

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SONLU OLARAK ÜRETİLEN ABELYEN GRUPLAR**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Saniye Canan KARAARSLAN**

**Danışman  
Prof. Dr. Himmet CAN**

**Ağustos 2014  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Saniye Canan KARAARSLAN

İmza:



## YÖNERGEYE UYGUNLUK

Sonlu Olarak Üretilen Abelyen Gruplar adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



Tezi Hazırlayan

Saniye Canan KARAARSLAN



Danışman

Prof. Dr. Himmet CAN



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında Saniye Canan KARAARSLAN tarafından hazırlanan “Sonlu Olarak Üretilen Abelyen Gruplar” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

20 .08. 2014

**JÜRİ:**

Danışman : Prof. Dr. Himmet CAN



Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN



Üye : Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU



**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitümüz Yönetim Kurulunun 02/09/2014... tarih ve 2014/39-02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

03.09.2014.



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kazım KEŞLİOĞLU 4.

## SONLU OLARAK ÜRETİLEN ABELYEN GRUPLAR

**Saniye Canan KARAARSLAN**  
**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2014**  
**Danışman: Prof. Dr. Himmet CAN**

### ÖZET

Bu tezin temel amacı sonlu olarak üretilen Abelyen grupların yapısını incelemektir. Bunun için sadece toplamsal Abelyen grupları göz önüne alıyoruz. Bu durumda hatırlatalım ki bütün alt gruplar normaldir.

Bu tezde, bir Abelyen grubun sonlu sayıda bağıntıyı esas alan sonlu sayıda üreteçler tarafından başarılı bir şekilde belirlenebildiğini gösteriyoruz.

Bu tez üç bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, grup teorisinin bazı temel bilgileri verilmektedir.

İkinci bölümde, sonlu üretilen serbest Abelyen grupları ve sonlu üretilen Abelyen grupları inceliyoruz. Sonlu üretilen Abelyen gruplar için bir temel teorem veriyoruz.

Üçüncü bölümde, verilen bir sonlu üretilen Abelyen grubun değişmezlerini, temel bölenlerini ve parçalanma tekniğini inceliyoruz. Temel teoremin ispatında kullanılan yöntemler devir toplamlarını belirlemek için bize doğrudan pratik bir metot önermemektedir. Bu nedenle burada bizim amacımız, somut durumlarda problemi çözmek için sistematik bir yöntem belirlemektir.

**Anahtar Kelimeler:** Abelyen gruplar, değişmezler, üreteçler, ayrıştırılmalar

## FINITELY GENERATED ABELIAN GROUPS

**Saniye Canan KARAARSLAN**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**M. Sc. Thesis, August 2014**

**Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN**

### ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study the structure of finitely generated Abelian groups. For this we consider only the additive abelian groups. We recall that, in this case, all subgroups are normal.

In this thesis, we show that the structure of an Abelian group can be satisfactorily determined provided that the group is generated by a finite number of elements which are subject to a finite number of relations.

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some basic knowledge of group theory is given.

In the second chapter, we study finitely generated free Abelian groups and finitely generated Abelian groups. We give a basic theorem for finitely generated Abelian groups.

In the third chapter, we examine the invariants, elementary divisors and the technique of decomposition of a given finitely generated Abelian group. The arguments used in the proof of the basic theorem do not immediately lead to a practical method for determining the cyclic summands. Therefore, here our aim is to describe a systematic procedure for solving the problem in concrete cases.

**Keywords:** Abelian groups, invariants, generators, decompositions

## İÇİNDEKİLER

### SONLU OLARAK ÜRETİLEN ABELYEN GRUPLAR

	<u>Sayfa</u>
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI.....	iii
KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iv
ÖNSÖZ .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
<b>GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>

## 1. BÖLÜM

### GRUPLA İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

## 2. BÖLÜM

### SONLU OLARAK ÜRETİLEN ABELYEN GRUPLAR

2.2. Sonlu Olarak Üretilen Serbest Abelyen Gruplar .....	18
2.3. Sonlu Olarak Üretilen Abelyen Gruplar .....	24

### 3. BÖLÜM

#### İNVARİYANTLAR, TEMEL BÖLENLER VE PARÇALANMANIN TEKNİĞİ

3.1 İnvaryanlar ve Temel Bölenler .....	28
3.2 Parçalanmanın Tekniği.....	36
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ .....	42

## GİRİŞ

Bu çalışmada amacımız sonlu olarak üretilen abelyen grupların nasıl inşa edildiğini incelemektir. Burada ele alacağımız gruplar toplamsal gruplar olacaktır. Bu gruplar için sonlu üreteçler seçilerek bu grupların nasıl inşa edildiği gösterilecek, üreteç cümleleri arasındaki ilişkiler ortaya konulacaktır. Daha sonra bu kavramlar sonlu olarak üretilen abelyen gruplara genişletilecektir. Burada inşa yönteminin bir vektör uzayı inşa yöntemiyle benzer özellikleri ilk görünüş olarak vardır, fakat burada izlenen yöntemler tamamen farklılıklar arz etmektedir.

Yukarıda gösterilen hedeflere ulaşabilmek için elbette ilk önce grup kavramı tanıtılmalı ve grupların temel özelliklerinden bahsedilmelidir. Bu yöndeki adımlar tezin birinci bölümünde atılmıştır; yani grup kavramı, alt grup kavramı, kosetler, Lagrange teoremi, grup homomorfizmi ve birinci izomorfizm teoremi gibi temel konular üzerinde bu bölümde durulmuştur.

Verilen bir sonlu üretilen  $A$  Abelyen grubunun sonlu ve sonsuz devir gruplarından mürekkep bir devir grupları setinin bir direkt toplamı olarak yazılabildiğini göstermek tezin ikinci bölümünün ana konusudur. Yani daha sarıh bir ifade ile her sonlu üretilen  $A$  Abelyen grubu  $r$  tane sonsuz ve  $k$  tane sonlu devir gruplarının bir direkt toplamı olarak yazılabildiği bu bölümde gösterilmiştir.

İkinci bölümde verilen teorik inşa, sonlu üretilen bir Abelyen grubun devir toplamlarını belirlemek için doğrudan doğruya pratik bir yöntem içermez. Dolayısıyla, tezimizin son bölümü olan üçüncü bölümde somut durumlarda problemin çözümü için sistematik bir yöntem önerilmekte ve bu yöntem örneklerle anlaşılır kılınmaktadır.

Bu çalışmanın önemi, sonlu olarak üretilen abelyen gruplar için bir temel teorem vermek ve torsiyon alt gruplarını tanıtmaktır. Bu çalışmada kullanılan metotlar

diğer gruplara da uygulanabilir. Elbette, unutulmamalıdır ki bu sadece bir inceleme çalışması olup konuya herhangi bir yenilik getirmemektedir.

## BÖLÜM 1

### GRUPLA İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde grup kavramı tanıtılacak ve bir grubun temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Bu bölümde kullandığımız temel kaynaklar [1,2,3,5] dir.

**Tanım 1.1.1.**  $A$  boş olmayan bir küme olmak üzere,  $A \times A$  dan  $A$  ya tanımlı bir

$$* : A \times A \rightarrow A, (a,b) \rightarrow a * b$$

fonksiyonuna  $A$  üzerinde bir *ikili işlem* denir. Eğer  $*$ ,  $A$  üzerinde bir ikili işlem ise  $(A, *)$  ifadesine  $A$  da bir *cebirsel yapı* denir.

**Tanım 1.1.2.**  $G$  boş olmayan bir küme ve  $G$  üzerinde bir  $*$  işlemi tanımlı olsun. Eğer,  $*$  işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani,

$\forall a,b,c \in G$  için

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

ise,

$\forall a \in G$  için

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde bir  $e \in G$  varsa ( $e$  ye  $G$  nin birim elemanı denir),

$\forall a \in G$  için

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak biçimde bir  $a' \in G$  varsa ( $a'$  ne  $a$  nın bir ters elemanı denir), o zaman  $(G,*)$  sıralı ikilisine bir *grup* denir.

Eğer  $(G,*)$  grubunda,  $\forall a,b \in G$  için

$$a * b = b * a$$

ise, bu gruba bir *abelyen(değişmeli) grup* denir.

Genellikle grup çarpımsal ise işlem olarak  $ab$  notasyonunu, grup toplamsal ise işlem olarak  $a + b$  notasyonunu kullanacağız. Gruplar ile ilgili özellikler incelenirken, aksi durum belirtilmedikçe, grup çarpımsal olarak ele alınacaktır. Bir  $(G,*)$  grubu kısaca  $G$  ile gösterilecektir.

**Önerme 1.1.3.**  $G$  bir grup ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- 1)  $G$  nin bir tek birim elemanı vardır.
- 2)  $\forall a \in G$  elemanının bir tek inversi(ters elemanı) vardır.
- 3)  $\forall a \in G$  için  $(a^{-1})^{-1} = a$  dir.
- 4)  $\forall a,b \in G$  için  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  dir.
- 5)  $a,b,x \in G$  için  $ax = bx$  ya da  $xa = xb$  ise  $a = b$  dir.

**İspat.**

1)  $e$  ve  $f$ ,  $G$  nin iki birim elemanı olsun. Bu takdirde,

$$ef = f \quad (e \text{ birim eleman olduğundan})$$

$$ef = e \quad (f \text{ birim eleman olduğundan})$$

$$f = e \text{ dir. Yani birim eleman tektir.}$$

2)  $a \in G$  için  $a'$  ve  $a''$ ,  $a$  nin inversleri olsun. Bu durumda

$$a' = ea' = (a''a)a' = a''(aa') = a''e = a'' \text{ dir.}$$

3)  $a \in G$  olsun.  $a^{-1}a = aa^{-1} = e$  olduğundan  $a^{-1}$  in tersi  $a$  dir, yani

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ dir.}$$

4)  $a,b \in G$  olsun.  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$  dir.

Benzer şekilde,  $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$  olup

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \text{ dir.}$$

5)  $a, b, x \in G$  olsun.  $ax = bx$  denklemini sağdan  $x^{-1}$  ile çarpılırsa  $a = b$  elde edilir. Benzer şekilde,  $xa = xb$  denklemini soldan  $x^{-1}$  ile çarpılırsa  $a = b$  elde edilir.

**Tanım 1.1.4.**  $G$  bir grup olsun. Eğer  $\forall a \in G$  için,  $ea = a$  olacak şekilde bir  $e \in G$  varsa,  $e$  ye  $G$  nin *sol birim elemanı*, eğer  $\forall a \in G$  için,  $ae = a$  olacak şekilde bir  $e \in G$  varsa,  $e$  ye  $G$  nin *sağ birim elemanı* denir.

**Tanım 1.1.5.**  $G$  bir grup olsun. Eğer  $\forall a \in G$  için,  $a'a = e$  olacak şekilde bir  $a' \in G$  varsa,  $a'$  ye *sol invers (ters eleman)* denir. Eğer  $\forall a \in G$  için,  $aa' = e$  olacak şekilde bir  $a' \in G$  varsa,  $a'$  ye *sağ invers (ters eleman)* denir.

**Tanım 1.1.6.**  $(G, *)$  bir grup ve  $A$ ,  $G$  nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer  $\forall a, b \in A$  için,  $a * b \in A$  ise, o zaman  $A$ ,  $G$  nin  $*$  işlemine göre kapalıdır denir.

**Tanım 1.1.7.**  $G$  bir grup ve  $H$ ,  $G$  nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer  $H$ ,  $G$  nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise, o zaman  $H$  ye  $G$  nin bir *alt grubu* denir ve  $H \leq G$  ile gösterilir.

Her  $G$  grubu,  $\{e\}$  ve  $G$  alt gruplarına sahiptir. Bu alt gruplara  $G$  nin *aşık alt grupları* denir. Bir  $G$  grubunun,  $\{e\}$  ve  $G$  den farklı alt gruplarına da  $G$  nin *gerçek alt grupları* denir.

**Önerme 1.1.8.**  $G$  bir grup ve  $H$ ,  $G$  nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. O zaman

$$H \leq G \text{ dir} \Leftrightarrow \forall h_1, h_2 \in H \text{ için } h_1 h_2^{-1} \in H \text{ dir.}$$

**İspat.**  $\Rightarrow$ : Aşıkardır.

$\Leftarrow$ :  $\forall h_1, h_2 \in H$  için  $h_1(h_2)^{-1} \in H$  olsun. İşlem  $G$  üstünde birleşmeli olduğundan,  $H$  üstünde de birleşmelidir. Eğer hipotezde  $h_2$  yerine özel olarak  $h_1$  alınırsa

$$h_1(h_1)^{-1} = e \in H$$

olur. O halde,  $H$  nin birim elemanı vardır. Eğer hipotezde  $h_1$  yerine  $e$  alınırsa,  $\forall h_2 \in H$  için,

$$e(h_2)^{-1} = (h_2)^{-1} \in H$$

dir. Böylece  $H \leq G$  dir.

**Tanım 1.1.9.**  $G$  bir grup,  $x \in G$  ve  $A, B \subseteq G$  olsun. Bu durumda,

$$1) AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

$$2) A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

$$3) xA = \{xa \mid a \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 1.1.10.**  $G$  bir grup ve  $a \in G$  olsun.  $G$  nin eleman sayısına (kardinalitesine),  $G$  grubunun derecesi (mertebesi) denir ve  $|G|$  ile gösterilir. Derecesi sonlu olan bir gruba *sonlu grup*, derecesi sonsuz olan bir gruba da *sonsuz grup* denir. Eğer  $a^t = e$  olacak şekilde bir  $t$  pozitif tamsayısı varsa, bu  $t$  pozitif tamsayılarının en küçüğüne  $a$  nın derecesi denir ve  $|a|$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.11.**  $G$  bir grup olmak üzere,  $G$  nin merkezi  $Z(G)$  ile gösterilir ve

$$Z(G) = \{a \in G \mid \forall g \in G \text{ için } ag = ga\}$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 1.1.12.**  $p$  bir asal ve  $m > 0$  olmak üzere,  $|G| = p^m$  olacak şekilde  $G$  sonlu bir grup ise,  $0 < \mu < m$  olmak üzere,  $G$  nin merkezinin mertebesi  $p^\mu$  dir.

**Önerme 1.1.13.**  $G$  bir grup ve  $G$  nin merkezi  $Z(G)$  olmak üzere  $Z(G) \leq G$  dir.

**İspat.**  $\forall a_1, a_2 \in Z(G)$  olsun.  $\forall g \in G$  için

$$a_1g = ga_1 \quad \text{ve} \quad a_2g = ga_2$$

dir.

$$a_2g = ga_2 \Rightarrow a_2^{-1}(a_2g)a_2^{-1} = a_2^{-1}(ga_2)a_2^{-1}$$

$$\Rightarrow ga_2^{-1} = a_2^{-1}g$$

dir.  $\forall g \in G$  için

$$\begin{aligned} (a_1a_2^{-1})g &= a_1(a_2^{-1}g) \\ &= a_1(ga_2^{-1}) \\ &= (a_1g)a_2^{-1} \\ &= (ga_1)a_2^{-1} \\ &= g(a_1a_2^{-1}) \end{aligned}$$

dir.

Öyleyse,  $a_1 a_2^{-1} \in Z(G)$  olduğundan,  $Z(G) \leq G$  dir.

**Tanım 1.1.14.**  $G$  bir grup,  $H \leq G$  ve  $a \in G$  olsun. Bu durumda

$$C(a) = \{x \in H \mid xa = ax\}$$

cümlesine  $a$  nın  $H$  de *merkezleyeni* denir.

**Tanım 1.1.15.**  $G$  bir grup ve  $H \leq G$  olsun.  $a \in G$  olmak üzere

$$a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha \mid h \in H\}$$

cümlesine  $H$  nin  $G$  de  $a$  ya göre *eşleniği* denir.

**Önerme 1.1.16.**  $G$  bir grup,  $a \in G$  ve  $H \leq G$  olmak üzere,  $a^{-1}Ha$  cümlesi  $G$  nin bir alt grubudur.

**İspat.**  $\forall x, y \in a^{-1}Ha$  için,

$$x = a^{-1}h_1a \quad (h_1 \in H)$$

$$y = a^{-1}h_2a \quad (h_2 \in H)$$

dir.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= (a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2a)^{-1} \\ &= (a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2^{-1}a) \\ &= a^{-1}h_1(aa^{-1})h_2^{-1}a \\ &= a^{-1}h_1h_2^{-1}a \end{aligned}$$

$H \leq G$  olduğundan  $h_1h_2^{-1} \in H$  dir.

Öyleyse  $xy^{-1} \in a^{-1}Ha$  dır. Dolayısıyla  $a^{-1}Ha \leq G$  dir.

**Tanım 1.1.17.**  $G$  bir grup ve  $X$ ,  $G$  nin bir alt cümlesi olsun. O zaman,  $G$  nin  $X$  i içeren bütün alt gruplarının kesişimine  $X$  tarafından üretilen alt grup denir ve  $\langle X \rangle$  ile gösterilir.  $X$  e  $\langle X \rangle$  in bir üreteç cümlesi denir. Eğer  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ise,  $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  ile gösterilir ve buna  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tarafından üretilen bir alt grup denir.

Eğer  $n = 1$  ise  $\langle x_1 \rangle$  grubuna  $x_1$  tarafından üretilen bir devirli alt grup denir.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ise  $x_i \in X$  ve  $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) olmak üzere,  $\langle X \rangle$ ,  $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  formundaki tüm sonlu çarpımlardan meydana gelir.

**Tanım 1.1.18.**  $G$  bir grup olsun. Eğer  $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$  olacak şekilde bir  $a \in G$  varsa  $G$  ye  $a$  tarafından üretilen *devirli grup* denir.

**Tanım 1.1.19.**  $G$  bir grup,  $H \leq G$  ve  $x \in G$  olsun.  $xH = \{xh \mid h \in H\}$  cümlesine  $H$  nin  $G$  deki *sol koseti* denir ve  $H$  nin  $G$  deki tüm sol kosetlerinin cümlesi  $G/H$  ile gösterilir.  $Hx = \{hx \mid h \in H\}$  cümlesine  $H$  nin  $G$  deki *sağ koseti* denir ve  $H$  nin  $G$  deki tüm sağ kosetlerinin cümlesi  $H/G$  ile gösterilir.

Kosetlerle ilgili tanım ve teoremleri sol kosetler üzerinden inceleyeceğiz.

**Tanım 1.1.20.**  $G$  bir grup ve  $H \leq G$  olsun. Her bir  $x \in G$  için,  $xH$  sol kosetindeki  $x \in G$  elemanına  $H$  nin  $G$  deki *sol koset temsilcisi* denir.

**Önerme 1.1.21.**  $G$  bir grup,  $H \leq G$  ve  $x, y \in G$  olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

- 1)  $xH = yH$
- 2)  $y \in xH$
- 3)  $y = xh$  olacak şekilde bir  $h \in H$  elemanı vardır.
- 4)  $x^{-1}y \in H$

**İspat.**  $1 \Rightarrow 2$ :  $xH = yH$  olsun.  $e \in H$  ve  $H \leq G$  olduğundan,

$$y = ye \in \{yh \mid h \in H\} = yH$$

dır. Dolayısıyla,  $xH = yH$  olduğundan  $y \in xH$  dır.

$2 \Rightarrow 3$ :  $y \in xH = \{xh \mid h \in H\}$  olduğundan  $y = xh$  olacak şekilde bir  $h \in H$  vardır.

$3 \Rightarrow 4$ :  $y = xh$  olacak şekilde bir  $h \in H$  mevcut olsun. Denklemi soldan  $x^{-1}$  ile çarparsak,

$$x^{-1}y = x^{-1}(xh) = h \in H$$

elde edilir.

$4 \Rightarrow 1$ :  $x^{-1}y \in H$  olsun.  $H$  bir grup olduğundan,

$$(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H$$

dır. Şimdi  $g \in yH$  olsun. Bu durumda,  $g = yh$  olacak şekilde bir  $h \in H$  mevcuttur.

$k = x^{-1}yh \in H$  dır. Böylece  $g = xk \in xH$  olup,  $yH \subseteq xH$  dır.  $xH \subseteq yH$  da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece,

$$xH = yH$$

elde edilir.

**Sonuç 1.1.22.**  $H \leq G$  ve  $x \in G$  olsun. Bu durumda,

$$x \in H \Leftrightarrow xH = H = Hx$$

dir.

**Önerme 1.1.23.**  $H, K \leq G$  olsun.  $HK = KH$  ise,  $HK \leq G$  dir.

**İspat.**  $e \in H$  ve  $e \in K$  olup  $e = ee \in HK$  dir. Dolayısıyla  $HK \neq \emptyset$  dir.  $x \in HK$  olsun. O halde,  $x = hk$  olacak şekilde  $h \in H$  ve  $k \in K$  vardır.  $H, K \subseteq G$  ve  $G$  bir grup olduğu için  $x \in G$  dir. Böylece  $HK \subseteq G$  dir. Şimdi  $x, y \in HK$  olsun.  $HK$  nın tanımı gereğince,  $x = h_1k_1$  ve  $y = h_2k_2$  olacak şekilde  $h_1, h_2 \in H$  ve  $k_1, k_2 \in K$  elemanları vardır.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \\ &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1k_1h_2^{-1}k_2^{-1} \quad (HK = KH \text{ olduğundan}) \\ &= h_1h_2^{-1}k_1k_2^{-1} \quad (HK = KH \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

$H, K \leq G$  olduğu için  $h_1h_2^{-1} \in H$  ve  $k_1k_2^{-1} \in K$  dir. Bu nedenle,

$$xy^{-1} = h_1h_2^{-1}k_1k_2^{-1} = (h_1h_2^{-1})(k_1k_2^{-1}) \in HK$$

dir. Böylece  $HK \leq G$  dir.

**Önerme 1.1.24.**  $H \leq G$  ve  $x, y \in G$  olsun.  $xH \cap yH \neq \emptyset$  ise  $xH = yH$  dir.

**İspat.**  $xH \cap yH \neq \emptyset$  olsun. Bu durumda  $g \in xH \cap yH$  olacak şekilde en az bir  $g \in G$  elemanı vardır. Buradan  $g \in xH$  ve  $g \in yH$  dir. Önerme 1.1.21 den,  $gH = xH$  ve  $gH = yH$  dir. Dolayısıyla,  $xH = yH$  dir.

**Sonuç 1.1.25**  $H \leq G$  ve  $x, y \in G$  olsun.  $xH \neq yH$  ise  $xH \cap yH = \emptyset$  dir.

**Önerme 1.1.26.**  $H \leq G$  ve  $x \in G$  olsun.  $f(h) = xh$  ile tanımlı

$$f : H \rightarrow xH$$

fonksiyonu birebir ve örtendir. Böylece,  $H$  ile  $xH$  aynı kardinaliteye sahiptir.

**İspat.**  $h_1, h_2 \in H$  için  $f(h_1) = f(h_2)$  olsun. Bu durumda  $xh_1 = xh_2$  olup sadeleştirme kuralından  $h_1 = h_2$  dir. Böylece  $f$  birebirdir.  $g \in xH$  olsun. Bu durumda Önerme 1.1.21 den ,  $g = xh$  olacak şekilde bir  $h \in H$  vardır.  $f$  fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$g = xh = f(h)$$

olup,  $f$  örtendir.

**Tanım 1.1.27.**  $R$  , boştan farklı bir  $S$  cümlesi üzerinde bir bağıntı olsun. Bu durumda,

- 1) Her  $a \in S$  için  $aRa$  ise  $R$  ye *yansımali*,
- 2)  $aRb$  iken  $bRa$  ise  $R$  ye *simetrik*,
- 3)  $aRb$  ve  $bRc$  iken  $aRc$  ise  $R$  ye *geçişmeli* denir.

Eğer,  $R$  bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli ise, bu durumda  $R$  ye  $S$  cümlesi üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

**Tanım 1.1.28.** “ $\sim$ ” ,  $S$  üzerinde bir denklik bağıntısı ve  $x \in S$  olsun.  $x$  i içeren  $\{y \in S \mid y \sim x\}$  cümlesine  $x$  in *denklik sınıfı* denir ve bu cümle  $C(x)$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 1.1.29.** “ $\sim$ ”, bir  $S$  cümlesi üzerinde denklik bağıntısı olsun. Bu durumda, bu denklik bağıntısı sonucu elde edilen denklik sınıflarının ailesi,  $S$  nin bir parçalanmasıdır. Yani, denklik sınıfları, birleşimleri  $S$  yi veren ve ikişer ikişer ayrık olan cümlelerdir.

**Önerme 1.1.30.**  $H \leq G$  olsun.  $G$  üzerinde bir “ $\sim$ ” bağıntısı,  $x, y \in G$  için,

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda “ $\sim$ ”  $G$  üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

**Tanım 1.1.31.**  $G$  bir grup ve  $H \leq G$  olsun.  $H$  nin  $G$  deki farklı sol(sağ) kosetlerinin sayısına  $H$  nin  $G$  deki *indeksi* denir ve  $[G : H]$  ile gösterilir.

**Teorem 1.1.32. (Lagrange Teoremi)**  $G$  sonlu bir grup ve  $H \leq G$  olsun. Bu durumda,

$$|G| = [G : H]|H|$$

dir.

**İspat.**  $G$  sonlu bir grup olduğundan ,  $[G : H] < \infty$  dir.  $H$  nın  $G$  deki tüm farklı sol kosetlerinin sınıfı  $\{x_1H, \dots, x_rH\}$  olsun. O halde  $G = \bigcup_{i=1}^r x_iH$  dir. Önerme 1.1.26 dan, her bir  $1 \leq i \leq r$  için  $|x_iH| = |H|$  olduğu biliniyor.

Bu nedenle

$$|G| = \left| \bigcup_{i=1}^r x_iH \right| = \sum_{i=1}^r |x_iH| = \sum_{i=1}^r |H| = r \cdot |H| = [G : H] |H|$$

elde edilir.

**Tanım 1.1.33.**  $G$  bir grup,  $H, K \leq G$  ve  $x \in G$  olsun.

$$HxK = \{h x k \mid h \in H, k \in K\}$$

cümlesine,  $G$  de  $(H, K)$  – *double koseti* denir.

**Tanım 1.1.34.**  $G$  bir grup ve  $N \leq G$  olsun. Eğer her  $g \in G$  için

$$gNg^{-1} = N$$

ise  $N$  ye  $G$  nin bir *normal alt grubu* denir ve  $N \triangleleft G$  ile gösterilir.

Her  $G$  grubunda  $G$  ve  $\{e\}$  normal alt gruplardır.

**Önerme 1.1.35.**  $G$  bir grup ve  $N \leq G$  olsun. Buna göre aşağıdakiler birbirine denktir.

- 1)  $\forall g \in G$  ve  $\forall n \in N$  için  $gng^{-1} \in N$  dir.
- 2)  $\forall g \in G$  için  $gNg^{-1} \subset N$  dir.
- 3)  $\forall g \in G$  için  $gNg^{-1} = N$  dir.
- 4)  $\forall g \in G$  için  $gN = Ng$  dir.

**Tanım 1.1.36.**  $G$  bir grup olsun ve  $N, G$  nin bir normal alt grubu olsun.

$$G/N = \{aN \mid a \in G\}$$

cümlesi üzerinde bir çarpma işlemi şöyle tanımlansın:  $\forall aN, bN \in G/N$  için,

$$(aN)(bN) = (abN)$$

olsun. Bu işleme göre,  $G/N$  bir gruptur ve bu gruba  $G$  nin  $N$  ile *bölüm grubu* denir.

**Tanım 1.1.37.**  $G$  bir grup ve  $x, y \in G$  olsun.

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

elemanına  $x$  ve  $y$  nin *komütatörü* denir.

$$G' = gp\{[x, y] \mid x, y \in G\}$$

ise,  $G'$  grubuna da  $G$  nin *türemiş grubu* ya da *komütatör grubu* denir.

**Teorem 1.1.38.** (i)  $G'$  türemiş grubu,  $G$  nin bir normal alt grubudur ve  $G/G'$  Abelyendir.

(ii)  $G/H$  Abelyen olacak şekilde,  $H$ ,  $G$  nin herhangi bir normal alt grubu ise,  $G' \leq H$  dir.

**Tanım 1.1.39.**  $(G, \circ)$  ve  $(H, *)$  iki grup olmak üzere eğer  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  dönüşümü

$\forall x, y \in G$  için

$$\mathcal{G}(x \circ y) = \mathcal{G}(x) * \mathcal{G}(y)$$

şartını sağlarsa,  $\mathcal{G}$  ye bir *grup homomorfizmi* ya da kısaca bir *homomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.40.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  grup homomorfizmi bire bir ise  $\mathcal{G}$  ye bir *monomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.41.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  grup homomorfizmi örten ise  $\mathcal{G}$  ye bir *epimorfizm* denir.

**Tanım 1.1.42.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  grup homomorfizmi hem bire bir hem de örten ise  $\mathcal{G}$  ye bir *izomorfizm* denir ve  $G \cong H$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 1.1.43.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  grup homomorfizmi olsun. Buna göre

a)  $e_G$ ,  $G$  nin birim elemanı ve  $e_H$ ,  $H$  nin birim elemanı olmak üzere

$$\mathcal{G}(e_G) = e_H \quad \text{dir.}$$

b)  $\forall a \in G$  için,

$$\mathcal{G}(a^{-1}) = [\mathcal{G}(a)]^{-1} \quad \text{dir.}$$

**Tanım 1.1.44.**  $G$  bir grup,  $N \triangleleft G$  olmak üzere  $\mathcal{G} : G \rightarrow G/N$  ve  $\forall a \in G$  için

$$\mathcal{G}(a) = aN$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmdir. Bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.45.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  bir grup homomorfizmi olsun.

$$Ker(\mathcal{G}) = \{x \in G \mid \mathcal{G}(x) = e_H\}$$

cümlesine  $\mathcal{G}$  nin çekirdeği denir.

**Tanım 1.1.46.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  bir grup homomorfizmi olsun.

$$\text{Im}(\mathcal{G}) = \{\mathcal{G}(g) \mid g \in G\}$$

cümlesine  $\mathcal{G}$  nin görüntüsü denir.

**Önerme 1.1.47.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow H$  grup homomorfizmi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- 1)  $\text{Ker}(\mathcal{G}) \leq G$  dir.
- 2)  $\text{Im}(\mathcal{G}) \leq H$  dir.
- 3)  $\mathcal{G}$  birebirdir  $\Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{G}) = \{e_G\}$  dir.
- 4)  $\mathcal{G}$  örtendir  $\Leftrightarrow \text{Im}(\mathcal{G}) = H$  dir.

**Tanım 1.1.48.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow G$  grup homomorfizmine bir *endomorfizm* denir.

**Tanım 1.1.49.**  $\mathcal{G} : G \rightarrow G$  birebir ve örten bir grup homomorfizmi ise  $\mathcal{G}$  ye *grup otomorfizmi* denir.

**Tanım 1.1.50.**  $G$  bir grup olmak üzere,  $\forall x \in G$  için  $I(x) = x$  ile tanımlı  $I : G \rightarrow G$  dönüşümüne *birim dönüşüm* ya da *özdeş dönüşüm* denir.

**Tanım 1.1.51.**  $G$  bir grup ve  $a \in G$  olmak üzere,  $\forall x \in G$  için

$$I_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlanan

$$I_a : G \rightarrow G$$

otomorfizmine  $G$  grubunun bir *iç otomorfizmi* denir.  $G$  grubunun bütün iç otomorfizmlerinin cümlesi  $I(G)$  ile gösterilir.  $G$  değişmeli ise  $I(G) = \{I\}$  birimdir.  $G$  nin bütün otomorfizmlerinin cümlesi de  $\text{Aut}(G)$  ile gösterilir.  $\text{Aut}(G)$  fonksiyonlardaki bileşke işlemi ile bir grup meydana getirir. Bu gruba  $G$  nin *otomorfizmlerinin grubu* denir.

**Önerme 1.1.52.**  $G$  bir grup olsun. O zaman

$$I(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$$

dir.

**Tanım 1.1.53.**  $H, G$  grubunun bir alt grubu olsun. Her  $\mathcal{G} : G \rightarrow G$  otomorfizması için  $\mathcal{G}(H) \leq H$  ise  $H$  alt grubuna  $G$  nin bir *karakteristik alt grubu* denir.

**Teorem 1.1.54. (Birinci İzomorfizm Teoremi)**  $\theta : G \rightarrow G'$  bir grup homomorfizmi ve  $\text{Ker}\theta = K$  olsun.  $\phi : G/K \rightarrow \theta(G)$  ,  $\phi(Kx) = \theta(x)$  ile tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmdir. Böylece

$$G/K \cong \theta(G)$$

dir.

**Teorem 1.1.55. (İkinci İzomorfizm Teoremi)**  $G$  bir grup ve  $N \triangleleft G$  olsun.  $N \triangleleft A \triangleleft G$  olacak şekilde,  $A$  nın  $G$  nin bir normal alt grubu olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$(G/N)/(A/N) \cong G/A$$

dir.

## BÖLÜM 2

### SONLU OLARAK ÜRETİLEN ABELYEN GRUPLAR

Bu bölümde yalnızca abelyen gruplarla ilgileneceğiz. Bu bölüm için temel referanslarımız [4,7,8,10] olacaktır.

$(G,+)$  bir abelyen grup olsun.  $G$  grubu abelyen olduğundan  $G$  nin bütün alt grupları normaldir.  $G/H$  bölüm grubu,  $H+x$  ( $x \in G$ ) kosetlerinden oluşur.

**Tanım 2.1.1.**  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,  $G$  nin sonlu sayıda elemanları olmak üzere,  $G = gp\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  ise  $G$  ye  $u_1, u_2, \dots, u_n$  elemanları tarafından *sonlu olarak üretilir* denir. Burada  $u_1, u_2, \dots, u_n$  lere ise  $G$  nin *üreteçleri* denir.

$\forall x \in G$  için,  $a_i \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$$

olarak yazılır.

Şimdi verilen bir  $G$  grubunu sonlu olarak üreten iki farklı üreteç cümlesini göz önüne alalım. O halde kabul edelim ki

$$G = gp\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = gp\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (2.1)$$

olsun.

(2.1) denkleminin sağlanması için gerek ve yeter şart her bir  $u_i$  nin  $v_j$  cinsinden ve tersine her bir  $v_j$  nin  $u_i$  cinsinden yazılmasıdır ( $i=1,2,\dots,n$  ve  $j=1,2,\dots,m$ ).

Böylece  $p = (p_{ij})$  ve  $q = (q_{jk})$  katsayılar matrisi olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^m p_{ij} v_j \quad (i=1,2,\dots,n) \\ v_j &= \sum_{k=1}^n q_{jk} u_k \quad (j=1,2,\dots,m) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

denklemleri elde edilir.

(2.2) denklem sistemi  $\{u_i\}$  üreteç cümlesinden,  $\{v_j\}$  üreteç cümlesine bir *dönüşüm* olarak ifade edilir.

Aşağıdaki dönüşüm tipleri en yaygın olanlardır:

( $\alpha$ ) Üreteçler herhangi bir şekilde permütasyona uğratılabilir.

( $\beta$ ) Eğer  $i \neq j$  ise, bu taktirde  $h \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $u_i$  üreteci,  $u_i + hu_j$  üreteci ile yer değiştirebilir ve diğer bütün üreteçler aynı kalır.

( $\gamma$ ) Herhangi bir  $u_i$  üreteci,  $-u_i$  üreteci ile yer değiştirebilir.

( $\delta$ ) Eğer bir üreteç sıfır ise, o üreteç ihmal edilebilir.

**Tanım 2.1.2.** ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) ve ( $\gamma$ ) işlemlerine *elemanter dönüşüm* denir.

Şimdi ( $\beta$ ) dönüşümünün (2.2) denklemini sağladığını kontrol edelim:

Basitlik için,  $i=1$  ve  $j=2$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2, \dots, u_n\} &\rightarrow \{v_1 = u_1 + hu_2, v_2 = u_2, \dots, v_n = u_n\} \\ v_1 &= u_1 + hu_2, v_2 = u_2 \Rightarrow u_1 = v_1 - hv_2 \\ &u_2 = v_2 \\ &\vdots \\ &u_n = v_n \end{aligned}$$

dır.

Amacımıza uygun olan üreteçlerin bir cümlesini elde edinceye kadar, ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ) işlemlerini uygun sayıda tekrar edebiliriz.

Şimdi,  $X \subset G, X \neq \emptyset$  olsun.  $X \leq G \Leftrightarrow \forall x, y \in X$  için  $x - y \in X$  dir.

$$x = y \text{ için } x - x = 0 \in X,$$

$$x = 0 \text{ için } 0 - y = -y \in X,$$

$$y = -y \text{ için } x + y \in X$$

dir. Böylece  $G$  nin  $X$  alt cümlesi için tüm alt grup koşulları sağlanır.

Şimdi sadece sonlu olarak üretilen Abelyen grupları göz önüne alacağız. Burada amacımız, bu sınıftaki mümkün olan bütün tipteki grupların tam bir tasvirini izomorfizmlerine kadar vermektir. Bu da  $G$  grubunu, belli alt gruplarının direkt toplamına parçalayarak sağlanacaktır.

$H, K \leq G$  olsun.

$G = H \oplus K$  ise,  $u \in H$  ve  $v \in K$  olmak üzere,  $\forall x \in G$  elemanı

$$x = u + v \quad (2.3)$$

şeklinde ve bu yazılıştır. Böylece,

$u_1, u_2 \in H$  ve  $v_1, v_2 \in K$  olmak üzere, eğer

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \quad (2.4)$$

ise bu taktirde  $u_1 = u_2$  ve  $v_1 = v_2$  dir.

Özellikle  $u_0 \in H$  ve  $v_0 \in K$  olmak üzere,  $u_0 + v_0 = 0$  ise  $u_0 = v_0 = 0$  dir. Tersine olarak bu ifade (2.3) ün tekliğini garanti eder, çünkü, (2.4) den  $(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) = 0$  dir.

Böylece  $u_1 = u_2$  ve  $v_1 = v_2$  dir. Şimdi,

$G = H \oplus K$  yazılışını ispatlamak için,

i)  $G = H + K$  ve ii)  $H \cap K = \{0\}$

olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer  $H$  ve  $K$  aralarında asal mertebeye sahip iki sonlu alt grup ise,  $H \cap K = \{0\}$  dir.

$G$  bir çok alt grubun direkt toplamı olarak gösterildiğinde

$$G = \sum_{i=1}^r \oplus H_i = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_r \quad (2.5)$$

notasyonunu kullanırız.

i)  $G = H_1 + H_2 + \dots + H_r$

ii)  $i \neq j$  olmak üzere,  $H_i$  ve  $H_j$  nin mertebeleri aralarında asal

ise (2.5) sağlanır. Bu durumda açıktır ki,

$$H_i \cap H_1 + \dots + H_{i-1} + H_{i+1} + \dots + H_r = \{0\}$$

dir.

## 2.2 Sonlu Olarak Üretilen Serbest Abelyen Gruplar

**Tanım 2.2.1.**  $F = gp\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  olsun. Bu taktirde,  $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$  iken  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  oluyorsa,  $F$  ye *serbest abelyen grup* denir. Daha doğrusu,  $F$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_n$  tarafından *serbest üretilir* denir.

Böyle üreteçlerin sistemi, serbest üreteçlerin bir cümlesi olarak adlandırılır ve

$$F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \quad (2.6)$$

ile gösterilir. Yani,

$$F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \{x \mid x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n, a_i \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

Serbest bir abelyen grupta, sıfır haricindeki bütün elemanların mertebesi sonsuzdur. Çünkü  $x \neq 0$ ,  $x \in F$ ,  $h > 0$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  ise,  $hx = 0$  olması için  $h = 0$  veya  $x = 0$  olması gerekir.  $h > 0$  olduğundan, mecburen  $x = 0$  dır. Yani  $x \neq 0$ ,  $x \in F$  olmak üzere  $hx = 0$  olacak şekilde hiçbir  $h$  tamsayısı bulunamadığı için,  $x$  in mertebesi sonsuzdur. Dolayısıyla  $F$  nin her üreteci sonsuz mertebededir. Böylece (2.6),

$$F = gp\{u_1\} \oplus gp\{u_2\} \oplus \dots \oplus gp\{u_n\}$$

şeklinde n tane sonsuz devirli grubun bir direkt toplamı olarak yazılır.

**Örnek 2.2.2.**  $\mathbb{Z}^n = \{x \mid x = [a_1, a_2, \dots, a_n], a_i \in \mathbb{Z}\}$  olsun.  $+: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  tanımı altında  $(\mathbb{Z}^n, +)$  bir abelyen gruptur.

$u_1 = [1, 0, \dots, 0], u_2 = [0, 1, \dots, 0], \dots, u_n = [0, 0, \dots, 1] \in \mathbb{Z}^n$  olup, bu üreteçler  $\mathbb{Z}^n$  i üretirler.

Çünkü  $\forall x \in \mathbb{Z}^n$  için,

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$$

dir. Üstelik bu üreteçler serbesttir. Çünkü,

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = [c_1, c_2, \dots, c_n] = 0 = [0, 0, \dots, 0]$$

ise

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

dır.

Şimdi serbest üreteçlerin farklı cümleleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

$$F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$$

olacak şekilde  $F$  grubu  $\{u_i\}_{i=1}^n$  ve  $\{v_j\}_{j=1}^m$  serbest üreteç cümlelerine sahip olsun. Bu iki cümle arasındaki ilişkiyi inceleyelim. (2.2) denklem sisteminde  $v_j$  yerine yazılırsa,

$$u_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n p_{ij} q_{jk} u_k, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

elde edilir. Böylece  $i \neq k$  ve  $\delta_{ii} = 1$  iken  $\delta_{ik} = 0$  olacak şekilde,

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} q_{jk} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

dir. Ya da matris notasyonunda  $i_n$ ,  $n$ . dereceden birim matris olmak üzere,

$$pq = i_n \quad (2.7)$$

dir. Benzer şekilde (2.2) denklem sisteminde  $u_i$  yerine yazılırsa,

$$qp = i_m \quad (2.8)$$

elde edilir. Böylece,

$$pq = i_n \text{ ve } qp = i_m \text{ olduğundan } n = m \text{ dir.}$$

Böylece serbest üreteçlerin sayısı  $F$  için invarianttır (değişmezdir).

**Tanım 2.2.3.**  $n$ ,  $F$  nin serbest üreteçlerinin sayısı olsun.  $n$  ye  $F$  nin *rankı* adı verilir.

Yani,  $\text{rank}F = n$  dir.

**Teorem 2.2.4.**  $F$  ve  $G$  sonlu üretilen iki serbest abelyen grup olsun.

$$F \cong G \Leftrightarrow \text{rank}F = \text{rank}G$$

dir.

**İspat.**  $\Rightarrow$   $F \cong G$  olsun.  $f: F \rightarrow G$  bir izomorfizmdir. Dolayısıyla  $F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$

ve  $G = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$  olduğunda  $f$  nin,  $f(u_i) = v_i$  şeklinde bir izomorfizm olması için

$n = m$  olması gerekir. Yani

$$n = m \Rightarrow \text{rank}F = \text{rank}G$$

dir.

$\Leftarrow$ :  $\text{rank}F = \text{rank}G = n$  olsun.  $F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$  ve  $G = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  dir.

Dolayısıyla  $f: F \rightarrow G$  olacak şekilde  $f(u_i) = v_i$  şeklinde tanımlanan  $f$  açık olarak izomorfizmdir. Dolayısıyla  $F \cong G$  dir.

(2.7) ve (2.8) de determinant alınır,

$$(\det p)(\det q)=1 \quad (2.9)$$

bulunur.  $p$  ve  $q$  nun katsayıları tam sayıdır. Dolayısıyla onların determinantları da tam sayıdır. Böylece (2.9) dan,  $\det p = \det q = \pm 1$  sonucu çıkarılır. Yani  $p$  ve  $q$  unimoduler matrislerdir ve bu yüzden integral tersleri vardır. Böylece serbest üreteçli bir cümleden diğerine geçiş

$$u_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} v_j \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.10)$$

unimoduler dönüşümü tarafından yapılır. Ve açıktır ki herhangi bir  $p$  unimoduler matrisi bu amaç için kullanılabilir.

$q = p^{-1}$  alınır, (2.10),

$$v_j = \sum_{k=1}^n q_{jk} u_k \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2.11)$$

eşitliğine dönüşür. Böylece (2.2) doğrulanır.

Sayfa 16 da bahsedilen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  işlemleri , unimoduler dönüşümün basit örnekleridir.

**Tanım 2.2.5.** Sıfırdan farklı  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tam sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu tam sayıların en büyük ortak böleni (EBOB) denir. Ve

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

şeklinde gösterilir.

Tanımdan dolayı, bu bir pozitif tam sayıdır. Özellikle  $(a_1, a_2, \dots, a_n)=1$  olduğunda, bu tam sayılar aralarında asaldır denir. Açıktır ki unimoduler bir matriste bir satır ve bir sütunu oluşturan katsayılar aralarında asal olmalıdır. Çünkü matrisin determinantı bir satıra(sütuna) göre açılırsa, açıktır ki determinant bu satırın(sütunun) EBOB i ile bölünebilir. Bununla birlikte, hipotezden, determinant  $\pm 1$  e eşittir ve böylece EBOB yalnızca 1 e eşit olabilir. Böylece serbest üreteçlerin yeni bir cümlesi (2.11) ile gösterilirse, her yeni üreteç, aralarında asal katsayılarla eski üreteçlerin bir lineer kombinasyonudur.

**Önerme 2.2.6.**  $F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$  ve  $(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$  olacak şekilde,

$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n \in F$  olsun. Bu taktirde,

$$F = \langle v, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle$$

olacak şekilde  $v_2, v_3, \dots, v_n \in F$  vardır. Diğer bir deyişle;

$(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1 \Leftrightarrow$  bir eleman serbest üreteçlerin bir cümlesine dahil edilebilir.

**İspat.**  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$  için  $s = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$  olsun.

$s = 1$  ise, bazı  $j$  ler için  $v = \pm u_j$  dir. Ve açıktır ki  $v$  serbest üreteçlerin bir cümlesine dahil edilebilir.

Şimdi  $s$  üzerinde tümevarım kullanacağız :

$s > 1$  ise, en az iki  $b$  sıfırdan farklıdır. Genelliği kaybetmeksizin;

$b_1 \geq b_2 > 0$  olduğunu varsayalım.  $u_1' = u_1, u_2' = u_2 + u_1, u_j' = u_j$  ( $j \geq 3$ ) olsun.

Açıktır ki;

$$F = \langle u_1', u_2', \dots, u_n' \rangle \quad (\text{işlem } \beta)$$

dir. Buradan,

$$v = (b_1 - b_2)u_1' + b_2 u_2' + \dots + b_n u_n'$$

dır. Açıkça,  $(b_1 - b_2, b_2, b_3, \dots, b_n) = 1$  dir. Fakat,

$$|b_1 - b_2| + |b_2| + |b_3| + \dots + |b_n| < s$$

dir. Böylece tümevarım hipotezine göre  $v$ , serbest üreteçlerin bir cümlesine dahil edilebilir.

Şimdi sonlu olarak üretilen serbest bir Abelyen grubun alt gruplarını inceleyelim. Bu alt grupların sonlu üretilen ve serbest olup olmadıklarını sorgulayacağız. Bunun cevabı ise, Abelyen grupların teorisi için önemli olan, aşağıdaki teoremdedir.

**Teorem 2.2.7.**  $F$ , rankı  $n$  olan sonlu olarak üretilen serbest bir abelyen grup ve  $H$ ,  $F$  nin sıfırdan farklı bir alt grubu olsun. Bu taktirde  $H$ , rankı  $m$  olan ( $m \leq n$ ), sonlu üretilen serbest bir abelyen gruptur.  $h_1, h_2, \dots, h_m$  ler,  $h_i | h_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ) bağıntılarını sağlayan pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$H = \langle h_1 v_1, h_2 v_2, \dots, h_m v_m \rangle$$

olacak şekilde  $F$  için,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  serbest üreteçlerinin bir cümlesini seçmek mümkündür.

**İspat.** i)  $F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$  olsun.  $0 \neq x \in F$  için  $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$  olmak üzere  $x$  in katsayılarının EBOB ini

$$\delta(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

olarak tanımlayalım. Bu sayı üreteçlerin seçiminden bağımsızdır. Çünkü eğer,

$F = \langle u_1', u_2', \dots, u_n' \rangle$  ise  $u_i = \sum_j p_{ij} u_j'$  olacak şekilde bir  $(p_{ij})$  unimodüler matrisi vardır.

$x = a_1' u_1' + a_2' u_2' + \dots + a_n' u_n'$  olup, burada  $a_j' = \sum_i a_i p_{ij}$  dir.

Böylece  $a_i$  nin herhangi bir ortak böleni, bütün  $a_j'$  leri bölmelidir. Bu sebepten

$$(a_1', a_2', \dots, a_n') \geq (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.12)$$

dir. Eğer  $(p_{ij})$  matrisinin tersini alarak, üreteçlerin iki cümlesi arasında rolleri değiştirirsek,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq (a_1', a_2', \dots, a_n') \quad (2.13)$$

olacaktır. (2.12) ve (2.13) den dolayı,

$$(a_1', a_2', \dots, a_n') = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dir. Bu ise  $\delta(x)$  in değişmez olduğunu gösterir.

ii)  $0 \neq y_1 \in H$  için,  $\delta(y_1) = h_1 \geq 1$  olacak şekilde

$$y_1 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$$

şeklinde yazılsın.  $(c_1, c_2, \dots, c_n) = 1$  ve  $v_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \in F$  olacak şekilde

$$y_1 = h_1 (c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n) = h_1 v_1$$

yazabiliriz. Önerme 2.2.6 dan dolayı,

$$F = \langle v_1, v_2', v_3', \dots, v_n' \rangle \quad (2.14)$$

olacak şekilde  $v_2', v_3', \dots, v_n'$  elemanları vardır.

Üreteçlerin bu cümlesini kullanarak,  $y = d_1 v_1 + d_2 v_2' + \dots + d_n v_n'$ ,  $H$  nin keyfi bir elemanı olsun.

$$y_1 = h_1 v_1 \in H \quad (2.15)$$

olduğunu biliyoruz ve iddaa ediyoruz ki  $h_1 \mid d_1$  dir.

Eğer  $h_1 \nmid d_1$  ise,  $0 < r_1 < h_1$  olmak üzere  $d_1 = qh_1 + r$  olacak şekilde  $q, r \in \mathbb{Z}$  bulabiliriz.

Böylece  $\delta(y - qy_1) = (r, d_2, \dots, d_n) \leq r < h_1$  olacak şekilde,

$y - qy_1 = rv_1 + d_2v_2' + \dots + d_nv_n' \in H$  dir. Bu ise  $h_1$  in minimum olması ile çelişir.

Böylece,  $r = 0$  olup  $d_1 = qh_1$ , yani  $h_1 \mid d_1$  dir. Dolayısıyla

$$y - qy_1 = d_2v_2' + \dots + d_nv_n' \quad (2.16)$$

dir.

iii) Şimdi  $n$  üzerinden tümevarımla ispata devam edelim:

$n = 1$  ise, (2.16) nın sağ tarafı sıfırdır. Yani

$$\begin{aligned} y - qy_1 &= 0 \\ y &= qy_1 = qh_1v_1 \end{aligned}$$

dir. Buradan  $n = 1$  durumunda,  $F = \langle v_1 \rangle$ ,  $H = \langle h_1v_1 \rangle$  olacaktır. Şimdi kabul edelimki

$n > 1$  olsun.  $F_1 = \langle v_2', v_3', \dots, v_n' \rangle$ ,  $H_1 = H \cap F_1$  diyelim.

(2.16) nın sol tarafı  $H$  ye ait iken, sağ tarafı da  $F_1$  e aittir. Böylece (2.16),  $H_1$  in bir elemanını temsil eder.

$H_1 = \{0\}$  ise  $y = qy_1 = qh_1v_1$  elde edilir, ve önceki gibi  $H = \langle h_1v_1 \rangle$  dir.  $n$  keyfi ve  $m = 1$  olduğunda bu, (2.14) ile birlikte teoremi kanıtlar.

$H_1, F_1$  in sıfırdan farklı bir alt grubu olduğunda,  $F_1$  ve  $H_1$  e tümevarım hipotezi uygularız. Böylece  $m$ ,  $2 \leq m \leq n$  eşitsizliğini sağlayan bir tamsayı ve  $h_i \mid h_{i+1}$  ( $i = 2, 3, \dots, m-1$ ) olmak üzere,

$$F = \langle v_2, v_3, \dots, v_n \rangle, \quad H = \langle h_2v_2, h_3v_3, \dots, h_mv_m \rangle \quad (2.17)$$

olacak şekilde  $F_1$  in  $v_2, v_3, \dots, v_n$  elemanlarını bulabiliriz.

$F_1$  için serbest üreteçlerin iki cümlesi

$$v_i = \sum_j p_{ij}v_j', \quad v_i' = \sum_j q_{ij}v_j \quad (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

denklemleri ile ilişkilidir.

Şimdi, iddia ediyoruz ki

$$F = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle \quad (2.18)$$

dir. (2.14) de  $v$  leri,  $v'$  lere göre ifade edersek,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  nin  $F$  yi ürettiğini görürüz.

Üstelik bu elemanlar serbest üreteçlerdir; çünkü, kabul edelim ki

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0 \quad (2.19)$$

aşık olmayan bağıntısı var olsun.

Bu durumda  $c_1 \neq 0$  dir. Tersine  $c_1 = 0$  olursa, (2.17) nin aksine  $v_2, v_3, \dots, v_n$  arasında bir bağıntı elde ederiz. Eğer (2.19) da  $v_2, v_3, \dots, v_n$  yerine,  $v_2', v_3', \dots, v_n'$  yazarsak,  $v_1, v_2', \dots, v_n'$  arasında bir bağıntı elde ederiz ( $v_1$  in katsayısı  $c_1$  dir). Bu ise (2.14) ile çelişir. Böylece (2.18) kanıtlanır. O halde, (2.15), (2.16) ve (2.17) yi birlikte düşünersek,

$$h_1v_1 (= y_1), h_2v_2, \dots, h_mv_m$$

elemanlarının  $H$  yi ürettiğini buluruz. Bunlar aslında serbest üreteçlerdir. Çünkü bunlar arasında herhangi bir aşık olmayan bağıntı,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  arasında da bir bağıntı olacaktır.

Bu ise (2.18) ile çelişir. Böylece

$$H = \langle h_1v_1, h_2v_2, \dots, h_mv_m \rangle$$

dir.

İspatı bitirmek için halâ  $h_1 | h_2$  olduğunu göstermeliyiz. Şimdi,  $y_0 = h_1v_1 + h_2v_2 \in H$  olsun. Böylece  $h_1$  in minimal olmasından dolayı,

$$\delta(y_0) = (h_1, h_2) \geq h_1$$

dir. EBOB nin tanımından,

$$(h_1, h_2) \leq h_1$$

dir. Böylece  $(h_1, h_2) = h_1$  dir. Yani  $h_1 | h_2$  dir.

### 2.3 Sonlu Olarak Üretilen Abelyan Gruplar

$s_1, s_2, \dots, s_n$  aşık olmayan bağıntıları sağlayabilen üreteçler olmak üzere,

$$A = gp\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

olsun. Şimdi,  $A$  ile  $u_1, u_2, \dots, u_n$  üreteçleri tarafından serbest üretilen  $F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$  serbest Abelyen grubunu ilişkilendireceğiz.

$A$  ile  $F$  arasındaki ilişkiyi kurmak için,  $\theta: F \rightarrow A$  dönüşümünü

$$\theta(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlayalım.

Açık olarak  $\theta$  bir homomorfizmdir. Ve açıktır ki  $\theta$  örtendir.

$R = \ker \theta$  olsun.  $R = \ker \theta \leq F$  dir. Böylece

$$\begin{aligned} R = \ker \theta &= \{a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n \mid \theta(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n) = 0\} \\ &= \{a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n \mid a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = 0\} \end{aligned}$$

dir. Bu ise  $A$  nın üreteçleri arasında bir bağıntıdır.

$R$  nin elemanları  $A$  nın üreteçleri ile sağlanan tüm bağıntılar ile birebir bir tekabüliyete sahiptir. Böylece, birinci izomorfizm teoremi gösterir ki,

$$A \cong F/R \quad (2.21)$$

dir. Dolayısıyla  $F/R$  nin yapısını inceleyerek  $A$  nın yapısını keşfedebiliriz. Böylece,

$$F = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle, \quad R = \langle h_1v_1, h_2v_2, \dots, h_mv_m \rangle \quad (2.22)$$

( $m \leq n$ ) ve  $h_i \mid h_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ),  $R \neq \{0\}$  olacak şekilde  $F$  nin  $v_1, v_2, \dots, v_n$  serbest üreteçlerini seçebiliriz. Şimdi,

$n = 1$  özel durumunu göz önüne alalım. Bu durumda, üç durum vardır:

1)  $F = \langle v \rangle$ ,  $R = \{0\}$  ise  $F/R \cong F$  ( $v$  tarafından üretilen sonsuz devirli grup) dir.

2)  $F = \langle v \rangle$ ,  $R = \langle hv \rangle$  ( $h \geq 2$ ) ise  $F/R \cong C_h$  (mertebesi  $h$  olan devirli grup) dir.

3)  $F = \langle v \rangle$ ,  $R = \langle v \rangle$  ( $h = 1$ ) ise  $F/R \cong \{0\}$  dir. Çünkü  $F = R$  dir. Genel durumda da bu üç hal ortaya çıkacaktır. Gerçekten, eğer  $r = n - m > 0$  ise  $F$  de,  $R$  de olmayan  $r$  tane üreteç vardır. Ve bu üreteçler  $x_1, x_2, \dots, x_r$  ile gösterilecektir.

Eğer  $h_1 = h_2 = \dots = h_l = 1$  ise, karşılık gelen  $z_1, z_2, \dots, z_l$  üreteçleri hem  $F$  de hem de  $R$  de dir.

Eğer  $n = r + l + k$  ise, geri kalan  $k$  üreteç  $h$  nin 1 den büyük değerlerine karşılık gelir ve onları  $e_1, e_2, \dots, e_k$  azalan dizi şeklinde yeniden düzenlemek uygundur. Böylece

$e_{\kappa+1} \mid e_{\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k-1$ ),  $n = r + k + l$ ,  $m = k + l$  olmak üzere,

$$F = \langle x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_k, z_1, z_2, \dots, z_l \rangle \quad (2.23)$$

$$R = \langle e_1y_1, e_2y_2, \dots, e_ky_k, z_1, z_2, \dots, z_l \rangle \quad (2.24)$$

yazacağız.

$x \in F$  ise,  $F \rightarrow F/R$  doğal epimorfizmi altında  $\bar{x} = x + R$ ,  $x$  in görüntüsü olsun.

Özellikle  $F$  nin üreteçlerini sırayla göz önüne alırsak,

1)  $\bar{x}_\rho$  ( $\rho = 1, 2, \dots, r$ ) sonsuz mertebeli bir elemandır. Çünkü  $x_\rho$  nin  $R$  de sıfırdan farklı bir katı yoktur.

2)  $\bar{y}_\kappa$ ,  $e_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) mertebelidir.

3)  $\bar{z}_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, l$ ),  $F/R$  nin sıfır ( $\bar{0}$ ) elemanıdır. Çünkü  $z_\lambda \in R$  dir. Şimdi,

$F$  nin genel bir  $x$  elemanı

$$x = \sum_{\rho=1}^r a_\rho x_\rho + \sum_{\kappa=1}^k b_\kappa y_\kappa + \sum_{\lambda=1}^l c_\lambda z_\lambda$$

şeklinde gösterilir. Böylece  $F/R$  nin tipik bir elemanı

$$\bar{x} = \sum_{\rho=1}^r a_\rho \bar{x}_\rho + \sum_{\kappa=1}^k b_\kappa \bar{y}_\kappa \quad (2.25)$$

şeklindedir.

O halde,  $F/R$ ,  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  tarafından üretilir. Fakat, iddia ediyoruz ki, aslında,

$$F/R = gp\{\bar{x}_1\} \oplus \dots \oplus gp\{\bar{x}_r\} \oplus gp\{\bar{y}_1\} \oplus \dots \oplus gp\{\bar{y}_k\} \quad (2.26)$$

dir. Yani (2.25) denkleminin sağ tarafı yalnızca her bir terimi sıfır ise yok olabileceğini iddia ediyoruz.

Kabul edelimki  $\sum_{\rho=1}^r a_\rho \bar{x}_\rho + \sum_{\kappa=1}^k b_\kappa \bar{y}_\kappa = \bar{0}$  olsun. Bu ise  $\sum_{\rho=1}^r a_\rho x_\rho + \sum_{\kappa=1}^k b_\kappa y_\kappa \in R$  demektir.

Diğer taraftan, (2.24) e bakılırsa,  $a_\rho = 0$  ( $\rho = 1, 2, \dots, r$ ) olmak zorundadır. Çünkü  $x_\rho$ ,  $R$  de bulunmaz.

Ayrıca  $e_\kappa \mid b_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) dir.  $b_\kappa = d_\kappa e_\kappa$  yazılırsa,  $b_\kappa \bar{y}_\kappa = d_\kappa e_\kappa \bar{y}_\kappa = \bar{0}$  olur. Çünkü

$e_\kappa \bar{y}_\kappa = \bar{0}$  dir. Bu ise (2.26) yı ispatlar. Böylece, (2.21) vasıtasıyla verilen bir  $A$  grubunu

$F/R$  ile ifade edebildiğimizden dolayı aşağıdaki temel teoremi elde etmiş olduk.

**Teorem 2.3.1.** (Sonlu Olarak Üretilen Abelyen Grupların Temel Teoremi)

Her sonlu üretilen  $A$  Abelyen grubu  $r \geq 0$  sonsuz ve  $k \geq 0$  sonlu devir grubu içeren devir gruplarının bir direkt toplamıdır, böylece  $t_\rho$  ( $\rho = 1, 2, \dots, r$ ) sonsuz mertebeli,  $w_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ),  $e_\kappa (\geq 2)$  sonlu mertebeli olmak üzere,

$$A = gp\{t_1\} \oplus \dots \oplus gp\{t_r\} \oplus gp\{w_1\} \oplus \dots \oplus gp\{w_k\} \quad (2.27)$$

dir. Üstelik,

$$e_{\kappa+1} \mid e_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k-1)$$

dır.

(2.27) direkt toplam ayrıştırmasındaki üreteçlere  $A$  nın bir *bazı* denir.

$r = 0$  iken,  $A$  grubu sonludur. Ve  $|A| = e_1 e_2 \dots e_k$  dir.

$k = 0$  olduğunda,  $A$  serbest bir abelyan gruptur.  $A$  serbest olsun ya da olmasın, serbest üreteçlerinin sayısı  $r$ ,  $A$  nın *rankı* olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.1 de ifade edilen parçalanma  $A$  için bir *kanonik form* olarak adlandırılır.

## BÖLÜM 3

### İNVARYANTLAR, TEMEL BÖLENLER VE PARÇALANMANIN TEKNİĞİ

$A$  sonlu üretilen Abelyen grubunun (2.27) denkleminde ifade edilen ayrıştırmasının tekliği bu bölümde tartışılacaktır. Bu bölümde temel kaynaklar [5,6,9,10,11] dir.

#### 3.1 İnvaryantlar ve Temel Bölenler

**Teorem 3.1.1.**  $A$  sonlu olarak üretilen bir abelyen grup olsun. Kabul edelim ki,  $x_\rho$  ( $\rho = 1, 2, \dots, r$ ) ve  $y_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, s$ ) sonsuz mertebeli elemanlar,

$|u_\kappa| = d_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) ,  $d_{\kappa+1} | d_\kappa$  ,  $|v_\lambda| = e_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, l$ ) ,  $e_{\lambda+1} | e_\lambda$  olmak üzere

$$A = gp\{x_1\} \oplus \dots \oplus gp\{x_r\} \oplus gp\{u_1\} \oplus \dots \oplus gp\{u_k\} \quad (3.1)$$

$$= gp\{y_1\} \oplus \dots \oplus gp\{y_s\} \oplus gp\{v_1\} \oplus \dots \oplus gp\{v_l\} \quad (3.2)$$

olsun. Bu taktirde,

i)  $r = s$  dir.

ii)  $k = l$  ,  $d_\kappa = e_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) dir.

Bu teoremin ispatı birkaç kısma ayrılarak yapılacaktır.

i)  $T$  ,  $A$  nın sonlu mertebeli elemanlarının bir koleksiyonu olsun.

$u, v \in T$  ise  $mu = nv = 0$  olacak şekilde  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayıları vardır. Böylece  $mn(u - v) = 0$  dir . Bu durumda  $u - v \in T$  dir. O halde  $T$  bir alt gruptur.

Bu grup  $A$  nın *torsiyon alt grubu* olarak adlandırılır. Elbette  $T$  ,  $A$  ile ilgilidir, yani baz elemanlarının seçimine bağlı değildir. Şimdi,

$$X = \sum_{\rho=1}^r gp\{x_\rho\} \quad \text{ve} \quad Y = \sum_{\sigma=1}^s gp\{y_\sigma\} , \text{ rankları sırasıyla } r \text{ ve } s \text{ olan serbest abelyen}$$

gruplardır. (3.1) ve (3.2) hipotezleri  $A$  grubunun

$$A = X \oplus T = Y \oplus T \quad (3.3)$$

olmasını gerektirir.

Açıktır ki torsiyon grup sonlu mertebeli tüm üreteçleri içeriyorken, sonsuz mertebeli herhangi bir üreteç içermez. (3.3) den  $A/T \cong X$  ve  $A/T \cong Y$  sonucunu çıkarırız.

Buradan  $X \cong Y$  dir. Fakat serbest bir abelyan grubun rankı değişmezdir. Böylece,  $r = s$  dir. Bu ise Teorem 3.1.1 in ilk kısmını ispatlar.

ii) Bundan sonra sadece sonlu abelyen gruplarla ilgileneceğiz. Yani (3.1) ve (3.2) deki sonsuz üreteçleri görmezden geliyoruz. Şimdi,

$A$  nın özel bir durumu ile başlayalım:

$A$  sonlu abelyen bir  $p$ -grup olsun. Yani  $p$  asal ve  $m$  pozitif bir tam sayı olmak üzere,  $|A| = p^m$  olduğunu varsayalım. Bu durumda her bir elemanın mertebesi  $p$  nin bir kuvvetidir.

Özel olarak,

$$|u_\kappa| = d_\kappa = p^{\delta_\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k)$$

$$|v_\lambda| = e_\lambda = p^{\varepsilon_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

diyelim.

$d_{\kappa+1} | d_\kappa$  koşulu  $\delta_{\kappa+1} \leq \delta_\kappa$  ya denktir. Aynı şekilde  $e_{\lambda+1} | e_\lambda$  ise  $\varepsilon_{\lambda+1} \leq \varepsilon_\lambda$  ya denktir.

Bu durumda, Teorem 3.1.1 in  $p$ - gruplara adaptasyonu aşağıdaki gibidir.

**Teorem 3.1.2.**  $A$  sonlu abelyan bir  $p$ -grup olsun. Kabul edelim ki,

$$|u_\kappa| = p^{\delta_\kappa} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k), \quad |v_\lambda| = p^{\varepsilon_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l) \quad \text{ve} \quad \delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_k, \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_l \quad \text{olmak üzere,}$$

$$A = \sum_{\kappa=1}^k \oplus gp\{u_\kappa\} = \sum_{\lambda=1}^l \oplus gp\{v_\lambda\} \quad (3.4)$$

olsun. Bu taktirde  $k = l$  ve  $\delta_\kappa = \varepsilon_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, k$ ) dir.

**İspat.** Eğer  $|A| = p^m$  ise bu taktirde (3.4) denklemindeki mertebelerin mukayesesinden

$$m = \sum_{\kappa} \delta_\kappa = \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda \quad \text{olduğu görülür.}$$

$m = 1$  olduğunda teorem aşıkardır. Böylece  $m$  üzerinden tümevarımla ispata devam edebiliriz.

$A_p$ ,  $px = 0$  koşulunu sağlayan elemanların cümlesi olsun.  $p(x - y) = px - py$  olduğundan  $A_p$ ,  $A$  nın bir alt grubudur (muhtemelen  $A$  ya eşittir).  $A_p$  nin mertebesini belirlemek kolaydır. Şimdi,

$x \in A_p$  olsun.  $A$  için  $u_1, u_2, \dots, u_k$  bazlarını kullanarak,

$$x = \sum_{i=1}^k a_i u_i$$

elde ederiz. (Burada,  $0 \leq a_i < p^{\delta_i}$  olduğu varsayılabilir, çünkü  $|u_i| = p^{\delta_i}$  dir.) Şimdi,

$px = 0$  ise, her  $i$  için  $pa_i u_i = 0$  dir. Ve böylece  $p^{\delta_i} \mid pa_i$  dir. Böylece  $0 \leq b_i < p$  olacak şekilde  $a_i = b_i p^{\delta_i - 1}$  dir. Böylece sabit bir  $i$  ile ilgili  $b_i$  için tam olarak  $p$  tane mümkün değer vardır. Böylece  $px = 0$  olacak şekilde  $a_i$  için de  $p$  tane değer vardır. Bu da  $|A_p| = p^k$  olduğunu gösterir. Benzer şekilde (3.4) deki ikinci bazı kullanarak  $|A_p| = p^l$  yi elde ederiz. Fakat  $A_p$ , baz seçiminden bağımsızdır. Böylece iddia edildiği gibi  $k = l$  dir.

$A^p = \{px \mid x \in A\}$  olsun. Kolayca ispatlanabilir ki,  $A^p$  bir gruptur. Çünkü, eğer  $x = px'$ ,  $y = py'$  ise  $x - y = p(x' - y') \in A^p$  dir.  $A$  nın her bir baz elemanını  $p$  ile çarparsak,  $A^p$  nin devirlere direkt bir parçalanışını elde ederiz. Fakat dikkat edilmeli ki, bu işlem  $p$  mertebeli tüm elemanları yok eder. Böylece  $K$ ,  $0 \leq K \leq k$  yi sağlayan belli bir tamsayı olmak üzere,

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_K > 1, \delta_{K+1} = \delta_{K+2} = \dots = \delta_k = 1$$

olsun. Bu taktirde,  $|pu_i| = p^{\delta_i - 1}$  ve

$$A^p = \sum_{i=1}^K \oplus gp\{pu_i\}$$

dir. Benzer şekilde, eğer

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_L > 1, \varepsilon_{L+1} = \varepsilon_{L+2} = \dots = \varepsilon_k = 1$$

ise,  $|pv_j| = p^{\varepsilon_j - 1}$  ve

$$A^p = \sum_{j=1}^L \oplus gp\{pv_j\}$$

yazabiliriz.

$K = 0$  olduğunda,  $A$  nın tüm elemanlarının mertebesi  $p$  dir. Buradan  $A^p = \{0\}$  dir. Bu durumda  $L$  de sıfırdır. Çünkü  $A^p$  bazdan bağımsızdır. Bundan böyle  $K > 0$  olduğunu varsayacağız. Açıkça,  $|A^p| < |A|$  dir. Ve  $A^p$  ye tümevarım hipotezini uygulayabiliriz. Böylece  $K = L$  ve  $\delta_i - 1 = \varepsilon_i - 1$  , yani  $\delta_i = \varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) sonucuna varırız.  $\delta$  nın ve  $\varepsilon$  nun geriye kalanları 1 e eşit olduğundan, teoremin ispatı tamamlanır.

**Tanım 3.1.3.** Bir  $A$  abelyen  $p$ - grubunun

$$p^{\delta_1}, p^{\delta_2}, \dots, p^{\delta_k} \tag{3.5}$$

invariantları  $A$  nın temel bölenleri olarak adlandırılır. Ve  $A$  ,  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$  tipindedir denir.

Özellikle  $A$  ,  $(1, 1, \dots, 1)$  tipinde ise  $A$  grubu temel abelyen  $p$ - grubu olarak adlandırılır.

iii) Sonraki adım keyfi bir sonlu abelyen grubu,  $p$ - gruplara parçalamaktır.

**Lemma 3.1.4.**  $(m, n) = 1$  olmak üzere  $w$  ,  $mn$  mertebeli bir eleman olsun. Bu taktirde,

$$gp\{w\} = gp\{nw\} \oplus gp\{mw\} \tag{3.6}$$

dir.

**İspat.**  $u = nw$  ve  $v = mw$  elemanlarının mertebeleri sırasıyla  $m$  ve  $n$  dir.

$W = gp\{w\}$  ,  $U = gp\{u\}$  ,  $V = gp\{v\}$  olsun. Şimdi iddia ediyoruz ki

$$W = U \oplus V \tag{3.7}$$

dir.  $(m, n) = 1$  olduğundan  $an + bm = 1$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}$  elemanları vardır.

Böylece

$$\begin{aligned} w &= (an + bm)w = a(nw) + b(mw) \\ &= au + bv \end{aligned}$$

dir. Bu gösterir ki;  $w \in U + V$  dir. Fakat  $w$  ,  $W$  yu üretir. Buradan  $W \subset U + V$  dir.

$U \subset W$  ve  $V \subset W$  olduğundan  $U + V \subset W$  dir. Sonuç olarak  $W = U + V$  dir.  $U$  ve  $V$  aralarında asal mertebeli olduğundan,  $U \cap V = \{0\}$  dir. Böylece

$$W = U \oplus V$$

dir.

(3.6) sonucu iki terimden daha fazla terime de genelleştirilebilir. Özellikle  $p_1, p_2, \dots, p_t$  farklı asallar olmak üzere,

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$$

olsun. Bu taktirde,  $w_\tau = (m/p_\tau^{\alpha_\tau})w$  nin mertebesi  $p_\tau^{\alpha_\tau}$  olmak üzere,

$$gp\{w\} = \sum_{\tau=1}^t \oplus gp\{w_\tau\} \quad (3.8)$$

dir.

**Tanım 3.1.5.**  $p$  asal ve  $P$ , mertebeleri  $p$  nin bir kuvveti olan  $A$  nın elemanlarının bir cümlesi olsun. Yani

$$P = \{x \in A \mid p^\mu x = 0 \ (\mu \geq 0)\}$$

olsun. Diğer taraftan,  $p^\mu x = p^\nu y = 0$  alındığında  $p^{\mu+\nu}(x-y) = 0$  olduğundan  $P$  bir alt gruptur. Eğer  $p$ ,  $|A|$  yı bölmez ise  $P = \{0\}$  dir. Dolayısıyla,  $P$  ye  $A$  nın  $p$ -temel bileşeni adı verilir.

Şimdi  $|A|$  nın birden daha fazla asal tarafından bölündüğünde,  $A$  nın temel bileşenlerinin  $A$  nın bir parçalanmasını sağladığını göstereceğiz.

**Teorem 3.1.6.**  $|A| = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_n^{v_n}$  ve  $P_i$ ,  $A$  nın  $p_i$ -temel bileşeni olsun. Bu taktirde

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n \quad (3.9)$$

dir.

**İspat.** Eğer  $w \in A$  ise (3.8) gösterir ki,  $w \in P_1 + P_2 + \dots + P_n$  dir. Böylece  $A \subset P_1 + P_2 + \dots + P_n$  dir. Tersine, her bir  $P_i$ ,  $A$  da ihtiva edildiğinden  $P_1 + P_2 + \dots + P_n \subset A$  dir. Buradan  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_n$  dir. Ayrıca bu toplam direkt toplamdır. Çünkü terimler karşılıklı olarak asal mertebeye sahiptirler. Diğer taraftan, (3.9) parçalanması tektir. Gerçekten,

$P_i^*$  abelyan bir  $p_i$ -grup olmak üzere ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$$A = P_1^* \oplus P_2^* \oplus \dots \oplus P_n^*$$

olsun. Bu durumda,  $P_i^* = P_i$  dir. Çünkü  $|P_i^*| = P_i^{\mu_i}$  olsun. (3.9) un her iki tarafındaki grubun mertebesi hesaplanırsa  $|A| = \prod_i P_i^{\mu_i}$  bulunur.  $|A|$  nın asal çarpanlara tek türlü ayrılışından dolayı  $\mu_i = \nu_i$  dir. Böylece  $|P_i^*| = |P_i|$  dir.  $P_i$  nin tanımından,  $P_i^*$  in her bir elemanı  $P_i$  dedir, yani  $P_i^* \subset P_i$  dir. Ayrıca bu gruplar aynı mertebeye sahip olduğundan  $P_i^* = P_i$  olacaktır.

iv) Nihayet, Teorem 3.1.1 in ispatına dönelim. Bize

$$A = \sum_{\kappa=1}^k \oplus gp\{u_{\kappa}\} \quad , \quad |u_{\kappa}| = d_{\kappa} \quad , \quad d_{\kappa+1} | d_{\kappa} \quad (3.10)$$

ifadesi verilmişti.

İspatın amacı her bir terimi temel bileşenlerine parçalamaktır. Böylece Teorem 3.1.2 de tekliği inşa edilen  $P_1, P_2, \dots, P_n$  lerin temel bölenlerini elde etmektir. Şimdi,

$\delta_{\kappa i} \geq 0$  ve  $\delta_{\kappa+1, i} \leq \delta_{\kappa i}$  olmak üzere,

$$d_{\kappa} = \prod_{i=1}^n p_i^{\delta_{\kappa i}} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k) \quad (3.11)$$

olsun. Sırasıyla her bir  $u_{\kappa}$  terimine (3.8) i uygulayarak,  $|u_{\kappa i}| = p^{\delta_{\kappa i}}$  olmak üzere,

$$gp\{u_{\kappa}\} = \sum_{i=1}^n \oplus gp\{u_{\kappa i}\}$$

yazabiliriz.

Böylece  $A$ ,  $p$ -grupların bir çift toplamı olarak gösterilebilir. Yani,

$$A = \sum_{\kappa=1}^k \sum_{i=1}^n \oplus gp\{u_{\kappa i}\} \quad (3.12)$$

dir.

Sabit  $i$  için,

$$P_i = \sum_{\kappa=1}^k \oplus gp\{u_{\kappa i}\}$$

dir.

Bu gösterir ki,  $P_i$  nin temel bölenleri,  $p^{\delta_{1i}}, p^{\delta_{2i}}, \dots, p^{\delta_{ki}}$  monoton azalan dizi arasından birim olmayanlardır.

Bu durum basitçe asal kuvvetlerin üsleri ile gösterilen aşağıdaki tablo ile özetlenir:

	$P_1$	$P_2$	$\dots$	$P_n$
$d_1$	$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\dots$	$\delta_{1n}$
$d_2$	$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\dots$	$\delta_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$d_k$	$\delta_{k1}$	$\delta_{k2}$	$\dots$	$\delta_{kn}$

(Tablo 1)

Burada, Tablo 1 de, sütunlardaki sıfırdan farklı elemanlar  $P_1, P_2, \dots, P_n$  nin temel bölenlerini gösterirken, satırlar (3.12) ye karşılık gelir. Her bir sütundaki elemanlar artmayan büyüklükte dizilir ve son satır tamamen sıfır değildir. Çünkü  $d_k \geq 2$  dir.

Şimdi  $d$  yi,

$$e_\lambda = \prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_{\lambda i}} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

olmak üzere,  $e$  nin cümlesi ile yer değiştirelim. Teorem 3.1.2 gösterir ki,  $(\delta_{ki})$  ve  $(\varepsilon_{\lambda i})$  tablolarında karşılıklı sütunlar sıfırdan farklı aynı elemanlara sahiptir.  $(\delta_{ki})$  nin en az bir sütunu  $k$  tane sıfırdan farklı elemana sahip olduğundan  $l \geq k$  dir. Benzer şekilde, simetriden  $k \geq l$  dir. Böylece  $k = l$  dir. O halde,  $(\delta_{ki})$  ve  $(\varepsilon_{\lambda i})$  tabloları özdeşdir. Böylece Teorem 3.1.1 in ispatı biter.

$d_1, d_2, \dots, d_k$  tamsayıları  $A$  nin *invariantları* olarak adlandırılır ve her zaman  $d_{k+1} | d_k$  bölünebilirlik şartını sağladıkları varsayılır.  $A$  nin *temel bölenleri* ,  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) temel bileşenlerinin temel bölenlerinin koleksiyonudur. Bu gösterir ki , invariantlar ve temel bölenler, biri diğerini belirtecek şekildedir. Bu iki cümleden birisi tamamen  $A$  nin yapısını tarif eder. O halde, invariantlarla ya da temel bölenlerle tüm sonlu olarak üretilen abelyen gruplar, izomorfizmlerine kadar elde edilir.

Şimdi, yukarıda verilen bu teorik inşayı iki somut örnekle daha anlaşılır hale getirelim:

**Örnek 3.1.7.** Şimdi, temel bölenleri  $2^3, 2, 2, 3, 3$  olan bir grubun invariantlarını bulalım.

Verilenler altında Tablo 1

	2	3
$d_1$	3	1
$d_2$	1	1
$d_3$	1	0

olarak elde edilir. Buradan

$$d_1 = 2^3 \times 3 = 24, \quad d_2 = 2 \times 3 = 6, \quad d_3 = 2$$

dir. Dolayısıyla bu grubun mertebesi,

$$|A| = 24 \times 6 \times 2 = 2^5 \times 3^2 = 288$$

dir.

Aşağıdaki örnek devirli grupların bir direkt toplamının sırasıyla temel bölenlere ya da invaryantlara karşılık gelen iki kanonik formun, herhangi birine nasıl dönüştürülebileceğini örnekler.

**Örnek 3.1.8.**  $A = C_{30} \oplus C_{12}$  grubunun temel bölenlerini ve invaryantlarını bulalım.

$A$  grubu kanonik formda değildir, çünkü  $12 \nmid 30$  dur. İlk önce,  $A$  grubunu her bir terimi mertebeleri aralarında asal olacak şekilde gruplara parçalayalım. Yani  $A$  grubu

$$A = (C_2 \oplus C_3 \oplus C_5) \oplus (C_4 \oplus C_3)$$

şeklinde ifade edilsin. Aynı asala ait terimleri bir araya getirerek,

$$A = (C_4 \oplus C_2) \oplus (C_3 \oplus C_3) \oplus C_5$$

elde ederiz. Bu gösterir ki, 2,3 ve 5 asallarına karşılık gelen temel bölenler sırasıyla (4,2), (3,3) ve 5 dir. Ve böylece Tablo 1

	2	3	5
$d_1$	2	1	1
$d_2$	1	1	0

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$d_1 = 2^2 \times 3 \times 5 = 60, \quad d_2 = 2 \times 3 = 6$$

dır. Böylece

$$A = C_{60} \oplus C_6 ,$$

invariantları gösteren bir kanonik formdur.

### 3.2 Parçalanmanın Tekniği

Kesim 2.3 de her  $A$  sonlu olarak üretilen abelyen grubun, devirli grupların direkt toplamına izomorfik olduğu sonucunu ispat ettik. Fakat ispatta kullanılan düşünce, devir toplamlarını belirlemek için doğrudan doğruya pratik bir yöntem göstermez. Şimdiki bölümün amacı, somut durumlarda problemin çözümü için sistematik bir yöntem tarif etmektir. Varsayalım ki  $A$  grubu, üreteçlere ve bağıntılara göre verilsin. Böylece  $x_1, x_2, \dots, x_n$  üreteçleri  $N$  tane

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

bağıntılarına bağlı olmak üzere,

$$A = gp\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

olsun.

$N \times n$  tipindeki  $B = (b_{ij})$  katsayılar matrisi *bağıntı matrisi* olarak adlandırılacaktır.

$$F = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \quad (3.13)$$

serbest abelyen grubunu ve  $r_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) olmak üzere,

$$R = gp\{r_1, r_2, \dots, r_N\} \quad (3.14)$$

bağıntı alt grubunu kullanarak problemi yeniden formüle edeceğiz.

Dikkat edilmeli ki,  $r_i$  sadece  $R$  yi üretirken,  $u_j$  ise tanımdan  $F$  nin serbest üreteçleridir. (2.21) de görüldüğü gibi,  $A$  grubu,  $F/R$  formunda görünür ve (2.22) yi sağlayacak şekilde yeni üreteçler seçilerek,  $A$  nın yapısı belli edilir. Bu üreteçlere bağlı bağıntı matrisinin özelliği, diyagonal olmayan tüm elemanlarının sıfır olmasıdır.

Tersine

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

ise,  $\mathbb{Z}$  devirli gruplara parçalanmayabilir.

Ancak,  $d_{i+1} \mid d_i$  şartı sağlanmazsa, bu parçalanma Teorem 3.3.1 de tarif edilen kanonik forma uymaz. Teorik nedenlerden, ilk durumda bu koşulları göz ardı etmek ve sadece diyagonal olan bir bağıntı matrisine karşılık gelen geçici bir indirgeme amaçlamak daha uygundur.

Problem aşağıdaki gibi tablo formunda düzenlenebilir:

	$u_1$	$u_2$	$\cdots$	$u_n$
$r_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	$\cdots$	$b_{1n}$
$r_2$	$b_{21}$	$b_{22}$	$\cdots$	$b_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$r_N$	$b_{N1}$	$b_{N2}$	$\cdots$	$b_{Nn}$

(Tablo 2)

Bu tablodaki satırlar  $R$  nin üreteçlerini gösterirken, sütunlar  $F$  nin üreteçlerine karşılık gelir. Hem  $F$  için hem de  $R$  için üreteçlerin seçimi kontrolümüzde olduğundan,  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  ve  $(\delta)$  operasyonlarını,  $F/R$  nin yapısını değiştirmeksizin, üreteçlerin her bir cümlesine uygulayabiliriz.  $R$  ye göre bu, Tablo 2 nin satırları üzerinde işlem yapma anlamına gelir, fakat  $F$  nin değişime uğramış üreteçlerinin etkisini anlamak için biraz daha dikkat gereklidir.

$q \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $F$  nin yeni üreteçleri

$$u_1' = u_1 + qu_2, \quad u_2' = u_2, \quad u_3' = u_3, \quad \dots, \quad u_n' = u_n \quad (3.16)$$

dönüşümleri vasıtasıyla verilsin ve

$$r = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_nu_n,$$

bağıntı alt grubunun tipik bir elemanı olsun.

Yeni üreteçlere göre, bu bağıntı

$$r = b_1u_1' + (b_2 - qb_1)u_2' + b_3u_3' + \dots + b_nu_n'$$

olur.

Böylece  $B$  matrisinde ilk satırın  $q$  katı, ikinci satırdan çıkarılırken, Tablo 2 nin en üst satırı, (3.16) ile yer değiştirir. Bu, sütunlar üzerinde  $(\beta)$ -tipinde bir operasyondur.

Şimdi  $B$  yi , (3.15) diyagonal formuna indirgeyecek adımları göstereceğiz :

(i)  $B = 0$  olduğunda ,  $A = F$  serbest bir abelyen gruptur ve söylenecek fazla bir şey yoktur.

Şimdi  $B \neq 0$  olduğunu varsayacağız. Satırların ve sütunların permütasyonu ile, ve gerekirse, onların birinde işaret değişikliği yaparak,

$$b_{11} > 0 , b_{11} \leq |b_{i1}| , b_{11} \leq |b_{1j}| \quad (i > 1, j > 1)$$

şartlarını sağlayacak şekilde  $b_{11}$  eksenini düzenleyebiliriz.

(ii)  $B$  nin  $b_{11}$  ile hizalanmış yatay ya da dikey tüm elemanları ,  $b_{11}$  ile bölünüyor olabilir. Bu durumda, ilk satırın (sütunun) uygun katlarını diğer satırlardan (sütunlardan) çıkararak, tüm bu elemanları sıfıra indirgeyebiliriz. Bu yapıldığında bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

olur. (3.15) elde edilene kadar, aynı şekilde  $B_1$  e de aynı işlemleri uygulamaya devam etmemiz gerekmektedir.

(iii) Diğer taraftan,  $b_{i1}$  ya da  $b_{j1}$  den biri  $b_{11}$  ile bölünmüyorsa,  $(\beta)$  operasyonu  $b_{11}$  modülüne göre onun en küçük pozitif kalanı ile değiştirilmesine neden olur. Örneğin,  $0 < b_{i1}' < b_{11}$  olmak üzere,

$$b_{i1} - qb_{11} = b_{i1}'$$

elde ederiz. Sonra  $b_{i1}'$  nü yerine yazarak yeni eksenle indirgemeye devam ederiz. Açıktır ki eksensel durum, pozitif tam sayıların azalan dizisi ile oluşturulduğundan, bu yöntem bir sona ulaşmalıdır. Böylece en sonunda (ii) de anlatılan durum ortaya çıkmalıdır.

**Örnek 3.2.1.**  $3a - 2b + 5c = 0$  ,  $5a + 27c = 0$  bağıntılarına bağlı  $a, b, c$  terimleri tarafından üretilen  $A$  abelyen grubunun invaryantlarını bulalım.

Bağıntı matrisi üzerinde operasyonların aşağıdaki dizisi kanonik forma götürür:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 27 \end{array} & \xrightarrow{(1)} & \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 27 \end{array} & \xrightarrow{(2)} & \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 10 & 2 \end{array} \\ \\ \xrightarrow{(3)} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \end{array} & \xrightarrow{(4)} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} & \xrightarrow{(5)} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \end{array}$$

Buradaki beş operasyon aşağıdaki gibidir:

(1) üreteçler  $u_1 = u_1', u_2 = u_1' + u_2', u_3 = u_3'$

(2) bağıntılar  $r_1' = r_1, r_2' = r_2 - 5r_1$

(3) üreteçler  $u_1' = u_1'' + 2u_2'' - 5u_3'', u_2' = u_2'', u_3' = u_3''$

(4) üreteçler  $u_1'' = u_1''', u_2'' = u_2''', u_3'' = u_3''' - 5u_2'''$

(5) üreteçler  $u_1''' = v_1, u_2''' = v_3, u_3''' = v_2$

Bu, indirgemeyi tamamlar. O halde,  $\bar{v}_3$  sonsuz mertebeli,  $\bar{v}_1 = 0, 2\bar{v}_2 = 0$  olmak üzere,  $F/R, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  tarafından üretilir. Buradan,

$$A \cong C_2 \oplus C_\infty$$

dir.

Üreteçlerin değişimini kaydetmek gereksiz olarak düşünüldüğünde, devirli yapı, diyagonal form elde edilene kadar bağıntı matrisine eksensel operasyonlar uygulanarak elde edilebilir. Sütun operasyonlarının yeterli olduğu aşağıdaki örnekte  $j$ . sütun,  $c_j$  ile gösterilir.

**Örnek 3.2.2.**  $a, b, c, d$  üreteçleri ve

$$3a + 9b - 3c = 0, 4a + 2b - 2d = 0$$

bağıntıları ile verilen  $A$  abelyen grubunun kanonik parçalanmasını bulalım. Şimdi, bağıntı matrisi aşağıdaki gibi indirgenebilir :

$$\begin{array}{cccc}
 3 & 9 & -3 & 0 \\
 4 & 2 & 0 & -2
 \end{array}
 \xrightarrow{(c_1 \rightarrow c_1 + 2c_4, c_2 \rightarrow c_2 + c_4)}
 \begin{array}{cccc}
 3 & 9 & -3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2
 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(c_2 \rightarrow c_2 - 3c_1, c_3 \rightarrow c_3 + c_1, c_4 \rightarrow -c_4)}
 \begin{array}{cccc}
 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{(c_2 \rightarrow c_4, c_4 \rightarrow c_2)}
 \begin{array}{cccc}
 3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 0
 \end{array}$$

Böylece, iki üreteç, sırasıyla 3 ve 2 mertebeli devir gruplarına karşılık gelirken, diğer iki üreteç serbest kalmaktadır. O halde,

$$A \cong C_3 \oplus C_2 \oplus C_\infty \oplus C_\infty$$

dir.

## KAYNAKLAR

1. Baumslag, B., Chandler, B., 1968. Schaum's Outline of Group Theory. McGraw Hill, 288 pp.
2. Beachy, J. A., Blair, W. D., 2006. Abstract Algebra. Waveland Pres, 305 pp.
3. Cameron, P. J., 2008. Introduction to Algebra, Second Edition. Oxford University Pres, New York, 350 pp.
4. Fraleigh, J. B., 2003. A First Course in Abstract Algebra, 7th Edition. Addison Wesley, 590 pp.
5. Gilbert, J., Gilbert, L., 2005. Elements of Modern Algebra, 6th Edition. Thomson Brooks/ Cole, 430 pp.
6. Herstein, I. N., 1975. Topic in Algebra, 2nd Edition. Wiley, 400 pp.
7. Hungerford, T. W., 1974. Algebra, Graduate Texts in Mathematics. New York, 502 pp.
8. Judson, T. W., 1997. Abstract Algebra Theory and Applications. VCU Mathematics Textbook Series, 357 pp.
9. Katznelson, Y., Katznelson, Y. R., 2008. A (Terse) Introduction to Linear Algebra. AMS, 215 pp.
10. Ledermann, W., 1991. Introduction to Group Theory. Longman Scientific and Technical, 176 pp.
11. Ledermann, W., 1989. Introduction to Group Characters, 2nd Edition. Cambridge University Pres, Cambridge, 227 pp.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Saniye Canan KARAARSLAN

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 20 Kasım 1987, İskenderun

Medeni Durumu: Bekar

Tel: +90 535 598 11 69

Email: [canankaraarslan@hotmail.com](mailto:canankaraarslan@hotmail.com)

Yazışma Adresi: Barıştepe Mah. 336. Sok. No: 46

İskenderun/ HATAY

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Pedagojik Formasyon	EÜ Eğitim Fakültesi	2014
Lisans	ÇÜ Fen-Ed. F. Matematik	2010
Lise	İskenderun Lisesi(Yabancı dil ağırlıklı)	2005

### YABANCI DİL

İngilizce