

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ORLICZ FONKSİYONUNA BAĞLI BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE  
ÖZELLİKLERİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Oğuz OĞUR**

**Matematik Anabilim Dalı**

**AĞUSTOS 2014  
SAMSUN**





T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORLICZ FONKSİYONUNA BAĞLI BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE  
ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Oğuz OĞUR  
(11210511)

Tezin Savunma Tarihi : 21 Ağustos 2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cenap DUYAR



**Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Matematik Anabilim Dalında**  
**Oğuz OĞUR Tarafından Hazırlanan**

**ORLICZ FONKSİYONUNA BAĞLI BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE**  
**ÖZELLİKLERİ**

**başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 21/08/2014 tarihinde yapılan sınav ile**  
**DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.**

**Başkan** : **Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU** .....  
Atatürk Üniversitesi

**Jüri Üyeleri** : **Doç. Dr. Cenap DUYAR** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Doç. Dr. İlker ERYILMAZ** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Celil NEBİYEY** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

.../.../2014

**Prof. Dr. Hüseyin DEMİR**  
Enstitü Müdürü



## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşturulmasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle çalışmamın matematiksel temeller ışığında şekillenmesini sağlayan Sayın Danışman Hocam Doç. Dr. Cenap DUYAR' a bitmek bilmeyen sabrı için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Engin bilgi ve tecrübelerini sınırsızca paylaşan ve bu çalışmanın her aşamasına katkı sağlayan Sayın Hocam Doç. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR' a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca doktora jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU, Sayın Doç. Dr. İlker ERYILMAZ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Celil NEBİYEV ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI' ya teşekkürlerimi sunarım.

Başta ailem ve dostlarım olmak üzere bana inanan ve beni destekleyen herkese teşekkür ederim.

Ağustos 2014

Oğuz OĞUR



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	ix
ORLICZ FONKSİYONUNA BAĞLI BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE ÖZELLİKLERİ .....	xi
ÖZET.....	xi
SOME DOUBLE SEQUENCE SPACES AND THEIR PROPERTIES DEPENDING ON ORLICZ FUNCTION.....	xiii
ABSTRACT .....	xiii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Literatür Özeti.....	2
2. GENEL BİLGİLER.....	7
2.1 Temel Kavramlar .....	7
2.2. Çift Dizi Uzayları .....	16
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	21
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	23
4.1. $m^2(M, \phi)$ Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri .....	23
4.2. $m^2(M, \phi, p)$ ve $m^2(M, A, \phi, p)$ Uzayları ve Bazı Topolojik Özellikleri.....	36
4.3. Cesaro-Orlicz Çift Dizi Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri.....	51
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	65
6. KAYNAKLAR .....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	71



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$w$	: Kompleks terimli diziler uzayı
$l^0$	: Reel terimli diziler uzayı
$w^{(2)}$	: Kompleks terimli çift diziler uzayı
$l_p$	: Kompleks terimli $p$ – toplanabilir diziler uzayı
$l_\infty$	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$l_p^{(2)}$	: Kompleks terimli $p$ – toplanabilir çift diziler uzayı
$l_\infty^{(2)}$	: Kompleks terimli sınırlı çift diziler uzayı
$l_0^{(2)}$	: Reel terimli çift diziler uzayı



# ORLICZ FONKSİYONUNA BAĞLI BAZI ÇİFT DİZİ UZAYLARI VE ÖZELLİKLERİ

## ÖZET

Bu tezde Orlicz fonksiyonu kullanılarak oluşturulan bazı çift dizi uzayları tanıtıldı ve literatürde dizi uzayları için değerlendirilen başlıca özellikler incelendi.

Bulgular kısmının birinci bölümünde  $M$  Orlicz fonksiyonu kullanılarak  $m^2(M, \phi)$  çift dizi uzayı tanımlandı ve bu uzayın üzerindeki norm ile Banach uzayı olduğu gösterildi. Yine solidlik, monotonluk ve bazı kapsama özellikleri incelendi.

İkinci bölümde  $M$  Orlicz fonksiyonu,  $A = (a_{ijkl})$  sonsuz çift matrisi kullanılarak  $m^2(M, \phi, p)$  ve  $m^2(M, A, \phi, p)$  çift dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların solidlik, monotonluk gibi bazı topolojik özellikleri gösterildi. Yine bazı kapsama özellikleri incelendi.

Son bölümde  $M$  Orlicz fonksiyonu kullanılarak  $Ces_M^{(2)}$  çift dizi uzayı tanımlandı. Ayrıca bu uzayın bazı topolojik özellikleri gösterildi.

**Anahtar Kelimeler:** Çift dizi; Solidlik; Monotonluk; Orlicz fonksiyonu; Cesaro-Orlicz çift dizi uzayı.



## SOME DOUBLE SEQUENCE SPACES AND THEIR PROPERTIES DEPENDING ON ORLICZ FUNCTION

### ABSTRACT

In this thesis, some double sequence spaces created by using Orlicz function were introduced and the main features evaluated in the literature for sequence spaces were studied.

In the first part of the finding section, double sequence space  $m^2(M, \phi)$  was defined by using Orlicz function  $M$  and it was shown that this space is a Banach space with its norm. Again, solidity, monotony and some inclusion properties were examined.

In the second part, double sequence spaces  $m^2(M, \phi, p)$ ,  $m^2(M, A, \phi, p)$  were defined by using Orlicz function  $M$  and infinity double matrice  $A = (a_{ijkl})$  and some topological properties of these spaces like solidity, monotony were shown. Also, some inclusion properties of these spaces were examined.

In the last part, double sequence space  $Ces_M^{(2)}$  was defined by using Orlicz function  $M$ . Also, some topological properties of this space were shown.

**Key Words:** Double sequence; Solidity; Monotony; Orlicz function; Double Cesaro-Orlicz sequence spaces.



## 1. GİRİŞ

Her  $x: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonuna bir kompleks çift dizi denir ve kısaca  $x = (x_{k,l})$  ile gösterilir. Bir  $x = (x_{k,l})$  çift dizisi verilsin. Eğer herhangi bir  $\varepsilon > 0$  verildiğinde her  $k, l \geq n_0$  için

$$|x_{k,l} - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $n_0$  doğal sayı bulunabiliyorsa  $x = (x_{k,l})$  çift dizisine  $a \in \mathbb{C}$  sayısına Pringsheim anlamında yakınsıyor, denir. Pringsheim anlamında yakınsaklık kavramı ilk olarak A. Pringsheim tarafından 1898 yılında “Elementare theorie der unendliche doppelreihen” çalışmasında tanımlandı. Daha sonra birçok yazar bazı çift dizi uzaylarını tanımladı ve bazı özelliklerini inceledi.

Sargent 1960 yılındaki “Some sequence spaces related to the  $l_p$  spaces” adlı çalışmasında  $m(\phi)$  dizi uzayını tanımladı ve bazı özelliklerini inceledi. Yine birçok yazar bu uzay ile ilgili bazı özellikleri inceledi ve bu uzayı kullanarak daha genel dizi uzaylarını çalıştı.  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $Ces_p$  Cesaro dizi uzayları ilk defa 1968 yılında “Programma van jaarlijkse prijsvragen (Annual problem section)” adlı çalışmada tanımlandı. Shiue 1970 yılındaki “On the cesaro sequence space” adlı çalışmada bu uzayların temel bazı özelliklerini inceledi. Yine birçok yazar Cesaro dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri inceledi. Lindenstrauss ve Tzafriri 1971 yılındaki “On Orlicz sequence spaces” adlı çalışmada  $M$  Orlicz fonksiyonunu kullanarak  $l_M$  dizi uzayını tanımladı ve bu uzayın bazı özelliklerini inceledi. Daha sonra birçok yazar  $m(\phi)$  ve  $Ces_p$  gibi bilinen bazı dizi uzaylarını ve Orlicz fonksiyonunu kullanarak daha genel dizi uzayları tanımladı ve bazı özelliklerini inceledi. Bu çalışmada,  $M$  Orlicz fonksiyonu kullanılarak bazı çift dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların solidlik, monotonluk ve kapsama özellikleri gibi bazı özellikleri incelendi.

## 1.1. Literatür Özeti

W. L. C. Sargent 1960 yılında yapmış olduğu “Some sequence spaces related to the  $l_p$  spaces” adlı çalışmasında

$$m(\phi) = \left\{ (x_k) \in w; \|x_k\|_{m(\phi)} = \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \left( \frac{1}{\phi_s} \sum_{n \in \sigma} |x_n| \right) < \infty \right\}$$

lineer uzayını tanımlamış, bu uzayın  $l_p$  dizi uzayları ve matris dönüşümleri ile ilişkisini incelemiştir. J. Lindenstrauss ve L. Tzafriri 1971 yılında yapmış oldukları “On orlicz sequence spaces” adlı çalışmada  $M$  Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$l_M = \left\{ x \in w; \exists \rho > 0, \sum_{k=1}^{\infty} M \left( \frac{|x_k|}{\rho} \right) < \infty \right\}$$

uzayını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir. S. D. Parashar ve B. Choudhary 1994 yılında yapmış oldukları “Sequence spaces defined by Orlicz functions” adlı çalışmada  $l_M$  uzayını

$$l_M(p) = \left\{ x \in w; \exists \rho > 0, \sum_{k=1}^{\infty} M \left( \frac{|x_k|}{\rho} \right)^{p_k} < \infty \right\}$$

uzayına genelleştirmiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. Burada  $p = (p_k)$  pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisidir. B. C. Tripathy ve M. Sen 2002 yılında yapmış oldukları “On a new class of sequences related to the  $\ell_p$  spaces” adlı çalışmada

$$m(\phi, p) = \left\{ (x_k) \in w; \|x_k\|_{m(\phi, p)} = \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \frac{1}{\phi_s} \left( \sum_{n \in \sigma} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

lineer uzayı tanımlanmış ve bu uzayın bazı özelliklerini incelenmiştir. B. C. Tripathy ve S. Mahanta 2003 yılında yapmış oldukları “On a new class of sequences related to the  $\ell_p$  space defined by Orlicz functions” adlı çalışmada,  $M$  bir Orlicz fonksiyonu ve  $q$  bir yarı norm olmak üzere

$$m(M, \phi, q) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \left( \frac{1}{\phi_s} \sum_{n \in \sigma} M \left( q \left( \frac{|x_n|}{\rho} \right) \right) \right) < \infty, \rho > 0 \right\}$$

lineer uzayını tanımlamıştır.

B. C. Tripathy ve S. Mahanta 2007 yılında yapmış oldukları “On a class of difference sequences related to the  $\ell_p$  space defined by Orlicz functions” adlı çalışmalarında Orlicz fonksiyonu ve fark dizileri yardımıyla  $m(M, \Delta, \phi)$  fark dizi uzayını tanımlamıştır.

Y. Altun ve T. Bilgin 2009 yılında yapmış oldukları “A new class of sequences related to the  $\ell_p$  space defined by orlicz function” adlı çalışmada Orlicz fonksiyonu ve matris dönüşümlerini kullanarak

$$m(M, A, \phi, p) = \left\{ x = (x_i) \in w; \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{i \in \sigma} M \left( \frac{|A_i(x)|}{\rho} \right)^{p_i} < \infty, \rho > 0 \right\}$$

lineer uzayını tanımlamıştır.

K. Raj, S. K. Sharma, A. Gupta ve A. Kumar 2011 yılında yapmış oldukları “A sequence space defined by a sequence of modulus functions” adlı çalışmada  $F = (f_k)$  modülüs fonksiyon dizisi yardımı ile

$$m(F, \phi, p) = \left\{ x = (x_i) \in w; \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \frac{1}{\phi_s} \left\{ \sum_{k \in \sigma} \left[ f_k \left( \frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \rho > 0 \right\}$$

lineer uzayını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir.

N. L. Braha 2011 yılında yapmış olduğu “New class of sequences related to the  $\ell^p$  spaces defined by a sequences of Orlicz functions” adlı çalışmasında Orlicz fonksiyonu, yarı-norm ve  $\lambda$  – dizileri yardımıyla

$$m(M, \phi, q, \lambda) = \left\{ x = (x_i) \in w; \lim_n \frac{1}{\phi_s} \sum_{n \in \sigma, \sigma \in P_s} M_n \left[ q \left( \frac{|\Lambda_n(x)|}{\rho} \right) \right]^{p_n} = 0, \rho > 0 \right\}$$

lineer uzayını tanımlamış ve ayrıca bu uzayın bazı özellikleri incelemiştir. B. C. Tripathy ve S. Borgohain 2013 yılında yapmış oldukları “On a class of  $n$ -normed sequences related to the  $l_p$  space” adlı çalışmada  $p$ -toplabilir dizi uzaylarıyla ilişkili  $n$ -normlu

$$(m(\phi), \|\cdot\|_n) = \left\{ x = (x_i) \in w; \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \phi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} \|(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k)\|_n < \infty \right\}$$

lineer uzayını tanımlamıştır.

$1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$Ces_p = \left\{ x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x(k)| \right)^p < \infty \right\}$$

uzayı ilk defa 1968 yılında “Programma van jaarlijkse prijsvragen (Annual problem section)” adlı çalışmada tanımlanmıştır. J. S. Shiue 1970 yılında yapmış olduğu “On the Cesaro sequence space” adlı çalışmada  $Ces_p$  uzayının bazı temel özelliklerini incelemiştir. G. M. Leibowitz 1971 yılında yapmış olduğu “A note on the Cesaro sequence spaces” adlı çalışmada yine  $Ces_p$  uzayının bazı özelliklerini incelemiştir. A. A. Jagers 1974 yılında yapmış olduğu “A note on Cesaro sequence spaces” adlı çalışmada  $Ces_p$  uzayının dualini bulmuştur. S. K. Lim ve P. Y. Lee 1988 yılında yapmış oldukları “An Orlicz extension of Cesaro sequence spaces” adlı çalışmada  $M$  Orlicz fonksiyonunu kullanarak

$$Ces_M = \left\{ x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\lambda x(k)| \right) < \infty, \lambda > 0 \right\}$$

uzayı tanımlanmış ve duali bulunmuştur.

Y. Cui ve R. Pluciennik 1997 yılında yapmış oldukları “Local uniform nonsquareness in Cesaro sequence spaces” adlı çalışmada  $Ces_p$  uzayının lokal uniform nonsquareness özelliği incelenmiştir. Y. Cui ve arkadaşları 2005 yılında yapmış oldukları “Basic topological and geometric properties of Cesaro-Orlicz spaces” adlı çalışmada  $Ces_M$  uzayının aşikar uzay olmaması için gerek ve şart verilmiştir. Ayrıca bu uzayın sıra süreklilik, kesin monotonluk, düzgün monotonluk

ve rotundity gibi bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. D. Kubiak 2009 yılında yapmış olduğu “A note on Cesaro-Orlicz sequence spaces” adlı çalışmada Cesaro-Orlicz uzayları arasındaki kapsama özellikleri vermiştir. Yine Orlicz fonksiyonunun  $\Delta_2$  koşulunu sağlaması durumunda bu uzayın bazı özellikleri gösterilmiştir.



## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.**  $X$  bir kompleks vektör uzay olsun ve  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin.

Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  vektör uzayı üzerinde norm,  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay denir;

a)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

b) her  $x \in X$  ve her  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,

c) her  $x, y \in X$  ve  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Maddox, 1970).

**Tanım 2.1.2.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayı verilsin. Eğer bu uzaydaki her Cauchy dizisi yine bu uzaydaki bir elemana yakınsıyorsa  $(X, \|\cdot\|)$  uzayına Banach uzayı denir (Maddox, 1970).

**Teorem 2.1.3.**  $1 \leq p < \infty$  ve  $w$  tüm kompleks dizilerin uzayını göstermek üzere

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

lineer uzayı üzerindeki

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile Banach uzayıdır.  $p = \infty$  olması durumunda

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup |x_k| < \infty \right\}$$

lineer uzayı üzerindeki

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile Banach uzayıdır (Maddox, 1970).

**Tanım 2.1.4.**  $p = (p_k)$  pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun.  $\sup p_k = H$  ve  $M = \max\{1, H\}$  olmak üzere

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

uzayı üzerindeki

$$d(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

fonksiyonu ile bir metrik uzayıdır (Maddox, 1970).

**Tanım 2.1.5.**  $\ell_{\infty}$ ,  $c$  ve  $c_0$  sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsayan dizi uzayları olsun.  $\Delta x = (\Delta x_n) = (x_n - x_{n+1})$  olmak üzere

- i)  $\ell_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_k); \Delta x \in \ell_{\infty}\}$
- ii)  $c(\Delta) = \{x = (x_k); \Delta x \in c\}$
- iii)  $c_0(\Delta) = \{x = (x_k); \Delta x \in c_0\}$

fark dizi uzayları  $\|x\|_{\Delta} = |x_1| + \|\Delta x\|_{\infty}$  normu ile birer Banach uzaylarıdır (Kızmaz, 1981).

**Tanım 2.1.6.**  $\varphi$ , sonlu elemanlı pozitif tam sayı kümelerinin ailesi olsun. Herhangi bir  $\sigma \in \varphi$  verildiğinde  $(c_n(\sigma))$  dizisi her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$c_n(\sigma) = \begin{cases} 1 & , n \in \sigma \\ 0 & , n \notin \sigma \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.  $s$  herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\sigma) \leq s$$

koşulunu sağlayan  $\sigma \in \varphi$  elemanlarının uzayı  $\varphi_s$  ile gösterilir (Sargent, 1960).

**Tanım 2.1.7.** Her pozitif  $n$  tam sayısı için  $0 < \phi_1 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1} < \infty$  ve  $(n+1)\phi_n \geq n\phi_{n+1}$  koşullarını sağlayan  $(\phi_n)$  dizilerinin uzayı  $\Phi$  ile gösterilir (Sargent, 1960).

**Tanım 2.1.8.**  $\phi \in \Phi$  olmak üzere  $m(\phi)$  lineer uzayı

$$m(\phi) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \varphi_s} \left\{ \frac{1}{\phi_s} \sum_{n \in \sigma} |x_n| \right\} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

Bu lineer uzayın üzerindeki

$$\|x\| = \sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \varphi_s} \left\{ \frac{1}{\phi_s} \sum_{n \in \sigma} |x_n| \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğu biliniyor (Sargent, 1960).

**Tanım 2.1.9.**  $x = (x_k)$  dizisinin yeniden düzenlenmiş dizilerinin kümesi  $S(x)$  olmak üzere  $n(\phi)$  lineer uzayı

$$n(\phi) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{u \in S(x)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \Delta \phi_n \right\} < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Bu lineer uzayın üzerindeki

$$\|x\| = \sup_{u \in S(x)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \Delta \phi_n \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğu biliniyor (Sargent, 1960).

**Tanım 2.1.10.**  $A = (a_{mn})$  bir sonsuz matris olsun.  $s = (s_n)$  dizisinin  $A(s)$  matris dönüşümü

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n$$

şeklinde tanımlanır (Petersen, 1966).

**Teorem 2.1.11.**  $A = (a_{mn})$  bir sonsuz matris olsun. Sınırlı dizilerin  $A(s)$  matris dönüşümünün var olması için gerek ve yeter koşul sıfıra yakınsayan dizilerin  $A(s)$  matris dönüşümünün var olmasıdır (Petersen, 1966).

**Teorem 2.1.12.** Bir  $A$  matrisinin sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul sıfıra yakınsayan dizileri sınırlı dizilere dönüştürmesidir. Yine  $A$  matrisinin her iki sınıftaki dizileri sınırlı dizilere dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul her  $m$  için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leq K$$

olacak şekilde  $K > 0$  sayısının var olmasıdır (Petersen, 1966).

**Teorem 2.1.13.**  $\phi, \psi \in \Phi$  olmak üzere  $m(\phi) \subseteq m(\psi)$  ( $n(\phi) \supseteq n(\psi)$ ) olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{s \geq 1} \left( \frac{\phi_s}{\psi_s} \right) < \infty$$

olmasıdır (Sargent, 1960).

**Teorem 2.1.14.**

- a) Her  $\phi \in \Phi$  için  $\ell_1 \subseteq m(\phi) \subseteq \ell_\infty$  sağlanır.
- b)  $m(\phi) = \ell_1$  ( $n(\phi) = \ell_\infty$ ) olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s < \infty$$

olmasıdır.

c)  $m(\phi) = \ell_\infty$  ( $n(\phi) = \ell_1$ ) olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{\phi_s}{s} \right) > 0$$

olmasıdır (Sargent, 1960).

**Tanım 2.1.15.**  $E$  bir dizi uzayı ve herhangi  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$  olsun. Her  $k \in \mathbb{N}$  için  $|a_k| \leq 1$  koşulunu sağlayan bütün  $(a_k)$  skaler dizileri için  $(x_k a_k) \in E$  oluyorsa  $E$  dizi uzayına Solid (veya Normal) uzay denir (Esi, Acikgöz ve Esi, 2013).

**Tanım 2.1.16.**  $E$  bir dizi uzayı olsun.  $\pi(k), \mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinin elemanlarının bir permutasyonu olmak üzere  $(x_k) \in E$  olması  $(x_{\pi(k)}) \in E$  olmasını gerektiriyorsa  $E$  dizi uzayına simetriktir denir (Esi, Acikgöz ve Esi, 2013).

**Tanım 2.1.17.**  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için her  $x, y \in (a, b)$  ve  $0 \leq \lambda \leq 1$  olmak üzere

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

koşulu sağlanıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $(a, b)$  üzerinde konveks fonksiyon denir (Rudin, 1970).

**Tanım 2.1.18.**  $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu sürekli, azalmayan ve konveks bir fonksiyon olsun. Eğer  $M(0) = 0$ ,  $x > 0$  için

$$M(x) > 0$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty$$

koşulları sağlanıyorsa  $M$  fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir.

$\eta(t)$  fonksiyonu azalmayan,  $t \geq 0$  için sağ sürekli,  $\eta(0)=0$ ,  $t > 0$  için  $\eta(t) > 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty$  koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere  $M$  Orlicz fonksiyonu her zaman

$$M(x) = \int_0^x \eta(t) dt$$

biçiminde temsil edilebilir. Burada  $\eta(t)$  fonksiyonu  $M$  Orlicz fonksiyonunun çekirdeği olarak bilinir (Krasnosel'skii ve Rutickii,1961).

**Tanım 2.1.19.**  $M$  bir Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer her  $t \geq 0$  için

$$M(2t) \leq CM(t)$$

olacak şekilde bir  $C > 0$  sayısı varsa  $M$  Orlicz fonksiyonu  $\Delta_2$ -koşulunu sağlıyor denir.

Eğer  $M$  Orlicz fonksiyonu  $\Delta_2$  -koşulunu sağlarsa  $l > 1$  sayısı ve her  $u$  pozitif sayısı için

$$M(lu) \leq K.l.M(u)$$

olacak şekilde  $K > 0$  sayısı vardır (Krasnosel'skii ve Rutickii,1961).

**Tanım 2.1.20.**  $M$  bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bir  $\ell_M$  lineer uzayı

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \rho > 0 \right\}$$

ile tanımlanır. Bu uzayın

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir normlu uzay olduğu biliniyor. Bu uzaya Orlicz dizi uzayı denir (Lindenstrauss ve Tzafriri, 1971).

**Tanım 2.1.21.**  $X$  bir lineer uzay olsun ve  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin.

Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda  $g$  fonksiyonuna  $X$  lineer uzayı üzerinde paranorm,  $(X, g)$  ikilisine de paranormlu uzay denir;

a)  $g(0) = 0$ ,

b) Her  $x \in X$  için  $g(-x) = g(x)$ ,

c) Her  $x, y \in X$  için  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ ,

d)  $(\lambda_n)$  skaler dizi,  $(x_n) \subset X$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olduğunda

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\lambda_n x_n - \lambda x) = 0$  sağlanır (Maddox, 1970).

**Teorem 2.1.22.**  $(p_k)$  pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq H = \sup p_k$  ve  $D = \max\{1, 2^{H-1}\}$  ise her  $k \in \mathbb{N}$  ve  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$

için

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D \left\{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \right\}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Raj, Jamwal ve Sharma, 2013).

**Tanım 2.1.23.**  $X$  vektör uzayı verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda

$\rho : X \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonuna  $X$  vektör uzayı üzerinde modüler denir;

a)  $\rho(x) = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $x = 0$  olmasıdır,

b) Her  $x \in X$  ve  $|\alpha| = 1$  koşulunu sağlayan her  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $\rho(\alpha x) = \rho(x)$ ,

c) Her  $x, y \in X$  ve  $\alpha + \beta = 1$  koşulunu sağlayan bütün  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  pozitif sayıları için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

sağlanır.

Eğer her  $x, y \in X$  ve  $\alpha + \beta = 1$  koşulunu sağlayan bütün  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  pozitif sayıları için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \rho(x) + \beta \rho(y)$$

sağlanırsa  $\rho$  modüler fonksiyonuna konveks modüler denir (Musielak, 1983).

**Tanım 2.1.24.**  $X$  bir vektör uzayı ve  $\rho$ ,  $X$  uzayı üzerinde bir modüler olsun. Bu takdirde

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

uzayına modüler uzay denir (Musielak, 1983).

**Teorem 2.1.25.**  $X$  bir reel vektör uzay ve  $\rho$ ,  $X$  reel uzayı üzerinde bir konveks modüler olsun. Bu takdirde

$$\|x\|_\rho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon  $X_\rho$  modüler uzayı üzerinde bir normdur. Bu norma Luxemburg normu denir (Musielak, 1983).

**Teorem 2.1.26.**  $X_\rho$  modüler uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır;

**i)** Herhangi  $x_1, x_2 \in X_\rho$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\rho(\lambda x_1) \leq \rho(\lambda x_2)$  eşitsizliği sağlanırsa  $\|x_1\|_\rho \leq \|x_2\|_\rho$  eşitsizliği gerçekleşir.

**ii)** Eğer  $\|x\|_\rho < 1$  ise  $\rho(x) \leq \|x\|_\rho$  olur (Musielak, 1983).

**Teorem 2.1.27.**  $X$  vektör uzayı üzerinde bir  $\rho$  modüleri ve  $\{x_k\} \subset X_\rho$  dizisi verilsin.  $x \in X_\rho$  olmak üzere  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_\rho = 0$  olması için gerek ve yeter koşul her  $\lambda > 0$  sayısı için  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\lambda(x_k - x)) = 0$  olmasıdır (Musielak, 1983).

**Teorem 2.1.28.**  $X = X(\Delta, \mu)$  ile  $\Delta$  üzerinde tanımlı,  $\|f\|_X < \infty$  koşulunu sağlayan bütün  $\mu$ -ölçülebilir kompleks değerli  $f(x)$  fonksiyonlarının uzayı gösterilsin. Eğer her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f_n \in X$ ,  $f_n(x) \geq 0$  ve hemen hemen her yerde  $f_n(x) \nearrow f(x)$

yakınsaması  $f \in X$  ve  $\|f_n\|_X \nearrow \|f\|_X$  olmasını gerektiriyorsa  $X$  uzayı, üzerindeki norm ile bir Banach uzayıdır (Luxemburg, 1955).

## 2.2. Çift Dizi Uzayları

**Tanım 2.2.1.**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  kümesinden  $\mathbb{C}$  kompleks uzayına tanımlı her  $x$  fonksiyonuna çift dizi denir ve kısaca  $(x_{k,l})$  ile gösterilir. Bütün kompleks terimli çift dizilerin uzayı  $w^{(2)}$  ile gösterilir. Buna göre

$$w^{(2)} = \{x = (x_{k,l}) ; k, l \in \mathbb{N}, x_{k,l} \in \mathbb{C}\}$$

yazılır ve bu küme her  $x, y \in w^{(2)}$  ve  $\alpha \in \mathbb{C}$  için  $\alpha x = (\alpha x_{k,l})$  ve  $x + y = (x_{k,l} + y_{k,l})$  işlemleri altında bir lineer uzaydır (Apostol, 1974).

**Tanım 2.2.2.**  $(x_{k,l})$  bir çift dizi olsun. Eğer verilen keyfi bir  $\varepsilon > 0$  sayısı için her  $k, l > n_\varepsilon$  olduğunda

$$|x_{k,l} - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_\varepsilon$  doğal sayısı varsa  $(x_{k,l})$  çift dizisi  $a \in \mathbb{C}$  sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Pringsheim yakınsak çift dizilerin uzayı  $c^{(2)}$  ile gösterilir (Apostol, 1974).

**Tanım 2.2.3.**  $(k, l) < (p, q)$  ( $k < p$  ve  $l < q$ ) olduğunda

$$x_{k,l} \leq x_{p,q}$$

oluyorsa  $(x_{k,l})$  çift dizisine azalmayan çift dizi denir (Apostol, 1974).

**Tanım 2.2.4.**  $x = (x_{k,l})$  kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{k,l \geq 1} |x_{k,l}| < \infty$$

oluyorsa  $x = (x_{k,l})$  çift dizisine sınırlı çift dizi denir.

Sınırlı çift dizilerin uzayı  $\ell_\infty^{(2)}$  ile gösterilir. Buna göre

$$\ell_\infty^{(2)} = \left\{ x = (x_{k,l}) \in w^{(2)} : \sup_{k,l \geq 1} |x_{k,l}| < \infty \right\}$$

şeklindedir (Moricz ve Rhoades, 1988).

**Tanım 2.2.5.**  $x = (x_{k,l})$  kompleks terimli bir çift dizi olsun. Eğer verilen her  $\varepsilon > 0$  için  $k, l, p, q > N$  olduğunda

$$|x_{k,l} - x_{p,q}| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı varsa  $x = (x_{k,l})$  çift dizisine Cauchy dizisi denir (Burkill ve Burkill, 1980).

**Tanım 2.2.6.**  $S_{k,l} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{i,j}$  kısmi toplamlar dizisinin Pringsheim anlamında

yakınsak olması halinde  $\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{k,l}$  kompleks terimli serisi yakınsaktır denir (Apostol, 1974).

**Teorem 2.2.7.** Her bir terimi sıfırdan farklı  $(a_{k,l})$  çift dizisi verilsin. Ayrıca

$k, l \rightarrow \infty$  iken  $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  olmak üzere

$$\left| \frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} \right| \rightarrow a \text{ ya da } \left| \frac{a_{k+1,l}}{a_{k,l}} \right| \rightarrow \tilde{a}$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır;

**i)**  $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisinin her bir satır ve sütun serisi mutlak yakınsak olmak üzere  $a < 1$

veya  $\tilde{a} < 1$  ise  $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisi mutlak yakınsaktır,

**ii)** Eğer  $a > 1$  veya  $\tilde{a} > 1$  ise  $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisi ıraksaktır (Limaye ve Zeltser, 2009).

**Teorem 2.2.8.** Her bir terimi sıfırdan farklı  $(a_{k,l})$  çift dizisi verilsin. Aşağıdaki özellikler vardır;

**i)**  $k, l \rightarrow \infty$  iken  $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  olmak üzere

$$l \left( 1 - \left| \frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} \right| \right) \rightarrow a \text{ ve } k \left( 1 - \left| \frac{a_{k+1,l}}{a_{k,l}} \right| \right) \rightarrow \tilde{a}$$

olsun. Bu takdirde

$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisinin her bir satır ve sütun serisi mutlak yakınsak ve  $a > 1$  ve  $\tilde{a} > 1$  ise

$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisi mutlak yakınsaktır,

ii) Eğer bazı  $k \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\lim_{l \rightarrow \infty} l \left( 1 - \left| \frac{a_{k,l+1}}{a_{k,l}} \right| \right)$  limiti var ve 1' den küçük veya bazı

$l \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( 1 - \left| \frac{a_{k+1,l}}{a_{k,l}} \right| \right)$  limiti var ve 1' den küçük ise  $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}$  serisi

ıraksaktır (Limaye ve Zeltser, 2009).

**Örnek 2.2.9.**  $\varepsilon > 0$  olmak üzere  $\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}$  serisi verilsin.  $k, l \rightarrow \infty$  iken

$$\left| \frac{\frac{1}{(k(l+1))^{1+\varepsilon}}}{\frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}} \right| \rightarrow 1 \text{ ve } \left| \frac{\frac{1}{((k+1)l)^{1+\varepsilon}}}{\frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}} \right| \rightarrow 1$$

bulunur. Bu durumda Teorem 2.2.7 sonuç vermez. Yine

$$\begin{aligned} \lim_{k,l \rightarrow \infty} l \left( 1 - \left| \frac{\frac{1}{(k(l+1))^{1+\varepsilon}}}{\frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}} \right| \right) &= \lim_{l \rightarrow \infty} l \left( 1 - \frac{l^{1+\varepsilon}}{(l+1)^{1+\varepsilon}} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{l+1} \right)^{1+\varepsilon} \right)}{\frac{1}{l}} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{-(1+\varepsilon) \left( 1 - \frac{1}{l+1} \right)^{\varepsilon} \left( \frac{1}{l+1} \right)^2}{-\frac{1}{l^2}} \\ &= 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} k \left( 1 - \left| \frac{1}{\frac{((k+1)l)^{1+\varepsilon}}{(kl)^{1+\varepsilon}}} \right| \right) = 1 + \varepsilon$$

olur. Ayrıca  $\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}$  serisinin her bir satır ve sütun serisi yakınsaktır. Böylece

Teorem 2.2.8 i) gereğince  $\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{1}{(kl)^{1+\varepsilon}}$  serisi mutlak yakınsaktır.

**Tanım 2.2.10.**  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\ell_p^{(2)}$  çift dizi uzayı

$$\ell_p^{(2)} = \left\{ x = (x_{k,l}) \in w^{(2)} : \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |x_{k,l}|^p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Bu uzay

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |x_{k,l}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Apostol, 1974).

**Tanım 2.2.11.** Bir  $E$  çift dizi uzayı verilsin ve bir  $K^{(2)} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  kümesi

$$K^{(2)} = \left\{ (n_i, k_j) : i, j \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 < \dots, k_1 < k_2 < \dots \right\}$$

şeklinde tanımlansın.  $E$  çift dizi uzayının  $K^{(2)}$  – adım uzayı

$$\lambda_{K^{(2)}}^E = \left\{ (x_{n_i, k_j}) \in w^{(2)} : (x_{i,j}) \in E, (n_i, k_j) \in K^{(2)} \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca  $(x_{n_i, k_j}) \in \lambda_{K^{(2)}}^E$  olmak üzere

$$b_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j} & , (i, j) \in K^{(2)} \\ 0 & , (i, j) \notin K^{(2)} \end{cases}$$

çift dizisine  $(x_{n_i, k_j})$  çift dizisinin kanonikal ön görüntüsü denir.

Eğer  $E$  çift dizi uzayı tüm  $K^{(2)}$  – adım uzaylarının kanonikal ön görüntülerini içeriyorsa  $E$  çift dizi uzayına monoton uzay denir (Khan ve Tabassum, 2011).

**Teorem 2.2.12.** Bir  $E$  dizi uzayı solid uzay ise monoton uzaydır (Khan ve Tabassum, 2011).

**Tanım 2.2.13.** Bir  $A = (a_{m,n,k,l})$  kompleks sayıların dört boyutlu sonsuz matrisi ve  $x = (x_{k,l}) \in w^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde  $Ax$  matris dönüşümü

$$(Ax)_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{m,n,k,l} x_{k,l}$$

şeklinde tanımlanır (Patterson, 2007).

**Tanım 2.2.14.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu ve pozitif reel sayıların sınırlı bir  $(p_{k,l})$  çift dizisi verilsin. Bu takdirde  $I_{p_{k,l}}^{(2)}(M)$  uzayı

$$I_{p_{k,l}}^{(2)}(M) = \left\{ x \in w^{(2)} : \exists \rho > 0, \sum_{k,l=1}^{\infty} \left( M \left( \frac{|x_{k,l}|}{\rho} \right) \right)^{p_{k,l}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Savaş ve Patterson, 2007).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünün birinci ve ikinci kısmında bahsedilen  $m^2(M, \phi)$ ,  $m^2(M, \phi, p)$  ve  $m^2(M, A, \phi, p)$  uzayları ve temel özellikleri Sargent (1960), Tripathy ve Mahanta (2003), Tripathy ve Sen (2002), Lindenstrauss ve Tzafriri (1971), Altun ve Bilgin (2009) çalışmalarındaki yöntemler kullanılarak incelendi.

Bulgular bölümünün son kısmında bahsedilen  $Ces_M^{(2)}$  uzayı ve temel özellikleri Shiue (1970), Jagers (1974), Cui ve arkadaşları (2005), Kubiak (2009) çalışmalarındaki yöntemler kullanılarak incelendi.



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. $m^2(M, \phi)$ Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri

**Tanım 4.1.1.** Eleman sayıları sırasıyla en fazla  $s$  ve  $t$  olan  $\sigma_1 \subset \mathbb{N}$  ve  $\sigma_2 \subset \mathbb{N}$  alt kümeleri ile elde edilen  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  alt kümelerinin ailesi  $\phi_{s,t}$  ile gösterilir.

Yine

$$k\phi_{k+1,l} \leq (k+1)\phi_{k,l} \text{ ve } l\phi_{k,l+1} \leq (l+1)\phi_{k,l}$$

koşullarını sağlayan azalmayan, pozitif  $\{\phi_{k,l}\}$  çift reel dizilerinin ailesi  $\Phi^{(2)}$  ile gösterilir.

**Tanım 4.1.2.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu ve  $\phi = \{\phi_{k,l}\} \in \Phi^{(2)}$  dizisi verilsin. O zaman  $m^2(M, \phi)$  kümesi

$$m^2(M, \phi) = \left\{ x \in w^{(2)} : \exists \rho > 0, \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Teorem 4.1.3.**  $m^2(M, \phi)$  kümesi  $\mathbb{C}$  üzerinde çift dizilerin bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır.

**İspat.**  $x, y \in m^2(M, \phi)$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) < \infty \quad (4.1)$$

ve

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right) < \infty \quad (4.2)$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif sayıları vardır.  $\rho_3 = \max\{2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2\}$  şeklinde tanımlansın.  $M$  Orlicz fonksiyonunun azalmayan ve konveks olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|\alpha x_{i,j} + \beta y_{i,j}|}{\rho_3} \right) &\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|\alpha x_{i,j}|}{\rho_3} + \frac{|\beta y_{i,j}|}{\rho_3} \right) \\
&\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|\alpha x_{i,j}|}{2|\alpha|\rho_1} + \frac{|\beta y_{i,j}|}{2|\beta|\rho_2} \right) \\
&= \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{2\rho_1} + \frac{|y_{i,j}|}{2\rho_2} \right) \\
&\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) + \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right) \\
&< \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) + \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ve (4.1), (4.2) ifadeleri kullanılırsa  $\alpha x + \beta y \in m^2(M, \phi)$  elde edilir. Böylece  $m^2(M, \phi)$  uzayı  $w^{(2)}$  çift dizi uzayının alt uzayıdır.

**Teorem 4.1.4.**  $m^2(M, \phi)$  uzayı herhangi bir  $x \in m^2(M, \phi)$  için

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \phi_{s,t} \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlı  $\|\cdot\|$  fonksiyonu ile bir normlu uzaydır.

**İspat.**

**a)** Herhangi  $x \in m^2(M, \phi)$  için tanım gereğince  $\|x\| \geq 0$  olduğu görülür.

**b)** Eğer  $x = 0$  ise her  $\rho > 0$  için  $M(0) = 0$  olduğundan  $\|x\| = 0$  elde edilir.

Tersine  $\|x\| = 0$  olsun. Bu takdirde  $M$  Orlicz fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \phi_{s,t} \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq 1$$

eşitsizliği bütün  $\rho > 0$  sayıları için sağlanır. Buradan her bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ve her  $\rho > 0$  sayısı için

$$M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq \phi_{1,1}$$

olur. En az bir  $(i_0, j_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $x_{i_0, j_0} \neq 0$  olsun.  $M$  Orlicz fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon ve  $\lim_{u \rightarrow \infty} M(u) = \infty$  olduğundan her  $u \in [a, \infty)$  için  $M(u) > \phi_{1,1}$  olacak

şekilde  $a > 0$  sayısı vardır. Eğer  $\rho_1 = \frac{|x_{i_0, j_0}|}{a}$  ise  $\frac{|x_{i_0, j_0}|}{\rho_1} \in [a, \infty)$  olur. Böylece

$M\left(\frac{|x_{i_0, j_0}|}{\rho_1}\right) > \phi_{1,1}$  bulunur. Bu ise her bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ve her  $\rho$  pozitif sayısı için

$$M\left(\frac{|x_{i, j}|}{\rho}\right) \leq \phi_{1,1}$$

olması ile çelişir. Dolayısıyla her  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $x_{i, j} = 0$  olur. Buradan  $x = 0$  elde edilir.

c) Herhangi bir  $x \in m^2(M, \phi)$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  verilsin. Eğer  $\lambda = 0$  ise  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  olduğu

kolayca görülür.  $\lambda \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $\rho_1 = \frac{\rho}{|\lambda|}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \inf \left\{ \rho > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(\frac{|\lambda x_{i,j}|}{\rho}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \rho > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(\frac{|x_{i,j}|}{\frac{\rho}{|\lambda|}}\right) \leq 1 \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \rho_1 > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho_1}\right) \leq 1 \right\} \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

elde edilir.

d) Herhangi  $x, y \in m^2(M, \phi)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho'}\right) \leq K' \text{ ve } \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(\frac{|y_{i,j}|}{\rho''}\right) \leq K''$$

olacak şekilde  $\rho' > 0, \rho'' > 0, K' > 1$  ve  $K'' > 1$  reel sayıları vardır.  $\rho_1 = K' \rho'$  olsun.

$M$  Orlicz fonksiyonu konveks ve  $0 < \frac{1}{K'} < 1$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{K' \rho'} \right) \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \frac{1}{K'} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho'} \right) \\
&\leq \frac{1}{K'} K' = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\rho_2 = K'' \rho''$  seçilirse

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right) \leq 1$$

bulunur. Şimdi  $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$  olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} + y_{i,j}|}{\rho_3} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} + y_{i,j}|}{\rho_1 + \rho_2} \right) \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{|y_{i,j}|}{\rho_1 + \rho_2} \right) \\
&\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) \\
&\quad + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right) \\
&\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\rho_1, \rho_2$  ve  $\rho_3$  sayıları pozitif olduğundan

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &= \inf \left\{ \rho_3 > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} + y_{i,j}|}{\rho_3} \right) \leq 1 \right\} \\
&\leq \inf \left\{ \rho_1 > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) \leq 1 \right\} \\
&\quad + \inf \left\{ \rho_2 > 0: \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho_2} \right) \leq 1 \right\} = \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.5.**  $m^2(M, \phi)$  uzayı üzerindeki norm ile bir Banach uzayıdır.

**İspat.**  $m^2(M, \phi)$  uzayında keyfi bir Cauchy dizisi  $\{x^{(k)}\}$  olsun. Bu takdirde her bir  $k, l \in \mathbb{N}$  için

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(l)}|}{\|x^{(k)} - x^{(l)}\|} \right) \leq 1$$

yazılır. Böylece her  $k, l \in \mathbb{N}$  ve bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için

$$M \left( \frac{|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(l)}|}{\|x^{(k)} - x^{(l)}\|} \right) \leq \phi_{1,1} \quad (4.3)$$

bulunur.  $M$  Orlicz fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\phi_{1,1} \leq M(x_0) \quad (4.4)$$

olacak şekilde  $x_0 > 1$  sayısı vardır.  $\{x^{(k)}\}$  bir Cauchy dizisi olduğundan her  $k, l \geq n_0$  olduğunda

$$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \frac{\varepsilon}{x_0} \quad (4.5)$$

olacak şekilde  $n_0$  doğal sayısı vardır. Böylece (4.3), (4.4) ve (4.5) ifadeleri kullanılırsa her  $k, l \geq n_0$  ve  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için

$$M \left( \frac{|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(l)}|}{\|x^{(k)} - x^{(l)}\|} \right) \leq \phi_{1,1} \leq M(x_0)$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} |x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(l)}| &\leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\| x_0 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $\{x_{i,j}^{(k)}\}$  dizisi her bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\mathbb{C}$  kompleks sayılar uzayında bir Cauchy dizisidir. Böylece her bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $k \rightarrow \infty$  iken  $|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}| \rightarrow 0$  olacak şekilde  $x_{i,j} \in \mathbb{C}$  vardır. Bu şekilde bir  $x = \{x_{i,j}\}$  kompleks sayı dizisi tanımlanır.  $M$  Orlicz fonksiyonunun sürekli olduğu kullanılırsa, her  $k \geq n_0$  olduğunda ve  $l \rightarrow \infty$  iken  $\rho_0 = \sup_{k, l \geq n_0} \|x^{(k)} - x^{(l)}\|$  için

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}|}{\rho_0} \right) \leq 1$$

olur. Böylece her  $k \geq n_0$  için

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\| &= \inf \left\{ \rho > 0 : \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq 1 \right\} \\ &\leq \rho_0 = \sup_{k,l \geq n_0} \|x^{(k)} - x^{(l)}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{x_0} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $\{x_{i,j}^{(n_0)}\} \in m^2(M, \phi)$  olduğundan

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_1} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho_1 > 0$  sayısı vardır.  $\rho_2 = \rho_0 + \rho_1$  olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_2} \right) &= \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} - x_{i,j}^{(n_0)} + x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} - x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_0 + \rho_1} + \frac{|x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_0 + \rho_1} \right) \\ &= \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{\rho_0 |x_{i,j} - x_{i,j}^{(n_0)}|}{(\rho_0 + \rho_1) \rho_0} + \frac{\rho_1 |x_{i,j}^{(n_0)}|}{(\rho_0 + \rho_1) \rho_1} \right) \\ &\leq \frac{\rho_0}{(\rho_0 + \rho_1)} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j} - x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_0} \right) \\ &\quad + \frac{\rho_1}{(\rho_0 + \rho_1)} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}^{(n_0)}|}{\rho_1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $x \in m^2(M, \phi)$  olur.

**Teorem 4.1.6.**  $m^2(M, \phi)$  solid uzaydır.

**İspat.** Her  $i, j \in \mathbb{N}$  için  $|\alpha_{i,j}| \leq 1$  koşulunu sağlayan  $\alpha = \{\alpha_{i,j}\}$  dizisi ve

$y = \{y_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  dizisi verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  sayısı vardır. Buna göre

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|\alpha_{i,j} y_{i,j}|}{\rho} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|\alpha_{i,j}| |y_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $\alpha y = \{\alpha_{i,j} y_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  olur, dolayısıyla  $m^2(M, \phi)$  uzayının solid uzay olduğu elde edilir.

**Sonuç 4.1.7.**  $m^2(M, \phi)$  monoton uzaydır.

**Teorem 4.1.8.**  $m^2(M, \phi)$  simetrik uzaydır.

**İspat.**  $\{x_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  dizisi verilsin ve  $\{y_{i,j}\}, \{x_{i,j}\}$  dizisinin bir yeniden düzenlenmiş dizisi olsun. Bu takdirde her bir  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $y_{i,j} = x_{m_i, n_j}$  olacak şekilde  $(m_i, n_j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|y_{i,j}|}{\rho} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{m_i, n_j}|}{\rho} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $\{y_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  olduğunu gösterir.

**Teorem 4.1.9.**  $\phi, \psi \in \Phi^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde  $m^2(M, \phi) \subseteq m^2(M, \psi)$  olması için

gerek ve yeter koşul  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty$  olmasıdır.

**İspat.**  $m^2(M, \phi) \subseteq m^2(M, \psi)$  olsun ve her  $(s,t) \geq (1,1)$  için  $\alpha_{s,t} = \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}}$  şeklinde

tanımlansın. Eğer  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \alpha_{s,t} = \infty$  ise bu takdirde  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{s_i, t_i} = \infty$  olacak şekilde en az

bir  $\{\alpha_{s_i, t_i}\}$  alt dizisi vardır. Bu ise her  $K > 0$  için  $m \geq m_0$  olduğunda  $\alpha_{s_m, t_m} > K$  olacak şekilde  $m_0 \in \mathbb{N}$  var demektir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \alpha_{s,t} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &\geq \sup_{\substack{m \geq m_0 \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}}} \alpha_{s_m, t_m} \frac{1}{\phi_{s_m, t_m}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &> K \sup_{\substack{m \geq m_0 \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}}} \frac{1}{\phi_{s_m, t_m}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Olur. Ayrıca  $m \geq m_0$  ve  $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}$  olmak üzere

$$\sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) > \phi_{s_m, t_m}$$

koşulunu sağlayan  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  seçildiğinde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) > K$$

bulunur. Bu ise  $x = \{x_{i,j}\} \notin m^2(M, \psi)$  çelişkisini verir. Böylece  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty$

elde edilir.

Tersine  $K = \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty$  olsun. Buradan her  $(s,t) \geq (1,1)$  için

$\phi_{s,t} \leq K\psi_{s,t}$  yazılır. Herhangi bir  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{K\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) &\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M, \psi)$  olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.1.10.**  $m^2(M, \phi) = m^2(M, \psi)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty \text{ ve } \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right)^{-1} < \infty \text{ olmasıdır.}$$

**Teorem 4.1.11.**  $M, M_1$  ve  $M_2$  fonksiyonları  $\Delta_2$ -koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a)  $m^2(M_1, \phi) \subseteq m^2(M \circ M_1, \phi)$ ,  
b)  $m^2(M_1, \phi) \cap m^2(M_2, \phi) \subseteq m^2(M_1 + M_2, \phi)$ .

**İspat.**

a) Herhangi bir  $x = \{x_{k,l}\} \in m^2(M_1, \phi)$  verilsin. Buradan

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_1 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır.

$M$  Orlicz fonksiyonu  $x = 0$  noktasında sağ sürekli olduğundan keyfi her  $\varepsilon > 0$  için  $0 \leq t < \delta$  olduğunda  $M(t) < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta \in (0,1)$  sayısı seçilebilir.

$y_{i,j} = M_1 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right)$  şeklinde tanımlansın. Böylece

$$\sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M(y_{i,j}) = \sum_{\substack{y_{ij} \leq \delta \\ (i,j) \in \sigma_1 \times \sigma_2}} M(y_{i,j}) + \sum_{\substack{y_{ij} > \delta \\ (i,j) \in \sigma_1 \times \sigma_2}} M(y_{i,j})$$

yazılabilir.

$M$  Orlicz fonksiyonu ve  $y_{i,j} \leq \delta < 1$  olduğunda

$$\sum_{y_{ij} \leq \delta} M(y_{i,j}) \leq \sum_{y_{ij} \leq \delta} y_{i,j} M(1) \leq M(2) \sum_{y_{ij} \leq \delta} y_{i,j} \quad (4.6)$$

bulunur. Yine  $y_{i,j} > \delta$  için  $\frac{y_{i,j}}{\delta} > 1$  ve  $M$  Orlicz fonksiyonu  $\Delta_2$ -koşulunu

sağladığından

$$M(y_{i,j}) < M \left( 1 + \frac{y_{i,j}}{\delta} \right) < \frac{1}{2} M(2) + \frac{1}{2} M \left( \frac{2y_{i,j}}{\delta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_{i,j}}{\delta}\right) + \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_{i,j}}{\delta}\right) \\
&\leq T \frac{y_{i,j}}{\delta} M(2)
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $T > 0$  sayısı vardır. Böylece

$$\sum_{y_{ij}>\delta} M(y_{i,j}) \leq \sum_{y_{ij}>\delta} T \frac{y_{i,j}}{\delta} M(2) = T \frac{M(2)}{\delta} \sum_{y_{ij}>\delta} y_{i,j} \quad (4.7)$$

olur.

(4.6) ve (4.7) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M\left(M_1\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho}\right)\right) &= \sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M(y_{i,j}) \\
&\leq M(2) \sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} y_{i,j} \\
&\quad + T \frac{M(2)}{\delta} \sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} y_{i,j} \\
&= M(2) \sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_1\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho}\right) \\
&\quad + T \frac{M(2)}{\delta} \sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_1\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho}\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise  $x \in m^2(M \circ M_1, \phi)$  olduğunu gösterir.

**b)** Herhangi bir  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M_1, \phi) \cap m^2(M_2, \phi)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_1\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho_1}\right) < \infty$$

ve

$$\sup_{\substack{(s,t)\geq(1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_2\left(\frac{|x_{i,j}|}{\rho_2}\right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif reel sayıları vardır.  $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$  şeklinde

tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} (M_1 + M_2) \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_3} \right) &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_3} \right) + M_2 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_3} \right) \right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) + M_2 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_2} \right) \right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_1 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_1} \right) \\
&\quad + \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M_2 \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho_2} \right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $x \in m^2(M_1 + M_2, \phi)$  elde edilir.

**Teorem 4.1.12.** Her  $\phi \in \Phi^{(2)}$  için aşağıdaki özellikler sağlanır;

- a)  $l_1^{(2)}(M) \subseteq m^2(M, \phi) \subseteq l_\infty^{(2)}(M)$ ,
- b)  $l_1^{(2)}(M) = m^2(M, \phi) \Leftrightarrow \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} < \infty$ ,
- c)  $m^2(M, \phi) = l_\infty^{(2)}(M) \Leftrightarrow \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} > 0$ .

**İspat:** a) Herhangi bir  $x = \{x_{i,j}\} \in l_1^{(2)}(M)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right)$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  sayısı vardır. Bir  $B$  kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$B = \left\{ \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) : (s,t) \geq (1,1), \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t} \right\}.$$

$\{\phi_{s,t}\}$  çift dizisi azalmayan olduğundan  $\left\{ \frac{1}{\phi_{s,t}} \right\}$  çift dizisi artmayandır. Böylece her

$b \in B$  için

$$b \leq \frac{1}{\phi_{1,1}} \sum_{i,j=1}^{\infty} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right)$$

yazılır. Buradan da

$$\phi_{1,1} \cdot \sup B \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

bulunur. Böylece  $x \in m^2(M, \phi)$  elde edilir.

Yine  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M, \phi)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır. Böylece her  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için

$$M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq \phi_{1,1} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olur. Buradan da  $x \in l_{\infty}^{(2)}(M)$  elde edilir.

**b)**  $l_1^{(2)}(M) = m^2(M, \phi)$  olsun. Eğer her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = 1$  alınırsa

$l_1^{(2)}(M) = m^2(M, \psi)$  olur. Bu takdirde  $m^2(M, \phi) = m^2(M, \psi)$  olacağından Teorem

4.1.9' den

$$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} = \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} < \infty$$

elde edilir.

Tersine,  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} < \infty$  olsun. Eğer her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = 1$  alınırsa

$l_1^{(2)}(M) = m^2(M, \psi)$  olacağından Teorem 4.1.9 gereğince

$$m^2(M, \phi) \subseteq l_1^{(2)}(M)$$

bulunur. a) şikkından dolayı  $l_1^{(2)}(M) \subseteq m^2(M, \phi)$  olduğundan istenen elde edilir.

**c)** Her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = s.t$  alınırsa  $l_{\infty}^{(2)}(M) = m^2(M, \psi)$  olur. Gerçekten

$x \in l_{\infty}^{(2)}(M)$  ise her  $(s, t) \geq (1, 1)$  ve  $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}$  için

$$\frac{1}{s.t} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \leq \frac{1}{s.t} s.t. \sup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır. Buradan  $x \in m^2(M, \psi)$  olduğu yani

$l_{\infty}^{(2)}(M) \subseteq m^2(M, \psi)$  kapsaması bulunur. a) şikkından dolayı da ters kapsama vardır.

Şimdi  $m^2(M, \phi) = l_\infty^{(2)}(M)$  olsun. Bu takdirde  $m^2(M, \phi) = m^2(M, \psi)$

olur. Teorem 4.1.9 gereğince  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{s.t}{\phi_{s,t}} < \infty$  ve  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} < \infty$  olur. Böylece

$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} > 0$  elde edilir.

Tersine,  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} > 0$  olsun. Bu takdirde  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{s.t}{\phi_{s,t}} < \infty$  olur ve Teorem

4.1.9 kullanılırsa

$$m^2(M, \psi) = l_\infty^{(2)}(M) \subseteq m^2(M, \phi)$$

bulunur. Ayrıca a) şikkından  $m^2(M, \phi) \subseteq l_\infty^{(2)}(M)$  kapsaması vardır. Böylece

$m^2(M, \phi) = l_\infty^{(2)}(M)$  elde edilir.

#### 4.2. $m^2(M, \phi, p)$ ve $m^2(M, A, \phi, p)$ Uzayları ve Bazı Topolojik Özellikleri

**Tanım 4.2.1.** Eleman sayıları sırasıyla en fazla  $s$  ve  $t$  olan  $\sigma_1 \subset \mathbb{N}$  ve  $\sigma_2 \subset \mathbb{N}$  alt kümeleri ile elde edilen  $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  alt kümelerinin ailesi  $\varphi_{s,t}$  ile gösterilir.

Yine

$$k\phi_{k+1,l} \leq (k+1)\phi_{k,l} \text{ ve } l\phi_{k,l+1} \leq (l+1)\phi_{k,l}$$

koşullarını sağlayan azalmayan, pozitif  $\{\phi_{k,l}\}$  çift dizilerinin ailesi  $\Phi^{(2)}$  ile gösterilir.

**Tanım 4.2.2.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu ve  $\phi = \{\phi_{k,l}\} \in \Phi^{(2)}$  dizisi verilsin. O zaman  $\{p_{ij}\}$  sınırlı bir pozitif reel sayı dizisi olmak üzere  $m^2(M, \phi, p)$  kümesi

$$m^2(M, \phi, p) = \left\{ x \in w^2 : \exists \rho > 0, \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 4.2.3.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu ve  $\phi = \{\phi_{k,l}\} \in \Phi^{(2)}$  dizisi verilsin.  $A = \{a_{ijkl}\}$  bir sonsuz çift matris ve  $\{p_{i,j}\}$  sınırlı bir pozitif reel sayı dizi olmak üzere  $m^2(M, A, \phi, p)$  kümesi

$$m^2(M, A, \phi, p) = \left\{ x \in w^2 : \exists \rho > 0, \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 4.2.4.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu verilsin.  $A = \{a_{ijkl}\}$  bir sonsuz çift matris ve  $\{p_{i,j}\}$  sınırlı bir pozitif reel sayı dizi olmak üzere  $l^{(2)}(M, A, p)$  ve  $l^{(2)}(M, A, \infty)$  kümeleri

$$l^{(2)}(M, A, p) = \left\{ x \in w^2 : \exists \rho > 0, \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \right\}$$

ve

$$l^{(2)}(M, A, \infty) = \left\{ x \in w^2 : \exists \rho > 0, \sup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanırlar.

**Teorem 4.2.5.**  $m^2(M, A, \phi, p)$  kümesi  $\mathbb{C}$  üzerinde çift dizilerin bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

**İspat.**  $x, y \in m^2(M, A, \phi, p)$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \phi_{s,t} \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \quad (4.8)$$

ve

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \phi_{s,t} \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty \quad (4.9)$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif sayıları vardır.  $\rho_3 = \max\{2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2\}$  ve

$H = \sup_{i,j \in \mathbb{N}} p_{i,j}$  olsun.  $M$  Orlicz fonksiyonunun azalmayan, konveks fonksiyon olması

ve Teorem 2.1.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(\alpha x + \beta y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} &\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|\alpha A_{i,j}(x)|}{\rho_3} + \frac{|\beta A_{i,j}(y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|\alpha A_{i,j}(x)|}{2|\alpha|\rho_1} + \frac{|\beta A_{i,j}(y)|}{2|\beta|\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &= \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{2\rho_1} + \frac{|A_{i,j}(y)|}{2\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{1}{2} M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left( \frac{1}{2} \right)^{p_{i,j}} \max\{1, 2^{H-1}\} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \Bigg\} \\
& < maks \{1, 2^{H-1}\} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right)^{p_{i,j}} + \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \right\} \\
& = maks \{1, 2^{H-1}\} \left\{ \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right)^{p_{i,j}} + \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlik ve (4.8), (4.9) ifadeleri kullanılırsa  $\alpha x + \beta y \in m^2(M, A, \phi, p)$  elde edilir. Böylece  $m^2(M, A, \phi, p)$  uzayı  $w^{(2)}$  çift dizi uzayının alt uzayıdır.

**Teorem 4.2.6.**  $m^2(M, \phi, p)$  kümesi  $\mathbb{C}$  üzerinde çift dizilerin bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

**İspat.** Her  $m, n, k, l \in \mathbb{N}$  için

$$a_{m,n,k,l} = \begin{cases} 1 & , (m,n) = (k,l) \\ 0 & , (m,n) \neq (k,l) \end{cases}$$

olmak üzere  $A = \{a_{nmkl}\}$  sonsuz çift matrisi alınırsa  $m^2(M, A, \phi, p) = m^2(M, \phi, p)$  olur. Böylece Teorem 4.2.5' ten  $m^2(M, \phi, p)$  uzayı  $w^{(2)}$  çift dizi uzayının alt uzayıdır.

**Teorem 4.2.7.**  $l^{(2)}(M, A, p)$  ve  $l^{(2)}(M, A, \infty)$  kümeleri  $\mathbb{C}$  kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzaylarıdır.

**İspat.** Herhangi  $x, y \in l^{(2)}(M, A, p)$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}$  verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{ij}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{ij}} < \infty$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{ij}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{ij}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif sayıları vardır.  $\rho_3 = \max\{2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2\}$  ve

$H = \sup_{i,j \in \mathbb{N}} p_{i,j}$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde Teorem 4.2.5' te yapılan işlemler

benzer şekilde yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(\alpha x + \beta y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\
& \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|\alpha A_{i,j}(x)|}{\rho_3} + \frac{|\beta A_{i,j}(y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\
& \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|\alpha A_{i,j}(x)|}{2|\alpha|\rho_1} + \frac{|\beta A_{i,j}(y)|}{2|\beta|\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{2\rho_1} + \frac{|A_{i,j}(y)|}{2\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\
& \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{p_{i,j}} \max\{1, 2^{H-1}\} \left\{ \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right)^{p_{i,j}} + \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \right\} \\
& < \max\{1, 2^{H-1}\} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right)^{p_{i,j}} + \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \right\} \\
& = \max\{1, 2^{H-1}\} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right)^{p_{i,j}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left( M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right)^{p_{i,j}} \right\} \\
& < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\alpha x + \beta y \in l^{(2)}(M, A, p)$  elde edilir. Böylece  $l^{(2)}(M, A, p)$  uzayı  $w^{(2)}$  çift dizi uzayının alt uzayıdır.

Benzer şekilde  $l^{(2)}(M, A, \infty)$  kümesinin  $\mathbb{C}$  kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olduğu görülür.

**Teorem 4.2.8.**  $R = \max\{1, H\}$  olmak üzere  $m^2(M, A, \phi, p)$  uzayı

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\}$$

fonksiyonu ile bir paranormlu uzayıdır.

**İspat.**

a) Herhangi bir  $x \in m^2(M, A, \phi, p)$  için  $g(x) = g(-x)$  olduğu kolayca görülür.

b)  $x=0$  ise  $A_{i,j}(0) = 0$  ve  $M(0) = 0$  olduğundan  $g(x) = 0$  elde edilir.

c)  $x, y \in m^2(M, A, \phi, p)$  elemanları için

$$\left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1$$

ve

$$\left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif reel sayıları vardır.  $h = \inf_{i,j \in \mathbb{N}} p_{i,j}$  olmak üzere

$\rho_3 = 2^{\frac{R}{h}} (\rho_1 + \rho_2)$  şeklinde tanımlansın.  $M$  Orlicz fonksiyonunun azalmayan ve konveks olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x+y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\ &= \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x) + A_{i,j}(y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\ &\leq \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_3} + \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\ &= \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{2^{\frac{R}{h}} (\rho_1 + \rho_2)} + \frac{|A_{i,j}(y)|}{2^{\frac{R}{h}} (\rho_1 + \rho_2)} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\ &= \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{\rho_1}{2^{\frac{R}{h}} (\rho_1 + \rho_2)} \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{2^{\frac{R}{h}} (\rho_1 + \rho_2)} \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_1}{2^{\frac{R}{h}}(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1}\right) + \frac{\rho_2}{2^{\frac{R}{h}}(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\leq \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_1}{2^{\frac{R}{h}}(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\quad + \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_2}{2^{\frac{R}{h}}(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\leq \left[ \left(\frac{1}{2^{\frac{R}{h}}}\right)^h \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\quad + \left[ \left(\frac{1}{2^{\frac{R}{h}}}\right)^h \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} M\left(\frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M\left(\frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M\left(\frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2}\right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece herhangi  $x, y \in m^2(M, A, \phi, p)$  için

$$\left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x+y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1$$

olur. Yine  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  ve  $\rho_3$  sayıları pozitif reel sayılar olduğundan

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \inf \left\{ \rho_3^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x+y)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \rho_1^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\ &\quad + \inf \left\{ \rho_2^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(y)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

**d)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \lambda$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$  olacak şekilde  $\{\lambda^n\} \subset \mathbb{C}$  ve  $\{x^n\} \subset m^2(M, A, \phi, p)$

dizileri verilsin. c) şıkkından dolayı

$$0 \leq g(\lambda^n x^n - \lambda x) \leq g(\lambda^n x^n - \lambda^n x) + g(\lambda^n x - \lambda x) \quad (4.10)$$

yazılır.

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda^n \neq 0$  olsun.  $t_n = \frac{\rho_n}{|\lambda^n|}$  ve  $S = \max \left\{ \left| \lambda^n \right|^{\frac{h}{R}}, |\lambda^n| \right\}$  olmak

üzere

$$g(\lambda^n x^n - \lambda^n x) = \inf \left\{ \rho_n^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(\lambda^n x^n - \lambda^n x)|}{\rho_n} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf \left\{ \rho_n^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x^n - x)|}{\left( \frac{\rho_n}{|\lambda^n|} \right)} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \inf \left\{ \left( |\lambda^n| t_n \right)^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x^n - x)|}{t_n} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\
&\leq S.\inf \left\{ \left( t_n \right)^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x^n - x)|}{t_n} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(\lambda^n x^n - \lambda^n x) \leq \max \left\{ \left| \lambda^n \right|^{\frac{h}{R}}, \left| \lambda^n \right| \right\} \cdot g(x^n - x) \quad (4.11)$$

sağlanır.

Benzer şekilde her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda^n \neq \lambda$  olsun.  $d_n = \left( \frac{\rho_n}{|\lambda^n - \lambda|} \right)$  olmak üzere

$g(\lambda^n x - \lambda x)$

$$\begin{aligned}
&= \inf \left\{ \rho_n^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(\lambda^n x - \lambda x)|}{\rho_n} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \inf \left\{ \left( |\lambda^n - \lambda| d_n \right)^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \left[ \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{d_n} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right]^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \left| \lambda^n - \lambda \right|^{\frac{h}{R}}, \left| \lambda^n - \lambda \right| \right\} g(x)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$g(\lambda^n x - \lambda x) \leq maks \left\{ \left| \lambda^n - \lambda \right|^{\frac{h}{R}}, \left| \lambda^n - \lambda \right| \right\} . g(x) \quad (4.12)$$

bulunur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = \lambda$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x$  olduğundan (4.11) ve (4.12) ifadelerinin sağ tarafı  $n \rightarrow \infty$  iken sıfıra yaklaşır. Böylece  $n \rightarrow \infty$  iken (4.10) ifadesinin sağ tarafı dolayısıyla da sol tarafı sıfıra yaklaşır. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n x^n = \lambda x$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.9.**  $m^2(M, \phi, p)$  uzayı

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{\frac{p_{q,r}}{R}} : \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|x_{i,j}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \right\}^{\frac{1}{R}} \leq 1, q, r \in \mathbb{N}$$

fonksiyonu ile paranormlu uzaydır.

**Teorem 4.2.10.**  $m^2(M, \phi, p)$  uzayı solid uzaydır.

**İspat.** Her  $k, l \in \mathbb{N}$  için  $|\alpha_{k,l}| \leq 1$  koşulunu sağlayan  $\alpha = \{\alpha_{k,l}\}$  dizisi ve

$y = \{y_{k,l}\} \in m^2(M, \phi, p)$  dizisi verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{k \in \sigma_1} \sum_{l \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|y_{k,l}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{k,l}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{k \in \sigma_1} \sum_{l \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|\alpha_{k,l} y_{k,l}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{k,l}} &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{k \in \sigma_1} \sum_{l \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|\alpha_{k,l}| |y_{k,l}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{k,l}} \\ &\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{k \in \sigma_1} \sum_{l \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|y_{k,l}|}{\rho} \right) \right\}^{p_{k,l}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre  $\alpha y = \{\alpha_{k,l} y_{k,l}\} \in m^2(M, \phi, p)$  olur, dolayısıyla  $m^2(M, \phi, p)$

uzayının solid uzay olduğu elde edilir.

**Sonuç 4.2.11.**  $m^2(M, A, \phi, p)$  uzayı solid uzaydır.

**Sonuç 4.2.12.**  $m^2(M, A, \phi, p)$  ve  $m^2(M, \phi, p)$  uzayları monoton uzaylardır.

**Teorem 4.2.13.**  $\phi, \psi \in \Phi^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde  $m^2(M, A, \phi, p) \subseteq m^2(M, A, \psi, p)$

olması için gerek ve yeter koşul  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty$  olmasıdır.

**İspat.**  $m^2(M, A, \phi, p) \subseteq m^2(M, A, \psi, p)$  olsun ve her  $(s,t) \geq (1,1)$  için  $\alpha_{s,t} = \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}}$

şeklinde tanımlansın. Eğer  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \alpha_{s,t} = \infty$  ise bu takdirde  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{s_i, t_i} = \infty$  olacak şekilde

$\{\alpha_{s_i, t_i}\}$  alt dizisi vardır. Buradan her  $K > 0$  sayısı için  $m \geq m_0$  olduğunda  $\alpha_{s_m, t_m} > K$

olacak şekilde  $m_0 \in \mathbb{N}$  vardır. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \alpha_{s,t} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\geq \sup_{\substack{m \geq m_0 \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}}} \alpha_{s_m, t_m} \frac{1}{\phi_{s_m, t_m}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &> K \sup_{\substack{m \geq m_0 \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}}} \frac{1}{\phi_{s_m, t_m}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $m \geq m_0$  ve  $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s_m, t_m}$  olmak üzere

$$\sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} > \phi_{s_m, t_m}$$

koşulunu sağlayan  $x = \{x_{i,j}\} \in m^2(M, A, \phi, p)$  seçildiğinde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} > K$$

bulunur. Bu ise  $x = \{x_{i,j}\} \notin m^2(M, A, \psi, p)$  çelişmesini verir. Böylece

$$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty \text{ elde edilir.}$$

Tersine  $K = \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty$  olsun. Buradan her  $(s,t) \geq (1,1)$  için

$\phi_{s,t} \leq K\psi_{s,t}$  yazılır. Herhangi bir  $x = \{x_{k,l}\} \in m^2(M, A, \phi, p)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayıları vardır. Böylece

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{K\psi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

bulunur. Bu ise  $x = \{x_{k,l}\} \in m^2(M, A, \psi, p)$  olduğunu gösterir.

**Sonuç 4.2.14.**  $m^2(M, A, \phi, p) = m^2(M, A, \psi, p)$  olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right) < \infty \text{ ve } \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \left( \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} \right)^{-1} < \infty \text{ olmasıdır.}$$

**Teorem 4.2.15.**  $M, M_1$  ve  $M_2$  fonksiyonları  $\Delta_2$ -koşulunu sağlayan Orlicz fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a)  $m^2(M_1, A, \phi, p) \subseteq m^2(M \circ M_1, A, \phi, p)$
- b)  $m^2(M_1, A, \phi, p) \cap m^2(M_2, A, \phi, p) \subseteq m^2(M_1 + M_2, A, \phi, p)$ .

**İspat.**

a) Herhangi bir  $x = \{x_{k,l}\} \in m^2(M_1, A, \phi, p)$  verilsin. Buradan

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır.

$M$  Orlicz fonksiyonu  $x=0$  noktasında sağ üzerinde sürekli olduğundan keyfi  $\varepsilon > 0$  için  $0 \leq t < \delta$  olduğunda  $M(t) < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta \in (0,1)$  sayısı

seçilebilir.  $y_{i,j} = M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right)$  şeklinde tanımlansın. Böylece

$$\sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \{M(y_{i,j})\}^{p_{i,j}} = \sum_{y_{i,j} \leq \delta} \{M(y_{i,j})\}^{p_{i,j}} + \sum_{y_{i,j} > \delta} \{M(y_{i,j})\}^{p_{i,j}}$$

yazılabilir.

$M$  Orlicz fonksiyonu ve  $y_{i,j} \leq \delta < 1$  olduğunda

$$\sum_{y_{i,j} \leq \delta} \{M(y_{i,j})\}^{p_{i,j}} \leq \sum_{y_{i,j} \leq \delta} \{y_{i,j} M(1)\}^{p_{i,j}} \leq \max\{1, M(1)^H\} \sum_{y_{i,j} \leq \delta} \{y_{i,j}\}^{p_{i,j}} \quad (4.13)$$

bulunur. Yine  $y_{i,j} > \delta$  için  $\frac{y_{i,j}}{\delta} > 1$  ve  $M$  Orlicz fonksiyonu  $\Delta_2$ -koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned} M(y_{i,j}) &< M\left(1 + \frac{y_{i,j}}{\delta}\right) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_{i,j}}{\delta}\right) \\ &< \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_{i,j}}{\delta}\right) + \frac{1}{2}M\left(\frac{2y_{i,j}}{\delta}\right) \\ &\leq T \frac{y_{i,j}}{\delta} M(2) \end{aligned}$$

olacak şekilde  $T > 0$  sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{y_{i,j} > \delta} \{M(y_{i,j})\}^{p_{i,j}} &\leq \sum_{y_{i,j} > \delta} \left\{ T \frac{y_{i,j}}{\delta} M(2) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \max\left\{1, \left(T \frac{M(2)}{\delta}\right)^H\right\} \sum_{y_{i,j} > \delta} \{y_{i,j}\}^{p_{i,j}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur.

$$B = \max\{1, M(1)^H\} \quad \text{ve} \quad C = \max\left\{1, \left(T \frac{M(2)}{\delta}\right)^H\right\} \quad \text{olmak üzere (4.13) ve}$$

(4.14) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right) \right\}^{p_{i,j}} &\leq B. \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \{y_{i,j}\}^{p_{i,j}} \\ &\quad + C. \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \{y_{i,j}\}^{p_{i,j}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise  $x \in m^2(M \circ M_1, A, \phi, p)$  olduğunu gösterir.

**b)** Herhangi bir  $x = \{x_{k,l}\} \in m^2(M_1, A, \phi, p) \cap m^2(M_2, A, \phi, p)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

ve

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_2 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  pozitif reel sayıları vardır.  $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$  seçersek

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ (M_1 + M_2) \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &= \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_3} \right) + M_2 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_3} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) + M_2 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\leq \max\{1, 2^{H-1}\} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_1 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_1} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &\quad + \max\{1, 2^{H-1}\} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \phi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M_2 \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho_2} \right) \right\}^{p_{i,j}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $x \in m^2(M_1 + M_2, A, \phi, p)$  olduğu elde edilir.

**Teorem 4.2.16.** Her  $\phi \in \Phi^{(2)}$  için aşağıdaki özellikler sağlanır;

- a)  $l^{(2)}(M, A, p) \subseteq m^2(M, A, \phi, p) \subseteq l^{(2)}(M, A, \infty)$ ,
- b)  $l^{(2)}(M, A, p) = m^2(M, A, \phi, p) \Leftrightarrow \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} < \infty$ ,
- c)  $m^2(M, A, \phi, p) = l^{(2)}(M, A, \infty) \Leftrightarrow \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s \cdot t} > 0$ .

**İspat.**

a) Herhangi bir  $x = \{x_{k,l}\} \in l^{(2)}(M, A, p)$  verilsin. O zaman

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  vardır.  $B$  kümesinde aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$B = \left\{ \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} : (s,t) \geq (1,1), \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t} \right\}.$$

$\{\phi_{s,t}\}$  çift dizisi azalmayan olduğundan  $\left\{ \frac{1}{\phi_{s,t}} \right\}$  çift dizisi artmayandır. Böylece her

$b \in B$  için

$$b \leq \frac{1}{\phi_{1,1}} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}}$$

yazılır. Buradan da

$$\phi_{1,1} \cdot \sup B \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

bulunur. Böylece  $x \in m^2(M, A, \phi, p)$  elde edilir.

Yine  $x \in m^2(M, A, \phi, p)$  verilsin. Bu takdirde

$$\sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır. Böylece her  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için

$$\left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \leq \phi_{1,1} \sup_{\substack{(s,t) \geq (1,1) \\ \sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}}} \frac{1}{\phi_{s,t}} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olur. Buradan da  $x \in l^{(2)}(M, A, \infty)$  elde edilir.

**b)**  $l^{(2)}(M, A, p) = m^2(M, A, \phi, p)$  olsun. Eğer her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = 1$  alınırsa

$l^{(2)}(M, A, p) = m^2(M, A, \psi, p)$  olur. Bu takdirde  $m^2(M, A, \phi, p) = m^2(M, A, \psi, p)$

olacağından Teorem 4.2.13' den

$$\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} = \sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{\psi_{s,t}} < \infty$$

elde edilir.

Tersine,  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \phi_{s,t} < \infty$  olsun. Eğer her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = 1$  alınırsa

$l^{(2)}(M, A, p) = m^2(M, A, \psi, p)$  olacağından Teorem 4.2.13 gereğince

$$m^2(M, A, \phi, p) \subseteq l^{(2)}(M, A, p)$$

bulunur. a) şikkından dolayı  $l^{(2)}(M, A, p) \subseteq m^2(M, A, \phi, p)$  olduğundan istenen elde edilir.

c) Her  $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $\psi_{s,t} = s.t$  alınırsa  $l^{(2)}(M, A, \infty) = m^2(M, A, \psi, p)$  olur.

Gerçekten  $x \in l^{(2)}(M, A, \infty)$  ise her  $(s, t) \geq (1, 1)$  ve  $\sigma_1 \times \sigma_2 \in \varphi_{s,t}$  için

$$\frac{1}{s.t} \sum_{i \in \sigma_1} \sum_{j \in \sigma_2} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} \leq \frac{1}{s.t} s.t. \sup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \left\{ M \left( \frac{|A_{i,j}(x)|}{\rho} \right) \right\}^{p_{i,j}} < \infty$$

olacak şekilde  $\rho > 0$  reel sayısı vardır. Buradan  $x \in m^2(M, A, \psi, p)$  olduğu yani  $l^{(2)}(M, A, \infty) \subseteq m^2(M, A, \psi, p)$  kapsamı bulunur. a) şikkından dolayı da ters kapsama vardır.

Şimdi  $m^2(M, A, \phi, p) = l^{(2)}(M, A, \infty)$  olsun. Bu takdirde

$$m^2(M, A, \phi, p) = m^2(M, A, \psi, p)$$

olur. Teorem 4.2.13' den  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{s.t}{\phi_{s,t}} < \infty$  bulunur. Böylece  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} > 0$  elde edilir.

edilir.

Tersine,  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{\phi_{s,t}}{s.t} > 0$  olsun. Bu takdirde  $\sup_{(s,t) \geq (1,1)} \frac{s.t}{\phi_{s,t}} < \infty$  olur ve Teorem

4.2.13' den

$$m^2(M, A, \psi, p) = l^{(2)}(M, A, \infty) \subseteq m^2(M, A, \phi, p)$$

bulunur. Ayrıca a) şikkından dolayı  $m^2(M, A, \phi, p) \subseteq l^{(2)}(M, A, \infty)$  kapsamı vardır. Böylece  $m^2(M, A, \phi, p) = l^{(2)}(M, A, \infty)$  elde edilir.

### 4.3. Cesaro-Orlicz Çift Dizi Uzayı ve Bazı Topolojik Özellikleri

Bu bölümde dizilerin  $\{x_{k,l}\}$  gösterimi yerine  $\{x(k,l)\}$  gösterimi kullanılacaktır.

Ayrıca  $l_0^{(2)}$  ile tüm reel çift dizilerin uzayı gösterilecektir.

**Teorem 4.3.1.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu verilsin. Bu takdirde  $l_0^{(2)}$  uzayı üzerinde tanımlı

$$\rho_M^{(2)}(x) = \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right)$$

fonksiyonu bir konveks modülerdir.

**İspat.**

i) Eğer  $x = 0$  ise  $M(0) = 0$  olduğundan  $\rho_M^{(2)}(x) = 0$  olur.

Tersine  $\rho_M^{(2)}(x) = 0$  olsun.  $M$  Orlicz fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan her  $n, m \in \mathbb{N}$  için

$$M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) = 0$$

yazılır. Yine  $M(y) = 0$  olduğunda  $y = 0$  olduğundan  $\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| = 0$  olur ve

buradan her  $i, j \in \mathbb{N}$  için  $x(i, j) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $x = 0$  bulunur.

ii)  $|\alpha| = 1$  olacak şekilde  $\alpha \in \mathbb{R}$  verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \rho_M^{(2)}(\alpha x) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |\alpha x(i,j)|\right) \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{|\alpha|}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\ &= \rho_M^{(2)}(x) \end{aligned}$$

olur.

iii)  $\alpha, \beta \geq 0$  olmak üzere  $\alpha + \beta = 1$  olsun. Bu takdirde herhangi  $x, y \in l_0^{(2)}$  için

$$\begin{aligned} \rho_M^{(2)}(\alpha x + \beta y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |\alpha x(i,j) + \beta y(i,j)|\right) \\ &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{\alpha}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| + \frac{\beta}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)|\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| \right) + \beta \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)| \right) \\ &= \alpha \rho_M^{(2)}(x) + \beta \rho_M^{(2)}(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\rho_M^{(2)}$  fonksiyonu bir konveks modülerdir.

**Tanım 4.3.2.** Bir  $M$  Orlicz fonksiyonu verilsin. Bu takdirde  $Ces_M^{(2)}$  kümesi

$$\begin{aligned} Ces_M^{(2)} &= \left\{ x \in l_0^{(2)} : \exists \lambda > 0, \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| \right) < \infty \right\} \\ &= \left\{ x \in l_0^{(2)} : \exists \lambda > 0, \rho_M^{(2)}(\lambda x) < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.3.3.**  $Ces_M^{(2)}$  kümesi  $\mathbb{R}$  üzerinde çift dizilerin bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre vektör uzayıdır.

**İspat.** Herhangi  $x, y \in Ces_M^{(2)}$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda_1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| \right) < \infty \quad (4.15)$$

ve

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda_2}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)| \right) < \infty \quad (4.16)$$

olacak şekilde  $\lambda_1, \lambda_2$  pozitif reel sayıları vardır.  $\lambda_3 = \min \left\{ \frac{\lambda_1}{2|\alpha|}, \frac{\lambda_2}{2|\beta|} \right\}$  olsun.  $M$

Orlicz fonksiyonunun azalmayan, konveks bir fonksiyon olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda_3}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |\alpha x(i,j) + \beta y(i,j)| \right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \lambda_3 \frac{|\alpha|}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| + \lambda_3 \frac{|\beta|}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)| \right) \\ &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda_1}{2nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| + \frac{\lambda_2}{2nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)| \right) \\ &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2} M \left( \frac{\lambda_1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| \right) \\ &\quad + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2} M \left( \frac{\lambda_2}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)| \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ve (4.15), (4.16) ifadeleri kullanılırsa  $\alpha x + \beta y \in Ces_M^{(2)}$

bulunur. Böylece  $Ces_M^{(2)}$ ,  $l_0^{(2)}$  uzayının bir alt vektör uzayı olur.

**Teorem 4.3.4.**  $Ces_M^{(2)}$  uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_M^{(2)} \left( \frac{x}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır.

**İspat.**

i) Her  $x \in Ces_M^{(2)}$  için  $\|x\| \geq 0$  olur.

ii) Eğer  $x=0$  ise  $M(0)=0$  olduğundan  $\|x\|=0$  olur. Tersine  $\|x\|=0$  olsun. Bu takdirde  $M$  Orlicz fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda} \right) \leq 1$$

eşitsizliği bütün  $\lambda > 0$  sayıları için sağlanır. En az bir  $(i_0, j_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için

$x(i_0, j_0) \neq 0$  olsun. Bu takdirde  $A = \frac{1}{i_0 j_0} \sum_{i,j=1}^{i_0, j_0} |x(i,j)| \neq 0$  olur.  $M$  Orlicz fonksiyonu

azalmayan bir fonksiyon ve  $\lim_{u \rightarrow \infty} M(u) = \infty$  olduğundan her  $u \in [a, \infty)$  için  $M(u) > 1$

olacak şekilde  $a > 0$  sayısı vardır. Eğer  $\lambda_1 = \frac{A}{a}$  ise  $\frac{A}{\lambda_1} \in [a, \infty)$  olur. Böylece

$$M \left( \frac{A}{\lambda_1} \right) = M \left( \frac{1}{i_0 j_0} \sum_{i,j=1}^{i_0, j_0} \frac{|x(i,j)|}{\lambda_1} \right) > 1$$

bulunur. Bu ise her  $\lambda > 0$  sayısı için

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda} \right) \leq 1$$

olması ile çelişir. Dolayısıyla her  $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  için  $x(i,j) = 0$  olur. Buradan  $x=0$  olduğu elde edilir.

iii) Herhangi bir  $x \in Ces_M^{(2)}$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  verilsin. Eğer  $t=0$  ise  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  olur.

$\alpha \neq 0$  olsun. Bu takdirde

$$\|\alpha x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|\alpha x(i,j)|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ |\alpha| \lambda' > 0 : \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda'} \right) \leq 1 \right\} \\
&= |\alpha| \inf \left\{ \lambda' > 0 : \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda'} \right) \leq 1 \right\} \\
&= |\alpha| \|x\|
\end{aligned}$$

olur.

iv) Herhangi  $x, y \in Ces_M^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde

$$\rho_M^{(2)}(\lambda'x) \leq K' \text{ ve } \rho_M^{(2)}(\lambda''y) \leq K''$$

olacak şekilde  $\lambda', \lambda'', K' > 1$  ve  $K'' > 1$  pozitif reel sayıları vardır.  $\lambda_1 = \frac{K'}{\lambda'}$  olarak

seçilsin.  $M$  Orlicz fonksiyonu konveks bir fonksiyon ve  $0 < \frac{1}{K'} < 1$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda_1} \right) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda'}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{K'} \right) \\
&\leq \frac{1}{K'} \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda'}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)| \right) \\
&\leq \frac{1}{K'} K' = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $\lambda_2 = \frac{K''}{\lambda''}$  seçilirse

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|y(i,j)|}{\lambda_2} \right) \leq 1$$

bulunur.  $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j) + y(i,j)|}{\lambda_3} \right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{|y(i,j)|}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda_1} \right) \\
&\quad + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|y(i,j)|}{\lambda_2} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$$

bulunur. Böylece  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$  sayıları pozitif olduğundan

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \inf \left\{ \lambda_3 > 0: \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j) + y(i,j)|}{\lambda_3} \right) \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \lambda_1 > 0: \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|x(i,j)|}{\lambda_1} \right) \leq 1 \right\} \\ &\quad + \inf \left\{ \lambda_2 > 0: \sum_{n,m=1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{|y(i,j)|}{\lambda_2} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.5.** Aşağıda verilen özellikler birbirine denktir.

i)  $Ces_M^{(2)} \neq \{0\}$ ,

ii)  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M \left( \frac{1}{nm} \right) < \infty$  olacak şekilde  $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$  sayıları vardır,

iii) Her  $k > 0$  reel sayısı için  $\sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{k}{nm} \right) < \infty$  olacak şekilde  $n_k, m_k \in \mathbb{N}$  sayıları

vardır.

**İspat.**

(i  $\Rightarrow$  ii)  $Ces_M^{(2)} \neq \{0\}$  olsun. Bu takdirde  $z \neq 0$  olacak şekilde  $z \in Ces_M^{(2)}$  elemanı ve dolayısıyla  $z(l_1, l_2) \neq 0$  olacak şekilde  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$  sayıları vardır. Yine  $z \in Ces_M^{(2)}$  olduğundan  $\rho_M^{(2)}(\lambda z) < \infty$  olacak şekilde  $\lambda > 0$  reel sayısı vardır. Eğer

$$y(i, j) = \begin{cases} z(i, j) & , i = l_1 \text{ ve } j = l_2 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanan  $y = \{y(i, j)\}$  dizisi için

$$\rho_M^{(2)}(\lambda y) \leq \rho_M^{(2)}(\lambda z) < \infty$$

olur. Böylece  $y \in Ces_M^{(2)}$  bulunur. O zaman

$$x(i, j) = \begin{cases} 1 & , i = l_1 \text{ ve } j = l_2 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere  $x = \{x(i, j)\} \in Ces_M^{(2)}$  olur. Gerçekten  $k = \lambda \cdot |z(l_1, l_2)|$  seçilirse

$$\begin{aligned}
\rho_M^{(2)}(kx) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i,j)|\right) \\
&= \rho_M^{(2)}(\lambda y) < \infty
\end{aligned}$$

olur. Bu takdirde  $k > 0$  sayısı için

$$\begin{aligned}
\rho_M^{(2)}(kx) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\
&= \sum_{n=l_1}^{\infty} \sum_{m=l_2}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

yazılır.

$k \geq 1$  olsun. Bu durumda her  $n, m \in \mathbb{N}$  için  $\frac{1}{nm} \leq \frac{k}{nm}$  olur.  $M$  Orlicz

fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\sum_{n=l_1}^{\infty} \sum_{m=l_2}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) \leq \sum_{n=l_1}^{\infty} \sum_{m=l_2}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) < \infty$$

elde edilir.

$0 < k < 1$  olsun. Bu takdirde  $\frac{1}{s} < k$  olacak şekilde  $s \in \mathbb{N}$  vardır. O zaman

$\frac{1}{s^2} < k$  ve her  $n, m \in \mathbb{N}$  için  $\frac{1}{s^2 nm} \leq \frac{k}{nm}$  yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=sl_1}^{\infty} \sum_{m=sl_2}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) &= \sum_{n=sl_1}^{\infty} \left\{ M\left(\frac{1}{n(sl_2)}\right) + M\left(\frac{1}{n(sl_2+1)}\right) + \dots + M\left(\frac{1}{n(sl_2+(s-1))}\right) \right. \\
&\quad + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1))}\right) + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1)+1)}\right) + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1)+2)}\right) \\
&\quad \left. + \dots + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1)+s-1)}\right) + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+2))}\right) + \dots \right\} \\
&\leq \sum_{n=sl_1}^{\infty} \left\{ M\left(\frac{1}{n(sl_2)}\right) + M\left(\frac{1}{n(sl_2)}\right) + \dots + M\left(\frac{1}{n(sl_2)}\right) \right. \\
&\quad \left. + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1))}\right) + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1))}\right) + \dots + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+1))}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+2))}\right) + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+2))}\right) + \dots + M\left(\frac{1}{n(s(l_2+2))}\right) + \dots \Big\} \\
& = \sum_{n=sl_1}^{\infty} \left\{ sM\left(\frac{1}{n(sl_2)}\right) + sM\left(\frac{1}{n(s(l_2+1))}\right) + sM\left(\frac{1}{n(s(l_2+2))}\right) + \dots \right\} \\
& = \sum_{n=sl_1}^{\infty} \left\{ s \sum_{m=l_2}^{\infty} M\left(\frac{1}{n(sm)}\right) \right\} \\
& = s \sum_{m=l_2}^{\infty} \left\{ \sum_{n=sl_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{n(sm)}\right) \right\} \\
& \leq s \sum_{m=l_2}^{\infty} \left\{ s \sum_{n=l_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{s^2nm}\right) \right\} \\
& = s^2 \sum_{m=l_2}^{\infty} \sum_{n=l_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{s^2nm}\right) \\
& \leq s^2 \sum_{m=l_2}^{\infty} \sum_{n=l_1}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) \\
& < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $n_1 = sl_1$  ve  $m_1 = sl_2$  alınırsa

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) < \infty$$

olur.

(ii  $\Rightarrow$  iii)  $\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) < \infty$  olacak şekilde  $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$  sayıları var olsun. Eğer

$0 < k < 1$  ise  $\frac{k}{nm} < \frac{1}{nm}$  olur. Bu takdirde  $M$  Orlicz fonksiyonu azalmayan

olduğundan

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) < \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) < \infty$$

bulunur.  $n_k = n_1$  ve  $m_k = m_1$  şeklinde tanımlanırsa istenen elde edilir.

$k > 1$  olsun ve  $k \leq s$  olacak şekilde  $s \in \mathbb{N}$  sayısı verilsin.

$n_k = n_1s$  ve  $m_k = m_1s$  şeklinde tanımlansın. Böylece

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) \leq \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M\left(\frac{s}{nm}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=n_1 s}^{\infty} \left\{ M\left(\frac{s}{n(sm_1)}\right) + M\left(\frac{s}{n(sm_1+1)}\right) + \dots + M\left(\frac{s}{n(sm_1+(s-1))}\right) \right. \\
&+ M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1))}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1)+1)}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1)+2)}\right) \\
&+ \dots + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1)+s-1)}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+2))}\right) + \dots \left. \right\} \\
&\leq \sum_{n=n_1 s}^{\infty} \left\{ M\left(\frac{s}{n(sm_1)}\right) + M\left(\frac{s}{n(sm_1)}\right) + \dots + M\left(\frac{s}{n(sm_1)}\right) \right. \\
&+ M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1))}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1))}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1))}\right) \\
&+ \dots + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+1))}\right) + M\left(\frac{s}{n(s(m_1+2))}\right) + \dots \left. \right\} \\
&= \sum_{n=n_1 s}^{\infty} \left\{ M\left(\frac{1}{n(m_1)}\right) + M\left(\frac{1}{n(m_1)}\right) + \dots + M\left(\frac{1}{n(m_1)}\right) \right. \\
&+ M\left(\frac{1}{n((m_1+1))}\right) + M\left(\frac{1}{n((m_1+1))}\right) + M\left(\frac{1}{n((m_1+1))}\right) \\
&+ \dots + M\left(\frac{1}{n((m_1+1))}\right) + M\left(\frac{1}{n((m_1+2))}\right) + \dots \left. \right\} \\
&= \sum_{n=n_1 s}^{\infty} \left\{ sM\left(\frac{1}{n(m_1)}\right) + sM\left(\frac{1}{n(m_1+1)}\right) + sM\left(\frac{1}{n(m_1+2)}\right) + \dots \right\} \\
&= s \sum_{n=n_1 s}^{\infty} \left\{ \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) \right\} \\
&= s \sum_{m=m_1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=n_1 s}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) \right\} \\
&\leq s^2 \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii  $\Rightarrow$  i) Her  $k > 0$  reel sayısı için  $\sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm}\right) < \infty$  olacak şekilde  $n_k, m_k \in \mathbb{N}$

sayıları var olsun. O zaman  $k = 1$  için

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) < \infty$$

olacak şekilde  $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$  sayıları vardır.

$x(i, j) = \begin{cases} 1 & , i = n_1 \text{ ve } j = m_1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$  olmak üzere  $x = \{x(i, j)\}$  şeklinde tanımlansın. Bu

takdirde

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &= \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $x \in Ces_m^{(2)}$  olur. Bu ise  $Ces_m^{(2)} \neq \{0\}$  olduğunu gösterir.

**Teorem 4.3.6.** Her  $u \in [0, u_0]$  için

$$M(u) \leq Au^{1+\varepsilon}$$

olacak şekilde  $\varepsilon > 0, A > 0$  ve  $u_0 > 0$  sayıları var olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{m=m_1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) < \infty$$

olacak şekilde  $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$  sayıları vardır.

**İspat.**  $\left\{\frac{1}{nm}\right\}$  çift dizisi sıfıra yakınsadığından her  $n, m \geq L$  olduğunda  $\frac{1}{nm} \leq u_0$

olacak şekilde  $L \in \mathbb{N}$  vardır. Bu takdirde her  $n, m \geq L$  için  $\frac{1}{nm} \in [0, u_0]$  olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{m=L}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm}\right) &\leq \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{m=L}^{\infty} A\left(\frac{1}{nm}\right)^{1+\varepsilon} \\ &\leq A \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{nm}\right)^{1+\varepsilon} \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Eğer  $n_1 = m_1 = L$  alınırsa istenen elde edilir.

**Teorem 4.3.7.**  $Ces_M^{(2)}$  uzayı üzerindeki

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_M^{(2)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

**İspat.** Bu teoremin ispatında Teorem 2.1.27 kullanılacaktır.  $x \in l_0^{(2)}$ ,  $\{x_s\} \subset Ces_M^{(2)}$ ,  $\sup_s \|x_s\| < \infty$  ve her bir  $i, j \in \mathbb{N}$  için  $0 \leq x_s(i, j) \nearrow x(i, j)$  olsun. Yine  $A = \sup_n \|x_n\|$  denirse her  $s \in \mathbb{N}$  için

$$0 \leq \frac{x_s}{A} \leq \frac{x_s}{\|x_s\|}$$

olur. O zaman  $\rho_M^{(2)}$  modüler fonksiyonu artan bir fonksiyon ve  $\rho_M^{(2)}\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}\right) \leq 1$  olduğundan

$$\rho_M^{(2)}\left(\frac{x_s}{A}\right) \leq \rho_M^{(2)}\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}\right) \leq 1$$

bulunur. Her bir  $i, j \in \mathbb{N}$  için  $0 \leq x_s(i, j) \nearrow x(i, j)$  olduğundan

$$\frac{1}{A} x_s(i, j) \nearrow \frac{1}{A} x(i, j)$$

yazılır. Böylece monoton yakınsaklık teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho_M^{(2)}\left(\frac{x}{A}\right) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \left|\frac{x(i, j)}{A}\right|\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n,m=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \left|\frac{x_s(i, j)}{A}\right|\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \rho_M^{(2)}\left(\frac{x_s}{A}\right) \\ &= \sup_s \rho_M^{(2)}\left(\frac{x_s}{A}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde  $x \in Ces_M^{(2)}$  ve  $\|x\| \leq A = \sup_s \|x_s\|$  olur. Yine her bir  $i, j \in \mathbb{N}$  için

$0 \leq x_s(i, j) \nearrow x(i, j)$  olduğundan  $\sup_s \|x_s\| \leq \|x\|$  eşitsizliği vardır. Buradan

$$\|x\| = \sup_s \|x_s\| = \lim_{s \rightarrow \infty} \|x_s\|$$

elde edilir. Teorem 2.1.28 gereğince  $Ces_M^{(2)}$  uzayı bir Banach uzayıdır.

**Teorem 4.3.8.**  $M_1$  ve  $M_2$  iki Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer her  $t \in [0, t_0]$  için  $M_2(t_0) > 0$  ve  $M_2(t) \leq M_1(bt)$  olacak şekilde  $b$  ve  $t_0$  pozitif sayıları varsa

$$Ces_{M_1}^{(2)} \subset Ces_{M_2}^{(2)}$$

kapsaması sağlanır.

**İspat.**  $M_1$  Orlicz fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan  $b \geq 1$  olarak seçilebilir.  $u = bt$  şeklinde tanımlansın. Bu takdirde her  $u \in [0, bt_0]$  için

$$M_2\left(\frac{u}{b}\right) \leq M_1(u) \quad (4.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

$x \in Ces_{M_1}^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde  $\rho_{M_1}^{(2)}(\lambda x) < \infty$  olacak şekilde  $\lambda > 0$  sayısı vardır. Bir  $A_x$  kümesi

$$A_x = \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2 : \frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| > bt_0 \right\}$$

şeklinde tanımlansın.  $A_x$  kümesi sonlu elemanlıdır. Aksi halde  $M_1$  Orlicz fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \rho_{M_1}^{(2)}(\lambda x) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M_1\left(\frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &\geq \sum_{(n,m) \in A_x} M_1\left(\frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &> \sum_{(n,m) \in A_x} M_1(bt_0) \\ &\geq \sum_{(n,m) \in A_x} M_1(t_0) \\ &= \infty \end{aligned}$$

çelişkisi oluşur.

$0 < c < \lambda$  olmak üzere  $\tilde{\lambda} = \frac{c}{b}$  şeklinde tanımlansın. Böylece (4.17) ifadesi

kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho_{M_2}^{(2)}(\tilde{\lambda}x) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} M_2\left(\frac{\tilde{\lambda}}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &= \sum_{(n,m) \in A_x} M_2\left(\frac{c}{bnm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) + \sum_{(n,m) \notin A_x} M_2\left(\frac{c}{bnm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &\leq \sum_{(n,m) \in A_x} M_2\left(\frac{c}{bnm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) + \sum_{(n,m) \notin A_x} M_1\left(\frac{c}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &\leq \sum_{(n,m) \in A_x} M_2\left(\frac{c}{bnm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) + \sum_{n,m=1}^{\infty} M_1\left(\frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)|\right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $x \in Ces_{M_2}^{(2)}$  olduğu elde edilir.

**Teorem 4.3.9.**  $M$  bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$A_M^{(2)} = \left\{ x \in Ces_M^{(2)} : \forall k > 0, \exists n_k, m_k \in \mathbb{N}, \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) < \infty \right\}$$

kümesi  $Ces_M^{(2)}$  uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

**İspat.**

i) Herhangi  $x, y \in A_M^{(2)}$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  verilsin. Bu takdirde her  $k > 0$  sayısı için

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{2|\alpha|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) < \infty \quad (4.18)$$

ve

$$\sum_{n=n_k''}^{\infty} \sum_{m=m_k''}^{\infty} M \left( \frac{2|\beta|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i, j)| \right) < \infty \quad (4.19)$$

olacak şekilde  $n_k', m_k', n_k'', m_k''$  doğal sayıları vardır.  $n_k = maks\{n_k', n_k''\}$  ve

$m_k = maks\{m_k', m_k''\}$  olsun. Böylece (4.18) ve (4.19) ifadeleri ve  $M$  Orlicz

fonksiyonunun konveks olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |\alpha x(i, j) + \beta y(i, j)| \right) &\leq \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{|\alpha|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| + \frac{|\beta|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i, j)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{2|\alpha|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{2|\beta|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i, j)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=n_k'}^{\infty} \sum_{m=m_k'}^{\infty} M \left( \frac{2|\alpha|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=n_k''}^{\infty} \sum_{m=m_k''}^{\infty} M \left( \frac{2|\beta|k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |y(i, j)| \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre  $A_M^{(2)}$  kümesi  $Ces_M^{(2)}$  uzayının bir alt uzayıdır.

$\{x_s\} \subset A_M^{(2)}$  dizisi  $x \in Ces_M^{(2)}$  elemanına yakınsayan keyfi bir dizi olsun. Keyfi bir  $k > 0$  sayısı verilsin.  $\{x_s\}$  dizisi  $x \in Ces_M^{(2)}$  elemanına yakınsadığından Toerem 2.1.25 gereğince her  $k > 0$  için  $s \rightarrow \infty$  iken  $\rho_M^{(2)}(k(x - x_s)) \rightarrow 0$  yazılır. Bu takdirde

$$\rho_M^{(2)}(2k(x - x_r)) < 1 \quad (4.20)$$

olacak şekilde  $r \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Yine her  $s \in \mathbb{N}$  için  $x_s \in A_M^{(2)}$  olduğundan

$$\sum_{n=n_r}^{\infty} \sum_{m=m_r}^{\infty} M \left( \frac{2k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x_r(i, j)| \right) < \infty \quad (4.21)$$

olacak şekilde  $n_r, m_r \in \mathbb{N}$  sayıları vardır.  $n_k = n_r$  ve  $m_k = m_r$  olsun. Böylece (4.20) ve (4.21) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_k}^{\infty} \sum_{m=m_k}^{\infty} M \left( \frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) &= \sum_{n=n_r}^{\infty} \sum_{m=m_r}^{\infty} M \left( \frac{k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \left| \frac{2(x(i, j) - x_r(i, j))}{2} + \frac{2x_r(i, j)}{2} \right| \right) \\ &\leq \sum_{n=n_r}^{\infty} \sum_{m=m_r}^{\infty} \frac{1}{2} M \left( \frac{2k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |(x(i, j) - x_r(i, j))| \right) \\ &\quad + \sum_{n=n_r}^{\infty} \sum_{m=m_r}^{\infty} \frac{1}{2} M \left( \frac{2k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x_r(i, j)| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \rho_M^{(2)}(2k(x - x_r)) + \sum_{n=n_r}^{\infty} \sum_{m=m_r}^{\infty} \frac{1}{2} M \left( \frac{2k}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x_r(i, j)| \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur.  $k > 0$  sayısı keyfi olduğundan  $x \in A_M^{(2)}$  olur. Buradan  $A_M^{(2)}$  uzayı  $Ces_M^{(2)}$  uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

**Teorem 4.3.10.**  $M$  Orlicz fonksiyonu  $\Delta_2$ -koşulunu sağlasın. Bu takdirde  $A_M^{(2)} = Ces_M^{(2)}$  eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $x \in Ces_M^{(2)}$  verilsin. Bu takdirde  $\rho_M^{(2)}(\alpha x) < \infty$  olacak şekilde  $\alpha > 0$  sayısı vardır. Keyfi  $\lambda > 0$  sayısı verilsin. Eğer  $\lambda \leq \alpha$  ise  $M$  Orlicz fonksiyonunun azalmayan bir fonksiyon olmasından dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M \left( \frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M \left( \frac{\alpha}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \right) < \infty$$

bulunur. Buradan  $x \in A_M^{(2)}$  olur. Böylece  $A_M^{(2)} = Ces_M^{(2)}$  sağlanır.

$\lambda > \alpha$  olsun. Yine  $l = \frac{\lambda}{\alpha}$  tanımlansın. Buradan  $l > 1$  olur.  $M$  Orlicz

fonksiyonu  $\Delta_2$ -koşulunu sağladığından her  $u \in [0, u_0]$  için

$$M(lu) \leq klM(u)$$

olacak şekilde  $k$  ve  $u_0$  pozitif sayıları vardır. Ayrıca  $\rho_M^{(2)}(\alpha x) < \infty$  olduğundan her  $n, m \geq n_\lambda$  için

$$\frac{\alpha}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i, j)| \leq u_0$$

olacak şekilde  $n_\lambda \in \mathbb{N}$  sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_\lambda}^{\infty} \sum_{m=n_\lambda}^{\infty} M\left(\frac{\lambda}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) &= \sum_{n=n_\lambda}^{\infty} \sum_{m=n_\lambda}^{\infty} M\left(\frac{\lambda\alpha}{\alpha nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\
&= \sum_{n=n_\lambda}^{\infty} \sum_{m=n_\lambda}^{\infty} M\left(\frac{l\alpha}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\
&\leq kl \sum_{n=n_\lambda}^{\infty} \sum_{m=n_\lambda}^{\infty} M\left(\frac{\alpha}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} |x(i,j)|\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan  $x \in A_M^{(2)}$  olur. Dolayısıyla  $A_M^{(2)} = Ces_M^{(2)}$  elde edilir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde  $M$  Orlicz fonksiyonu kullanılıp bazı çift dizi uzayları tanımlandı. Ayrıca bu uzayların temel özellikleri incelendi.

Fark dizileri yardımıyla bu uzaylar tekrar tanımlanabilir. Ayrıca bu çift dizi uzaylarının tanımlanmasında kullanılan Orlicz fonksiyonu yerine modülüs fonksiyonu alınarak yeni çift dizi uzayları elde edilebilir. Yine bu uzayların sıra süreklilik, kesin konvekslik gibi bazı geometrik özellikleri incelenebilir.



## 6. KAYNAKLAR

Altun Y., Bilgin T., 2009. On new class of sequences related to the  $\ell_p$  space defined by orlicz function, Taiwanese J. Math., 13 (4) , 1189-1196.

Apostol T., 1978. Mathematical analysis, Addison-Wesley Publishing Company Inc. London.

Burkill J. C. ve Burkill H., 1980. A second course in mathematical analysis, Cambridge University Press, London.

Braha N. L., 2011. A new class of sequences related to the  $\ell_p$  spaces defined by a sequences of Orlicz functions, J. Inequal. Appl., Article ID 539745.

Cui Y., Hudzik H., Petrot N., Suantai S., Szymaskiewicz A., 2005. Basic topological and geometric properties of Cesaro-Orlicz spaces, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 115 (4), 461-476.

Esi A., Açıkgöz M., Esi A., 2013. On a class generalized sequences related to the  $\ell_p$  space defined by Orlicz functions, Bol. Soc. Paran. Mat., 31 (1), 113-123.

Gupta M., Kamthan P. K., 1980. Infinite matrices and tensorial transformations, Acta Math Vietnam, 5 (1), 33-42.

Jagers A. A., 1974. A note on Cesaro sequence spaces, Nieuw Arch. Wiskd, 22 (3), 113-124.

Khan V. A., Tabassum S., 2011. On some new double sequence spaces of invariant means defined by Orlicz functions, Common Fac. Sci. Univ. Ank. Series, 60 (2), 11-21.

Kızmaz H., 1981. On certain sequence space, Canad. Math. Bull., 24 (2), 169-176.

Krasnosel'skii M. A., Rutickii Y. B., 1961. Convex functions and Orlicz spaces, P. Noordhoff LTD.-Groningen-The NETHERLANDS.

Kubiak D., 2009. A note on Cesaro-Orlicz sequence spaces, J. Math. Anal. Appl., 349, 291-296.

- Leibowitz G. M., 1971. A note on the Cesaro sequence spaces, *Tamkang J. Math.*, 2, 151-157.
- Lindenstrauss J., Tzafriri L., 1971. On Orlicz sequence spaces, *Israel J. Math.*, 10, 379-390.
- Lim S. K., Lee P.Y., 1988. An Orlicz extension of Cesaro sequence spaces, *Comment. Math. Prace Mat.*, 28, 117-128.
- Luxemburg W. A., 1955. Banach function spaces, Thesis (Delft).
- Maddox I. J., 1970. Elements of functional analysis, Cambridge at the University Press.
- Moricz F., Rhoades B. E., 1988. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability, 104 (2), 283-294.
- Musielak J., 1983. Orlicz spaces and modular Spaces, *Lecture Notes in Math.* 1034.
- Nakano H., 1953. Concave modulares, *J. Math. Soc. Japan*, 5, 29-49.
- Parashar S. D., Choudhary B., 1994. Sequence spaces defined by Orlicz functions, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25 (4), 419-428.
- Patterson R. F., 2007.  $\lambda$ -Rearrangements characterization of Pringsheim limit points, *Int. J. Math. Math. Sci.*, Volume 2007, Article ID 28205.
- Petersen G. M., 1966. Regular matrix transformations, McGraw-Hill Publishing Company Limited, London.
- Prinsheim A., 1898. Elementare theorie der unendliche doppelreihen, *Sitzungsberichte der Math. Akad. Der Wissenschaften zu Münch. Ber.*, 7, 101-153.
- Programma van jaarlijkse prijsvragen (Annual problem section), 1968. *Nieuw Arch Wiskd.*, 16, 47-51.
- Raj K., Jamwal S., Sharma K., 2013. New classes of generalized sequence spaces defined by an Orlicz function, *J. Comput. Anal. Appl.*, 15 (4), 730-737.
- Raj K., Sharma S.K., Gupta A., Kumar A., 2011. A sequence space defined by a sequence of modulus functions, *Int. Journal Math. Analysis*, 5 (32), 1569-1574.

Rudin W., 1970. Real and complex analysis, McGraw-Hill International Editions, Mathematic Series.

Rynne B. P., Youngson M. A., 2008. Linear functional analysis (second edition), Springer-Verlag, London.

Sargent W. L. C., 1960. Some sequence spaces related to  $\ell_p$  spaces, J. Lond. Math. Soc. 35, 161-171.

Savaş E., Patterson F., 2007. Double sequence spaces defined by Orlicz functions, Iran J. Sci. Technol., Transaction A., 31 (A2).

Shiue J. S., 1970. On the Cesaro sequence spaces, Tamkang J. Math., 1 (1), 19-25.

Tripathy B. C., Borgohain S., 2013. On a class of  $n$ -normed sequences related to the  $l_p$  space, Bol. Soc. Paran. Mat., 31 (1), 167-174.

Tripathy B. C., Mahanta S., 2003. On a class of sequences related to the  $\ell_p$  space defined by Orlicz functions, Soochow J. Math., 29, 379-391.

Tripathy B. C., Mahanta S., 2007. On a class of difference sequences related to the  $\ell_p$  space defined by Orlicz functions, Math. Slovaca, 57 (2), 171-178.

Tripathy B. C., Sen M., 2002. On a new class of sequences related to the  $\ell_p$  space, Tamkang J. Math., 32 (2), 167-171.



## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Oğuz OĞUR  
**Doğum Yeri ve Tarihi:** Hatay-11.06.1985  
**Adres:** Başbakanlık Konutları Ulubat Sokak C4-A  
CEYHAN Apart. No: 10 Atakum-Samsun  
**E-Posta:** oguz.ogur@omu.edu.tr  
**Lisans:** Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat  
Fakültesi, Matematik Bölümü (2007)  
**Yüksek Lisans:** Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri  
Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2011)  
**Mesleki Deneyim ve Ödüller:**  
Araştırma Görevlisi (2009---)

## TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR

Duyar C., Oğur O., 2013. On a new space  $m^2(M, A, \phi, p)$  of double sequences, J. Funct. Spaces Appl., Vol. 2013, Article ID 509613.