X((u_1, v_2, u_3), \cdot) + X((v_1, v_2, u_3), \cdot) \\ + X((u_1, u_2, v_3), \cdot) + X((v_1, u_2, v_3), \cdot) \\ + X((u_1, v_2, v_3), \cdot) + X((v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**İspat.** Teorem 4.1.2'e göre  $n = 3$  için  $X_3^3(t_3, \cdot) := X((t_1, t_2, t_3), \cdot)$  ve  $l_i(3) := \{\delta \in \mathbb{N}_0^3: \delta \leq 1, |\delta| = 4 - i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  için elde edilir. Ayrıca

$$l_1(3) = \{(1, 1, 1)\}; l_2(3) = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\},$$

$$l_3(3) = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}; l_4(3) = \{(0, 0, 0)\},$$

ve  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \Delta^3$  için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta \in l_1(3)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot) \\ & = X((1, 1, 1)(u_1, u_2, u_3) + [(1, 1, 1) - (1, 1, 1)](v_1, v_2, v_3), \cdot) = X((u_1, u_2, u_3), \cdot); \\ & \sum_{\delta \in l_2(3)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot) \\ & = X((0, 1, 1)(u_1, u_2, u_3) + [(1, 1, 1) - (0, 1, 1)](v_1, v_2, v_3), \cdot) \\ & + X((1, 0, 1)(u_1, u_2, u_3) + [(1, 1, 1) - (1, 0, 1)](v_1, v_2, v_3), \cdot) \\ & + X((1, 1, 0)(u_1, u_2, u_3) + [(1, 1, 1) - (1, 1, 0)](v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{aligned}$$

$$= X((u_1, v_2, v_3), \cdot) + X((u_1, v_2, u_3), \cdot) + X((u_1, u_2, v_3), \cdot).$$

Buradan

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta \in I_3(3)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot) \\ &= X((v_1, v_2, u_3), \cdot) + X((v_1, u_2, v_3), \cdot) + X((u_1, v_2, v_3), \cdot); \end{aligned}$$

$$\sum_{\delta \in I_4(3)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot) = X((v_1, v_2, v_3), \cdot)$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} & \sum_{\delta \in I_i(3)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot) = X((u_1, u_2, u_3), \cdot) \\ & + \{X((u_1, v_2, v_3), \cdot) + X((u_1, v_2, u_3), \cdot) + X((u_1, u_2, v_3), \cdot)\} \\ & + \{X((v_1, v_2, u_3), \cdot) + X((v_1, u_2, v_3), \cdot) + X((u_1, v_2, v_3), \cdot)\} + X((v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerin tümü (4.1.7) eşitsizliğinde kullanılırsa bu örnekte istenilen sonuç elde edilir.

**Teorem 4.1.3.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde konveks stokastik süreç olsun. Hemen hemen her yerde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ve  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(v_k - u_k)} \int_{u_k}^{v_k} (X_{u_n}^k(t_i, \cdot) + X_{v_n}^k(t_k, \cdot)) dt_k \\ & \leq \frac{n}{2} [X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [X_{u_n}^k(v_k, \cdot) + X_{v_n}^k(u_k, \cdot)] \quad (4.1.15) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [67].

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde konveks stokastik olduğundan  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri  $[a_i, b_i]$  üzerinde konveks stokastik süreçtir ve her  $i = 1, 2, \dots, n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{u_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \leq \frac{X_{u_n}^i(u_i, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{2} \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{2}$$

$$\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{v_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + X_{v_n}^i(v_i, \cdot)}{2} \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)}{2}$$

Yukarıdaki iki eşitsizliğin toplanması ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} [X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)] dt_i \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)}{2}.$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n$ 'e kadar toplamı alınarak (4.1.15) eşitsizliği elde edilir.

## 4.2. Çok Boyutlu $s$ -Konveks Stokastik Süreçler

Bu bölümde öncelikle birinci (ikinci) anlamda çok boyutlu stokastik süreçlerin  $s$ -konveksliği araştırılmıştır. Ayrıca bu bölüm iki alt bölüm içermektedir. Bu alt bölümlerde, sırasıyla birinci ve ikinci anlamda çok boyutlu  $s$ -konveks stokastik süreçler için bazı Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar iki ve üç boyutlu stokastik süreçlere eklenmiştir.

$0 \leq u_i < v_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) reel sayılar için  $n$  boyutlu ekseninde  $\Delta^n := \prod_{i=1}^n [u_i, v_i] \subseteq \mathbb{R}_+^n$  aralığı dikkate alınsın.

Aşağıda  $n$  boyutlu ekseninde stokastik süreçler için birinci (ikinci) anlamda  $s$ -konveksliğin tanımı verilmiştir:

**Tanım 4.2.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki stokastik süreçler  $[u_i, v_i]$  aralığında hemen hemen her yerde  $t, t_i \geq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  için birinci (ikinci) anlamda s-konveks stokastik süreç ise bu takdirde  $X$ , n boyutlu ekseninde birinci (ikinci) anlamda s-konveks stokastik süreç olarak adlandırılır [74].

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot). \quad (4.2.1)$$

**Tanım 4.2.2.**  $s \in (0, 1]$  sabit olsun.  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizliği tüm  $\tau, \theta \in \Delta^n$  için sağlasın:

$$X(\alpha\tau + \beta\theta, \cdot) \leq \alpha^s X(\tau, \cdot) + \beta^s X(\theta, \cdot).$$

Bu takdirde  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$ 'de  $\alpha, \beta \geq 0$  için  $\alpha^s + \beta^s = 1$  ( $\alpha + \beta = 1$ ) ise sırasıyla birinci (ikinci) anlamda s-konvektir denir [74]. Eğer yukarıdaki eşitsizlik tersine çevrilirse  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$ 'de sırasıyla birinci (ikinci) anlamda s-konkavdır denir [74].

**Lemma 4.2.1.**  $\Delta^n$  üzerindeki her birinci (ikinci) anlamda s-konveks stokastik süreci hemen hemen her yerde n boyutlu ekseninde birinci (ikinci) anlamda s-konvektir ancak tersi doğru değildir.

**İspat.**  $X$ ,  $\Delta^n$  üzerinde birinci (ikinci) anlamda s-konveks stokastik süreç olsun. (4.2.1) eşitliği kullanılarak hemen hemen her yerde  $u, v \geq 0$  ve  $\alpha, \beta \geq 0$  ile  $s \in (0, 1]$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i(\alpha u + \beta v, \cdot) &:= X((t_1, \dots, t_{i-1}, \alpha u + \beta v, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &\leq \alpha^s X((t_1, \dots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) + \beta^s X((t_1, \dots, t_{i-1}, v, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &= \alpha^s X_{t_n}^i(u, \cdot) + \beta^s X_{t_n}^i(v, \cdot). \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik,  $X$ 'in n boyutlu ekseninde birinci (ikinci) anlamda s-konveks stokastik süreç olduğunu gösterir. Lemmanın tersinin doğru olmadığı için aşağıdaki örnek verilebilir:

**Örnek 4.2.1.**  $X: [0,1]^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , stokastik süreci  $s \in (0,1]$  için aşağıdaki gibi tanımlanan bir stokastik süreç olsun:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) = t_1 t_2 \dots t_{i-1} t_i^s t_{i+1} t_n$$

Bu süreç, aşağıda gösterildiği gibi  $n$  boyutlu ekseninde birinci (ikinci) anlamda  $s$ -konvektir:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i((\alpha u + \beta v), \cdot) &= X((t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, (\alpha u + \beta v), t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &= t_1 t_2 \dots t_{i-1} (\alpha u + \beta v)^s t_{i+1} \dots t_n \\ &\leq \alpha^s (t_1 t_2 \dots t_{i-1} u t_{i+1} \dots t_n) + \beta^s (t_1 t_2 \dots t_{i-1} v t_{i+1} \dots t_n) \\ &\leq \alpha^s (t_1 t_2 \dots t_{i-1} u t_{i+1} \dots t_n) + \beta^s (t_1 t_2 \dots t_{i-1} v t_{i+1} \dots t_n) \\ &= \alpha^s X_{t_n}^i(u, \cdot) + \beta^s X_{t_n}^i(v, \cdot). \end{aligned}$$

Ayrıca  $u = (1, 1, \dots, 0)$ ,  $v = (0, 1, \dots, 1) \in [0,1]^n$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$X((\alpha u + \beta v), \cdot) > \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot),$$

buradan da aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$X((\alpha u + \beta v), \cdot) = X((\alpha, 1, 1, \dots, \beta), \cdot) = \alpha\beta; \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot) = 0.$$

Bu da bize  $X$ 'in,  $[0,1]^n$  üzerinde birinci (ikinci) anlamda  $s$ -konveks olmadığını gösterir.

#### 4.2.1. Çok Boyutlu Birinci Anlamda $s$ -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

$X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Buna göre,  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreçler olduğundan her  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  için

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^i \left( \frac{u_i + v_i}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \\
&\leq \frac{X_{t_n}^i(u_i, \cdot) + sX_{t_n}^i(v_i, \cdot)}{s + 1}, (a. e.) \tag{4.2.2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [74].

**Teorem 4.2.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$ 'de kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur [74]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1} X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{u_i + v_i}{2}, \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + sX_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{s + 1} \right) dt_i \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(s + 1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{array} \right]. \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

**İspat.** (4.2.2) eşitsizliği kullanılarak,  $X_{t_n}^{i+1}$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{v_{i+1} - u_{i+1}} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} \\
&\leq \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + sX_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{s + 1}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_i, v_i]$  üzerinde integrali alınrsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \\
& \leq \frac{1}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
& \leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + sX_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{s + 1} \right) dt_i \quad (4.2.4)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.4) eşitsizliğin solunda her  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  için Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{u_i + v_i}{2}, \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\
& \leq \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{u_{i+1} + v_{i+1}}{2}, \cdot \right) dt_i \quad (4.2.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.4) eşitsizliğin sağ tarafı hesaba katılarak her  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + sX_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{s + 1} \right) dt_i \\
& = \frac{1}{s + 1} \left[ \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) dt_i + \frac{s}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot) dt_i \right] \\
& \leq \frac{1}{s + 1} \left[ \frac{X \left( (t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot \right)}{s + 1} \right. \\
& \quad + \frac{sX \left( (t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot \right)}{s + 1} \\
& \quad + \frac{sX \left( (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+2}, u_i, v_{i+1}, \dots, t_n), \cdot \right)}{s + 1} \\
& \quad \left. + \frac{s^2X \left( (t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot \right)}{s + 1} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \end{array} \right] \quad (4.2.6)$$

eşitsizliği yazılır. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitsizlikleri (4.2.4) eşitsizliğinde kullanılıp yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n-1$ 'e kadar toplamı alınarak (4.2.3) eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.2.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olsun.  $l_i(n) := \{\delta \in \mathbb{N}_0^n: \delta \leq 1, |\delta| = n+1-i, i=1, \dots, n+1\}$ ;  $|\delta| := \delta_1 + \dots + \delta_n \in \mathbb{N}$ ;  $u\delta := (\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ve  $u, v \in \Delta^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [74]:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{u_1 + v_1}{2}, \dots, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^n (v_i - u_i)} \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \dots dt_1 \\ & \leq \frac{1}{(s+1)^n} \sum_{i=1}^{n+1} s^{i-1} \sum_{\delta \in l_i(n)} X(\delta u + (1-\delta)v, \cdot). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

**İspat.** (4.2.2) eşitsizliğini kullanarak,  $X_{t_n}^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v_n - u_n} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \leq \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + sX_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{s+1}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_{n-1}, v_{n-1}]$  üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) dt_{n-1} \\ & \leq \frac{1}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} \\ & \leq \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + sX_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{s+1} dt_{n-1} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

olur. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \leq \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n\left(\frac{u_n + v_n}{2}, \cdot\right) dt_{n-1}, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \left( \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + sX_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{s+1} \right) dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{s+1} \left[ \frac{1}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n(u_n, \cdot) dt_{n-1} + \frac{s}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} X_{t_n}^n(v_n, \cdot) dt_{n-1} \right] \\ &\leq \frac{1}{(s+1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.2.10) \end{aligned}$$

(4.2.8), (4.2.9) ve (4.2.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ &\leq \frac{1}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} \\ &\leq \frac{1}{(s+1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] \quad (4.2.11) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.11) eşitsizliğinde  $[u_{n-2}, v_{n-2}]$  üzerinde integral alınarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) dt_{n-2} \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n (v_i - u_i)} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{(s+1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \quad (4.2.12)$$

bulunur. (4.2.11) ve (4.2.12) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{u_{n-2} + v_{n-2}}{2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ \leq \frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) dt_{n-2}, \quad (4.2.13)$$

$$\frac{1}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{(s+1)^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \\ \leq \frac{1}{(s+1)^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^3X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.2.14)$$

(4.2.12), (4.2.13) ve (4.2.14) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{u_{n-2} + v_{n-2}}{2}, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2}\right), \cdot\right) \\ \leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n (v_i - u_i)} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2}$$

$$\leq \frac{1}{(s+1)^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +sX((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^2X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +s^3X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right].$$

Sonuç olarak, yukarıdaki yöntemle tümevarım uygulanarak (4.2.7) eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.2.1.**  $n = 1, 2$  için Teorem 4.2.2 varsayımlarına göre, sırasıyla reel eksen ve koordinatlarda tanımlı birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik sürecin Hermite-Hadamard eşitsizliği hemen hemen her yerde kolayca elde edilir [72, 83].

**Sonuç 4.2.2.**  $X: \Delta^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^3$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olsun. O zaman hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{u_1 + v_1}{2}, \frac{u_2 + v_2}{2}, \frac{u_3 + v_3}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)(v_3 - u_3)} \int_{u_1}^{v_1} \int_{u_2}^{v_2} \int_{u_3}^{v_3} X((t_1, t_2, t_3), \cdot) dt_3 dt_2 dt_1 \\ & \leq \frac{1}{(s+1)^3} \left[ \begin{array}{l} X((u_1, u_2, u_3), \cdot) + sX((v_1, u_2, u_3), \cdot) \\ +sX((u_1, v_2, u_3), \cdot) + s^2X((v_1, v_2, u_3), \cdot) \\ +sX((u_1, u_2, v_3), \cdot) + s^2X((v_1, u_2, v_3), \cdot) \\ +s^2X((u_1, v_2, v_3), \cdot) + s^3X((v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

**İspat.** Sonuç 4.1.2 ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.2.3.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve birinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olsun. Hemen hemen her yerde  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Delta^n$  için

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} (X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)) dt_i \\
& \leq \frac{n}{s+1} [X(\mathbf{u}, \cdot) + sX(\mathbf{v}, \cdot)] + \frac{1}{s+1} \sum_{i=1}^n [X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + sX_{v_n}^i(u_i, \cdot)] \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [74].

**İspat.** (4.2.2) eşitsizliği kullanılarak,  $X_{u_n}^i$  ve  $X_{v_n}^i$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{u_n}^i(t_i, \cdot) dt_i & \leq \frac{X_{u_n}^i(u_i, \cdot) + sX_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{s+1} \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + sX_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{s+1} \\
\frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{v_n}^i(t_i, \cdot) dt_i & \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + sX_{v_n}^i(v_i, \cdot)}{s+1} \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + sX(\mathbf{v}, \cdot)}{s+1}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki iki eşitsizliğin toplanması ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} [X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)] dt_i \\
& \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + sX(\mathbf{v}, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + sX_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{s+1}.
\end{aligned}$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n$ 'e kadar toplamı alınarak (4.2.15) eşitsizliği elde edilir.

#### 4.2.2. Çok boyutlu İkinci Anlamda $s$ -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

$X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  ikinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Buna göre,  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  ikinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olduğundan her  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \geq 2$  için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [74]:

$$\begin{aligned}
2^{s-1}X_{t_n}^i\left(\frac{u_i+v_i}{2},\cdot\right) &\leq \frac{1}{v_i-u_i}\int_{u_i}^{v_i}X_{t_n}^i(t_i,\cdot)dt_i \\
&\leq \frac{X_{t_n}^i(u_i,\cdot)+X_{t_n}^i(v_i,\cdot)}{s+1}, \quad (a.e.). \quad (4.2.16)
\end{aligned}$$

Benzer bir yöntem olarak, (4.2.16) eşitsizliğinde aynı notasyonları kullanılarak, çok boyutlu ikinci anlamda s-konveks stokastik süreç için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki teoremler ile elde edilir:

**Teorem 4.2.4.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  ikinci anlamda s-konveks stokastik süreç ve  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur [74]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1}4^{s-1}X\left(\left(t_1,\dots,t_{i-1},\frac{u_i+v_i}{2},\frac{u_{i+1}+v_{i+1}}{2},t_{i+2},\dots,t_n\right),\cdot\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{4^{s-1}}{v_i-u_i}\int_{u_i}^{v_i}X_{t_n}^{i+1}\left(\frac{u_{i+1}+v_{i+1}}{2},\cdot\right)dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(v_i-u_i)(v_{i+1}-u_{i+1})}\int_{u_i}^{v_i}\int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}}X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1},\cdot)dt_{i+1}dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{v_i-u_i}\int_{u_i}^{v_i}\left(\frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1},\cdot)+X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1},\cdot)}{s+1}\right)dt_i \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(s+1)^2}\left[\begin{array}{l} X((t_1,\dots,t_{i-1},u_i,u_{i+1},t_{i+2},\dots,t_n),\cdot) \\ +X((t_1,\dots,t_{i-1},v_i,u_{i+1},t_{i+2},\dots,t_n),\cdot) \\ +X((t_1,\dots,t_{i-1},u_i,v_{i+1},t_{i+2},\dots,t_n),\cdot) \\ +X((t_1,\dots,t_{i-1},v_i,v_{i+1},t_{i+2},\dots,t_n),\cdot) \end{array}\right]. \quad (4.2.17)
\end{aligned}$$

**İspat.** Teorem 4.2.1 ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.2.5.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve ikinci anlamda s-konveks stokastik süreç olsun. Hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$\begin{aligned}
& 2^{n(s-1)} X \left( \left( \frac{u_1 + v_1}{2}, \dots, \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \frac{u_n + v_n}{2} \right), \cdot \right) \\
& \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^n (v_i - u_i)} \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} X_{t_n}^n (t_n, \cdot) dt_n \dots dt_1 \\
& \leq \frac{1}{(s+1)^n} \sum_{\delta \in I_i(n)} X(\delta \mathbf{u} + (1-\delta)\mathbf{v}, \cdot). \tag{4.2.18}
\end{aligned}$$

**İspat.** Teorem 4.2.2 ispatına benzer şekilde yapılır.

**Sonuç 4.2.3.**  $n = 1, 2$  için Teorem 4.2.4 varsayımlarına göre, sırasıyla reel eksen ve koordinatlarda tanımlı ikinci anlamda  $s$ -konveks stokastik sürecin Hermite-Hadamard eşitsizliği hemen hemen her yerde kolayca elde edilir.

**Sonuç 4.2.4.**  $X: \Delta^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\Delta^3$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve ikinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olsun. O zaman hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$\begin{aligned}
& 8^{s-1} X \left( \left( \frac{u_1 + v_1}{2}, \frac{u_2 + v_2}{2}, \frac{u_3 + v_3}{2} \right), \cdot \right) \\
& \leq \frac{1}{(v_1 - u_1)(v_2 - u_2)(v_3 - u_3)} \int_{u_1}^{v_1} \int_{u_2}^{v_2} \int_{u_3}^{v_3} X((t_1, t_2, t_3), \cdot) dt_3 dt_2 dt_1 \\
& \leq \frac{1}{(s+1)^3} \left[ \begin{array}{l} X((u_1, u_2, u_3), \cdot) + X((u_1, v_2, v_3), \cdot) \\ + X((v_1, u_2, v_3), \cdot) + X((v_1, v_2, u_3), \cdot) \\ + X((u_1, u_2, v_3), \cdot) + X((u_1, v_2, u_3), \cdot) \\ + X((v_1, u_2, u_3), \cdot) + X((v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{array} \right].
\end{aligned}$$

**Teorem 4.2.6.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve ikinci anlamda  $s$ -konveks stokastik süreç olsun. Hemen hemen her yerde  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Delta^n$  için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [74]:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( X_{u_n}^i (t_i, \cdot) + X_{v_n}^i (t_i, \cdot) \right) dt_i$$

$$\leq \frac{n}{s+1} [X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)] + \frac{1}{s+1} \sum_{i=1}^n [X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)].$$

**İspat.** Teorem 4.2.3 ispatına benzer şekilde yapılır.

### 4.3. Çok Boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler

Bu bölümde öncelikle  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks stokastik süreçler araştırılmış ve bu stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar iki ve üç boyutlu stokastik süreçlere eklenmiştir.

$0 \leq u_i < v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  reel sayılar için  $n$  boyutlu ekseninde  $\Delta^n := \prod_{i=1}^n [u_i, v_i] \subseteq \mathbb{R}_+^n$  aralığı dikkate alınsın.

Aşağıda  $n$  boyutlu ekseninde stokastik süreçler için harmonik konveksliğin tanımı verilmiştir:

**Tanım 4.3.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki stokastik süreçler  $[u_i, v_i]$  aralığında hemen hemen her yerde  $i = 1, 2, \dots, n$  için harmonik konveks stokastik süreç ise bu durumda  $X$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks olarak adlandırılır [82]:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot).$$

**Tanım 4.3.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki eşitsizlik tüm  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Delta^n$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen hemen her yerde geçerli ise  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$  üzerinde harmonik konveks denir [82]:

$$X\left(\left(\frac{\mathbf{t}\mathbf{s}}{\lambda\mathbf{t} + (1-\lambda)\mathbf{s}}\right), \cdot\right) \leq \lambda X(\mathbf{s}, \cdot) + (1-\lambda)X(\mathbf{t}, \cdot). \quad (4.3.1)$$

Eğer yukarıdaki eşitsizlik tersine çevrilirse  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$  üzerinde harmonik konkav denir.

**Önerme 4.3.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun.  $i = 1, 2, \dots, n$  ve  $X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot)$  stokastik süreçleri için

(i) Eğer  $X_{t_n}^i$  konveks ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için azalmayan stokastik süreç ise  $X$ ,  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konvektir denir.

(ii) Eğer  $X_{t_n}^i$  harmonik konveks ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için artmayan stokastik süreç ise  $X$ ,  $n$  boyutlu ekseninde konvektir denir.

**Lemma 4.3.1.** Her harmonik konveks  $X: \Delta^n \subset \mathbb{R}_+^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci hemen hemen her yerde  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konvektir, ancak tersi doğru değildir [82].

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $\Delta^n$  üzerinde harmonik konveks olsun.  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , aşağıdaki gibi tanımlanan stokastik süreçler olsun.

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot), \quad t \in [u_i, v_i].$$

Şimdi  $t, s \in [u_i, v_i]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i\left(\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}\right), \cdot\right) &= X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}, t_{i+1}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \\ &= X\left(\left(\left(\frac{t_1^2}{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_1}, \dots, \frac{t_{i-1}^2}{\lambda t_{i-1} + (1-\lambda)t_{i-1}}, \frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}\right), \cdot\right)\right. \\ &\quad \left.\left(\frac{t_{i+1}^2}{\lambda t_{i+1} + (1-\lambda)t_{i+1}}, \dots, \frac{t_n^2}{\lambda t_n + (1-\lambda)t_n}\right), \cdot\right) \\ &\leq \lambda X((t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) + (1-\lambda)X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &= \lambda X_{t_n}^i(s, \cdot) + (1-\lambda)X_{t_n}^i(t, \cdot). \end{aligned}$$

Bu ise  $X_{t_n}^i$  stokastik süreçlerinin  $[u_i, v_i]$  üzerinde harmonik konveks olduğunu, yani  $X$  stokastik sürecinin  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks olduğunu gösterir.

Şimdi  $X: [3, 6] \times [4, 6] \times [5, 6] \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$  stokastik süreci tanımlansın.  $X((t_1, t_2, t_3), \cdot) = (t_1 - 3)(t_1 - 4)(t_3 - 5)$  verilsin.  $X$ 'in Lemma 4.3.1 ile üç boyutlu ekseninde harmonik konveks olduğu ancak  $[3, 6] \times [4, 6] \times [5, 6]$  için harmonik konveks olmadığı açıktır. Aslında  $(3, 6, 6), (4, 6, 5) \in [3, 6] \times [4, 6] \times [5, 6]$  ve  $\lambda \in (0, 1)$  için aşağıdaki eşitsizlik gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(\frac{3.4}{3.\lambda + (1-\lambda).4}, \frac{6.6}{6.\lambda + (1-\lambda).6}, \frac{6.5}{6.\lambda + (1-\lambda).5}\right), \cdot\right) \\
&= X\left(\left(\frac{12}{4-\lambda}, 6, \frac{30}{5+\lambda}\right), \cdot\right) = \left(\frac{12}{4-\lambda} - 3\right)(6-4)\left(\frac{30}{5+\lambda} - 5\right) \\
&= \left(\frac{3\lambda}{4-\lambda}\right)^2 \left(\frac{5-\lambda}{5+\lambda}\right) = \frac{6\lambda(5-\lambda)}{(4-\lambda)(5+\lambda)} > 0;
\end{aligned}$$

buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \lambda X((3,6,6), \cdot) + (1-\lambda)X((4,6,5), \cdot) \\
&= \lambda(3-3)(6-4)(6-5) + (1-\lambda)(4-3)(6-4)(5-5) = 0.
\end{aligned}$$

Böylece tüm  $\lambda \in (0,1)$  için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(\frac{3.4}{3.\lambda + (1-\lambda).4}, \frac{6.6}{6.\lambda + (1-\lambda).6}, \frac{6.5}{6.\lambda + (1-\lambda).5}\right), \cdot\right) \\
&> \lambda X((3,6,6), \cdot) + (1-\lambda)X((4,6,5), \cdot).
\end{aligned}$$

Bu ise  $X$  stokastik sürecinin  $[3,6] \times [4,6] \times [5,6]$  üzerinde harmonik konveks olmadığını gösterir.

### 4.3.1. Çok Boyutlu Harmonik Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Eğer  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks stokastik süreç ise,  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri  $[u_i, v_i]$  aralıkları üzerinde tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için harmonik konveks stokastik süreçtir. Hermite-Hadamard eşitsizliğinden, hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X_{t_n}^i\left(\frac{2u_i v_i}{u_i + v_i}, \cdot\right) \leq \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^i(t_i, \cdot)}{t_i^2} dt_i \leq \frac{X_{t_n}^i(u_i, \cdot) + X_{t_n}^i(v_i, \cdot)}{2}.$$

**Teorem 4.3.1.** Eğer  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu uzayda harmonik konveks stokastik süreç ise  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri  $[u_i, v_i]$  aralığı üzerinde tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için konvektir. Bu takdirde hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [82]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{2u_i v_i}{v_i - u_i}, \frac{2u_{i+1} v_{i+1}}{v_{i+1} - u_{i+1}}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{u_i}^{v_i} X_{t_n}^i \left( \frac{2u_{i+1} v_{i+1}}{u_{i+1} + v_{i+1}}, \cdot \right) \frac{dt_i}{t_i^2} \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i v_i u_{i+1} v_{i+1}}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} \frac{X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot)}{(t_i t_{i+1})^2} dt_{i+1} dt_i \\
& \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^i(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^i(v_{i+1}, \cdot)}{2t_i^2} dt_i \\
& \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.3.2)
\end{aligned}$$

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks stokastik süreç olduğundan  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri  $[u_i, v_i]$  aralıkları üzerinde tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için harmonik konveks stokastik süreçlerdir. Buradan  $[u_{i+1}, v_{i+1}]$  aralığı üzerinde hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{2u_{i+1} v_{i+1}}{u_{i+1} + v_{i+1}}, \cdot \right) & \leq \frac{u_{i+1} v_{i+1}}{v_{i+1} - u_{i+1}} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} \frac{X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot)}{t_{i+1}^2} dt_{i+1} \\
& \leq \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_i, v_i]$  üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{2u_{i+1}v_{i+1}}{u_{i+1} + v_{i+1}}, \cdot \right)}{t_i^2} dt_i \\
& \leq \frac{u_i v_i u_{i+1} v_{i+1}}{(v_i - u_i)(v_{i+1} - u_{i+1})} \int_{u_i}^{v_i} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} \frac{X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot)}{t_{i+1}^2} dt_{i+1} dt_i \\
& \leq \frac{u_i v_i}{2(v_i - u_i)} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{t_i^2} dt_i \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Tekrar her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{2u_i v_i}{v_i + u_i}, \frac{2u_{i+1} v_{i+1}}{u_{i+1} + v_{i+1}}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\
& \leq \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{2u_{i+1} v_{i+1}}{u_{i+1} + v_{i+1}}, \cdot \right)}{t_i^2} dt_i \quad (4.3.4)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için

$$\begin{aligned}
& \frac{u_i v_i}{2(v_i - u_i)} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{t_i^2} dt_i \\
& = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot)}{t_i^2} dt_i + \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \frac{X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{t_i^2} dt_i \right] \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot)}{2} \right] \\
& = \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} & X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{aligned} \right] \quad (4.3.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitsizlikleri (4.3.3) eşitsizliğinde kullanılırsa ve yukarıdaki eşitsizliğin her tarafı 1'den  $n - 1$ 'e kadar toplanırsa (4.3.2) eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.3.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve harmonik konveks stokastik süreç olsun.  $l_i(n) := \{\delta \in \mathbb{N}_0^n: \delta \leq 1, |\delta| = n + 1 - i, i = 1, \dots, n + 1\}$ ;  $|\delta| := \delta_1 + \dots + \delta_n \in \mathbb{N}$ ;  $u\delta := (\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ve  $u, v \in \Delta^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [82]:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{2u_1 v_1}{v_1 + u_1}, \dots, \frac{2u_{n-1} v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_n v_n}{v_n + u_n}\right), \cdot\right) \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{u_i v_i}{v_i - u_i}\right) \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{(\prod_{i=1}^n t_i)^2} dt_n \dots dt_1 \\ & \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\delta \in l_i(n)} X(\delta u + (1 - \delta)v, \cdot). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

**İspat.** Hermite-Hadamard eşitsizliği  $X_{t_n}^n$  harmonik konveks stokastik süreçleri için  $[u_n, v_n]$  aralığında uygulanarak hemen hemen her yerde aşağıdaki gibi kolayca elde edilir:

$$X_{t_n}^n\left(\frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \cdot\right) \leq \frac{u_n v_n}{v_n - u_n} \int_{u_{i+1}}^{v_{i+1}} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{t_n^2} dt_n \leq \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_{n-1}, v_{n-1}]$  üzerinde integrali alınarak

$$\begin{aligned} & \frac{u_{n-1} v_{n-1}}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n\left(\frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \cdot\right)}{t_{n-1}^2} dt_{n-1} \\ & \leq \frac{u_{n-1} v_{n-1} u_n v_n}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{(t_{n-1} t_n)^2} dt_{n-1} dt_n \\ & \leq \frac{u_{n-1} v_{n-1}}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2t_{n-1}^2} dt_{n-1} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

bulunur. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right) \\
& \leq \frac{u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} - u_{n-1}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n\left(\frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \cdot\right)}{t_{n-1}^2} dt_{n-1}, \tag{4.3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{n-1}v_{n-1}}{2(v_{n-1} - u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{t_{n-1}^2} dt_{n-1} \\
& \leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{aligned} & X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{aligned} \right]. \tag{4.3.9}
\end{aligned}$$

(4.3.7), (4.3.8) ve (4.3.9) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right) \\
& \leq \frac{u_{n-1}v_{n-1}u_n v_n}{(v_{n-1} - u_{n-1})(v_n - u_n)} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{(t_{n-1}t_n)^2} dt_{n-1} dt_n \\
& \leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{aligned} & X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ & + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{aligned} \right]. \tag{4.3.10}
\end{aligned}$$

Böylece  $[u_{n-2}, v_{n-2}]$  aralığı üzerinde integral alınarak

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right)}{t_{n-2}^2} dt_{n-2} \\
& \leq \left( \prod_{i=n-2}^n \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \right) \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{(\prod_{i=n-2}^n t_i)^2} dt_{n-2} dt_{n-1} dt_n
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^2} \frac{u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{t_{n-2}^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \quad (4.3.11)$$

bulunur. (4.3.10) ve (4.3.11) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{2u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right)}{t_{n-2}^2} dt_{n-2}, \quad (4.3.12) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^2} \frac{u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}} \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \frac{1}{t_{n-2}^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2}$$

$$\leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.3.13)$$

(4.3.11), (4.3.12) ve (4.3.13) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{n-3}, \frac{2u_{n-2}v_{n-2}}{v_{n-2} - u_{n-2}}, \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{v_{n-1} + u_{n-1}}, \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}\right), \cdot\right) \\ & \leq \left( \prod_{i=n-2}^n \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \right) \int_{u_{n-2}}^{v_{n-2}} \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \int_{u_n}^{v_n} \frac{X_{t_n}^n(t_n, \cdot)}{(\prod_{i=n-2}^n t_i)^2} dt_{n-2} dt_{n-1} dt_n \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.3.14)$$

Bu işlemler art arda yapılarak tümevarımla istenen eşitsizlik elde edilir. Bu da teoremin esas ifadesidir.

**Sonuç 4.3.1.**  $n = 1, 2$  için Teorem 4.3.2 varsayımlarına göre, sırasıyla reel eksen ve koordinatlarda tanımlı harmonik konveks stokastik sürecin Hermite-Hadamard eşitsizliği hemen hemen her yerde kolayca elde edilir [72, 83].

**Sonuç 4.3.2.**  $X: \Delta^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta^3$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilen ve harmonik konveks stokastik süreç olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{2u_1v_1}{v_1+u_1}, \frac{2u_2v_2}{v_2+u_2}, \frac{2u_3v_3}{v_3+u_3}\right), \cdot\right) \\ & \leq \left(\prod_{i=1}^3 \frac{u_i v_i}{v_i - u_i}\right) \int_{u_1}^{v_1} \int_{u_2}^{v_2} \int_{u_3}^{v_3} \frac{X_{t_3}^3(t_3, \cdot)}{(\prod_{i=1}^3 t_i)^2} dt_3 dt_2 dt_1 \\ & \leq \frac{1}{2^3} \sum_{\delta \in I_i(n)} X(\delta \mathbf{u} + (1 - \delta) \mathbf{v}, \cdot). \end{aligned}$$

**Teorem 4.3.3.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu eksen ve harmonik konveks stokastik süreç olsun.  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ve  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [82]:

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} \left( X_{u_n}^k(t_i, \cdot) + X_{v_n}^k(t_i, \cdot) \right) dt_i$$

$$\leq \frac{n}{2} [X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [X_{u_n}^i(v_k, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)]. \quad (4.3.15)$$

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde harmonik konveks stokastik süreç olduğundan,  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri  $[a_i, b_i]$  aralıkları üzerinde tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için harmonik konveks stokastik süreçlerdir. Buradan hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{u_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \leq \frac{X_{u_n}^i(u_i, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{2} = \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{2}$$

$$\frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} X_{v_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + X_{v_n}^i(v_i, \cdot)}{2} = \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)}{2}.$$

Yukarıdaki iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{u_i v_i}{v_i - u_i} \int_{u_i}^{v_i} [X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)] dt_i \\ & \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)}{2}. \end{aligned}$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n$ 'e kadar toplamı alınarak (4.3.15) eşitsizliği elde edilir.

#### 4.4. Çok Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler

Bu bölümde öncelikle  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçler araştırılmış ve bu stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar iki ve üç boyutlu stokastik süreçlere eklenmiştir.

$u_i, v_i, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$  için  $u_i < v_i$  koşulunu sağlayan reel sayılar olsun.  $n$  boyutlu ekseninde  $\Delta^n = \prod_{i=1}^n [u_i, v_i] \subseteq [0, \infty)^n$  aralığı dikkate alınsın.

Aşağıda  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçler için preinvekslik tanımı verilmiştir:

**Tanım 4.4.1.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki stokastik süreçler  $[u_i, v_i]$  aralığında hemen hemen her yerde  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç ise bu durumda  $X$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olarak adlandırılır [33]:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \quad (a. e.). \quad (4.4.1)$$

**Tanım 4.4.2.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer aşağıdaki eşitsizlik tüm  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n), \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Delta^n$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen hemen her yerde geçerli ise  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$  üzerinde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir denir [33]:

$$X((\mathbf{t} + \lambda\eta(\mathbf{s}, \mathbf{t})), \cdot) \leq \lambda X(\mathbf{s}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{t}, \cdot).$$

Eğer yukarıdaki eşitsizlik tersine çevrilirse  $X$  stokastik sürecine  $\Delta^n$  üzerinde  $\eta$ 'e göre prekonkav stokastik süreçtir denir [33].

**Lemma 4.4.1.**  $\Delta^n$  üzerinde her çok boyutlu preinveks stokastik süreç, hemen hemen her yerde  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir, ancak tersi doğru değildir.

**İspat.**  $X: \Delta^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $\Delta^n$  üzerinde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olsun.  $X_{t_n}^i: [u_i, v_i] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreçleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot), \quad t \in [u_i, v_i].$$

Şimdi  $t, s \in [u_i, v_i]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i((t + \lambda\eta(s, t)), \cdot) &:= X((t_1, \dots, t_{i-1}, (t + \lambda\eta(s, t)), t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &\leq \lambda X((t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) + (1 - \lambda)X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) \\ &= \lambda X_{t_n}^i(s, \cdot) + (1 - \lambda)X_{t_n}^i(t, \cdot). \end{aligned}$$

Bu ise  $X_{t_n}^i$  stokastik süreçlerinin  $[u_i, v_i]$  üzerinde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olduğunu, yani  $X$  stokastik sürecinin  $\eta$ 'e göre  $n$  boyutlu ekseninde preinveks stokastik

süreç olduğunu gösterir. Tersinin doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki karşı örnek verilebilir:

**Örnek 4.4.1.**  $X: [0,1]^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stokastik süreci  $t \in [u_i, v_i]$  için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X_{t_n}^i(t, \cdot) := X((t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n), \cdot) = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Ayrıca tüm  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n), \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Delta^n$  için

$$\eta: [0,1]^n \rightarrow [0, \infty), \eta(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{s} - \mathbf{t},$$

olarak tanımlansın. O zaman  $X, [0,1]^n$  üzerinde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç değildir.

Gerçekten,  $X, [0,1]^n$  üzerinde tüm  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n), \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Delta^n$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olduğu varsayılırsa aşağıdaki eşitsizlik gösterilebilir:

$$X((\mathbf{t} + \lambda\eta(\mathbf{s}, \mathbf{t})), \cdot) \leq \lambda X(\mathbf{s}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{t}, \cdot), \quad (a. e.).$$

Fakat  $\mathbf{t} = (1, 1, \dots, 1, 0), \mathbf{s} = (0, 1, \dots, 1) \in [0,1]^n$  için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} X((\mathbf{t} + \lambda\eta(\mathbf{s}, \mathbf{t})), \cdot) &= X\left(\left((1, 1, \dots, 1, 0) + \lambda((0, 1, \dots, 1) - (1, 1, \dots, 1, 0))\right), \cdot\right) \\ &= X\left(\left((1, 1, \dots, 1, 0) + \lambda(-1, 0, \dots, 0, 1)\right), \cdot\right) \\ &= X((1 - \lambda, 1, \dots, 1, \lambda), \cdot) = \lambda(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Buradan  $\mathbf{t} = (1, 1, \dots, 1, 0), \mathbf{s} = (0, 1, \dots, 1) \in [0,1]^n$  ve  $X(\mathbf{t}, \cdot) = 0$  ve  $X(\mathbf{s}, \cdot) = 0$  elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\lambda X(\mathbf{s}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{t}, \cdot) = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda) \cdot 0 = 0.$$

Bu ise tüm  $\lambda \in [0,1]$  için aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$X((\mathbf{t} + \lambda\eta(\mathbf{s}, \mathbf{t})), \cdot) > \lambda X(\mathbf{s}, \cdot) + (1 - \lambda)X(\mathbf{t}, \cdot).$$

Bu ise  $X$  stokastik sürecinin  $[0,1]^n$  üzerinde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olmadığını gösterir. Bu durum  $X$ 'in preinveksliği ile çelişkilidir.

#### 4.4.1. Çok Boyutlu Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Buradan sonra  $n$  boyutlu aralık  $\Lambda^n = \prod_{i=1}^n [u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)] \subseteq [0, \infty)^n$  olsun.

Eğer  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç ise  $X_{t_n}^i: [u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreçleri  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralıkları üzerinde tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir. Hermite-Hadamard eşitsizliğinden, hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned} X_{t_n}^i \left( \frac{2u_i + \eta(v_i, u_i)}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \\ &\leq \frac{X_{t_n}^i(u_i, \cdot) + X_{t_n}^i(v_i, \cdot)}{2} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

eşitsizliği elde edilir [74].

**Teorem 4.4.1.** Eğer  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç ise  $X_{t_n}^i: [u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreçleri  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralıklarında tüm  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir. Buradan Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} X \left( \left( t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{2u_i + \eta(v_i, u_i)}{2}, \frac{2u_{i+1} + \eta(v_{i+1}, u_{i+1})}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n \right), \cdot \right) \\ \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^i \left( \frac{2u_i + \eta(v_i, u_i)}{2}, \cdot \right) dt_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\eta(v_i, u_i)\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} \int_{u_i}^{u_i+\eta(v_i, u_i)} \int_{u_{i+1}}^{u_{i+1}+\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i+\eta(v_i, u_i)} \left( X_{t_n}^i(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^i(v_{i+1}, \cdot) \right) dt_i \\
&\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \begin{aligned} &X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_k, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, u_k, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \\ &+ X((t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), \cdot) \end{aligned} \right] \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri mevcuttur [33].

**İspat.**  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olduğundan  $X_{t_n}^i: [u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreçleri  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralıklarında tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir. Buradan  $[u_{i+1}, v_{i+1}]$  aralığında hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{2u_{i+1} + \eta(v_{i+1}, u_{i+1})}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} \int_{u_{i+1}}^{u_{i+1}+\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} \\
&\leq \frac{X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot)}{2}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerin her tarafının  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i+\eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^{i+1} \left( \frac{2u_{i+1} + \eta(v_{i+1}, u_{i+1})}{2}, \cdot \right) dt_i \\
&\leq \frac{1}{\eta(v_i, u_i)\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} \int_{u_i}^{u_i+\eta(v_i, u_i)} \int_{u_{i+1}}^{u_{i+1}+\eta(v_{i+1}, u_{i+1})} X_{t_n}^{i+1}(t_{i+1}, \cdot) dt_{i+1} dt_i \\
&\leq \frac{1}{2\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i+\eta(v_i, u_i)} \left( X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot) \right) dt_i \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.4.4) eşitsizliğinin solunda her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için Hermite-Hadamard eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, \frac{2u_i + \eta(v_i, u_i)}{2}, \frac{2u_{i+1} + \eta(v_{i+1}, u_{i+1})}{2}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^{i+1}\left(\frac{2u_{i+1} + \eta(v_{i+1}, u_{i+1})}{2}, \cdot\right) dt_i \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

bulunur. Ayrıca (4.4.4) eşitsizliğinin sağ tarafı göz önüne alınırsa her  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} \left( X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) + X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot) \right) dt_i \\ & = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^{i+1}(u_{i+1}, \cdot) dt_i + \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{t_n}^{i+1}(v_{i+1}, \cdot) dt_i \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right)}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right)}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right)}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right)}{2} \right] \\ & = \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} & X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \\ & + X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, u_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \\ & + X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, u_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \\ & + X\left(\left(t_1, \dots, t_{i-1}, v_i, v_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n\right), \cdot\right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.4.5) ve (4.4.6) deki eşitsizlikleri (4.4.4) eşitsizliğinde kullanılırsa ve yukarıdaki eşitsizliğin her tarafı 1'den  $n-1$ 'e kadar toplanırsa (4.4.3) eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.4.4.**  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç ve  $\Lambda^n$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun.  $l_i(n) := \{\delta \in \mathbb{N}_0^n: \delta \leq 1, |\delta| = n+1-i, i = 1, \dots, n+1\}$  ve  $|\delta| := \delta_1 +$

$\dots + \delta_n \in \mathbb{N}$ ;  $\delta u := (\delta_1 u_1, \dots, \delta_n u_n) \in \mathbb{N}_0^n$  olmak üzere  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Delta^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [33]:

$$\begin{aligned}
& X \left( \left( \frac{2u_1 + \eta(v_1, u_1)}{2}, \dots, \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \right), \cdot \right) \\
& \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^n \eta(v_i, u_i)} \int_{u_1}^{u_1 + \eta(v_1, u_1)} \dots \int_{u_n}^{u_n + \eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \dots dt_1 \\
& \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\delta \in I_i(n)} X(\delta \mathbf{u} + (1 - \delta) \mathbf{v}, \cdot). \tag{4.4.7}
\end{aligned}$$

**İspat.** (4.4.2) eşitsizliğini kullanarak  $X_{t_n}^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
X_{t_n}^n \left( \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2}, \cdot \right) & \leq \frac{1}{\eta(v_n, u_n)} \int_{u_n}^{u_n + \eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n \\
& \leq \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının  $[u_{n-1}, u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})]$  aralığı üzerinde integrali alınarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} X_{t_n}^n \left( \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2}, \cdot \right) dt_{n-1} \\
& \leq \frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1}) \eta(v_n, u_n)} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_n}^{u_n + \eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} \\
& \leq \frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2} dt_{n-1}. \tag{4.4.8}
\end{aligned}$$

(4.4.5) ve (4.4.6) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$X \left( \left( t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \right), \cdot \right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} X_{t_n}^n \left( \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2}, \cdot \right) dt_{n-1}, \quad (4.4.9)$$

$$\frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \frac{X_{t_n}^n(u_n, \cdot) + X_{t_n}^n(v_n, \cdot)}{2} dt_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} X_{t_n}^n(u_n, \cdot) dt_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} X_{t_n}^n(v_n, \cdot) dt_{n-1}$$

$$\leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.4.10)$$

(4.4.8), (4.4.9) ve (4.4.12) eşitsizliklerinden

$$X \left( \left( t_1, \dots, t_{n-2}, \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \right), \cdot \right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta(v_{n-1}, u_{n-1})\eta(v_n, u_n)} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_n}^{u_n + \eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1}$$

$$\leq \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] \quad (4.4.11)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.4.11) eşitsizliğinin her tarafının  $[u_{n-2}, u_{n-2} + \eta(v_{n-2}, u_{n-2})]$  aralığı üzerinde integrali alınarak

$$\frac{1}{\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2} + \eta(v_{n-2}, u_{n-2})} X \left( \left( \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{n-2}, \\ \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \\ \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \end{array} \right), \cdot \right) dt_{n-2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n \eta(v_i, u_i)} \\
&\times \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2}+\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1}+\eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_n}^{u_n+\eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2} \\
&\leq \frac{1}{\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-2}}^{\omega_{n-2}} \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2} \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.4.11) ve (4.4.12) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
&X \left( \left( \begin{array}{l} t_1, \dots, t_{n-3}, \\ \frac{2u_{n-2} + \eta(v_{n-2}, u_{n-2})}{2} \\ \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2} \\ \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \end{array} \right), \cdot \right) \\
&\leq \frac{1}{\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2}+\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} X \left( \left( \begin{array}{l} t_1, \dots, t_{n-2}, \\ \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2} \\ \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \end{array} \right), \cdot \right) dt_{n-2}, \quad (4.4.13)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2}+\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \frac{1}{2^2} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ +X((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right] dt_{n-2}$$

$$\leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \quad (4.4.14)$$

(4.4.12), (4.4.13) ve (4.4.14) eşitsizliklerinden sırasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2} + \eta(v_{n-2}, u_{n-2})} X \left( \left( \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{n-2}, \\ \frac{2u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \\ \frac{2u_n + \eta(v_n, u_n)}{2} \end{array} \right), \cdot \right) dt_{n-2} \\ & \leq \frac{1}{\prod_{i=n-2}^n \eta(v_i, u_i)} \\ & \times \int_{u_{n-2}}^{u_{n-2} + \eta(v_{n-2}, u_{n-2})} \int_{u_{n-1}}^{u_{n-1} + \eta(v_{n-1}, u_{n-1})} \int_{u_n}^{u_n + \eta(v_n, u_n)} X_{t_n}^n(t_n, \cdot) dt_n dt_{n-1} dt_{n-2} \\ & \leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, u_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, u_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \\ + X((t_1, \dots, t_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n), \cdot) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Yukarıdaki prosedür uygulandığında n boyut için kural ortaya çıkmaktadır.

**Sonuç 4.4.1.**  $n = 1, 2$  için Teorem 4.4.2 varsayımlarına göre, sırasıyla reel eksen ve koordinatlarda tanımlı  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik sürecin Hermite-Hadamard eşitsizliği hemen hemen her yerde kolayca elde edilir [72, 83].

**Sonuç 4.4.2.**  $X: \Lambda^3 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  üç boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç ve  $\Lambda^3$  üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilirse hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\left(\frac{2u_1 + \eta(v_1, u_1)}{2}, \frac{2u_2 + \eta(v_2, u_2)}{2}, \frac{2u_3 + \eta(v_3, u_3)}{2}\right), \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^3 \eta(v_i, u_i)} \int_{u_1}^{u_1 + \eta(v_1, u_1)} \int_{u_2}^{u_2 + \eta(v_2, u_2)} \int_{u_3}^{u_3 + \eta(v_3, u_3)} X((t_1, t_2, t_3), \cdot) dt_3 dt_2 dt_1 \\ & \leq \frac{1}{2^3} \left[ \begin{array}{l} X((u_1, u_2, u_3), \cdot) + X((v_1, u_2, u_3), \cdot) \\ + X((u_1, v_2, u_3), \cdot) + X((v_1, v_2, u_3), \cdot) \\ + X((u_1, u_2, v_3), \cdot) + X((v_1, u_2, v_3), \cdot) \\ + X((u_1, v_2, v_3), \cdot) + X((v_1, v_2, v_3), \cdot) \end{array} \right] \end{aligned}$$

**Teorem 4.4.2.**  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olsun. Eğer  $X$  stokastik süreci  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralığında tüm  $i = 1, 2, \dots, n$ 'ler için kuadratik orta anlamda integrallenebilirse  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Lambda^n$  için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [33]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} (X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)) dt_i \\ & \leq \frac{n}{2} [X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)]. \quad (4.4.15) \end{aligned}$$

**İspat.**  $X: \Lambda^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreci  $n$  boyutlu ekseninde  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreç olduğundan  $X_{t_n}^i: [u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  stokastik süreçleri  $[u_i, u_i + \eta(v_i, u_i)]$  aralıklarında tüm  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\eta$ 'e göre preinveks stokastik süreçtir. Buradan hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{u_n}^i(t_i, \cdot) dt_i \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot)}{2}$$

$$\frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} X_{v_n}^i(t_i, \cdot) dt \leq \frac{X_{v_n}^i(u_i, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot)}{2}$$

Yukarıdaki iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta(v_i, u_i)} \int_{u_i}^{u_i + \eta(v_i, u_i)} [X_{u_n}^i(t_i, \cdot) + X_{v_n}^i(t_i, \cdot)] dt_i \\ & \leq \frac{X(\mathbf{u}, \cdot) + X(\mathbf{v}, \cdot) + X_{u_n}^i(v_i, \cdot) + X_{v_n}^i(u_i, \cdot)}{2}, \end{aligned}$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizliğin her tarafının 1'den  $n$ 'e kadar toplamı alınarak (4.4.15) elde edilir.

## **BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ**

Bu tezde literatürde ilk defa çok boyutlu stokastik süreçlerin konveks, s-konveks, harmonik konveks ve preinveks sınıfları tanıtılmış ve bu süreçler ile ilgili Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu bağlamda çok boyutlu stokastik süreçlerin diğer sınıfları için benzer çalışmalar yapılabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Euclid, The Thirteen Books of Elements III, (Trans: Thomas L. Heath), 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908. [www.google.com](http://www.google.com)., Erişim Tarihi: 05.10.2017.
- [2] Berggren, J.L., A lacuna in book i of archimedes sphere and cylinder. *Historia Mathematica*, 4, 1-5, 1977.
- [3] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. Math Pures Appl.*, 58, 171-215, 1893.
- [4] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., & Polya, G. *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge U.P., Cambridge, 1877-1947, 1988.
- [5] Beckenbach, E.F., Bellman, R., *Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, ([Hungarian Language Ignored]) 276 Seiten, Preis 1 r. 9 k, 1961.
- [6] Mitrinović, D.S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York, 1970.
- [7] Pecaric, J., *Konveksne funkcije: nejednakosti*, Naucna knjiga, Beograd, 243, 1987.
- [8] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London, 1991.
- [9] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [10] Pachpatte, B.G., *Mathematical Inequalities*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.
- [11] Niculescu, C., Persson, L.E., *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, Springer Science Business Media, Inc, 2006.

- [12] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., Selected topics on Hermite-Hadamard inequality and applications, Victoria University, Melbourne, 2000.
- [13] Josip, E., Pecaric, J.E., Proschan, F., Thong Y.L., Convex Functions, Parital Orderings, and Statistical Applications Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press, 1992.
- [14] Toader, G., Some generalizations of the convexity. Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization Cluj-Napoca: University of Cluj-Napoca, 329-338, 1985.
- [15] İşcan İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 43(6), 935-942, 2014.
- [16] Okur, N., Yalçın, F. B., Two-dimensional operator harmonically convex functions and related generalized inequalities. Turkish Journal of Science, 4(1), 30-28, 2019.
- [17] İşcan, İ., Hermite-Hadamard inequalities for  $p$ -convex functions. International Journal of Analysis and Applications, 11(2), 137-145, 2016.
- [18] Varošanec, S., On  $h$ -convexity. J. Math. Anal. Appl., 326(1), 303-311, 2007.
- [19] Fang, Z.B., Shi, R., On the  $(p, h)$ -convex function and some integral inequalities. J. Inequal. Appl., 45, 16, 2014.
- [20] Hudzik, H.L., Some remarks on  $s$ -convex functions. Aequ. Math., 48, 100-111, 1994.
- [21] Dragomir, S., On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for  $m$ -convex functions. Tamkang Journal of Mathematics, 33(1), 45–55, 2002.
- [22] Ngoc, N.P.N., Vinh, N.V., Hien, P.T.T., Integral inequalities of Hadamard type for  $r$ -convex functions. International Mathematical Forum, 4(35), 1723-1728, 2009.
- [23] Antczak, T., A new method of solving nonlinear mathematical programming problems involving  $r$ -invex functions. J. Math. Anal. Appl., 311, 313-323, 2005.
- [24] Youness, E.A., E-convex sets, E-convex functions and E-convex programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 102(2): 23, 439-450, 1999.

- [25] Cristescu, G., Hadamard Type Inequalities for  $\varphi$ -Convex Functions. Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering, C-Rom Edition, III (XIII), 2004.
- [26] Set, E., Sarikaya, M.Z., Akdemir, A.O., Hadamard type inequalities for  $\varphi$ -convex functions on the co-ordinates. Tbilisi Mathematical Journal, 7(2), 51-60, 2014.
- [27] Yalçın, F.B., On some generalized inequalities for two-dimensional  $\varphi$ -convex functions. Journal of Contemporary Applied Mathematics, 9(1), 88-102, 2019.
- [28] Mohan S.R., Neogy, S.K., On invex sets and preinvex functions. J. Math. Anal. Appl., 189, 901-908, 1995.
- [29] Weir, T., Mond, B., Preinvex functions in multiple bijective optimizations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 136, 29-38, 1998.
- [30] Yang, X.M., Li, D., On properties of preinvex functions. J. Math. Anal. Appl., 256, 229-241, 2001.
- [31] Noor, M.A., On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions. J. Inequal. Pure Appl. Math., 8(3), 1-6, 2007.
- [32] Mishra, S.K., Giorgi, G., Invexity and Optimization. Vol. 88 of Nonconvex optimization and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [33] Okur, N., Yalçın, F.B., Karahan, V., Some Hermite Hadamard type integral inequalities for multidimensional preinvex functions. Turkish Journal of Equalities 3(1), 54-63, 2019.
- [34] Alomari, M.W., A generalization of Hermite–Hadamard’s inequality. Kragujevac J. Math., 41(2), 313-328 (2017).
- [35] Feller, W., On semi-Markov processes, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 51(4), 130-145, 1964.
- [36] Feller, W., An Introduction to Probability and Its Applications II, J. Willey, New York, 1971.
- [37] Levy, J.B., Taqqu, M.S., On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards. Ann. Sci. Math. Que., 11, 95-110, 1987.
- [38] Levy, J.B., Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli 6(1), 23-44, 2000.

- [39] Skohorod, A.V., Random processes with independent increments, Nauka, Moskow, 1967.
- [40] Gihman, I.I., Skorohod, AV., Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [41] Ross, S.M., Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons, 1996.
- [42] Ross, S.M., Introduction to Probability Models, Academic Press, New York, 1993.
- [43] Shirayayev, A.N., Probability, Statistics, Random Processes I-II, Moscow State University Press, 1973-1974.
- [44] Smith, W.L., Asymptotic renewal theorems. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), 64: (1954) 9–48.
- [45] Smith, W.L., Renewal theorem and its ramifications, Journal Roy. Statist. Soc., 20 (1958) 243-302.
- [46] Smith, W.L., On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.
- [47] Smith, W.L., Some peculiar semi- Markov processes, Proc. 5-Th. Berkelly Symp. Mathematical Statistic and Probability, 2, 2 (1965-1966) 255-263.
- [48] Spitzer, F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, (1956) 323-339.
- [49] Çınlar, E., Some joint distribution for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1 (1968).
- [50] Çınlar, E., Markov renewal theory, Advances in Applied Probability, 1 (1975) 123-187.
- [51] Çınlar, E., Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [52] Takacs, L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2<sup>nd</sup> ed, Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing Co. XI, 1977.
- [53] Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z., Okur Bekar, N., On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1, (2008) 41-50.

- [54] Khaniyev T.A., Küçük Z., Okur B., N., On the distributions of a renewal reward process and its additive functional, *Mathematical and Computational and Applications*, 13 (1), 41-50, 2008.
- [55] Aliyev, R., *Stokastik Süreçler Teorisi*, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2010.
- [56] Aliyev, R., Khaniyev T.A., Okur B., N., Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance”, *Theory of Stochastic Processes*, 15 (31) 2, 42-53, 2009.
- [57] Okur B., N., *Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi*, Yüksel Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.
- [58] Okur B., N., *Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi*, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.
- [59] Okur B., N., Aliyev R.T., Khaniyev T., Asymptotic Expansions for a Renewal-reward Process with Weibull Distributed Interference of Chance, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 1(2), 200-2011, 2013.
- [60] Okur B., N., Aliyev R., Khaniyev T.A., Three-term asymptotic expansion for the moments of the ergodic distribution of a renewal-reward process with gamma distributed interference of chance. In: A. Ashyralyev, A. Lukashov (eds.), *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012)*, AIP Conference Proceedings Book, 1470, p. 207-210, 2012.
- [61] Nikodem, K., On convex stochastic processes. *Aequat. Math.* 20, 184-197, 1980.
- [62] Skowronski, A., On some properties of J-convex stochastic processes. *Aequat. Math.*, 44, 249-258, 1992.
- [63] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, 83, 143-151, 2012.
- [64] De la Cal, J., Carcamo, J., Multidimensional Hermite-Hadamard inequalities and the convex order, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, 248-261, 2006.
- [65] Sarikaya, M.Z., Yaldiz H., Budak H., Some integral inequalities for convex stochastic processes, *Acta Math Univ Comenianae*, LXXXV:155-164, 2016.
- [66] Tomar, M., Set, E., Okur B., N., On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly-log convex stochastic processes. *The Journal of Global Engineering Studies*, 1(2), 53-61, 2014.

- [67] Karahan, V., Okur, N., Hermite-Hadamard type inequalities for convex stochastic processes on n-coordinates, Turkish Journal Mathematics and Computer Science, 10, 256-262, 2018.
- [68] Okur, N., İşcan, İ., Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex stochastic processes. International Journal of Economics and Administrative Studies, 11, 281-292, 2018.
- [69] Okur, N., İşcan, İ., Usta, Y., Some integral inequalities for harmonically convex stochastic processes on the coordinates. Advanced Math. Models & Applications, 3(1), 63-75, 2018.
- [70] Okur, N., İşcan, İ., Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex stochastic processes. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 9(2), 148-153, 2019.
- [71] Barraez, D., Gonzalez, L., Merentes, N., Moros, A.M., On h-convex stochastic process. Mathematica Aeterna, 5(4), 571-581, 2015.
- [72] Yüksek D., E., Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler, Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun Üniversitesi, 2018.
- [73] Set, E., Tomar M., Maden S., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(6), 202-207, 2014.
- [74] Okur, N., Karahan, V., Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for s-convex stochastic processes on n-coordinates, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 68(2), 1-16, 2019.
- [75] Hernández, J.E., Gomez J.F., Hermite Hadamard type inequalities for stochastic processes whose second derivatives are  $(m, h_1, h_2)$ -convex using Riemann-Liouville fractional integral. Revista Matua, Universidad del Atl'antico, 5(1), 13-28, 2018.
- [76] Ul-Haq, W., Rehman, N., Al-Hussain, Z.A., Hermite-Hadamard type inequalities for r-convex positive stochastic processes. Journal of Taibah University for Science, 13:1, 87-90, 2019.
- [77] Bodur, B., Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve  $\varphi$ -Konveks Fonksiyonlar, Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2016.
- [78] Sarikaya, M.Z., Kiriş, M.E., Çelik, N., Hermite-Hadamard type inequality for  $\varphi_h$ -convex stochastic processes. AIP Conference Proceedings, 1726(1), 020076, 2016.

- [79] Akdemir, G.H., Okur B., N., İşcan, İ., On preinvexity for stochastic processes, statistics. Journal of the Turkish Statistical Association, 7(1), 15-22, 2014.
- [80] Okur, B., N., Akdemir, G.H., İşcan, İ., Some Extensions of Preinvexity for Stochastic Processes. Comp. Analysis, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, New York, 155, 259-270, 2016.
- [81] Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. ISBN 975-442-035-1.
- [82] Karahan V., Okur, N., New Integral Inequalities of Hadamard's for Harmonically Convex Stochastic Processes on n-coordinates, Prof. Dr. M. Bayram, Assoc. Prof. Dr. A. Sezer (eds.), 8<sup>th</sup> International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March 2019, Book of Proceedings, p.154-158, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.
- [83] Usta, Y., Stokastik Süreçler için Koordinatlarda Bazı Konvekslik Çeşitleri ve Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler, Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun Üniversitesi, 2018.
- [84] Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer functionen in topologischen linearen Raumen. Publications Deinstitut Mathematique, 23(37): 13-20.

## ÖZGEÇMİŞ

Vildan KARAHAN 1980 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1998 yılında Çemberlitaş Kız Lisesinden mezun oldu. 1999 yılında başladığı İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldu. 2003–2005 yılları arasında Marmara Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisansını bitirdi. 2017 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2003 yılından beri aktif çalışma hayatı vardır. Halen Özel Giresun Uğur Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. İyi seviyede İngilizce bilmektedir. Evli ve 1 çocuk annesidir.

## YAYINLAR

### Uluslararası diğer hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

- 1- **Karahan, V.**, Okur, N., **2018**, Hermite-Hadamard Type Inequalities for Convex Stochastic Processes On n-Coordinates, Turkish Journal Mathematics and Computer Science, 10, 256-262.
- 2- Okur, N., **Karahan, V.**, **2019**, (E-SCI), (ULAKBİM), Some Integral Inequalities of the Hermite-Hadamard Type for s-Convex Stochastic Processes on n-coordinates, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 68(2), 1959-1973.
- 3- Okur, N., Yalçın, F.B., **Karahan, V.**, **2019**, Some Hermite Hadamard Type Integral Inequalities for Multidimensional Preinvex Functions, Turkish Journal of Inequalities, 3(1), 54-63.

### Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan tam metin olarak basılan bildiriler

- 1- **Karahan V.**, Okur, N., New Integral Inequalities of Hadamard's for Harmonically Convex Stochastic Processes on n-coordinates, Prof. Dr. M. Bayram, Assoc. Prof. Dr. A. Sezer (eds.), 8<sup>th</sup> International Conference on Applied Analysis and

Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March **2019**, Book of Proceedings, p.154-158, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.

**Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan özet olarak basılan bildiriler**

1- **Karahan V.**, and Okur, N., Some Integral Inequalities of the Hermite-Hadamard Type for s-Convex Stochastic Processes on n-co-ordinates, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), 27-29 June **2018**, Book of Abstracts, p. 806, Ordu University, Ordu, Turkey.

2- **Karahan, V.**, Okur, N., and İşcan, İ., Hermite-Hadamard Type Inequalities for Convex Stochastic Processes on the n-co-ordinates, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), 27-29 June **2018**, Book of Abstracts, p.777, Ordu University, Ordu, Turkey.

3- **Karahan V.**, Okur, N., Some Generalized Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities for  $\varphi$ -Convex Stochastic Processes on n-coordinates, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March **2019**, Book of Abstracts, p.201, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.

4- **Karahan V.**, Okur, N., New Integral Inequalities of Hadamard's for Harmonically Convex Stochastic Processes on n-coordinates, 8<sup>th</sup> International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March **2019**, Book of Abstracts, p.202, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.

5- Okur, N., **Karahan V.**, Hermite-Hadamard Type Inequalities for Multi-dimensional Preinvex Stochastic Processes, Karadeniz 1. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, 15-17 March **2019**, Book of Abstracts, p.218-219, Giresun, Turkey.

6- Yalçın, F.B., Okur, N., **Karahan, V.**, New Generalized Inequalities for Preinvex Functions on the Coordinates in a Rectangle from the Plane, 2<sup>th</sup> International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS-2019), 27-30 April **2019**, Book of Abstracts, p.84, Antalya, Turkey.

7- Yalçın, F.B., Okur, N., **Karahan, V.**, Multidimensional General Preinvexity for Functions and associated Hadamard's Inequalities, 2<sup>th</sup> International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS-2019), 27-30 April **2019**, Book of Abstracts, p.71, Antalya, Turkey.

8- Yalçın, F.B., Okur, N., **Karahan, V.**, Hermite-Hadamard Inequalities for Multidimensional  $\varphi$ -Convex Functions, 2<sup>th</sup> International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS-2019), 27-30 April **2019**, Book of Abstracts, p.70, Antalya, Turkey.

