



**DUAL UZAYDA KONOİDAL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE**

**Sevinç AYDIN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2014**

Sevinç Aydın tarafından hazırlanan “DUAL UZAYDA KONOİDAL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN  
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

**Başkan:** Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ  
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

**Üye:** Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN  
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 27/06/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sevinç Aydın

27/06/2014



# DUAL UZAYDA KONOİDAL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Sevinç AYDIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2014

## ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümler sırasıyla giriş ve temel kavramlar olarak hazırlanmıştır. Üçüncü bölümde, dual uzayla ilgili bazı kavramlar verilir, dual uzayda regle yüzey tanımlanmıştır. Dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde dual uzayda konoidal, kuvvetli konoidal ve ortokonoidal regle yüzeyler tanımlanır, bunlarla ilgili elde edilen karakterizasyonlar sunulmuştur. Beşinci bölümde ise tezde elde edilen bulgular özetlenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.049  
Anahtar Kelimeler : Dual uzay, regle yüzey, konoidal regle yüzey  
Sayfa Adedi : 48  
Danışman : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

## ON KONOIDAL RULED SURFACES IN DUAL SPACE

(M. Sc. Thesis)

Sevinç AYDIN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2014

## ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first and second chapters are prepared as introduction and basic concepts respectively. In the third chapter, some special properties of dual space are given, ruled surface is introduced in dual space. Fourth chapter is original part of the thesis. In this chapter, konoidal, strongkonoidal and orthokonoidal ruled surfaces are defined in dual space, and then some characterizations of their surfaces are given. In the fifth chapter, our conclusions in the thesis are summarized.

Science Code : 204.1.049

Key Words : Dual space, ruled surface, konoidal ruled surface

Page Number : 48

Supervisor : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca danışmanlığımı yapan ve benden değerli yardımlarını esirgemeyen değerli Hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm öğrenim hayatım boyunca her türlü fedakârlığı gösteren, desteklerini eksik etmeyen, başta annem olmak üzere değerli aileme ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	ix
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1. $E^3$ de Regle Yüzeyler .....	3
2.2. Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler .....	10
2.3. Konoidal Regle Yüzeyler .....	17
3. DUAL UZAY .....	27
3.1. Dual Uzay ile İlgili Temel Kavramlar .....	27
3.2. Dual Uzay ile İlgili Temel Kavramlar .....	33
3.3. Dual Uzayda Regle Yüzeyler .....	33
4. DUAL UZAYDA KONOİDAL REGLE YÜZEYLER .....	37
4.1. Dual Uzayda Konoidal, Kuvvetli Konoidal ve Ortokonoidal Regle Yüzeyler ..	37
4.2. Dual Uzayda Konoidal Regle Yüzeylerle İlgili Karakterizasyonlar .....	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	43
KAYNAKLAR .....	45
ÖZGEÇMİŞ .....	47

**ŞEKİLLERİN LİSTESİ**

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. Striksiyon Noktaları.....	6
Şekil 2.2. Dağılma Parametresi.....	9
Şekil 2.3. Orthoid Örneği Olarak Silindir .....	24
Şekil 3.1. Geometrik Olarak Dual Açısı .....	32
Şekil 3.2. Dual Regle Yüzey.....	34

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklamalar</b>
$E^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$H/H'$	1-parametrelili uzay hareketi
$\varphi$	Öklid uzayındaki regle yüzey
$L_a$	$\varphi$ nin açılım uzunluğu
$\lambda_a$	$\varphi$ nin açılım açısı
$P_a$	$\varphi$ nin drali
$\eta$	$\varphi$ nin striksiyon çizgisi
$\Phi$	Genelleştirilmiş regle yüzey
$E_k$	$\Phi$ nin doğrultman uzayı
$\Omega$	$\Phi$ nin merkez yüzeyi
$K$	$\Phi$ nin sırt (edge) uzayı
$Z$	$\Phi$ nin merkez uzayı
$ID$	Dual sayılar cümlesi
$K/K'$	1-parametrelili dual küresel hareket
$(\vec{U}_1)$	Dual regle yüzey
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\wedge$	Dış çarpım
$\  \ $	Norm

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda diferensiyel geometri ile kinematiğin ortak alanında E. STUDY dönüşümlerinden faydalanılarak 3-boyutlu uzayda tanımlanan geometrik değişmezlerin çizgiler uzayındaki karşılıkları çalışmalara konu olmuştur. Bu bağlamda, 1- parametrelili birim dual küresel eğrilere çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları Hacısalihoğlu [10], dual açılım açıları Gürsoy [9] tarafından formüle edilmiştir. Paralel regle yüzeyin tanımı Blaschke tarafından verilmiştir (Erim tarafından tercüme edilmiştir [4]). Konoidal, kuvvetli konoidal, ortokonoidal regle yüzey tanımları 1984' te Frank ve Giering [8] tarafından tanımlanmıştır. Konoidal regle yüzey çiftlerinin homotetik hareketler altındaki davranışları da Akdemir, Çalışkan ve Kuruoğlu [1] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada ise konoidal, kuvvetli konoidal ve ortokonoidal regle yüzeyler dual uzayda tanıtılıp bunlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verilmiştir.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde  $E^3$  de 2-boyutlu regle yüzeyler ile  $E^n$  de  $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyler tanıtılıp, bunların integral invariantları verilecektir. Daha sonra da çizgiler uzayındaki konoidal regle yüzeylerden bahsedilecektir.

### 2.1. $E^3$ de Regle Yüzeyler

$IR^3$  de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla,  $H'$  ve  $H$  olsun.  $H$  nın  $H'$  ne göre 1-parametrelili hareketine kısaca uzay hareketi denir ve  $H/H'$  ile gösterilir.

Sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid koordinat sistemi, sırasıyla,  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$  ve  $\{x_1, x_2, x_3\}$  ise

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $H/H'$  uzay hareketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada  $A \in O(3), C \in IR_1^3$  dir.

$H/H'$  uzay hareketinin,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen  $A \in O(3)$  ve ötelemeye karşılık gelen  $C \in IR_1^3$  matrisleri

$$A = A(t), C = C(t)$$

olacak şekilde bir tek reel  $t$  parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır [11].

#### 2.1.1. Tanım

$H/H'$  uzay hareketini belirleyen  $A \in O(3)$  ve  $C \in IR_1^3$  matrisleri  $\forall t \in IR$  için,

$$A(t + 2\pi) = A(t)$$

$$C(t + 2\pi) = C(t)$$

olacak şekilde periyodik iseler  $H/H'$  uzay hareketine 1-parametrelili kapalı uzay hareketi denir [11].

### 2.1.2. Tanım

Bir  $M \subset E^3$  yüzeyi verilsin.  $\forall P \in M$  noktasında  $E^3$  ün tamamen  $M$  de kalan bir doğrusu varsa  $M$  ye bir regle yüzey ve  $P \in M$  noktasından geçen,  $M$  de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir [12].

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için yüzey üzerinde bulunan ve doğrultmanları kesen diferensiyellenebilir bir

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisi alalım. Bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.  $M$  regle yüzeyinin  $\alpha$  dayanak eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki doğrultmanı üzerindeki değişken bir nokta  $\beta$  ve  $a(t) = a_1(t), a_2(t), a_3(t)$  birim doğrultmanı olmak üzere,  $\beta$ ,

$$\beta : IR \rightarrow M$$

$$v \rightarrow \beta(v) = \alpha(t) + va(t)$$

şeklindedir. Böylece regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi : I \times IR \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + va(t)$$

dönüşümü ile verilir [12].

### 2.1.3. Tanım

Bir

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$$

regle yüzeyi,  $\forall t \in I$  için

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise  $\varphi$  ye kapalı regle yüzey denir [12].

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalı eğrilerdir, yani bir periyot sonra her ana doğru kendisi üzerine gelir.

### 2.1.4. Tanım

Bir  $\varphi(t, v)$  regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir ve

$$\langle a, d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde bulunur [12].

### 2.1.5. Tanım

Bir  $\varphi(t, v)$  regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz(merkez, striksiyon) noktası denir [12].

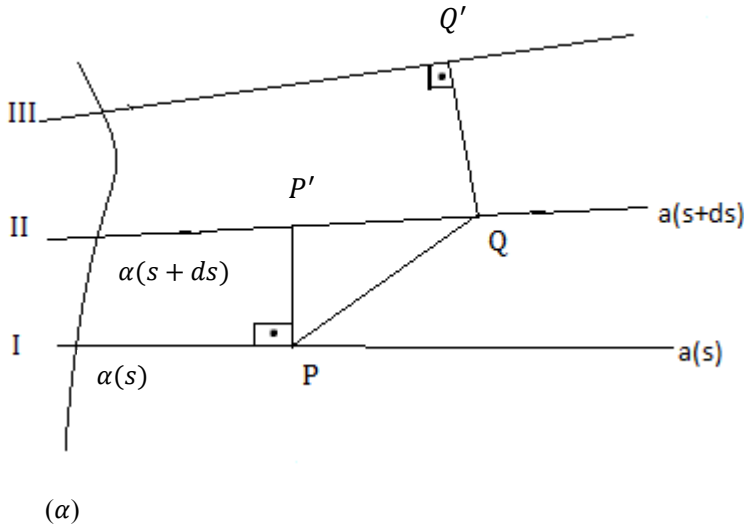
### 2.1.6. Tanım

Bir  $\varphi(t, v)$  regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz(striksiyon) çizgisi(eğrisi) denir [12].

$\varphi(s, v)$  regle yüzeyinin merkez noktasının  $\eta$  yer vektörü; dayanak eğrisinin  $\alpha(s)$  yer vektörü,  $a(s)$  doğrultman vektörü ve yer vektörünün dayanak eğrisine olan  $v$  uzaklığı cinsinden

$$\eta(s, v) = \alpha(s) + v a(s) \quad (2. 1)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $v$  parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunur. Regle yüzeyin ilk ikisi,  $a(s)$  ve  $a(s)+da(s)$  olan komşu üç doğru verilsin.



Şekil 2. 1. Striksion Noktaları

$P$ ,  $P'$  ve  $Q$ ,  $Q'$  komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi,

$$a(s) \wedge [a(s) + a'(s)ds] = a(s) \wedge a'(s)ds$$

bağıntısından dolayı  $a \wedge a'$  vektörüne paraleldir. Limit halinde  $PQ$  vektörü  $PP'$  ile çakışık ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle a, PQ \rangle = 0, \quad \langle a + a'ds, PQ \rangle = 0$$

olacağından

$$\langle a', PQ \rangle = 0 \quad (2.2)$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 2.1 den  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\eta}{ds} = T + \frac{dv}{ds} a + v \frac{da}{ds}$$

olur. Eş. 2.2 de yerine yazılırsa

$$\langle \frac{da}{ds}, \frac{d\eta}{ds} \rangle = 0$$

olacağından

$$\langle \frac{da}{ds}, T + \frac{dv}{ds} a + v \frac{da}{ds} \rangle = 0,$$

$$\Rightarrow \langle a', T \rangle + v \|a'\|^2 = 0,$$

$$\Rightarrow v = -\frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için Eş. 2.1 de

$$\eta(s) = a(s) - \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2} \alpha(s) \quad (2.3)$$

elde edilir. Eğer  $\|a'\| = 0$  ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Bu durumda regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için Eş. 2.3 de

$$v = 0, \quad \langle a', T \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

## 2.1.7. Tanım

Bir  $\varphi(s,v)$  regle yüzeyinin bir ana doğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme teğet düzlem denir.

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + va(s)$$

regle yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\varphi_s = T + va', \quad \varphi_v = a(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_s \wedge \varphi_v = (T + va') \wedge a(s),$$

$$\Rightarrow \varphi_s \wedge \varphi_v = T \wedge a(s) + va' \wedge a(s)$$

olur. Ayrıca yüzey normali

$$N = \frac{\varphi_s \wedge \varphi_v}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|T \wedge a(s) + va' \wedge a(s)\|} (T \wedge a(s) + va' \wedge a(s)) \quad (2.4)$$

olduğundan ve  $\mu$  sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktasındaki vektörel denklemi

$$\langle \mu a, N \rangle = 0$$

veya Eş. 2.4 ten

$$\det(\mu a, T + va', a) = 0$$

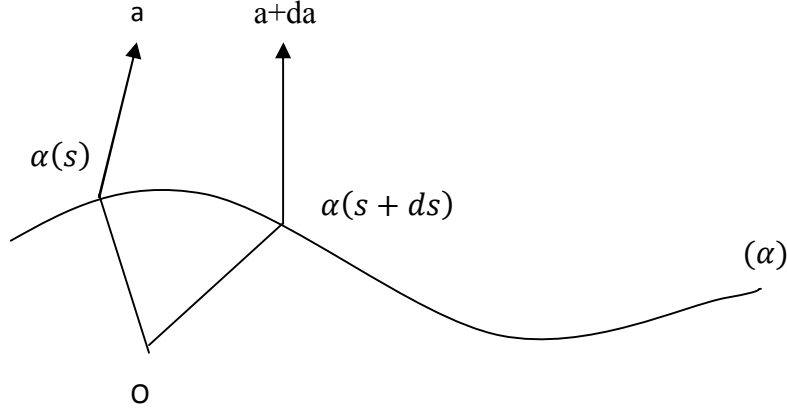
olarak bulunur.

## 2.1.8. Tanım

Bir  $\varphi(s,v)$  regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilir denir [12].

### 2.1.9. Tanım

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi(drali) denir [12].



Şekil 2. 2. Dağılma Parametresi

Anadoğruların birim doğrultman vektörü  $a$  olan bir regle yüzeyin dağılma parametresi  $P_a$  olmak üzere

$$P_a = \frac{\det(\alpha', a, a')}{\|a'\|^2}$$

şeklinde hesaplanır. Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invarianttır.

### 2.1.1. Teorem

Bir  $\varphi(s, v)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır [12].

## 2.1.10. Tanım

Bir  $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v a(s)$  kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu(adımı)

$$L_a : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow L_a(v) = \oint_{\alpha} dv$$

şeklinde tanımlanır [12].

Açılım uzunluğu regle yüzeyin integral invariantıdır. Açılabilir regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise striksiyon eğrisi bir nokta, regle yüzey ise bir koni olur.

## 2.1.11. Tanım

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü  $a$  olan bir  $\varphi(s, v)$  kapalı regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır [12].

$$\lambda_a = - \oint_{\alpha} \det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, a)$$

## 2.2. Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

$E^n$  de differensiyellenebilir bir

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisi verilmiş olsun. Her  $\alpha(t)$  noktasında tanımlanmış bir ortonormal vektör alan sistemi  $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$  olsun. Bu sistem  $T_{\alpha(t)}(E^n)$  uzayının  $k$ -boyutlu bir altuzayını gerer, bu uzayı  $E_k(t)$  ile gösterirsek

$$E_k(t) = \text{Sp}\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\} \subset T_{\alpha(t)}(E^n)$$

olur.

### 2.2.1. Tanım

$E_k(t)$  altuzayı  $\alpha$  eğrisi boyunca hareket ederken  $E^n$  de bir  $(k+1)$ -boyutlu yüzey meydana getirir. Bu yüzeye  $E^n$  de  $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey denir.  $E^n$  de  $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyi  $\Phi$  ile gösterelim [6].

### 2.2.2. Tanım

$E_k(t)$  altuzayına  $\Phi$  nin  $\alpha(t)$  noktasındaki doğrultman uzayı ve  $\alpha$  eğrisine de  $\Phi$  nin dayanak eğrisi denir.  $\Phi$  için bir parametrizasyon

$$\Phi(t, u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

dir.

### 2.2.3. Tanım

$$\text{Sp}\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots, \dot{e}_k\}$$

altuzayına  $\Phi$  nin  $E_k(t)$  ye göre asimptotik demeti denir ve  $A(t)$  ile gösterilir [6]. Eğer  $\text{boy}A(t) = k + m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , kabul edilirse  $A(t)$  asimptotik demetinin  $E_k(t)$  yi içeren bir  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$  ortonormal bazı bulunabilir.

### 2.2.1. Teorem

$E^n$  de  $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey  $\Phi$  olsun.  $\forall t \in I$  için  $E_k(t)$  doğrultman uzayının öyle bir  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  bazı bulunabilir ki

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \kappa_i > 0,$$

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j, \quad m < i \leq k$$

dır [6].

Burada  $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_m > 0$  dır. Bu şekilde tanımlanan  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  bazına  $E_k(t)$  nin tabii taşıyıcı bazı veya  $\Phi$  nin asli çatısı denir [5].

#### 2.2.4. Tanım

$$\text{Sp}\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\} \subset \bigcup_{P \in \Phi} T_P \Phi$$

uzayına  $\Phi$  nin  $E_k(t)$  ye göre teğetsel demeti denir ve  $T(t)$  ile gösterilir [6].

Eğer

$$\text{boy } A(t) = k + m$$

kabul edilirse

$$k + m \leq \text{boy } T(t) \leq k + m + 1$$

dir.  $T(t)$  nin boyutu için iki ihtimal söz konusudur, bunları sırasıyla inceleyelim:

I. Durum: Kabul edelim ki  $\forall t \in I$  için  $\text{boy } T(t) = k + m$  olsun. Bu durumda  $\Phi$  nin  $\alpha$  dayanak eğrisinin hız vektörü  $A(t)$  uzayının içindedir ve

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j}, \quad \xi_i, \eta_j \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Herhangi bir  $P(t)$  dayanak eğrisi için

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t) \quad (2.5)$$

yazılabilir. Buradan türev alınarak

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i) \\ \Rightarrow \dot{P}(t) &= \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i) \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlik ve Teorem 2.2.1 dikkate alınırsa

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^k (\xi_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^k u_i \alpha_{ij}) e_j + \sum_{s=1}^m (\kappa_s u_s + \eta_s) a_{k+s}$$

elde edilir.

$$\kappa_s u_s + \eta_s = 0, \quad 1 \leq s \leq m \quad (2.6)$$

biçimindeki  $P(t)$  noktaları için  $\dot{P}(t)$  vektörleri  $E_k(t)$  içindedir.  $\kappa_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ , değerleri sıfırdan farklı olduklarından Eş.2.6 sisteminin çözümü tektir, yani  $u_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ , skalerleri tek olarak bulunabilir.

### 2.2.5. Tanım

Eş.2.5 de verilen  $P(t)$  noktalarını  $u_s$ ,  $1 \leq s \leq m$ , ler temsil etmektedir. Burada bu bileşenlerden  $(k-m)$ -tanesi keyfi seçilebilir. Belli bir  $t$  için Eş.2.5 ve Eş.2.6 yı sağlayan  $P(t)$  noktalarının cümlesi  $E_k(t)$  içinde  $(k-m)$ -boyutlu bir uzayı doldururlar. Bu uzaya  $\Phi$  nin  $E_k(t)$  içindeki sırt(edge) uzayı denir ve  $K_{k-m}(t)$  ile gösterilir [6].

## 2.2.6. Tanım

$K_{k-m}$  sırt uzayı, doğrultman uzayı olarak  $\alpha$  eğrisi boyunca  $\Phi$  tarafından içerilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye  $\Phi$  nin  $(k-m+1)$ -boyutlu sırt regle yüzeyi denir [5].

II. Durum:  $\forall t \in I$  için boy  $T(t) = k + m + 1$  olsun. Bu durumda

$$\dot{\alpha} \notin Sp\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

dir. O halde  $T(t)$  nin

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir.  $\eta_{m+1} \neq 0$  olmak üzere,

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \quad (2.7)$$

yazılabilir.

Herhangi bir  $P(t)$  dayanak eğrisinin Eş.2.5 deki ifadesinde  $t$  ye göre türev alınırsa, türev denkleminde Eş.2.7 ifadesi yerine yazıldıktan sonra Teorem 2.2.1 gereğince  $\dot{P}(t)$  vektörü için

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^k (\xi_i + \dot{u}_i + \sum_{j=1}^k u_j \alpha_{ij}) e_i + \sum_{s=1}^m (\kappa_s u_s + \eta_s) a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\kappa_s u_s + \eta_s = 0, \quad 1 \leq s \leq m$$

olacak şekildeki  $P(t)$  noktaları için  $\dot{P}(t)$  vektörleri  $Sp\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dot{\alpha}\}$  uzayında yatarlar.

### 2.2.7. Tanım

$\kappa_s u_s + \eta_s = 0$ ,  $1 \leq s \leq m$  ile tanımlanan  $P(t)$  noktalarının doldurduğu  $(k-m)$ -boyutlu uzaya  $\Phi$  nin  $E_k(t)$  içindeki merkez uzayı denir ve  $Z_{k-m}(t)$  ile gösterilir [6].

### 2.2.8. Tanım

$Z_{k-m}(t)$  merkez uzayı, doğrultman uzayı olarak  $\alpha$  eğrisi boyunca  $\Phi$  tarafından içerilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye  $\Phi$  nin  $(k-m+1)$ -boyutlu merkez regle yüzeyi denir ve  $\Omega$  ile gösterilir [5].

Önerme:

$(k+1)$ -boyutlu  $\Phi$  genelleştirilmiş regle yüzeyine ait  $\alpha$  dayanak eğrisi için

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olduğundan aşağıdaki önermeler doğrudur:

- i)  $\Phi$  nin bir  $Z_{k-m}(t_0)$  merkez uzayının olması için gerek ve yeter şart  $\eta_{m+1}(t_0) \neq 0$  olmasıdır.
- ii)  $\Phi$  nin bir  $K_{k-m}(t_0)$  sırt uzayının olması için gerek ve yeter şart  $\eta_{m+1}(t_0) = 0$  olmasıdır.

O halde, sırt veya merkez uzaydan hangisi varsa ona ait regle yüzey için bir parametrisasyon

$$\Phi(t, u_{m+1}, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k-m} u_{m+i}(t) e_{m+i}(t)$$

olur.

$m = k$  ise  $\text{boy}K_{k-m}(t) = \text{boy}Z_{k-m}(t) = 0$  dir. Bu durumda sırt regle yüzeyi  $\Phi$  nin sırt eğrisine dejenere olur; merkez regle yüzeyi ise striksiyon eğrisine dejenere olur.

Böylece sırt regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler  $E^3$  ün tanjant yüzeylerine (striksiyon çizgisiz yüzey) genelleşir, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler ise  $E^3$  ün striksiyon çizgili regle yüzeylerine genelleşir, diyebiliriz.

### 2.2.9. Tanım

Sırt regle yüzeyli  $\Phi$  genelleştirilmiş regle yüzeyine ait bir

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

ortonormal bazını  $\mathbb{R}^n$  in bir

$$\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$$

bazına tamamlayalım. Burada  $a_{k+m+1}, \dots, a_n$  vektörlerinin oluşturduğu  $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$  bazına tamamlayıcı baz denir. Eğer  $\Phi$  merkez regle yüzeyli ise tamamlayıcı ortonormal baz  $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$  dir [5].

Burada

$$\dot{a}_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\dot{a}_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \omega_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda},$$

$$\dot{a}_{k+m+s} = \sum_{j=1}^m \omega_{sj} a_{k+j} + \beta_s a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{s\lambda} a_{k+m+\lambda}, \quad 2 \leq s \leq n-k-m \quad (2.8)$$

dir [6].

### 2.2.10. Tanım

$E^n$  de

$$\Phi(t, u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

parametrizasyonu ile verilmiş  $(k+1)$ -boyutlu  $\Phi$  genelleştirilmiş regle yüzeyi,  $\forall t \in I$  için

$$\Phi(t + p, u_1, u_2, \dots, u_k) = \Phi(t, u_1, u_2, \dots, u_k)$$

ise  $\Phi$  ye kapalıdır denir [7]. Burada  $p$  en küçük periyottur.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalıdır.

### 2.2.2. Teorem

Bir  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  olsun. Eğer  $\Phi$  nin bir  $E_k(t)$ ,  $t \in I$ , doğrultman uzayı içindeki asimptotik ve teğetsel demetleri çakışmıyorlarsa o zaman  $\Phi$  nin dayanak eğrilerinin hız vektörleri  $\{e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+m+1}\}$  uzayında bulunur ve  $\Phi$  bir  $Z_{k-m}(t)$  ( $m > 0$ ) merkez uzayına sahiptir. Merkez uzayının noktalarında  $\Phi$  nin tanjant uzayları  $A(t)$  asimptotik demetine diktirler.  $\Phi$  nin  $E_k(t)$  doğrultman uzayı, her  $P$  noktasındaki tanjant uzayında bulunur [6].

## 2.3. Konoidal Regle Yüzeyler

Bu bölümde konoidal, ortokonoidal ve kuvvetli konoidal regle yüzeyleri ifade edeceğiz.

### 2.3.1. Tanım

$E^n$  de  $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey  $\Phi$  olsun.  $\Phi$  nin her  $E_k(t)$  doğrultman uzayının paralel olduğu sabit bir  $E^q \subset E^n$ ,  $q \geq k$ , altuzayı mevcut ise  $\Phi$  ye  $q$ -konoidal regle yüzey,  $E^q$  altuzayına da  $\Phi$  nin doğrultu uzayı denir [8].

Eğer bir  $\Phi$   $(k+1)$ -regle yüzeyi  $(n-1)$ -konoidal ise  $\Phi$  ye kısaca konoidaldir denir.

### 2.3.1. Örnek

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında dik silindir yüzeyi bir konoidal regle yüzeydir.

### 2.3.2. Tanım

$\Omega$  merkez regle yüzeyli ve doğrultu uzayı  $E^q$  olan  $q$ -konoidal bir  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  olsun. Eğer  $\Phi$  nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları  $E^q$  doğrultu uzayına ortogonal ise  $\Phi$  ye  $q$ -ortokonoidaldir denir [8].

Eğer  $q = n-1$  ise  $\Phi$  ye kısaca ortokonoidaldir denir.

### 2.3.1. Teorem

$E^n$  de  $q$ -konoidal  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  ve  $\Phi$  nin  $A(t)$  asimptotik demetinin boyutu  $(k+m)$  sabit olsun. Bu durumda  $E^q$  doğrultu uzayının boyutu olan  $q$ -sayısı için,

$$k + m \leq q \leq n - 1$$

eşitsizliği geçerlidir ve  $\Phi$  nin asimptotik demetleri  $E^q$  doğrultu uzayına paraleldir [8].

*İspat:*

$E^q$  doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni olan alt vektör uzayı  $(E^q)^\perp$  olmak üzere boy  $(E^q)^\perp = n - q$  dur.  $(E^q)^\perp$  in bir ortonormal bazı  $\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$  olsun.

$E^q$  sabit olduğundan  $(E^q)^\perp$  de sabittir. Bu durumda  $\Phi$  nin  $E_k(t), t \in I$ , doğrultman uzayının  $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$  doğal taşıyıcı bazı için,

$$\langle b_{q+s}, e_i(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq n - q$$

dir. Burada  $t$  ye göre türev alırsak

$$\langle b_{q+s}, \dot{e}_i(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq n - q$$

bulunur. Burada  $e_i$  lerin türev denklemlerindeki karşılıkları yazılırsa

$$\kappa_i \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \kappa_i > 0,$$

$$\Rightarrow \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq s \leq n - q$$

elde edilir. Son eşitlikten  $\Phi$  nin  $A(t)$  asimptotik demeti  $(E^q)^\perp$  uzayına ortogonal olur. Dolayısıyla  $E^q$  ya paralel olur.

### 2.3.3. Tanım

Silindirik olmayan ( $m > 0$ ),  $q$ -konoidal  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  ve  $\Phi$  nin  $A(t)$  asimptotik demetinin boyutu  $(k+m)$  sabit olsun. Eğer  $q = k+m$  ise  $\Phi$  ye kuvvetli konoidal (strongkonoidal) denir [8].

### 2.3.2. Teorem

Silindirik olmayan ( $m > 0$ )  $\Phi$ ,  $q$ -konoidal  $(k+1)$ -regle yüzeyi,  $k+m$  sabit boyutlu  $A(t)$  asimptotik demetine ve  $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$  asli çatısına sahip olsun. Bu durumda  $\Phi$  kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak türev denklemlerinde

$$\omega_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

dır [8].

*İspat:*

Teorem 2.3.1 e göre  $A(t)$  asimptotik demeti  $E^q$  ya paralel olduğundan  $\forall t \in I$  için

$$\langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq n - q$$

yazılır ve burada  $t$  ye göre türev alırsak

$$\langle b_{q+s}, \dot{a}_{k+i}(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq n - q$$

elde edilir.  $\dot{a}_{k+i}(t)$  nin eşiti türev denklemlerinden (Eş.2.8) yerine yazılırsa

$$\omega_i(t) \langle b_{q+s}, a_{k+m+1}(t) \rangle + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} \langle b_{q+s}, a_{k+m+\lambda}(t) \rangle = 0$$

elde ederiz. Bunu açık olarak ifade edersek

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i \langle b_{q+1}, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_{q+1}, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_{q+1}, a_n \rangle = 0 \\ \omega_i \langle b_{q+2}, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_{q+2}, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_{q+2}, a_n \rangle = 0 \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \omega_i \langle b_n, a_{k+m+1} \rangle + \gamma_{i2} \langle b_n, a_{k+m+2} \rangle + \dots + \gamma_{i(n-k-m)} \langle b_n, a_n \rangle = 0 \end{array} \right.$$

ya da matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} \langle b_{q+1}, a_{k+m+1} \rangle & \dots & \langle b_{q+1}, a_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_n, a_{k+m+1} \rangle & \dots & \langle b_n, a_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \vdots \\ \gamma_{i(n-k-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

( $\Rightarrow$ ):

$\Phi$  kuvvetli konoidal olsun, yani  $q = k+m$  olsun. Bu durumda  $\Phi$  nin  $E^q$  doğrultu uzayı  $A(t)$  asimptotik demetinin  $e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}$  baz vektörleri tarafından gerilir. O halde  $E^q$  doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni  $(E^q)^\perp$  olmak üzere  $(E^q)^\perp = \text{Sp}\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$  ile  $\text{Sp}\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$  aynı uzayı gösterirler.  $q = k+m$  olduğundan  $b_{q+1}, \dots, b_n$  vektörleri  $b_{k+m+1}, \dots, b_n$  halini alır. Dolayısıyla  $\{b_{k+m+1}, \dots, b_n\}$  sistemiyle  $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$  sistemi aynı uzayın bazları olduklarından birbirlerine karşılık gelirler ve katsayı matrisi

$I_{n-q}$  birim matrisi haline gelir.  $\det I_{n-q} \neq 0$  olduğundan çözüm bir tektir. Buna göre lineer denklem sistemi homojen olduğundan çözüm sadece âşikar çözümdür. Dolayısıyla

$$\omega_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

olur.

( $\Leftarrow$ ) :

$$\omega_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

olsun. Bunun olması Eş.2.9 daki katsayılar matrisinin regüler olması anlamına gelir. Regüler olması için de her şeyden önce karesel olması gerekir ki bu da  $q = k+m$  olmasıyla sağlanır. O halde  $\Phi$  kuvvetli konoidaldir.

### 2.3.3. Teorem

$E^n$  de bir  $\Phi$   $(k+1)$ -regle yüzeyi  $\Omega$  merkez regle yüzeyli olsun. Eğer  $\Phi$ , kuvvetli konoidal ise, o zaman  $\Phi$   $(k+m)$ - ortokonoidaldir [8].

*İspat:*

Teorem 2.3.1. e göre  $\Phi$  nin  $A(t)$  asimptotik demeti  $\Phi$  nin  $E^{k+m}$  doğrultu uzayına paraleldir. Ayrıca  $\Phi$  nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları  $A(t)$  asimptotik demetine diktirler. O halde ortokonoidallik tanımı gereği  $\Phi$   $(k+m)$ -ortokonoidaldir.

### 2.3.4. Teorem

$\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$  asli çatısına sahip olan,  $\Omega$  merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan  $(m>0)$  kuvvetli konoidal  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  olsun. Eğer  $\Phi$  ortokonoidal ise türev denklemlerinde

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n - k - m$$

dır. Bu durumda  $\Phi$  bir  $(n=k+m+1)$ -boyutlu Öklid uzayında bulunur [8].

*İspat:*

Bir  $\Phi$  (k+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal ise  $q = k+m$  dir. Ayrıca  $\Phi$  merkez regle yüzeyli olduğundan  $a_{k+m+1}(t), t \in I$ , merkez tanjant vektörü vardır.

Şimdi  $\Phi$  (k+1)-regle yüzeyi ortokonoidal olsun. Bu takdirde  $q = n-1$  olup  $\Phi$  nin doğrultu uzayı bir hiperdüzlemdir. O halde  $(E^q)^\perp = \text{Sp}\{b\}$ , yani  $E^q$  nun ortogonal tümleyeni 1-boyutlu bir altuzaydır. Teorem 2.3.3 e göre  $a_{k+m+1}(t), t \in I$ , merkez tanjant vektörü  $E^q$  doğrultu uzayına diktir, yani  $a_{k+m+1}$  vektörü  $\text{Sp}\{b\}$  uzayında bulunur. O halde

$$\langle b, a_{k+m+1}(t) \rangle = \lambda \quad (\lambda = \text{sabit})$$

yazılabilir.  $t$  ye göre türev alınırsa

$$\langle b, \dot{a}_{k+m+1}(t) \rangle = 0$$

olur.  $\dot{a}_{k+m+1}(t)$  nin Eş. 2. 8 deki eşiti yerine yazılır ve Teorem 2.3.2. gözönünde bulundurulursa

$$-\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda \langle b, a_{k+m+\lambda} \rangle = 0$$

veya  $\beta_\lambda = 0$  elde edilir. Ayrıca  $q = k+m$  ve  $q = n-1$  olduğundan  $n = k+m+1$  elde edilir ki bu da  $\Phi$  nin (k+m+1)-boyutlu Öklid uzayında olması demektir.

### 2.3.5. Teorem

$\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$  asli çatısına sahip olan,  $\Omega$  merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan ( $m > 0$ ), (k+1)-regle yüzey  $\Phi$  olsun. Eğer  $\Phi$ , q-ortokonoidal ise türev denklemlerinde

$$\omega_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

dir [8].

*İspat:*

Bir  $\Phi$   $(k+1)$ -regle yüzeyi  $\Omega$  merkez regle yüzeyli ise  $a_{k+m+1}$  merkez tanjant vektörü vardır.  $\Phi$   $q$ -ortokonoidal olduğundan  $a_{k+m+1}$  vektörü  $\Phi$  nin  $E^q$  doğrultu uzayına diktir, yani  $a_{k+m+1}$  vektörü  $E^q$  ya ortonormal vektör uzayında bulunur.  $E^q$  sabit olduğundan  $(E^q)^\perp$  de sabittir. O halde  $a_{k+m+1}$  merkez tanjant vektörü  $\Phi$  nin parametrizasyonundaki  $I$  parametre aralığının  $t_0 \in I$  değeri için sabit olarak bulunur. Buna göre

$$\langle a_{k+m+1}(t_0), a_{k+i}(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

eşitliğinde  $t$  ye göre türev alırsak

$$\langle a_{k+m+1}(t_0), \dot{a}_{k+i}(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir ve  $\dot{a}_{k+i}(t)$  nin Eş. 2.8 deki eşitleri yerlerine yazılırsa

$$\omega_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur.

#### 2.3.4. Tanım

$E^n$  de bir  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  ve  $\Phi$  nin bir  $E_k(t_0)$  doğrultman uzayı  $t_0$  in bir  $\sigma$  komşuluğu civarında ( $\forall t \in I$  için  $t - t_0 = 0 < \sigma$ ) bir  $\Omega$  merkez regle yüzeyine sahip olsun. Eğer  $E_k(t_0)$  in merkez noktalarındaki tanjant uzayları  $\Phi$  nin  $E^q$  doğrultu uzayına ortogonal iseler  $E_k(t_0)$  doğrultman uzayına  $q$ - orthoiddir denir [8].

$\Phi$  nin  $(n-1)$ -orthoid doğrultman uzayına kısaca orthoid denir. Bu tanım  $E^3$  ortokonoidal ışın yüzeylerinin orthoidal doğrultman uzayı kavramının direkt bir genelleştirilmesidir.  $E^3$  ün sadece dönel (helizoni) yüzeyleri orthoid doğrultman uzayına sahiptir.

#### 2.3.2. Örnek

$E^3$  de  $E_k(t) = \{\text{Sp}\{X = (0, 0, x_3): x_3 \in \mathbb{R}\}$  altuzayı olarak

$$\alpha : I = (0, 2\pi) \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

eğrisi boyunca oluşturduğu yüzeyin denklemi

$$\Phi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda e_3$$

$$= (\cos t, \sin t, 0) + \lambda(0, 0, 1)$$

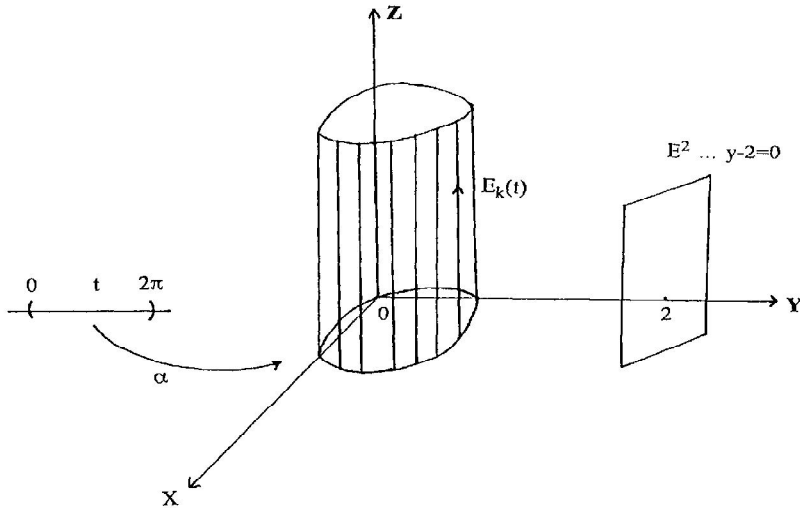
$$= (\cos t, \sin t, \lambda)$$

olup  $\Phi$  dönüşümü  $E^3$  de bir 2-regle yüzey(ışın yüzeyi) gösterir.

$\forall t \in I$  için  $E_k(t)$  doğrultman uzayları  $E^2$   $y=0$ , düzlemine paralel olduğundan  $\Phi$  ışın yüzeyi  $E^3$  de konoidaldir. Ayrıca  $\alpha$  dayanak eğrisi  $\Phi$  nin merkez regle yüzeyi olup  $\alpha(t)$  noktasındaki

$$-\dot{\alpha}(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

merkez tanjant uzayı(vektörü)  $t = \pi$  için  $E^2$  doğrultu uzayına ortogondur. O halde  $E_k(\pi)$  doğrultman uzayı  $\Phi$  nin bir orthoid doğrultman uzayıdır.



Şekil 2. 3. Orthoid Örneği Olarak Silindir

### 2.3.5. Tanım

$E^n$  de  $q$ -konoidal bir  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  ve  $\Phi$  nin doğrultman uzayı  $E_k$  olsun. Eğer  $E_k$  nin noktalarında  $\Phi$  nin tanjant uzayları  $E^q$  doğrultu uzayına paralel ise  $E_k$  doğrultman uzayına  $q$ -tangoiddir denir [8].

$\Phi$  nin  $(n-1)$ -tangoid doğrultman uzayına kısaca tangoid doğrultman uzayı da denir.

### 2.3.3. Örnek

Örnek 2.3.2. de  $t = \pi / 2$  ve  $t = 3\pi / 2$  değerlerine karşılık gelen  $E_k$  doğrultman uzaylarının noktalarında  $\Phi$  nin tanjant uzayları  $E^2$  doğrultu uzayına paraleldir. O halde  $E_k(\pi / 2)$  ve  $E_k(3\pi/2)$  doğrultman uzayları  $\Phi$  nin tangoid doğrultman uzaylarıdır.

### 2.3.6. Teorem

$E^n$  de  $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_k(t)\}$  doğal taşıyıcı baza sahip olan, konoidal basit kapalı  $(k+1)$ -regle yüzey  $\Phi$  olsun. Eğer  $\Phi$ ,  $E^n$  in bir hiperdüzleminde bulunuyorsa  $\Phi$  en az iki tane tangoid doğrultman uzayına sahiptir [8].



### 3. DUAL UZAY

Bu bölümde dual uzayla ilgili temel kavramlar, dual uzayda bir parametrelili hareketler verilecektir. Son olarak da dual uzayda regle yüzey kavramı sunulacaktır.

#### 3.1. Dual Uzay ile İlgili Temel Kavramlar

##### 3.1.1. Tanım

$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $A = (a, a^*)$  ikilisine bir sıralı ikili denir. Sıralı ikililerin cümlesi ID ile gösterilirse

$$ID = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilir.

##### 3.1.2. Tanım

ID cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri, sırasıyla,

$$\oplus : ID \times ID \rightarrow ID$$

$$(A, B) \rightarrow A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*),$$

$$\odot : ID \times ID \rightarrow ID$$

$$(A, B) \rightarrow A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, a^*b + ab^*)$$

ve

$$A = B \Leftrightarrow a = b, \quad a^* = b^*$$

şeklinde tanımlanır.

##### 3.1.3. Tanım

ID cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise bu cümleye dual sayılar cümlesi ve  $\forall (a, a^*) \in ID$  elemanına da bir dual sayı denir.

## 3.1.1. Teorem

$(ID, \oplus, \odot)$  üçlüsü birimli, değişmeli bir halkadır [11].

## 3.1.4. Tanım

$0 = (0, 0)$  dual sayısına ID nin toplama işlemine göre sıfır elemanı denir.

## 3.1.5. Tanım

Bir  $A = (a, a^*) \in ID$  dual sayısının reel ve dual kısmı

$$\text{Re}(A) = a, \text{Du}(A) = a^*$$

şeklinde gösterilir.

## 3.1.6. Tanım

$(1, 0) = 1$  dual sayısına ID deki çarpma işleminin birim elemanı veya reel birimi denir.

## 3.1.7. Tanım

$(0, 1)$  dual sayısı kısaca  $\varepsilon$  ile gösterilir ve ID deki dual birim olarak adlandırılır.

## 3.1.1 Sonuç.

Tanım 3.1.2. deki çarpma işlemi gereğince

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \odot \varepsilon = (0, 1) \odot (0, 1) = (0, 0) = 0$$

olduğu görülür.

## 3.1.2. Teorem

$A = (a, a^*) \in ID$  sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  şeklinde yazılır [11].

*İspat:*

Tanım 3.1.2. gereğince  $A = (a, a^*)$  için

$$A = (a, 0) \oplus (0, a^*),$$

$$\Rightarrow A = (a, 0) \oplus (0, 1) \cdot (a^*, 0),$$

$$\Rightarrow A = a + \varepsilon a^*$$

elde edilir.

### 3.1.8. Tanım

$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{A = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in ID, 1 \leq i \leq 3\}$  cümlesi üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$+ : ID^3 \times ID^3 \rightarrow ID^3$$

$$(A, B) \rightarrow A + B = (A_i) + (B_i) = (A_i + B_i)$$

$$\cdot : ID \times ID^3 \rightarrow ID^3$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda \cdot A = (\lambda A_i).$$

### 3.1.3. Teorem

$(ID^3, +)$  ikilisi bir değişmeli gruptur [11].

### 3.1.4. Teorem

$(ID^3, +, \cdot)$  üçlüsü ID dual sayılar halkası üzerinde bir Modül' dür [11]. Bu modül kısaca ID-Modül şeklinde gösterilir.

### 3.1.9. Tanım

ID-Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir.

### 3.1.5. Teorem

$\vec{a}, \vec{a}^* \in IR^3$  olmak üzere ID-Modülde her bir  $\vec{A}$  dual vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \varepsilon = (1, 0) \in ID$$

şeklinde yazılabilir.

*İspat:*

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3), \quad A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, \quad 1 \leq i \leq 3$$

olduğundan

$$\vec{A} = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*),$$

yazılabilir.  $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$  olduğundan

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

alınabilir ve dolayısıyla

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

olur.

### 3.1.10. Tanım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \text{ID-Modül}$  vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle, \rangle : \text{ID}^3 \times \text{ID}^3 \rightarrow \text{ID}$$

$$\begin{aligned} (A, B) \rightarrow \langle A, B \rangle &= \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir reel vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım aksiyomları ID-Modül üzerinde de geçerlidir, ancak burada pozitif tanımlılık aksiyomu sağlanmaz.

$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \text{ID-Modül}, \alpha \in \text{ID}$  için

$$I_1 : \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle,$$

$$I_2 : \langle \alpha \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \alpha \vec{B} \rangle = \alpha \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle,$$

$$I_3 : \langle \vec{A} + \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle,$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} + \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle,$$

$$I_4 : \vec{A} = 0 \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0.$$

### 3.1.11. Tanım

Bir  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  dual vektörünün normu diye

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \left( \|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq 0$$

dual sayısına denir. Bundan sonra bu dual sayı

$$a = \|\vec{a}\|, \quad a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

olmak üzere

$$\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$$

şeklinde gösterilecektir.

### 3.1.12. Tanım

Normu (1,0) dual sayısına karşılık gelen dual vektörlere birim dual vektör denir.

### 3.1.6. Teorem

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  birim dual vektör ise

$$\|\vec{a}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dir.

### 3.1.13. Tanım

$\{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \|\vec{X}\| = (1, 0), \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\}$  cümlesine ID-Modül' de birim dual küre denir.

### 3.1.7. Teorem (E.STUDY)

$(\vec{0}, \vec{a}^*) \neq \vec{A} \in \text{ID-Modül}$  olmak üzere ID-Modül' de denklemini  $\|\vec{A}\| = (1, 0)$  olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\mathbb{R}^3$  deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelirler [13].

Bu teoreme göre  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  birim dual vektörü  $\mathbb{R}^3$  deki bir tek yönlü doğruya karşılık gelmektedir.  $\vec{a}$  birim vektörü bu doğrunun yönünü,  $\vec{a}^*$  ise O başlangıç noktasına göre  $\vec{a}$  birim vektörünün vektörel momentini ifade etmektedir.

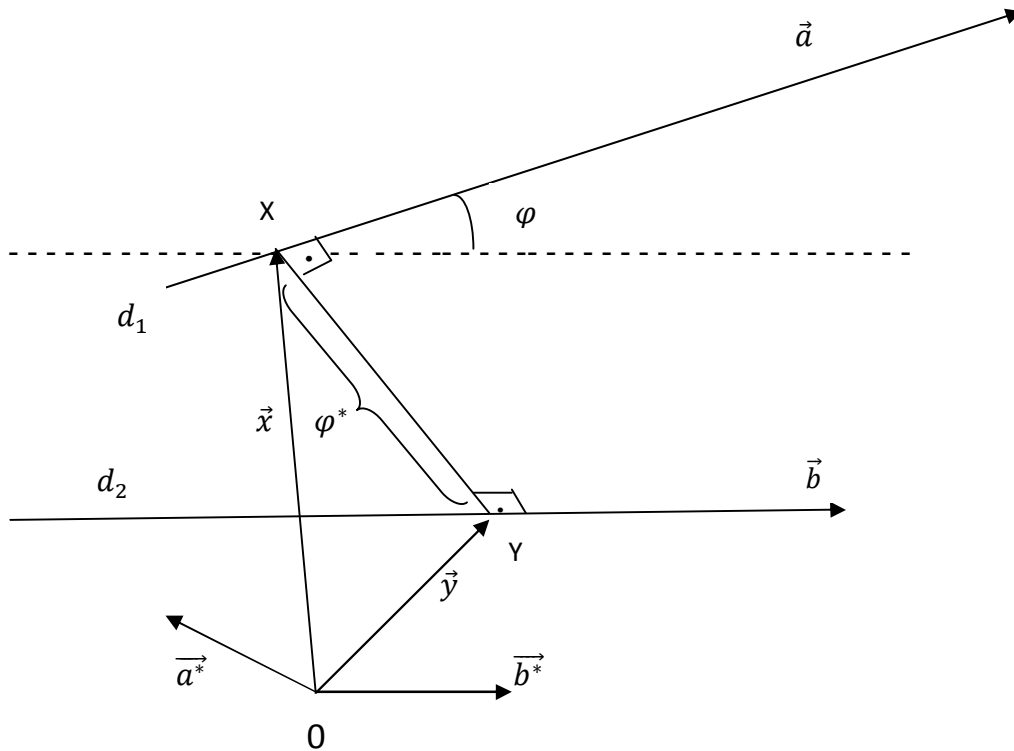
### 3.1.14. Tanım

$\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim dual vektör  $\Phi$ ,  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  nin eksenleri arasındaki açı olmak üzere

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*)$$

olarak tanımlanan  $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$  dual sayısına  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim vektörleri arasındaki dual açı denir.

Burada  $\varphi$  ve  $\varphi^*$ , sırasıyla  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular  $d_1$  ve  $d_2$  olmak üzere bu doğrular arasındaki açıyı ve aralarındaki en kısa uzaklığı ifade etmektedir. Şekil 3.1. de dual açının geometrik yorumu verilmiştir:



Şekil 3. 1. Geometrik Olarak Dual Açı

### 3.1.8. Teorem

$\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  birim dual vektörleri arasındaki dual açı  $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$  olmak üzere

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cos \Phi$$

dır [11].

## 3.2. Dual Uzayda Bir Parametrelili Hareketler

### 3.2.1. Tanım

Aynı merkezli, hareketli  $K$  ve sabit  $K'$  birim dual kürelerini, sırasıyla,  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  ve  $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$  dual ortonormal sistemleri temsil etsin.

$$A = [a_{ij}(t) + \varepsilon a_{ij}^*(t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

bir has dual ortogonal matris olmak üzere,

$$U = AE$$

dönüşümüne  $K$  nın  $K'$  ye göre bir 1-parametrelili dual küresel(dual dönme) hareketi denir ve  $K/K'$  ile gösterilir. Burada  $A$  matrisinin elemanları  $t$  zaman parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

Eğer  $A(t+T) = A(t)$  ( $T$  periyot) ise harekete 1- parametrelili kapalı dual küresel hareket denir.

## 3.3. Dual Uzayda Regle Yüzeyler

### 3.3.1. Tanım

Bir parametrelili  $K/K'$  dual küresel hareketinde,  $K$  da tespit edilmiş bir  $X$  dual noktası,  $K'$  sabit dual küresi üzerinde  $t \in \mathbb{R}$  parametresine bağlı olarak bir

$$\vec{X} = \vec{X}(t), \quad \|\vec{X}(t)\| = 1$$

eğrisi çizer.  $t$ -parametresine göre diferensiyellenebilen bu dual küresel eğriye bir regle yüzey olarak bakabiliriz. Çünkü E. Study dönüşümüne göre, bu eğriye çizgiler uzayında

bir 1-parametrelili bir doğru ailesi (regle yüzey) karşılık gelir. Eğer dual küresel eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır.

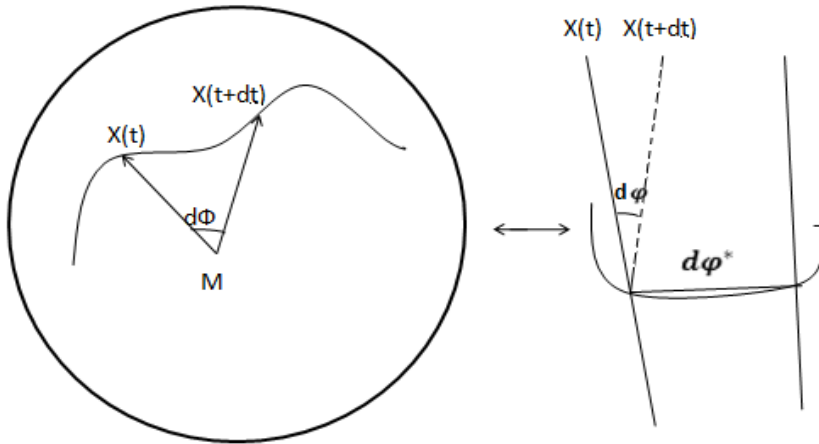
$\vec{X} = \vec{X}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , dual küresel eğrisine, çizgiler uzayında (X)- regle yüzeyinin dual küresel resmi de denir.

$\vec{X} = \vec{X}(t)$  dual küresel eğrisinin  $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$  yay elementi için

$$d\varphi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle,$$

$$d\varphi \cdot d\varphi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

elde edilir. Burada  $d\varphi$  ve  $d\varphi^*$  reel büyüklükleri ise sırasıyla çizgiler uzayındaki regle yüzeyin  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t + dt)$  anadoğruları arasındaki, açı ve en kısa uzaklığa karşılık gelir.



Şekil 3.2. Dual Regle Yüzey

### 3.3.2. Tanım

$\vec{X} = \vec{X}(t)$  ( $\|\vec{X}(t)\|=1$ ) regle yüzeyinde  $\vec{X}(t)$  ve  $\vec{X}(t+dt)$  komşu anadoğruların ortak dikmesinin,  $\vec{X}(t)$  anadoğrusu üzerindeki ayağına boğaz noktası, bu noktaların geometrik yerine ise boğaz çizgisi(striksiyon çizgisi) denir.

### 3.3.3. Tanım

$\vec{X} = \vec{X}(t)$  ( $\|\vec{X}(t)\| = 1$ ), regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir.

### 3.3.4. Tanım

$K/K'$  kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey  $(\vec{U}_1) = (\vec{U}_1(t))$ ,  $t \in I$ , olsun. Ayrıca  $(\vec{U}_2, \vec{U}_3)$ -dual düzleminde  $\vec{U}_2$  ile  $\Phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$  dual açısını yapan  $\vec{N}_1 = \cos \Phi \vec{U}_2 + \sin \Phi \vec{U}_3$  birim dual vektörünü alalım.  $K/K'$  hareketinde hareketli kürenin  $\vec{U}_1$  birim dual vektörü  $(\vec{U}_1) = (\vec{U}_1(t))$  kapalı regle yüzeyini çizerken  $\vec{N}_1$  birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir açılabilir regle yüzey çizsin. Bu taktirde bir periyotluk kapalı küresel harekette  $\Phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$  dual açısının toplam değişme miktarına  $(\vec{U}_1) = (\vec{U}_1(t))$  kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı denir ve

$$\Lambda_{U_1} = \oint d\Phi$$

şeklinde ifade edilir [9].

### 3.3.5. Tanım

$K/K'$  dual hareketinde hareketli sistemin birinci ekseninin çizdiği kapalı regle yüzey  $(\vec{U}_1) = (\vec{U}_1(t))$ ,  $t \in IR$ , olsun.  $(\vec{U}_2, \vec{U}_3)$ -düzleminde  $\vec{U}_2$  dual vektörüyle  $\phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$  dual açısını yapan  $\vec{N}_1 = \cos \phi \vec{U}_2 + \sin \phi \vec{U}_3$  birim dual vektörünü alalım.  $K/K'$  dual hareketinde,  $K$  hareketli kürenin  $\vec{U}_1$  birim dual vektörü  $(\vec{U}_1) = (\vec{U}_1(t))$  kapalı regle yüzeyini çizerken,  $\vec{N}_1$  birim dual vektörüne karşılık gelen doğru, yüzey boyunca bir dual eğri çizsin. Bu eğriye yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

### 3.3.6. Tanım

$\vec{U}_1(t)$  dual eğrisine çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey  $(\vec{U}_1)$  olmak üzere  $\vec{U}_1(t)$  ile sabit  $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$  dual açısını yapan

$$\vec{V}_1 = \cos \Theta \vec{U}_1 + \sin \Theta \vec{U}_3$$

şeklinde tanımlı  $\vec{V}_1$  dual vektörüne karşılık gelen  $(\vec{V}_1)$  yüzeyine  $(\vec{U}_1)$  yüzeyinin paralel regle yüzeyi denir [4].

## 4. DUAL UZAYDA KONOİDAL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Bu bölümde, dual uzayda konoidal regle yüzeyler tanımlandı ve daha sonra bu yüzeyler için bazı karakterizasyonlar verildi.

### 4.1. Dual Uzayda Konoidal, Kuvvetli Konoidal ve Ortokonoidal Regle Yüzeyler

#### 4.1.1. Tanım

$K$  ve  $K'$  kürelerine sıkı sıkıya bağlı, 0 merkezli iki dual ortonormal koordinat sistemi, sırasıyla,  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  ve  $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$  olsun.  $\Theta(t) = \theta(t) + \varepsilon\theta^*(t)$ ,  $\vec{U}_1$  ve  $\vec{V}_1$  dual vektörleri arasındaki dual açığı gösterebilir.  $\vec{V}_1$  i

$$\vec{V}_1 = \cos \Theta \vec{U}_1 + \sin \Theta \vec{U}_2$$

olarak alırsak  $\vec{V}_1$  ile  $\vec{U}_1$  paralel olur [4]. Bu şart altında tanımlı  $(\vec{U}_1)$  regle yüzeyine 2-konoidal regle yüzey denir ve  $\vec{V}_1$  e de doğrultu uzayı adı verilir.

#### 4.1.2. Tanım

$(\vec{U}_1)$  kapalı dual regle yüzey olmak üzere,  $(\vec{U}_2, \vec{U}_3)$ - dual düzleminde yatan

$$\vec{N}_1 = \cos \phi \vec{U}_2 + \sin \phi \vec{U}_3$$

şeklinde tanımlı birim dual vektörü ile  $\vec{U}_2$  arasındaki dual açı  $\phi(t) = \varphi(t) + \varepsilon\varphi^*(t)$ ,  $t \in I$ , olsun.  $K/K'$  kapalı hareketi esnasında  $\vec{U}_1$ ,  $(\vec{U}_1)$  kapalı dual regle yüzeyini çizerken,  $\vec{N}_1$ ,  $K'$  dual sabit küresi üzerinde bir dual eğri çizer. Bu eğri  $(\vec{U}_1)$  dual regle yüzeyinin ortogonal yörüngesidir.

Eğer  $(\vec{U}_1)$  in bu ortogonal yörüngesi üzerinde bulunan noktalardaki tanjant uzayları  $\vec{V}_1$  e dik ise  $(\vec{U}_1)$  e 2- ortokonoidal regle yüzey denir.

#### 4.1.3. Tanım

$(\vec{U}_1)$  silindirik olmayan ( $m > 0$ ) regle yüzey olsun. Eğer  $(\vec{U}_1)$  in asimptotik demetinin boyutu olan  $m+1$  sabit ise  $(\vec{U}_1)$  e kuvvetli konoidal regle yüzey denir.

### 4.1.1. Sonuç

Burada daima  $m = 1$  olacağından  $(\vec{U}_1)$  dual regle yüzeyi her durumda kuvvetli konoidaldir.

$(\vec{U}_1)$  dual regle yüzeyinin  $\{e_1(t), a_2(t)\}$  ortonormal bazını  $\{e_1(t), a_2(t), a_3(t)\}$  dual ortonormal bazına tamamlayalım.

Bu bazın vektörlerinin türevi,

$$\dot{e}_1 = \alpha e_1 + \kappa_1 a_2, \quad \kappa_1 > 0,$$

$$\dot{a}_2 = -\kappa_1 e_1 + \tau_1 a_2 + \omega_1 a_3,$$

$$\dot{a}_3 = -\kappa_2 e_2 + \tau_2 a_2 + \omega_2 a_3, \quad \kappa_2 > 0 \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada

$$\kappa_1 = k_1 + \epsilon k_1^*, \quad \kappa_2 = k_2 + \epsilon k_2^*,$$

$$\tau_1 = t_1 + \epsilon t_1^*, \quad \tau_2 = t_2 + \epsilon t_2^*,$$

$$\omega_1 = v_1 + \epsilon v_1^*, \quad \omega_2 = v_2 + \epsilon v_2^*$$

dir.

Merkez regle yüzeyli  $(\vec{U}_1)$  dual regle yüzeyinin  $\vec{U}_1$  birim dual vektörünün sabit  $K$  küresi üzerinde çizdiği  $X$  dayanak eğrisi için

$$\dot{X}(t) = \xi_1 e_1 + \eta_1 a_2 + \eta_2 a_3, \quad \eta_2 \neq 0$$

şeklindedir.

## 4.2. Dual Uzayda Konoidal Regle Yüzeylerle İlgili Karakterizasyonlar

### 4.2.1 Teorem

2-regle yüzey  $(\vec{U}_1)$  ve  $(\vec{U}_1)$  in asimptotik demetinin boyutu sabit olsun.  $(\vec{U}_1)$  in asimptotik demeti  $\vec{V}_1$  doğrultu uzayına paraleldir.

*İspat:*

$(V_1)^\perp, \vec{V}_1$  in ortogonal tümleyeni olsun.  $\text{boy}(V_1)^\perp = 1$  olduğundan,

$$(V_1)^\perp = \text{Sp}\{b_3(t)\}$$

alabiliriz.

$(V_1)^\perp, \vec{V}_1$  e ortogonal olduğundan

$$\langle b_3, e_1(t) \rangle = 0 \quad (4.2)$$

dir. Eş.4.2 den türev alırsak

$$\langle b_3, \dot{e}_1(t) \rangle = 0 \quad (4.3)$$

olur.  $\dot{e}_1$  in Eş.4.1 deki karşılığını Eş.4.3 te yerine yazalım. Bazı cebirsel işlemlerden sonra

$$\langle b_3, \alpha e_1 + \kappa_1 a_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle b_3, a_2(t) \rangle = 0 \quad (4.4)$$

bulunur. Eş.4.4 ve Eş.4.2 den  $(\vec{U}_1)$  in  $A(t)$  asimptotik demeti  $(V_1)^\perp$  e ortogonal olduğunu elde ederiz. Buradan da  $A(t) \parallel \vec{V}_1$  olur.

#### 4.2.2. Teorem

$(\vec{U}_1)$  silindirik olmayan ( $m > 0$ ) 2-konoidal dual regle yüzey olsun. Eğer  $(\vec{U}_1)$  kuvvetli konoidal ise Eş.4.1 deki

$$w_1 = 0$$

dır.

*İspat:*

$A(t) \parallel \vec{V}_1$  ( $\forall t \in I$ ) den

$$\langle b_3, a_2(t) \rangle = 0$$

elde edilir. Burada türev almırsa

$$\langle b_3, \dot{a}_2(t) \rangle = 0$$

olur. Eş.4.1 den

$$\langle b_3, -\kappa_1 e_1 + \tau_1 a_2 + \omega_1 a_3 \rangle = 0$$

bulunur. Gerekli işlemlerden sonra

$$\omega_1 \langle b_3, a_3 \rangle = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir.

Şimdi,  $(\overline{U}_1)$  kuvvetli konoidal olsun. Bu durumda  $\overline{V}_1$  doğrultu uzayı,  $A(t)$  nin baz vektörleri tarafından gerilir. O zaman  $(V_1)^\perp$  ve  $\text{Sp}\{a_3\}$  aynı uzayı gösterir. Sonuç olarak Eş.4.5 ten

$$\omega_1 = 0$$

elde edilir.

#### 4.2.3. Teorem

$(\overline{U}_1)$  merkez regle yüzeyli 2-regle yüzey olsun. Eğer  $(\overline{U}_1)$  kuvvetli konoidal ise ortokonoidaldir.

*İspat:*

Teorem 4.2.1 den  $(\overline{U}_1)$  in  $A(t)$  asimptotik demetinin  $\overline{V}_1$  doğrultu uzayına paralel olduğunu biliyoruz.  $(\overline{U}_1)$  in ortogonal yörüngesinde bulunan noktalardaki tanjant uzayı  $A(t)$  ye ortogondur ve dolayısıyla  $\overline{V}_1$  e de ortogondur. O halde Tanım 4.1.2 den  $(\overline{U}_1)$  in ortokonoidal olduğunu elde ederiz.

#### 4.2.4. Teorem

$(\overline{U}_1)$  silindirik olmayan ( $m > 0$ ) kuvvetli konoidal 2-regle yüzey olsun. Eğer  $(\overline{U}_1)$  ortokonoidal ise o zaman Eş. 4.1 deki

$$\omega_2 = 0$$

dir.

*İspat:*

$(\vec{U}_1)$  ortokonoidal olsun. Bu durumda  $(\vec{U}_1)$  merkez regle yüzeye sahiptir ve  $\vec{a}_3(t)$ ,  $t \in I$ , merkez tanjant vektörü vardır.  $(\vec{U}_1)$  ortokonoidal olduğundan  $\vec{a}_3 \perp \vec{V}_1$  dir.  $(V_1)^\perp = \text{Sp} \{b_3\}$  olmak üzere,

$$\langle b_3, a_3(t) \rangle = \lambda, (\lambda \text{ sabit})$$

dır. Burada türev alındığında

$$\langle b_3, \dot{a}_3(t) \rangle = 0$$

olur. Son eşitlik ve Eş. 4.1 den

$$\langle b_3, -\kappa_2 e_2 + \tau_2 a_2 + \omega_2 a_3 \rangle = 0$$

ve buradan da

$$\omega_2 \langle b_3, a_3 \rangle = 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Teorem 4.2.2 den

$$\omega_2 = 0$$

elde edilir.

#### 4.2.5. Teorem

$(\vec{U}_1)$  merkez regle yüzeyli 2- konoidal dual regle yüzey olsun. Eğer  $(\vec{U}_1)$  2-ortokonoidal ise

$$\omega_1 = 0$$

dır.

*İspat:*

$(\vec{U}_1)$  merkez regle yüzeyli olduğundan  $\vec{a}_3(t)$  merkez tanjant vektörü vardır.

$(\vec{U}_1)$  2-ortokonoidal olsun. O halde  $\vec{a}_3 \perp \vec{V}_1$  ve  $(V_1)^\perp \perp A(t)$  olduğundan  $\vec{a}_3 \in (V_1)^\perp$  dir.

Buradan

$$\langle a_3(t_0), a_2(t) \rangle = 0,$$

$$\Rightarrow \langle a_3(t_0), \dot{a}_2(t) \rangle = 0,$$

42

$$\Rightarrow \langle a_3(t_0), -\kappa_1 e_1 + \tau_1 a_2 + \omega_1 a_3 \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\omega_1 = 0$$

bulunur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde dual uzayda konoidal, ortokonoidal ve kuvvetli konoidal regle yüzey tanımları ve bunlarla ilgili bazı karakterizasyonlar verildi. Dual uzayda küresel hareketler geometrik olarak daha da yakından mercek altına alınır ise dual konoidal regle yüzeyler için başka karakterizasyonlar da elde edilebilir.



## KAYNAKLAR

1. Akdemir, K., Çalışkan, M. and Kuruoğlu, N. (1997). On The Pair Of Konoidal Ruled Surfaces Under The Homothetic Motions Of The Euclidean Space  $E^n$ , *Pure And Applied Mathematica Sciences*, 46(1).
2. Çalışkan, M. and Hacısalihoğlu, H. H. (1989). On The Pair Of Generalized Ruled Surfaces Under The Homothetic Motions Of  $E^n$ , *Communications Faculty of Sciences University of Ankara*, A1, 38(1), 95-102.
3. Çalışkan, M. and Kuruoğlu, N. (1992). On The Pair Of Konoidal Axoids, *Pure And Applied Mathematica Sciences*, 36(1).
4. Erim, K. (1949). *Diferensiyel Geometri Dersleri*, İstanbul, 399.
5. Frank, H. (1979). *On Kinematics Of The n-Dimensional Euclidean Space*. To Geo. Proc. Of The Geo. Symp. In Siegen 1978, Birkhauser Verlag Basel.
6. Frank, H. and Giering, O. (1976). Verallgemeinerte Regelflächen, *Math. Z.* 150, 261-271.
7. Frank, H. and Giering, O. (1982). Verallgemeinerte Regelflächen Im Großen I, *Arch. Math.* 38, 106-115.
8. Frank, H. and Giering, O. (1984). Verallgemeinerte Regelflächen Im Großen II, *Journal of Geometry* 23.
9. Gürsoy, O. (1990). The Dual Angle Pitch of a Closed Ruled Surface, *Mechanism and Machine Theory*, 25(2), 131-140.
10. Hacısalihoğlu, H. H. (1972). On The Pitch of a Closed Ruled Surface, *Mechanism and Machine Theory*, 7, 291-305.
11. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1-38, 282-283, 188-191.
12. Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya, 30-41.
13. Müller, H. R. (1963). *Kinematik Dersleri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 278-279.
14. Şenyurt, S. and Çalışkan, M. (2001). The Parallel Ruled Surfaces And Some Their Characteristic Properties, *Bulletin Of Pure And Applied Sciences*.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AYDIN, Sevinç  
 Uyuğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 02.11.1988, Nusaybin  
 Medeni hali : Bekâr  
 Telefon : 0 543 668 42 86  
 Faks : -  
 e-mail : sevinccaydin@gmail.com



### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2014
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2011
Lise	Nusaybin Lisesi	2006

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2010	Celalaydın Dersanesi	Matematik Öğretmeni

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

1. Aydın, S., Çalışkan, M.(2013). Some Characterizations For Konoidal Ruled Surfaces In Dual Space. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 4(10), 29-32.
2. Karaca, E., Çalışkan, M., Aydın, S. (2014). Some Characterizations For The Existence Of Bertrand Curves In Dual Space  $ID^4$ . *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 5(1), 17-19.

3. Aydın, S., Çalışkan, M.(2013). On Konoidal Ruled Surfaces On The Dual Space, XI. Geometri Sempozyumu, Ordu Üniversitesi
4. Çalışkan, M., Karaca, E., Aydın, S., (2014).  $ID^4$  te Bertrand Eğri Çiftleri, 13. Matematik Sempozyumu(Bilimin Çeliği Matematik konulu), Karabük Üniversitesi

**Hobiler**

Ebru yapma, Keman çalma, Kitap okuma



*GAZİ GELECEKTİR..*