

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GLOBAL MİNİMUM BULMA METODU ÜZERİNE

Gamze BUZKAN

Danışman: Doç.Dr. Ahmet ŞAHİNER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011

TEZ ONAYI

Gamze BUZKAN tarafından hazırlanan “**Global Minimum Bulma Metodu Üzerine**” adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Süleyman Demirel Üniversitesi **Matematik** Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Ahmet ŞAHİNER

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Juri Üyeleri :

Prof. Dr. Mehmet SALTAN

Süleyman Demirel Üniversitesi, Ulaştırma Anabilim Dalı

Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Mehmet Cengiz Kayacan

Enstitü Müdür Vekili

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	<i>i</i>
ÖZET.....	<i>ii</i>
ABSTRACT.....	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR.....	<i>iv</i>
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	<i>v</i>
SİMGELER DİZİNİ.....	<i>vi</i>
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. FİLLED FONKSİYON METODU.....	8
3.1. Filled Fonksiyon ve Filled Fonksiyon Olma Özellikleri.....	8
3.2. Q – Filled Fonksiyonu ve Özellikleri.....	10
3.3. Xian Liu Tarafından Önerilen Bazı Filled Fonksiyonlar.....	13
3.4. p – Filled Fonksiyonu ve Özellikleri.....	18
4. UYGULAMA.....	27
4.1. Problemin Tanımı.....	28
4.2. EYD Probleminin Matematiksel Modeli.....	28
4.3. Filled Fonksiyon Metodunun ELD Problemine Uygulanması.....	30
4.4. Sonuç.....	34
5. KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	41

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GLOBAL MİNİMUM BULMA METODU ÜZERİNE

Gamze BUZKAN

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun literatürdeki yerinin belirlenmesi amacıyla literatür özeti verilmiş, tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve konunun amacı açıklanmıştır.

İkinci bölümde filled fonksiyon metodu ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde öncelikle filled fonksiyon metodunun altında yatan teori anlatılmıştır. Daha sonra literatürde tanımlanan bazı filled fonksiyonlar ve özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise güncel hayat problemlerinden biri olan ekonomik yük dağıtım problemi için filled fonksiyon metodu ile çözümü incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Global optimizasyon, Filled fonksiyon metodu, Global minimumlaştırıcı, Ekonomik yük dağıtımı.

2011, 41 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON METHOD OF FINDING GLOBAL MINIMUM

Gamze BUZKAN

Süleyman Demirel University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

This study consists of four chapters. In the first chapter, a summary of the literature is given in order to determine the place of the topic in the literature, later historical development of filled function method is mentioned and the aim of the subject is explained.

In the second chapter, some basic notions on filled function method are mentioned.

In the third chapter, firstly the theory underlying the filled function method is introduced. Then some filled functions in the literature and their properties are explained.

In the last chapter, the solution of economic load dispatch problem which is one of the current daily life problems by using filled function method is investigated.

Key Words: Global optimization, Filled function method, Global minimizer, Economic load dispatch.

2011, 41 pages

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma için beni yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yardımcı olan, yüksek lisanstan itibaren çalıŐmamdaki en büyük pay sahibi, bir danışman-
dan öte grdgm ve her konuda destek aldgm, hayatımda büyük öneme sahip
danışman hocam Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince maddi ve manevi olarak bana destek olan aileme
ve Havva Gökkaya'ya teşekkür ederim.

2335 – *YL* – 10 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel
niversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi BaŐkanlıđı'na teşekkür
ederim.

Gamze BUZKAN

ISPARTA, 2011

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ global konveks fonksiyon örneği.....	5
Şekil 3.1. Filled fonksiyonun azalan olma özelliği.....	12
Şekil 4.1. Kısıtsız EYD fonksiyon grafiği (Liu'dan, 2007).....	30
Şekil 4.2. Kısıtlı EYD fonksiyon grafiği (Liu'dan, 2007).....	30

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Fiyat katsayıları (Liu'dan, 2007)	29
Çizelge 4.2. Lokal minimumlar (Liu'dan, 2007)	32
Çizelge 4.3. Algoritma sonuçları (Liu'dan, 2007).....	33

SİMGELER DİZİNİ

$\nabla f(x)$	f fonksiyonunun gradyenti
x^*	f fonksiyonunu global minimum yapan nokta
B_k^*	f fonksiyonunun x_k noktasındaki yuvası
S_k^*	f fonksiyonunun x_k^* izole minimum noktasındaki basit yuvası
D_k	S_k^* in minimum yarıçapı
L	Lipschitz sabiti
d	Yön
a, p, m, ρ, μ	Parametreler
$N(x, \sigma)$	x noktasının σ komşuluğu

1. GİRİŞ

İnsanlar yaşamları boyunca birçok sorunla karşılaşmışlar ve zamanla bu sorunların çözümlerini modeller üzerinde aramaya başlamışlardır. Matematik ve bilgisayaradaki gelişmeler, dış dünyanın problemlerini matematiksel olarak formülleyip modelledikten sonra çözerek bu çözümleri gerçek hayata yansıtma olanağı vermiştir.

Matematikte ve bilgisayar biliminde optimizasyon, bir problemde belirli koşullar altında mümkün olan alternatifler içinden en iyisini seçmek anlamına gelir ve hedeflenen sonuç, optimizasyon teknikleri kullanılarak ulaşılan sonuçtur. Bir işin yapılmış olması demek, o işin en iyi şekilde yapıldığı anlamına gelmez. Optimizasyon teknikleri, yapılmış veya yapılmakta olan işin en iyi çözümünü ortaya koymak için kullanılan tekniklerdir. Bu teknikler kullanılarak ortaya konulmuş olan çözüm, optimum çözüm olarak adlandırılır. Hedef her zaman için bu optimum çözümü yakalayabilmektir. Optimizasyon, anlamından da anlaşılacağı gibi, her alanda kullanılmaktadır. Robot yapımından ilaç yan etkilerinin minimize edilmesine kadar her alanda bu tekniklere başvurulur.

Matematiksel modelleme tekniği öncelikle doğrusal ve az sayıda değişkenin kullanılmasyla başlamıştır. Bir süre sonra doğrusallık varsayımının her problem için geçerli olmadığı anlaşılmıştır. Bu durumda doğrusal olmayan modellemeye gidilmiştir. Ancak doğrusal olmayan modellerin kendine özgü çözümleri, uygulamada birçok sorunu beraberinde getirmiştir. Zamanla geliştirilen yöntemler sayesinde doğrusal olmayan modellerin hızla çözümlenmesi sağlanmış, bu da lineer olmayan optimizasyon teorisini geliştirmiştir.

Fizik, biyoloji, sosyoloji gibi bilimin birçok alanında güncel hayat problemlerinin modelleri ele alınan konuya göre çok basit veya karmaşık olabilirler. Öncelikle değişkenlerin belirlenerek problemin amacı ve kısıtları matematiksel olarak formülleştirilir. Daha sonra geliştirilen metotlar yardımıyla problemin çözümü araştırılır. Bu formüllerden en az birinin lineer olmaması, problemin lineer olmayan optimizasyon metotlarından biri ile çözüleceği anlamına gelir.

1970 ten bu yana çok değişkenli fonksiyonlara uygulanan optimizasyon metotlarındaki çalışmalar devam etmektedir. Eğer problemimiz kısıtsız optimizasyon problemlerinden biri ise fonksiyonun lokal minimumlarını bulmak için birçok etkili yöntem varken global minimumu bulmak için çok az etkili yöntem vardır. Filled fonksiyon metodu global minimum bulma metotlarına örnek verilebilir (Han and Han, 2001).

Genel anlamda, global optimizasyon metotları probablistik ve deterministik olmak üzere ikiye ayrılır. Deterministik metotlar fonksiyonların bazı küçük sınıflarına uygulanırken probablistik metotlar direkt olarak çok değişkenli fonksiyonlara uygulanır. Bu çalışmada anlatılacak olan filled fonksiyon metodu ise deterministik metotlardan birisidir (Liu and Xu, 2004).

Global optimizasyon araştırmalarında iki önemli sorun vardır:

- (1) Lokal minimumu bilinen bir $f(x)$ amaç fonksiyonununun daha küçük fonksiyon değerine sahip minimumlaştırıcısının nasıl bulunacağı,
- (2) Yakınsamanın nasıl değerlendirileceği ve buna göre durdurma kriterlerinin nasıl planlanacağıdır (Şahiner and Mammadov, 2007).

Filled fonksiyon metodu Ge (1983, 1987, 1990a, b) tarafından ortaya atılmış bir metottur. Daha sonra Qin (1987a, b) ile birlikte filled fonksiyon üzerine çalışmışlardır. İlerleyen yıllarda da birçok bilim adamının yeni fikirlerle filled fonksiyon ürettikleri çalışmalarını literatürde görmek mümkündür (Liu, 2001, 2002a, b, 2004a; Li et al., 2004, 2007; Zhu, 1999, 2002, 2004; Pardalos et al., 2001; Yang and Shang, 2006; Wang and Zhou, 2006; Wu et al., 2005, 2007a, b; Shang et al., 2007; Wang et al., 2007, 2009, 2011; Lin et al., 2009; Zhang et al., 2004, 2009a, b; He et al., 2011).

Teorik analiz ve sayısal deneyler filled fonksiyon metodunun umut verici bir metot olduğunu göstermesine rağmen; parametrelerin keyfi seçimi bilgisayar hesaplamalarında sorun çıkarabilir. Bu sebeple keyfi parametre seçimi içermeyen ve düzgün olmayan optimizasyon problemlerine de uygulanabilir filled fonksiyon metodu üzerine çalışmalar devam etmektedir. Örneğin; Liu ve Xu (2004), Ge'nin yap-

mış olduğu filled fonksiyon üzerinde bazı değişiklikler yaparak yeni filled fonksiyon üretmeye çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında günümüze kadar literatürde tanımlanan bazı filled fonksiyonların işleyişi hakkında bilgi verilmiş, teorik olarak uyarılarda bulunulmuş, gözlemler yapılmış ve son olarak da elektrik mühendisliği alanından seçilmiş güncel bir problemin filled fonksiyon metodu ile çözümü anlatılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde filled fonksiyon metodununun işleyişini daha iyi anlayabilmek için bize yol gösterecek bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1. V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı reel değerli aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyona V üzerinde bir norm denir.

- (i) $\forall x \in V, x \neq 0$ için $\|x\| > 0$,
- (ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in V$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- (iii) $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

V vektör uzayına da normlu vektör uzayı denir. V normlu vektör uzayı ise $\|x\|$ sayısına x vektörünün normu denir.

Bu tez çalışmasında her $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

ile tanımlanan öklid normu kullanılmıştır.

Tanım 2.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0$$

olacak şekilde bir L lineer fonksiyonu varsa f fonksiyonu x_0 noktasında diferansiyellenebilir denir.

Tanım 2.3. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık bir küme olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\nabla f(x) = \text{grad}f(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

vektörüne f fonksiyonunun $x \in U$ noktasındaki gradient vektörü denir.

Tanım 2.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\nabla f(x) = 0$$

şartını sağlayan x noktasına f fonksiyonunun duraksama noktası denir. Duraksama noktası bir minimum, maksimum ya da büküm noktası olabilir (Xu et al., 2001).

Tanım 2.5. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\nabla f(x) = 0$$

şartını sağlayacak şekilde fonksiyonun duraksama noktası olan fakat ekstremum noktası olmayan x noktasına f fonksiyonunun eyer noktası denir (Xu et al., 2001).

Tanım 2.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

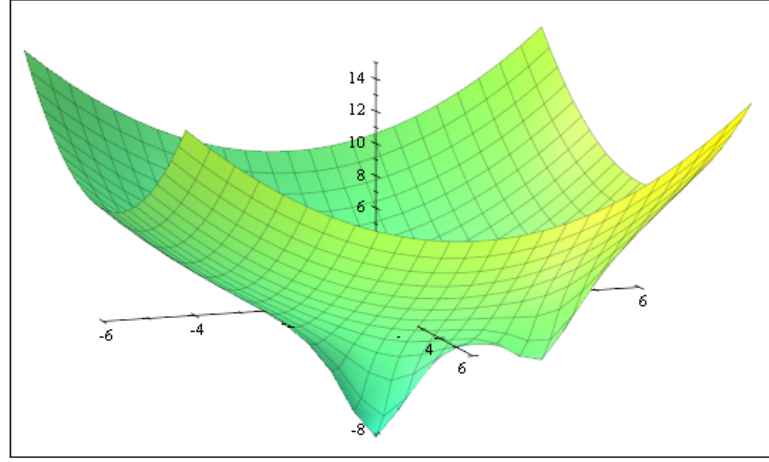
ise f ye global konveks denir.

Global konvekslik f nin bütün lokal minimumlaştırıcılarını içeren kapalı ve sınırlı $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin var olmasını, global ve lokal bütün minimumlaştırıcıların bu kümenin iç noktası olmasını gerektirir. Ayrıca $f(x)$ in hiçbir minimizasyon dizisinin sonsuza ıraksayamayacağını garantiler (Xu et al., 2001).

Örnek 2.7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = - \left(\frac{5}{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + 1} + \frac{8}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{5}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyon $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere $\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ önermesini sağladığı için global konveks bir fonksiyondur (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ global konveks fonksiyon örneği

Tanım 2.8. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\|x\| \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

ise f ye global konkav denir.

Açıkça $f(x)$ global konkav ise $-f(x)$ global konvektir ya da $f(x)$ global konveks ise $-f(x)$ global konkavdır.

Global konkav bir fonksiyon sonsuzda bir global minimuma sahipken, global konveks bir fonksiyon belirli bir yerde global minimumuna sahiptir (Ge and Qin, 1987).

Tanım 2.9. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. Eğer

$$h(\lambda) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))$$

fonksiyonu $\lambda \in [0, 1]$ için monoton azalan (artan) ise $x_1 - x_2$ ye, $f(x)$ in azalan (artan) parçası denir (Xu et al., 2001).

Önerme 2.10. $x_1 - x_2, f(x)$ in azalan (artan) bir parçası olsun. Eğer $f(x)$ sürekli diferansiyellenebiliyorsa

$$h'(\lambda) = \nabla f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))^T (x_1 - x_2) < 0 (> 0), \forall \lambda \in [0, 1]$$

dır (Xu et al., 2001).

Tanım 2.11. x_k^* , $f(x)$ fonksiyonunun bir izole minimum noktası olsun. x_k^* ı içeren ve kendisinden alınan her x noktasına uygulanan lokal minimum metodunda x_k^* a yakınsayan, kendisinden olmayan herhangi bir x noktasına uygulanan lokal minimum metodunda x_k^* a yakınsamayan, açık ve bağlantılı kümeye x_k^* ın yuvası denir ve x_k^* ın yuvası B_k^* ile gösterilir (Han and Han, 2001; Xu et al., 2001; Liu, 2002).

Tanım 2.12. Eğer \widetilde{x}_k^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun maksimumu var ise $f(x)$ fonksiyonunun \widetilde{x}_k^* daki tepesi, $-f(x)$ fonksiyonun \widetilde{x}_k^* daki yuvasıdır (Han and Han, 2001; Xu et al., 2001; Liu, 2002).

Tanım 2.13. Eğer

$$f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*), \quad ((f(x_{k+1}^*) > f(x_k^*)))$$

ise $f(x)$ fonksiyonunun x_k^* dan daha düşük (yüksek) x_{k+1}^* minimumlaştırıcısı vardır denir ve bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun x_{k+1}^* daki B_{k+1}^* yuvası B_k^* dan daha düşüktür (yüksektir) denir (Han and Han, 2001; Xu et al., 2001; Liu, 2002).

Tanım 2.14. B_k^* ı içeren ve kendisinden alınan her $x \neq x_k^*$ için $(x - x_k^*)$, $f(x)$ fonksiyonunun güçlü artan parçası olan açık ve bağlantılı kümeye x_k^* izole minimum noktasının basit yuvası denir ve S_k^* ile gösterilir.

Tanım 2.15. S_k^* , x_k^* izole minimum noktasının basit yuvası olsun. O halde

$$D_k = \min \{\|x - x_k^*\| : x \notin S_k^*\}$$

sayısına S_k^* ın minumum yarıçapı denir (Xu et al., 2001).

Tanım 2.16. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ varsa f fonksiyonu Lipschitz süreklidir denir.

3. FILLED FONKSİYON METODU

Bu bölümde filled fonksiyon metodunun altında yatan teori ve literatürde tanımlanmış bazı filled fonksiyonlar anlatılacaktır.

3.1. Filled Fonksiyon ve Filled Fonksiyon Olma Özellikleri

En temel anlamda filled fonksiyon yöntemi $f(x)$ amaç fonksiyonu için yedek bir fonksiyon oluşturmak demektir ki oluşturulan bu fonksiyona filled fonksiyon denir. Filled fonksiyon metoduyla global optimizasyon problemi iki safhada çözülür:

1.Safha: Tanım kümesinden herhangi bir x' başlangıç noktası seçilir, bu noktaya lokal optimizasyon metotlarından biri uygulanarak ona en yakın x_1^* lokal minimumlaştırıcı bulunur.

2.Safha: Bulunan x_1^* lokal minimumlaştırıcısında bir filled fonksiyon inşa edilir ve x_1^* noktasından daha küçük görüntüye sahip x' noktası bulunur. Daha sonra x' noktası başlangıç noktası kabul edilerek 1. safhaya geri dönülür ve böylece $f(x)$ fonksiyonunun $f(x_2^*) < f(x_1^*)$ olacak şekilde x_2^* noktası bulunmuş olur. Bu işlem filled fonksiyon daha küçük görüntüye sahip x^* noktası bulamayana kadar tekrarlanır. Son bulunan mevcut lokal minimumlaştırıcı $f(x)$ amaç fonksiyonunun global minimumlaştırıcısı olur (Şahiner and Mammadov, 2007).

Birden fazla minimuma sahip \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı $f(x)$ amaç fonksiyonunun filled fonksiyon metodu ile çözülebilmesi için aşağıdaki özelliklere sahip olması gerekir:

1. $f(x)$ sürekli diferansiyellenebilir,
2. $f(x)$ sonlu sayıda minimuma sahip,
3. $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $f(x) \rightarrow \infty$ olmalıdır.

Aslında literatürde tanımlanan bütün filled fonksiyonların kendine özgü tanımları vardır fakat genel bir tanım verilmek istenirse aşağıdaki gibi bir tanım verilebilir.

Tanım 3.1.1. $f(x)$ in x_k^* da bir lokal minimumu olsun. Eğer $p(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa $p(x)$ e $f(x)$ fonksiyonunun x_k^* daki filled fonksiyonu denir:

- (i) x_k^* noktasında, $p(x)$ fonksiyonunun bir lokal maksimumu vardır.
- (ii) U_k^* , B_k^* dan daha yüksek yuvaların bir birleşimi ve $W_k^* = B_k^* \cup U_k^*$ olmak üzere $p(x)$ fonksiyonu, $W_k^* \setminus \{x_k^*\}$ kümesinde ne bir minimumlaştırıcıya ne de bir eyer noktasına sahiptir. Ayrıca W_k^* kümesi $p(x)$ fonksiyonunun x_k^* noktasındaki tepesinin bir parçasıdır.
- (iii) Eğer $f(x)$ fonksiyonu B_k^* dan daha düşük B_{k+1}^* yuvasına sahipse, $p(x)$ fonksiyonunu $x_k^* + \lambda(x' - x_k^*)$, ($\lambda > 0$) ışıını boyunca minimum yapacak şekilde $x' \in B_{k+1}^*$ noktası vardır.

Yukarıdaki özellikler, inşa edilen filled fonksiyonu minimize etmek için kullanılan Quasi-Newton, Steepest Descent metodu gibi metotların iterasyon dizilerinin W_k^* kümesindeki herhangi bir noktada sonlanmayacağını fakat $f(x)$ fonksiyonunun B_k^* dan daha düşük yuvası olduğunda ya dizinin bu düşük yuvada yer alan bir noktada duracağını ya da x_k^* dan daha küçük fonksiyon değerine sahip bir x noktası bulacağını garantiler (Xu et al., 2001).

Ge (1983, 1990) tarafından önerilen ilk filled fonksiyon aşağıdaki gibidir:

$$P(x, r, \rho) = \frac{1}{r + f(x)} \exp\left(\frac{\|x - x_1^*\|^2}{\rho^2}\right). \quad (3.1)$$

Ge ve Qin (1990) sonraki bir çalışmalarında aşağıdaki global konveks filled fonksiyonu önermişlerdir:

$$U(x, A, h) = \eta(\|x - x_0\|) + \psi(A[f(x) - f(x_1^*) + h]). \quad (3.2)$$

Burada $\psi(t)$;

1. Her $t \in (-\infty, \infty)$ (ya da $t \in (-t_1, \infty)$ ($t_1 > 0$)) için $\varphi'(t) > 0$,
2. $t \rightarrow +\infty$ iken $\varphi'(t) \searrow 0$, $t\varphi'(t) \searrow 0$ (ya da $t\varphi'(t) \searrow c' > 0$); bu da $\varphi'(t)$ fonksiyonu $\frac{1}{t}$ fonksiyonunda olduğu gibi hızla 0 a doğru monoton azalacak,
3. $t \rightarrow +\infty$ iken $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \nearrow B > 0$ (ya da buna paralel olarak $+\infty$),
4. $\varphi'(0) > c$

özelliklerini sağlayan sürekli diferansiyellebilir tek değişkenli bir fonksiyon, $\eta(t)$

$$\eta(0) = 0, \quad t \geq 0 \text{ için } \eta'(t) \geq \tilde{a} > 0$$

özelliklerini sağlayan sürekli diferansiyellebilir tek değişkenli başka bir fonksiyon; yeterince büyük $A > 0$ ve yeterince küçük $h > 0$ sayıları

$$0 < h < f(x_1^*) - f(x^*),$$

$$A\varphi'(Ah) < \frac{\tilde{a}\varphi(Ah)}{\eta(\tilde{D}')L}$$

özelliklerindeki pozitif sayılar; x_1^* ve x^* sırasıyla $f(x)$ fonksiyonu için lokal minimumlaştırıcı ve global minimumlaştırıcıdır. \tilde{D}' ise $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) > f(x_1^*)$ olacak şekilde önceden sabitlenmiş bir nokta olmak üzere $\tilde{D}' = \max_{x \in \Omega} \|x - x_0\|$ şeklinde tanımlanır.

3.2. Q–Filled Fonksiyonu ve Özellikleri

(3.1) de verilen Ge tarafından önerilmiş filled fonksiyon birçok test problemlerine uygulanmış ve başarılı olduğu görülmüştür. Fakat filled fonksiyonun keyfi iki parametre ve üstel fonksiyon içermesi bilgisayar hesaplamalarında çeşitli sıkıntılara yol açmıştır. Bunun üzerine Ge ve Qin (1987) aşağıdaki tek parametrelili filled fonksiyonu üretmişlerdir:

$$Q(x, a) = -(f(x) - f(x_1^*)) e^{a\|x - x_1^*\|^2}, \quad a > 0. \quad (3.3)$$

Dikkat edilirse eğer $f(x)$ her yerde iki kere diferansiyellenebilirse (3.3) fonksiyonu da her yerde iki kere diferansiyellenebilir ve sadece bir tek ayarlanabilir a parametresine bağlıdır.

(3.3) de tanımlanan fonksiyonun filled fonksiyon olma özellikleri ile ilgili teorem ve ispatlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.1. Varsayalım ki $f(x)$ fonksiyonu x_1^* noktasında lokal minimuma sahip olsun. Bu durumda her $a > 0$ için $Q(x, a)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında lokal

maksimumu vardır.

İspat: Açıkça;

$$Q(x, a) = -(f(x) - f(x_1^*)) e^{a\|x-x_1^*\|^2}, a > 0$$

ise

$$Q(x_1^*, a) = -(f(x_1^*) - f(x_1^*)) e^{a\|x_1^*-x_1^*\|^2} = 0 > Q(x, a)$$

dır. Burada x ler, $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasındaki yuvasındadır yani $x \in B_1^*$ dir. O halde $f(x) > f(x_1^*)$ olduğu açıktır. Bu da x_1^* noktasında $Q(x, a)$ fonksiyonunun bir lokal maksimumu var demektir.

Teorem 3.2.2. $f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve d aşağıdaki koşulları sağlayan bir yön olsun:

$$d^T \nabla f(x) \geq 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

ya da

$$d^T \nabla f(x) > 0, \quad d^T (x - x_1^*) \geq 0.$$

Eğer $f(x) > f(x_1^*)$ ise d, x noktasında $Q(x)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

İspat: $Q(x, a)$ fonksiyonunun tanımından

$$d^T \nabla Q(x, a) = - \left\{ d^T \nabla f(x) e^{a\|x-x_1^*\|^2} + 2ad^T (x - x_1^*) (f(x) - f(x_1^*)) e^{a\|x-x_1^*\|^2} \right\}$$

dır. Böylece verilen koşullar $d^T \nabla Q(x) < 0$ olmasını garantiler. Bu da d nin x noktasında $Q(x)$ fonksiyonu için azalan bir yön olduğunu gösterir (Şekil 3.1).

Teorem 3.2.3. $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

olsun. Eğer

$$a > - \frac{d^T \nabla f(x)}{2(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*)} = a_1(x)$$

ise d , x noktasında $Q(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

Ayrıca x_i^* lar $f(x_i^*) > f(x_1^*)$ olacak şekilde $f(x)$ fonksiyonunu minimum yapan noktalar ve Ω , $f(x)$ fonksiyonunu minimum yapan bütün noktaları içeren açık ve bağlantılı bir küme olmak üzere,

$$h = \min_{i \neq 1} (f(x_i^*) - f(x_1^*)) > 0, \quad \|\nabla f(x)\| \leq L, \quad x \in \Omega, \quad \|x - x_1^*\| \geq D \quad (x \notin S_1^*)$$

olsun. Bu durumda

$$a > \frac{L}{2hD} \quad (3.4)$$

ise $Q(x, a)$ fonksiyonu, $x - x_1^*$ yönü boyunca azalır. Böylece $Q(x, a)$ fonksiyonu minimumlaştırıcıya veya eyer noktasına sahip olamaz; azalmaya devam eder.

İspat:

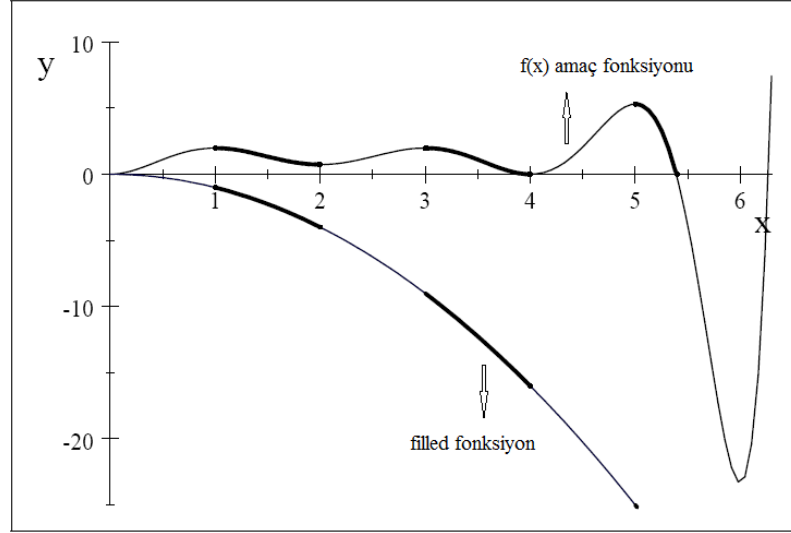
$$\begin{aligned} d^T \nabla Q(x, a) &= -e^{a\|x-x_1^*\|^2} \{d^T \nabla f(x) + 2ad^T(x-x_1^*)(f(x)-f(x_1^*))\} < 0 \\ \Leftrightarrow d^T \nabla f(x) + 2ad^T(x-x_1^*)(f(x)-f(x_1^*)) &> 0 \\ \Leftrightarrow a > -\frac{d^T \nabla f(x)}{2d^T(x-x_1^*)(f(x)-f(x_1^*))}. \end{aligned}$$

Böylece, eğer $Q(x, a)$ fonksiyonu minimumlaştırıcıya veya bir eyer noktasına sahipse

$$\begin{aligned} \nabla Q(x, a) &= -e^{a\|x-x_1^*\|^2} \{\nabla f(x) + 2a(x-x_1^*)(f(x)-f(x_1^*))\} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \nabla f(x) + 2a(x-x_1^*)(f(x)-f(x_1^*)) &= 0 \\ \Rightarrow 2a\|x-x_1^*\|(f(x)-f(x_1^*)) &= \|\nabla f(x)\| \\ \Rightarrow a = \frac{\|\nabla f(x)\|}{2\|x-x_1^*\|(f(x)-f(x_1^*))} &< \frac{L}{2hD} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Açıkça (3.5) eşitsizliği (3.4) eşitsizliği ile çelişir.

Bu da bize $Q(x, a)$ fonksiyonunun $x - x_1^*$ yönü boyunca, $f(x_i^*) > f(x_1^*)$ olacak şekilde B_1^* dan daha yüksek bir B_i^* yuvasında azalan olduğunu gösterir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Filled fonksiyonun azalan olma özelliği

Teorem 3.2.4 $f(x)$ fonksiyonu sonlu sayıda minimumlaştırıcıya sahip olsun. Eğer

$$a < -\frac{d^T \nabla f(x)}{2(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*)} = a_1(x)$$

ise, $Q(x, a)$ fonksiyonu x noktasında d yönünde artandır. Hatta $Q(x, a)$ fonksiyonu $f(x)$ in B_1^* dan daha düşük bir yuvasında lokal minimumlaştırıcıya veya eyer noktasına sahip olur.

İspat: Yukarıdaki Teorem 3.2.3 ün ispatında yer alan (3.5) eşitsizliğinden açıkça görülür.

3.3. Xian Liu Tarafından Önerilen Bazı Filled Fonksiyonlar

Ge ve Qin'in önerdikleri (3.3) de verilen filled fonksiyonun düzgün işleyebilmesi için a parametresinin yeterince büyük seçilmesi gerekir. Bu da üstel fonksiyonun hızla artmasına sebep olacağından hesaplamada sıkıntı çıkarır. Uygulamada bu tip hesaplama problemleri ile sık sık karşılaşıldığı için, birçok bilim adamı yeni fikirlerle yeni filled fonksiyonlar önermişlerdir. Aşağıdaki filled fonksiyonlar Liu

(2002, 2002a, 2004)'nın önermiş olduğu filled fonksiyonlardan bazılarıdır:

$$\begin{aligned}
L(x, a) &= - \left\{ [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}} + a \|x - x_1^*\|^2 \right\}, \\
L_2(x, a) &= - \left\{ \frac{a}{\|x - x_1^*\|^p} - [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}} \right\}, \\
ML_2(x, a) &= ay \left\{ \frac{1}{\|x - x_1^*\|^p} \right\} - [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}}, \\
M(x, a) &= \frac{1}{[f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}}} - a \|x - x_1^*\|^2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Burada $m > 1$ ve $m, p \in \mathbb{N}$ olacak şekilde sabitler ve $a \in \mathbb{R}^+$ ayarlanması gereken bir parametredir.

(3.6) da tanımlanan $L(x, a)$ fonksiyonun filled fonksiyon olma özellikleri ile ilgili teorem ve ispatlar aşağıda verilmiştir (Liu, 2002). $L_2(x, a)$ ve $M(x, a)$ fonksiyonlarının da filled fonksiyon olma özellikleri benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.1. Eğer x_1^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun lokal minimumu varsa $L(x, a)$ fonksiyonunun x_1^* da lokal maksimumu vardır.

İspat: $L(x, a) = - \left\{ [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}} + a \|x - x_1^*\|^2 \right\}$ olduğu için, x_1^* m yuvasındaki her x için $f(x) \geq f(x_1^*)$ olduğunu biliyoruz. Böylece $L(x, a) \leq 0 = L(x_1^*, a)$ dir.

Teorem 3.3.2. $d \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x) > f(x_1^*)$ olsun. Eğer

$$d^T \nabla f(x) \geq 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

veya

$$d^T \nabla f(x) > 0, \quad d^T (x - x_1^*) \geq 0$$

ise d, x noktasında $L(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

İspat: $L(x, a)$ fonksiyonunun tanımından

$$d^T \nabla L(x, a) = - \left[\frac{(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}}}{m (f(x) - f(x_1^*))} d^T \nabla f(x) + 2ad^T (x - x_1^*) \right]$$

dır. Böylece $d^T \nabla L(x, a) < 0$ olması garantilenir. Bu da d yönünün, x noktasında $L(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yön olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.3. $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

verilsin. Eğer

$$a > \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}} d^T \nabla f(x)}{2m(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*)} = a_1(x)$$

ise d , x noktasında $L(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

İspat: $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

olsun.

$$\begin{aligned} a &> \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}} d^T \nabla f(x)}{2m(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*)} \\ \Rightarrow 0 &> -(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}} d^T \nabla f(x) - 2am(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*) \\ \Rightarrow 0 &> \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}} d^T \nabla f(x)}{m(f(x) - f(x_1^*))} - 2ad^T (x - x_1^*) \\ \Rightarrow 0 &> d^T \nabla L(x, a) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da a parametresi Teorem 3.3.3 de verilen şartı sağladığında d nin x noktasında $L(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yön olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.4. $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

verilsin. Eğer

$$a < \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}} d^T \nabla f(x)}{2m(f(x) - f(x_1^*)) d^T (x - x_1^*)} = a_1(x)$$

ise d , x noktasında $L(x, a)$ fonksiyonu için artan bir yöndür.

İspat: Yukarıdaki Teorem 3.3.3 ün ispatından açıkça görülür.

Liu'nun önerdiği filled fonksiyonlardan $L_2(x, a)$, $ML_2(x, a)$ ve $M(x, a)$, x_1^* noktasında tanımsızdırlar fakat filled fonksiyon olma özelliklerini sağlarlar.

Yapılan araştırmalarda $L_2(x, a)$ fonksiyonunun x_1^* yakınlarında dik olma eğiliminde olduğu görülür. Bu ise bilgisayar hesaplamalarında zorluk çıkarabilir. Liu (2002) bu zorluğu hafifletmek için bir dönüşüm yardımıyla aşağıdaki filled fonksiyonu önermiştir:

$$ML_2(x, a) = ay \left\{ \frac{1}{\|x - x_1^*\|^p} \right\} - [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}}.$$

Buradaki $y : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna mitigatör (hesaplama hatasını hafifletici) adı verilir ve bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) y fonksiyonu Ω da iki kere sürekli diferansiyellebilir,
- (ii) $y(0) = 0$, $y'(t) > 0$, $y''(t) < 0 \quad \forall t \in (0, +\infty)$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \text{sabittir}$.

$y(t)$ fonksiyonuna örnek olarak $\arctan t$, $1 - e^{-t}$ ve benzeri fonksiyonlar verilebilir. $y(t)$ fonksiyonu monoton artan olduğu için $ML_2(x, a)$ fonksiyonunun filled fonksiyon olma özellikleri $L(x, a)$ fonksiyonuna benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.3.5. $f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve d aşağıdaki koşulları sağlayan bir yön olsun:

$$d^T \nabla f(x) \geq 0, \quad d^T (x - x_1^*) > 0$$

veya

$$d^T \nabla f(x) > 0, \quad d^T (x - x_1^*) \geq 0.$$

Eğer $f(x) > f(x_1^*)$ ise d , x noktasında $ML_2(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

İspat: $ML_2(x, a)$ fonksiyonunun tanımından açıkça

$$\begin{aligned} d^T \nabla ML_2(x, a) &= - \left[pa \frac{d^T(x-x_1^*)}{\|x-x_1^*\|^{p+2}} y' \left(\frac{1}{\|x-x_1^*\|^p} \right) + \frac{1}{m} [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) \right] \\ &< 0 \end{aligned}$$

dir. Bu da d nin x noktasında $ML_2(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yön olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.6. $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T(x - x_1^*) > 0$$

verilsin. Eğer

$$a > \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) \|x - x_1^*\|^{p+2}}{pmy' \left(\frac{1}{\|x-x_1^*\|^p} \right) d^T(x - x_1^*)} = a_1(x)$$

olacak şekilde seçilirse d , x noktasında $ML_2(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yöndür.

İspat: $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, \quad d^T(x - x_1^*) > 0$$

olsun.

$$\begin{aligned} a &> \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) \|x - x_1^*\|^{p+2}}{pmy' \left(\frac{1}{\|x-x_1^*\|^p} \right) d^T(x - x_1^*)} \\ &\Rightarrow 0 > -(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) \|x - x_1^*\|^{p+2} - pamy' \left(\frac{1}{\|x - x_1^*\|^p} \right) d^T(x - x_1^*) \\ &\Rightarrow 0 > - \left[\frac{1}{m} [f(x) - f(x_1^*)]^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) + pa \frac{d^T(x - x_1^*)}{\|x - x_1^*\|^{p+2}} y' \left(\frac{1}{\|x - x_1^*\|^p} \right) \right] \\ &\Rightarrow 0 > d^T \nabla ML_2(x, a) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da a parametresi Teorem 3.3.6 da verilen şartı sağladığında d nin

x noktasında $ML_2(x, a)$ fonksiyonu için azalan bir yön olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.7. $f(x) > f(x_1^*)$ ve

$$d^T \nabla f(x) < 0, d^T(x - x_1^*) > 0$$

verilsin. Eğer

$$a < \frac{-(f(x) - f(x_1^*))^{\frac{1}{m}-1} d^T \nabla f(x) \|x - x_1^*\|^{p+2}}{pmy' \left(\frac{1}{\|x - x_1^*\|^p} \right) d^T(x - x_1^*)} = a_1(x)$$

ise d, x noktasında $ML_2(x, a)$ fonksiyonu için artan bir yöndür.

İspat: Yukarıdaki Teorem 3.3.6'nın ispatından açıkça görülmüştür.

3.4. p - Filled Fonksiyonu ve Özellikleri

Zhang vd. (2004), $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $f(x)$ in tüm minimumlaştırıcılarını içeren kapalı, sınırlı bir küme olmak üzere $f(x)$ in bu kümede sonlu sayıda lokal minimumlaştırıcısının olduğunu farz ederek aşağıdaki optimizasyon problemini göz önüne aldılar:

$$\min_{x \in X} f(x). \quad (3.7)$$

Burada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ global konveks bir fonksiyon olduğunda ise

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

global optimizasyon problemi (3.7) deki optimizasyon problemine denk olur. Zhang vd. (2004), (3.7) probleminin çözümünde kullanılan filled fonksiyon tanımını daha öncekilerden farklı olarak aşağıdaki şekilde verdiler.

Tanım 3.4.1. x_1^* noktasında $f(x)$ in bir lokal minimumu olsun. $p(x, x_1^*)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $f(x)$ in x_1^* noktasındaki filled fonksiyonu olarak adlandırılır:

(i) x_1^* noktasında $p(x, x_1^*)$ fonksiyonu maksimum değerini alır ve $f(x)$ in B_1^* yuvası $p(x, x_1^*)$ tepesinin bir parçası olur.

(ii) $p(x, x_1^*)$, $f(x)$ in B_1^* yuvasından daha üstteki hiçbir yuvasında minimumlaştıracıya ya da eyer noktasma sahip değildir.

(iii) Eğer $f(x)$ in B_1^* yuvasından daha altta bir B_2^* yuvası varsa x_2^* in en az bir komşuluğundaki her x'' için, x_1^* dan x'' ne olan doğru boyunca, $p(x, x_1^*)$ fonksiyonunu minimum yapan bir $x' \in B_2^*$ noktası vardır.

Tanım 3.4.1 deki (iii) koşulu, Ge (1990)'nin vermiş olduğu filled fonksiyon tanımındaki (iii) koşulunun biraz daha geliştirilmiş bir halidir. Çünkü Ge (1990)'nin çalışmasında x_1^* ı daha alttaki bir yuvada bir noktaya bağlayan tek doğru üzerinde bir minimumlaştıracı istenirken burada x_1^* ı daha alttaki bir yuvanın bütün noktalarına bağlayan doğrular boyunca minimumlaştıracıları istenmektedir.

(3.7) deki amaç fonksiyonu \mathbb{R}^n de Lipschitz sürekli bir fonksiyon olmak üzere, Zhang vd. (2004) tarafından önerilen iki parametrelili filled fonksiyon aşağıda verilmiştir:

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = f(x_1^*) - \min[f(x_1^*), f(x)] - \rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu \{\max[0, f(x) - f(x_1^*)]\}^2. \quad (3.8)$$

Burada x_1^* noktasında $f(x)$ fonksiyonu kesin bir lokal minimuma sahiptir.

(3.8) deki filled fonksiyon $f(x) \geq f(x_1^*)$ iken

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = \mu [f(x) - f(x_1^*)]^2 - \rho \|x - x_1^*\|^2,$$

$f(x) \leq f(x_1^*)$ iken

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = f(x_1^*) - f(x) - \rho \|x - x_1^*\|^2$$

şeklinde olur.

Yardımcı Teorem 3.4.2. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu var, $x_1^* \neq x$ ve $f(x) \geq f(x_1^*)$ olsun. Eğer $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ ise

$$\rho(x, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = \rho(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

olur.

İspat: $f(x) \geq f(x_1^*)$ iken

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu [f(x) - f(x_1^*)]^2$$

olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ için

$$\begin{aligned} p(x, x_1^*, \rho, \mu) &= -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu [f(x) - f(x_1^*)]^2 \\ &\leq -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu L^2 \|x - x_1^*\|^2 \\ &< -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \rho \|x - x_1^*\|^2 \\ &= 0 \\ &= \rho(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.3. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu olsun. $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ ise x_1^* noktasında $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun kesin bir lokal maksimumu vardır.

İspat: x_1^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun bir lokal minimumu olduğundan, her $x \in N(x_1^*, \delta)$ için $f(x) \geq f(x_1^*)$ olacak şekilde x_1^* in bir $N(x_1^*, \delta)$ komşuluğu vardır. Yardımcı Teorem 3.4.2 den

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu [f(x) - f(x_1^*)]^2 < p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu) = 0$$

elde edilir. Bu da x_1^* noktasında $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun kesin bir lokal maksimumu olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.4. x_1^* noktasında $f(x)$ fonksiyonunun bir lokal minimumu olsun. x_1 ve x_2 noktaları $\|x_1 - x_1^*\| < \|x_2 - x_1^*\|$ ve $f(x_1^*) < f(x_1) < f(x_2)$ olacak şekilde iki nokta olsun. Eğer $\rho > 0$ ve

$$M \geq \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \|\nabla f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))\| \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|}$$

olmak üzere $0 \leq \mu < \min \left\{ \frac{\rho}{L^2}, \frac{\rho}{LM} \right\}$ ise

$$p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) - p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

dir.

İspat: $f(x_1^*) < f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan

$$p(x, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x - x_1^*\|^2 + \mu [f(x) - f(x_1^*)]^2$$

dir. Buradan

$$p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x_1 - x_1^*\|^2 + \mu [f(x_1) - f(x_1^*)]^2$$

$$p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x_2 - x_1^*\|^2 + \mu [f(x_2) - f(x_1^*)]^2$$

olur.

$$f(x_2) - f(x_1^*) \leq L \|x_2 - x_1^*\|,$$

$$f(x_1) - f(x_1^*) \leq L \|x_1 - x_1^*\|,$$

$$f(x_2) - f(x_1^*) + f(x_1) - f(x_1^*) \leq L (\|x_2 - x_1^*\| + \|x_1 - x_1^*\|)$$

ve

$$0 \leq \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \|\nabla f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))\| = M_1, \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|} = M_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) - p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) \\
&= -\rho (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) + \mu ([f(x_2) - f(x_1^*)]^2 - [f(x_1) - f(x_1^*)]^2) \\
&= (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) \\
&\quad \left\{ -\rho + \mu \frac{[f(x_2) - f(x_1^*) + f(x_1) - f(x_1^*)][f(x_2) - f(x_1)]}{(\|x_2 - x_1^*\| + \|x_1 - x_1^*\|)(\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|)} \right\} \\
&\leq (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) \\
&\quad \left\{ -\rho + \mu L \frac{[f(x_2) - f(x_1)]}{(\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|)} \right\} \\
&= (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) \\
&\quad \left\{ -\rho + \mu L \nabla^T f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|} \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|} \right\} \\
&\leq (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) \\
&\quad \left\{ -\rho + \mu L \|\nabla f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))\| \frac{\|x_2 - x_1\|}{\|x_2 - x_1^*\| - \|x_1 - x_1^*\|} \right\} \\
&\leq (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) \{-\rho + \mu LM\}
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) - p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0$$

dır.

Teorem 3.4.5. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu olsun. x_1 ve x_2 noktaları da $\|x_1 - x_1^*\| < \|x_2 - x_1^*\|$ ve $f(x_1^*) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$ olacak şekilde iki nokta olsun. Eğer $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ ise

$$p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) < p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

dir.

İspat: $f(x_1^*) \leq f(x_2) \leq f(x_1)$ iken

$$\begin{aligned}
p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) &= -(\rho \|x_1 - x_1^*\|^2 + \mu [f(x_1) - f(x_1^*)]^2) \\
p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) &= -(\rho \|x_2 - x_1^*\|^2 + \mu [f(x_2) - f(x_1^*)]^2)
\end{aligned}$$

olup, Yardımcı Teorem 3.4.2 den

$$\begin{aligned}
& p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) - p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) \\
&= -\rho (\|x_2 - x_1^*\|^2 - \|x_1 - x_1^*\|^2) + \mu \{ [f(x_2) - f(x_1^*)]^2 - [f(x_1) - f(x_1^*)]^2 \} \\
&< 0
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 3.4.6. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu var ve x_1 noktası $f(x_1) > f(x_1^*)$ olacak şekilde bir nokta olsun. $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \min \{ \frac{\rho}{L^2}, \frac{\rho}{LM} \}$ ise her $\varepsilon_1 > 0$ için $0 < \|d_1\| \leq \varepsilon_1$, $\|x_1 - d_1 - x_1^*\| < \|x_1 - x_1^*\| < \|x_1 + d_1 - x_1^*\|$, $f(x_1 \pm d_1) \geq f(x_1^*)$ ve

$$p(x_1 + d_1, x_1^*, \rho, \mu) < p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < p(x_1 - d_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

olacak şekilde bir d_1 vardır.

İspat: Herhangi bir $\varepsilon_1 > 0$ için $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ olmak üzere

$$d_1 = \varepsilon_2 \frac{x_1 - x_1^*}{\|x_1 - x_1^*\|}$$

almırsa $0 < \|d_1\| \leq \varepsilon_1$ olur. Üstelik ε_1 yeterince küçükse ve M , Teorem 3.4.4 deki koşulu sağlarsa $\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\|x_1 - x_1^*\|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|x_1 + d_1 - x_1^*\| &= (1 + \varepsilon) \|x_1 - x_1^*\| > \|x_1 - x_1^*\|, \\
\|x_1 - d_1 - x_1^*\| &= (1 - \varepsilon) \|x_1 - x_1^*\| < \|x_1 - x_1^*\|, \\
f(x_1 \pm d_1) &\geq f(x_1^*)
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.4.4 ve Teorem 3.4.5 ten

$$p(x_1 + d_1, x_1^*, \rho, \mu) < p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < p(x_1 - d_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.6 nın anlamı: $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \min \left\{ \frac{\rho}{L^2}, \frac{\rho}{LM} \right\}$ iken $f(x_1) > f(x_1^*)$ koşulunu sağlayan hiçbir x_1 noktasında $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun lokal minimumu yoktur.

Teorem 3.4.7. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu var ve x_1 noktası $f(x_1) > f(x_1^*)$ olacak şekilde bir nokta olsun. Eğer $\rho > 0$ ve $\mu \geq 0$ yeterince küçükse $\nabla p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) \neq 0$ dır. Yani x_1 noktası, $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun bir duraksama noktası değildir.

İspat: $f(x_1) > f(x_1^*)$ iken

$$\nabla p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) = -2\rho(x_1 - x_1^*) + 2\mu[f(x_1) - f(x_1^*)]\nabla f(x_1)$$

dir. Burada $\nabla f(x_1)$ için iki durum söz konusudur:

1. $\nabla f(x_1) = 0$ ise $\nabla p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) = -2\rho(x_1 - x_1^*) \neq 0$.
2. $\nabla f(x_1) \neq 0$ iken yeterince küçük $\varepsilon > 0$ ve

$$d = \frac{x_1 - x_1^*}{\|x_1 - x_1^*\|} - \varepsilon \frac{\nabla f(x_1)}{\|\nabla f(x_1)\|}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla^T p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) d &= -2\rho \|x_1 - x_1^*\| + 2\rho\varepsilon (x_1 - x_1^*)^T \frac{\nabla f(x_1)}{\|\nabla f(x_1)\|} \\ &\quad + 2\mu [f(x_1) - f(x_1^*)] \nabla^T f(x_1) \frac{x_1 - x_1^*}{\|x_1 - x_1^*\|} \\ &\quad - 2\mu\varepsilon [f(x_1) - f(x_1^*)] \|\nabla f(x_1)\| \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) Eğer $(x_1 - x_1^*)^T \nabla f(x_1) \leq 0$ ise $\nabla^T p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0$ ve $\nabla p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) \neq 0$ dır.

(ii) Eğer $(x_1 - x_1^*)^T \nabla f(x_1) > 0$ ise $\mu \geq 0$ sayısı yeterince küçük seçilir. $\varepsilon > 0$ sayısı da yeterince küçük alınacağından $\nabla^T p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0$ yani $\nabla p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) \neq 0$ olur.

Sonuç olarak $\rho > 0$ ve μ yeterince küçük olduğunda $f(x_1) > f(x_1^*)$ şartını sağlayan hiçbir x_1 noktası $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun duraksama noktası olamaz.

Teorem 3.4.8. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu olsun. Eğer $\rho > 0$ ve yeterince küçük $\mu \geq 0$ sayısı varsa $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun herhangi bir lokal minimumlaştırıcısı veya eyer noktası $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x_1) \leq f(x_1^*)\}$ kümesinin içinde olmak zorundadır.

İspat: Teoremin doğru olmadığını kabul edelim. Bu durumda $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun $\bar{x}_1^* \notin S$ ve $f(\bar{x}_1^*) > f(x_1^*)$ şartlarını sağlayan bir \bar{x}_1^* lokal minimumlaştırıcısı veya eyer noktası vardır. x_1^* noktasında $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun kesin bir lokal maksimumu ve \bar{x}_1^* noktası da $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun lokal minimumlaştırıcısı veya eyer noktası olduğundan $x_1^* \neq \bar{x}_1^*$ dir. Eğer $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \min\{\frac{\rho}{L^2}, \frac{\rho}{LM}\}$ iken \bar{x}_1^* noktası $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ fonksiyonunun lokal minimumlaştırıcısı veya eyer noktası ise bu durum Teorem 3.4.6 ile çelişir. Benzer şekilde eğer $\rho > 0$ ve yeterince küçük $\mu \geq 0$ sayısı için \bar{x}_1^* filled fonksiyonun eyer noktası ise Teorem 3.4.7 ile çelişir.

Özetle (3.8) de verilmiş olan filled fonksiyon, $f(x)$ in daha yüksek hiçbir yuvasında ne bir minimumlaştırıcıya ne de bir eyer noktasına sahiptir.

Teorem 3.4.9. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir lokal minimumu olsun. Eğer x_2^* , $f(x)$ in $f(x_2^*) < f(x_1^*)$ şartını sağlayan bir başka minimumlaştırıcısı ise x_2^* in $\sigma_2 > 0$ olmak üzere öyle bir $N(x_2^*, \sigma_2)$ komşuluğu vardır ki $0 < \varepsilon_1 < f(x_1^*) - f(x_2^*)$ ve $D_1 = \max_{x \in N(x_2^*, \sigma_2)} \|x - x_1^*\|^2$ olmak üzere $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ ve $0 < \rho < \frac{\varepsilon_1}{D_1}$ iken bu komşuluk içindeki her x_2 noktasını x_1^* a bağlayan doğru üzerinde $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ filled fonksiyonunun bir x' minimumlaştırıcısı vardır. Dahası, eğer B_1^* ve B_2^* yuvalarının arasında B_1^* dan daha aşağıda bir yuva yoksa $x' \in B_2^*$ ve $f(x') \leq f(x_1^*)$ olur.

İspat: Teorem 3.4.3 ten, $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ iken x_1^* in öyle bir $N(x_1^*, \sigma_1)$ ($\sigma_1 > 0$) komşuluğu vardır ki bu komşuluktaki her x_1^* dan farklı x_1 noktası için

$$p(x_1, x_1^*, \rho, \mu) < 0 = p(x_1^*, x_1^*, \rho, \mu)$$

olur. Dahası $\sigma_2 > 0$ olmak üzere x_2^* in bir $N(x_2^*, \sigma_2)$ komşuluğu vardır öyle ki her $x_2 \in N(x_2^*, \sigma_2)$ için $f(x_1^*) - f(x_2) > \varepsilon_1 > 0$ dir. Böylece

$$p(x_2, x_1^*, \rho, \mu) = f(x_1^*) - f(x_2) - \rho \|x_2 - x_1^*\|^2 > \varepsilon_1 - \rho D_1 > 0$$

dir. $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ filled fonksiyonu x_1^* noktasından başlayarak x_1^* ve x_2 arasındaki doğru boyunca azalır. Filled fonksiyonun sürekliliği onun her $x_2 \in N(x_2^*, \sigma_2)$ için x_1^* ve x_2 yi birleştiren doğru boyunca bir minimumlaştırıcıya sahip olmasını gerektirir.

x_B, B_2^* in belirtilen doğru üzerindeki sınır noktası olsun. Eğer B_1^* ve B_2^* yuvaları arasında B_1^* dan daha aşağıda bir yuva yoksa $f(x_B) > f(x_1^*)$ olur. Diğer yandan $f(x)$ in sürekliliğinden $\sigma > 0$ yeterince küçük, $x_0^- = x_0 - \sigma(x_0 - x_1^*)$ ve $x_0^+ = x_0 + \sigma(x_0 - x_1^*)$ olmak üzere doğru parçası üzerinde $f(x_0) = f(x_1^*)$ ve $f(x_B) > f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+) > f(x_2)$ olacak şekilde $x_0^-, x_0, x_0^+ \in B_2^*$ noktaları vardır. $p(x, x_1^*, \rho, \mu) = -\rho \|x - x_1^*\|^2 < 0$ olduğundan $x_0 \notin N(x_2^*, \sigma_2)$ olur. Şimdi aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım:

1. Eğer $p(x_0, x_1^*, \rho, \mu) > p(x_0^+, x_1^*, \rho, \mu)$ ise $x_0 - x_1^*, x_0$ noktasında $p(x_0, x_1^*, \rho, \mu)$ için bir azalan yöndür. Bu nedenle $x' \in B_2^*$ ve $f(x') \leq f(x_1^*)$ dir.
2. Eğer $p(x_0, x_1^*, \rho, \mu) \leq p(x_0^+, x_1^*, \rho, \mu)$ ise $\|x_0^- - x_1^*\| < \|x_0 - x_1^*\|$ ve $f(x_0^-) \geq f(x_0)$ olduğundan Teorem 3.4.3 ten $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ iken $0 > p(x_0^-, x_1^*, \rho, \mu) > p(x_0, x_1^*, \rho, \mu)$ olur. Böylece $x_0 - x_1^*, x_0^-$ noktasında $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ için bir azalan yöndür. Bu nedenle $x' \equiv x_0 \in B_2^*$ ve $f(x') = f(x_1^*)$ olur.

Teorem 3.4.9 ve Teorem 3.4.8 önerilen $p(x, x_1^*, \rho, \mu)$ filled fonksiyonunun (iii) koşulunu sağladığını gösterirler.

Teorem 3.4.10. $f(x)$ fonksiyonunun x_1^* noktasında bir global minimumu olsun. Eğer $\rho > 0$ ve $0 \leq \mu < \frac{\rho}{L^2}$ ise her $x \in X$ için $p(x, x_1^*, \rho, \mu) < 0$ dir.

İspat: x_1^* noktasında $f(x)$ fonksiyonu bir global minimuma sahip olduğundan her $x \in X$ için $f(x) \geq f(x_1^*)$ dir. Yardımcı 3.4.2 den istenilen kolayca elde edilebilir.

4. UYGULAMA

Bu bölümde Liu (2007)'nin çok vanalı buhar tütbünlerinden oluşan termik üretim santralleri için filled fonksiyon metodunu kullanarak çözdüğü minimum maliyetli ekonomik yük dağıtımını (EYD) problemi ele alınacaktır.

19. yüzyılın sonlarında bulunan elektrik enerjisi, öncelikle aydınlatma amacıyla kullanılmış ve daha sonraları kullanım alanı genişlemiştir. Böylece elektrik enerjisine duyulan ihtiyaç ve talep artmıştır. Elektrik güç sistemleri bu değişen ve gelişen mevcut müşteri ihtiyaçlarını hızlı, temiz, ekonomik bir şekilde karşılarken enerji pazarına giren alternatif enerji şebekeleri ile rekabet etmek zorundadır. Alternatif enerji şebekelerinin zorlamalarına rağmen enerji ihtiyacının büyük bir kısmı hala elektrik güç şebekeleri yoluyla sağlanmaktadır.

Bir enerji sisteminin sağlıklı, kesintisiz, temiz olarak kurulması ve işletilmesi için bir seri çalışmanın yapılması gereklidir. Bu çalışmaların planlama sırasında yapılması gerektiği gibi işletim esnasında da sistemin değişen durumlara karşı olan direncini anlamak için yapılmalıdır. Bir enerji sisteminde işletim sırasında yapılan planlama, minimum maliyetin bulunması açısından önemlidir. İşletim planlaması genel olarak; ekonomik yük dağıtımını, bakım programının yapılması, en iyi grup belirleme, reaktif gücün dağıtımını, spot fiyatın belirlenmesi gibi konulardan oluşur. Bu problemler ise optimizasyon yöntemleri ile çözülmektedir.

Son yıllarda birçok optimizasyon metodu EYD problemini çözmek için kullanılmıştır. Bunlardan bazıları hibrit algoritması (Malik et al., 2010), büyük patlama-büyük sıkıştırma optimizasyon algoritması (Labbi and Attous, 2010), armoni veya geliştirilmiş armoni araştırma algoritması (Coelho and Mariani, 2009; Pandi and Panigrahi, 2011), biyocoğrafya tabanlı optimizasyon (Bhattacharya and Chattopadhyay, 2010), bölümlenme yaklaşım algoritması (Lin et al., 2007), parçacık sürü optimizasyonu veya geliştirilmiş parçacık sürü optimizasyonu (Chaturverdi et al., 2009; Selvakumar and Thanushkodi, 2008; Saber et al., 2009), genetik algoritma (Kumar and Naresh, 2009), diferansiyel gelişim algoritması veya geliştirilmiş diferansiyel gelişim algoritması (Guerrero and Maldonado, 2005; Noman and Iba, 2008; Yuan et al., 2008, 2009; Özyön vd., 2011) gibi metotlardır.

4.1. Problemin Tanımı:

EYD problemi güç sistemlerinin işletimlerinde en önemli konulardan biridir. Sistemdeki mevcut yükün, sistemin kısıtları altında minimum yakıt maliyetiyle üretim birimleri tarafından karşılanabilmesi için birimlerin aktif güç çıkışlarının ayarlanması, ekonomik yük dağıtımı olarak bilinmektedir. Kısaca EYD problemi üretilen enerjinin tüketim merkezlerine en ekonomik yollardan iletilmesi, enerjinin ucuz üretim merkezlerinden temini şeklinde özetlenebilir.

EYD problemi yüke, enerji sisteminin fiziksel limitlerine ve jeneratörlerin limitlerine bağlı olarak maliyeti minimize etme problemidir. Elektrik şirketleri EYD problemini düzenli aralıklarda çözmek zorundadır. Her 3 ile 5 dakika aralığında optimal şekilde yükü karşılayabilmek için her jeneratöre düşen gücün belirlenmesi gerekir (Yalçınöz vd., 2002).

Güç dağıtım sistemlerinde her bir müşterinin talep ettiği güç, farklı baralarda ve farklı büyüklüklerde dir. Optimal yük dağıtımı yapabilmek için, birim yakıt maliyeti en yüksek olan santral yüke en yakın noktaya, birim yakıt maliyeti en düşük olan santral yüke en uzak noktaya yerleştirilerek sistemin hat kayıpları minimuma indirilebilir. Fakat, pratikte bu mümkün olmadığından sistemin yükünü santrallerin yakıt maliyetlerini göz önüne alarak beslemek daha olağan bir durumdur (Öztürk vd., 2011).

4.2. EYD Probleminin Matematiksel Modeli:

En temel anlamda EYD problemi Enerji Yönetim Sistemlerinin (Energy Management Systems) standart fonksiyonudur yani fosil yakıtlı n adet jeneratör gücünün fonksiyonu şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon doğrusal, parçalı doğrusal, üstel veya çok terimli olarak gösterilebilir. Liu (2007)'nin çalışmasında jeneratör gücünün fonksiyonu ikinci dereceden bir denklemle ifade edilmiştir.

O halde EYD probleminin amacı toplam jeneratörlerin çıkış gücüne bağlı işletme maliyetini minimize etmek olarak düşünülürse k . jeneratörün işletme maliyeti

matematiksels olarak aşağıdaki gibi gösterilir (Christensen and Soliman, 1988):

$$f_k(u_k) = a_k u_k^2 + b_k u_k + c_k. \quad (4.1)$$

Gerçekte çok buhar vanalı türbinlerden oluşan termik üretim birimlerinde jeneratör gctnn eğrisi denklem (4.1) den farklıdır. Üretim biriminin yakıt maliyetine buhar vanalı türbinlerden oluşan termik üretim etkisinin dahil edilmesi, yakıt maliyetinin gösterimini daha uygun hale getirmektedir. Bu yüzden buhar vanalı türbinlerin etkilerini dikkate alabilmek için yapılan çalışmada denklem (4.1) yerine aşağıdaki fonksiyon kullanılmıştır (zyn vd., 2011):

$$f_k(u_k) = a_k u_k^2 + b_k u_k + c_k + |r_k \sin[h_k(u_{k,\min} - u_k)]|^p. \quad (4.2)$$

(4.2) denklemde genelde $p = 1$ dir. Ayrıca verilen denklemde :

u_k : k ' ıncı jeneratörün çıkış gücü

a_k, b_k, c_k : k ' ıncı jeneratörün yakıt maliyet katsayıları

n : Jeneratör sayısı

$f_k(u_k)$: k ' ıncı jeneratörün maliyet fonksiyonu

$u_{k,\min}$: k ' ıncı jeneratörün minimum çıkış gücü

r_k ve h_k , (4.2) denklemde yer alan buhar vanalı türbinlerin etkisini gösteren k . jeneratörün üretim birimi maliyet fonksiyonu katsayılarıdır. Buna göre n tane jeneratörün toplam işletme maliyeti matematiksels olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$f(u) = \sum_{k=1}^n f_k(u_k). \quad (4.3)$$

EYD probleminin amacı toplam grupların işletme maliyetini belli kısıtlar altında minimize etmek olduğu için optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \min f(u) &= \min \sum_{k=1}^n f_k(u_k) \\ u_{k,\min} &\leq u_k \leq u_{k,\max} \\ \sum_{k=1}^n (u_k) &= B = \text{sabit}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3. Filled Fonksiyon Metodunun EYD Problemine Uygulaması:

Liu (2007), çok vanalı buhar türbinlerinden oluşan termik üretim santralleri için EYD problemini çözerken filled fonksiyon metodunun performansını belirlemek için 2 adet jeneratöre sahip bir test sistemini kullanmıştır. Öncelikle EYD problemi Çizelge 4.1 de verilen parametreler kullanılarak sırasıyla kısıtsız ve kısıtlı EYD problemine dönüştürülmüştür (Şekil 4.1 ve Şekil 4.2).

a_1	b_1	c_1	r_1	h_1	$u_{1,\min}$	lb_1	ub_1
0.00028	8.1	550	300	0.035	0	0	680
a_2	b_2	c_2	r_2	h_2	$u_{2,\min}$	lb_2	ub_2
0.00056	8.1	309	200	0.042	0	0	360

Çizelge 4.1. Fiyat katsayıları (Liu'dan, 2007)

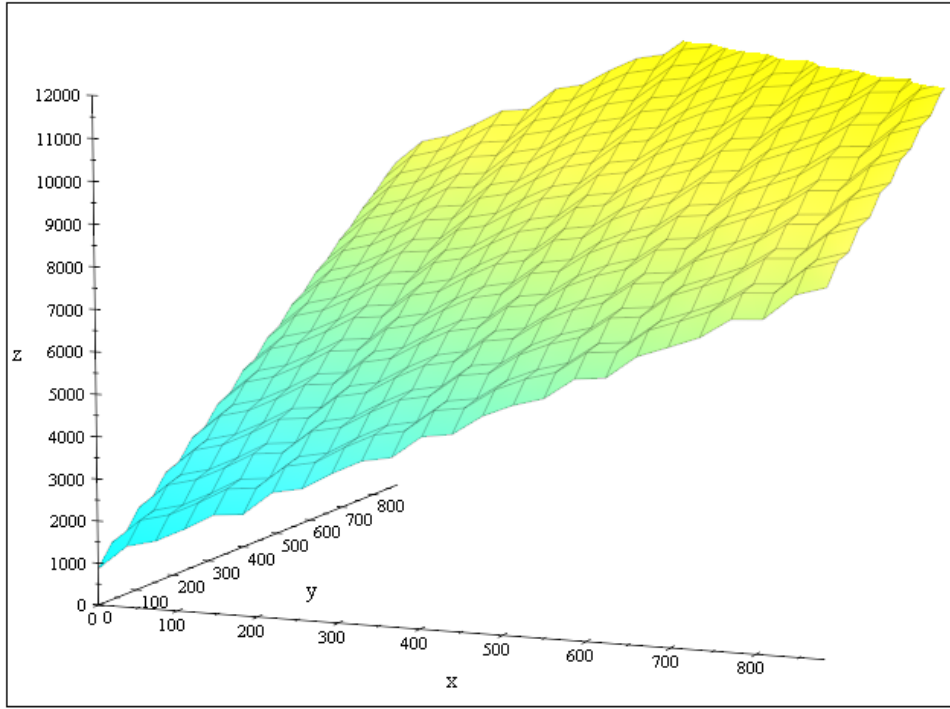
Buna göre test sistemine ait maliyet fonksiyonu ve kısıtlar sırasıyla

$$\begin{aligned} f(u_1) = & 0.00028u_1^2 + 8.1u_1 + 550 + |300 \sin(-0.035u_1)| \\ & + 0.00056(880 - u_1)^2 + 8.1(880 - u_1) + 309 \\ & + |200 \sin(0.042(-880 + u_1))| \end{aligned}$$

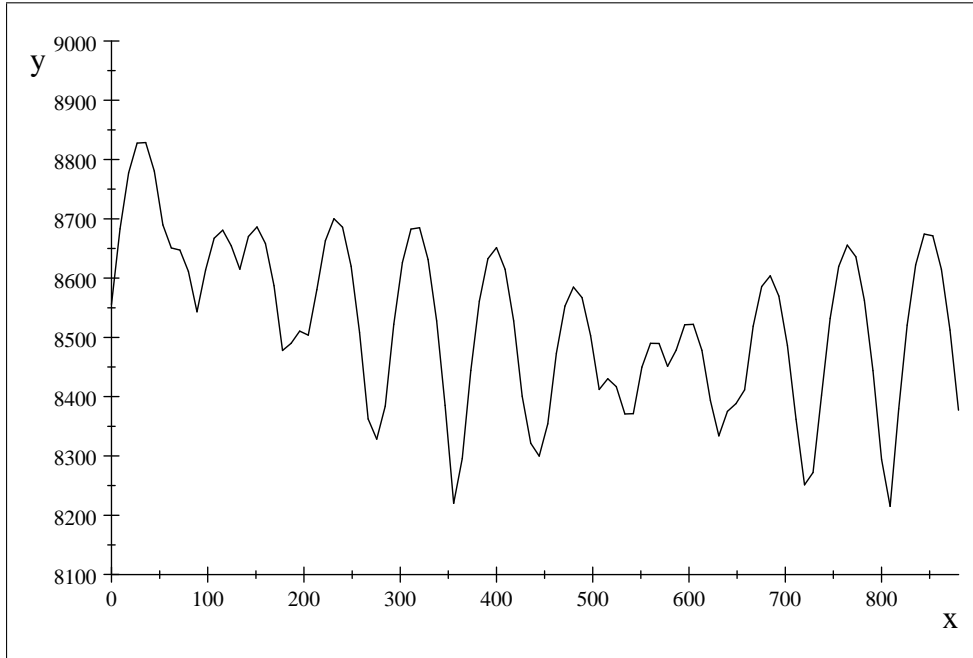
ve

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 880 \\ 0 &\leq u_2 \leq 900 \\ 0 &\leq u_1 \leq 900 \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 4.1. Sistemin kısıtsız maliyet fonksiyonunun grafiği (Liu'dan, 2007)



Şekil 4.2. Sistemin kısıtlı maliyet fonksiyonunun grafiği (Liu'dan, 2007)

Şekil 1'de kısıtsız olarak iki değişkenli amaç fonksiyonunun grafiği; Şekil 2'de de kısıt kullanılarak tek değişkenli hale dönüştürülmüş amaç fonksiyonunun çok lokal

minimumlu (multimodal) grafiği verilmiştir. Şekil 2'deki tek değişkenli fonksiyona filled fonksiyon metodu uygulanmadan önce ayrıntılı araştırma metodu (exhaustive search method) kullanılarak fonksiyonun yedi lokal minimumu bulunmuştur. Normalde çok değişkenli fonksiyonlara da böyle bir işlem uygulanabilir fakat fonksiyonun çok lokal minimumlu olması problemi karmaşık yapar. Çünkü matematiksel programlamada neredeyse bütün algoritmalar lokal minimum bulma metodu içerdikleri için lokal minimumlarda duracak ve çok lokal minimumlu fonksiyonun global minimumunu bulamayacaklardır.

Literatürde çok lokal minimumlu EYD problemi için önerilen birçok yaklaşım genetik algoritmaya dayanır. Fakat genetik algoritma ağır hesaplama hataları içerdiği için kullanımı kısıtlıdır. Bu sebeple EYD probleminin yeni bir yöntem olan filled fonksiyon ile çözülmesinin faydalı olabileceği dştnlmştr.

Liu (2007), alışmasında EYD problemini üretmiş olduğu üstel terim içermeyen

$$H(X, a) = \frac{1}{y[f(X) - f(X^*)]} + \frac{a}{\|X - X^*\|^2} \quad (4.5)$$

filled fonksiyonunu kullanarak çözmüştür. (4.5) de bir boyutlu $y(\bullet)$ fonksiyonu birçok analitik özelliği taşıması açısından $y(x) = \arctan x$ fonksiyonu olarak alınmıştır.

Çalışmada problemin çözümü için kullanılan algoritma aşağıdaki Şekilde verilmiştir:

Adım 0 : $f(x)$ in global optimumunu içinde bulunduran D aralığı belirlenir.

Adım 1 : Lokal minimum X_1 i bulmak için $f(x)$ minimize edilir. Daha sonra δ pozitif reel küçük bir sayı olmak üzere $X_c = X_1 + \delta$ alınır. a parametresi için a_0 başlangıç değeri kullanılır (mesela $a_0 = 2$).

Adım 2 : X_1 ve a kullanılarak $H(X, a)$ filled fonksiyonu inşa edilir, X_c başlangıç noktası kabul edilir ve $H(X, a)$ filled fonksiyonu minimize edilir.

Adım 3 : $H(X, a)$ filled fonksiyonunu minimum yapan X_s noktası bulunursa 4. adıma gidilir; iterasyon dizisi D nin st sınırına varana kadar hala X_s noktası bulamadıysa $X_c = X_1 - \delta$ alınır ve 2. adıma dönülür; iterasyon dizisi D nin alt sınırına varana kadar yine X_s noktası bulamadıysa mevcut X_1 noktası global mini-

mum kabul edilir.

Adım 4 : Eğer varsa $X_2 \neq X_1$ olacak şekilde yeni bir lokal minimum bulmak için X_s başlangıç noktasıyla $f(x)$ fonksiyonu minimize edilir. Eğer $f(X_2) < f(X_1)$ ise X_1 yerine X_2 geçer fakat a değiştirilmez ve sonra adım 2 ye döndülür, eğer $f(X_2) \not< f(X_1)$ ise X_1 değiştirilmez fakat a_0 yenilenir (mesela $a_0 = a_0 + 4$) ve sonra adım 2 ye döndülür.

Yukarıdaki algoritmanın sayısal geçerliliğini test etmek için öncelikle bu problemin bütün lokal minimumları ayrıntılı araştırma ile hesaplanmıştır. Bulunan lokal minimumlar Çizelge 4.2’de verilmiştir.

p_0	0.0000
p_1	83.3972
p_2	187.5492
p_3	273.9379
p_4	358.0126
p_5	442.4248
p_6	532.1892
p_7	636.3452

Çizelge 4.2. Lokal minimumlar (Liu’dan, 2007)

Daha sonra yukarıda verilen algoritma bilgisayar ortamında çalıştırılmıştır. 21 farklı başlangıç noktası girilerek programın doğruluğu olası sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Hemen hemen 21 farklı başlangıç noktası için global minimum yapan nokta p_4 olarak bulunmuştur. Çizelge 4.3’de 21 farklı nokta için sırasıyla hangi lokal minimumların ne kadar sürede bulunduğu gösterilmiştir.

X_0	Sırasıyla bulunan lokal minimumlaştırıcılar	Süre (s)
100	$p_1, p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.407
125	$p_1, p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.468
150	$p_2, p_6, p_7, p_1, p_0, p_4$	0.375
175	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.359
200	$p_2, p_6, p_7, p_1, p_0, p_4$	0.375
225	$p_2, p_6, p_7, p_1, p_0, p_4$	0.375
250	p_3, p_7, p_0 (hata)	0.125
275	$p_1, p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.391
300	$p_2, p_6, p_7, p_1, p_0, p_4$	0.391
325	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.360
350	p_4, p_7, p_0 (hata)	0.172
375	p_4, p_7, p_0 (hata)	0.188
400	$p_1, p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.391
425	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.359
450	$p_2, p_6, p_7, p_1, p_0, p_4$	0.391
475	p_5, p_7, p_0 (hata)	0.657
500	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.391
525	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.375
550	p_4, p_7, p_0 (hata)	0.156
575	$p_6, p_7, p_2, p_1, p_0, p_4$	0.375
600	p_7, p_2, p_1, p_0, p_4	0.359

Çizelge 4.3. Algoritma sonuçları (Liu'dan, 2007)

4.4. Sonuç:

Liu (2007)'nin çalışmasında çok vanalı buhar türbinlerinden oluşan termik üretim birimlerinde jeneratörlerin çıkış gücüne bağlı işletme maliyet fonksiyonu filled fonksiyon metodu kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar genetik algoritma metoduyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Önerilen metot iki jeneratöre sahip bir test sistemine uygulanmış performansı gözlenmiştir. Toplam fiyat in-

celendiğinde filled fonksiyon metodu ile elde edilen fiyatın diğer yöntem ile elde edilen fiyattan daha iyi olduğu; filled fonksiyon metodunun gelecekte birçok enerji sistemi problemine başarıyla uygulanabileceği iddia edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

- Bhattacharya, A., Chattopadhyay, P., K., 2010. Solving Complex Economic Load Dispatch Problems Using Biogeography - Based Optimization, Expert Systems with Applications, 37 (5), 3605 – 3615.
- Chaturverdi, K., T., Pandit, M., Srivastava, L., 2009. Particle Swarm Optimization with Time Varying Coefficients for Non-convex Economic Power Dispatch, Electrical Power and Energy Systems, 31 (6) , 249 – 257.
- Christensen G., S., Soliman S., A., 1988. Optimal Long Term Operation of Electric Power Systems, Plenum Press (New York).
- Coelho, L., S., Mariani, V., C., 2009. An Improved Harmony Search Algorithm for Power Economic Load Dispatch, Energy Conversion and Management, 50 (10), 2522 – 2526.
- Ge, R., P., 1983. A Filled Function Method for Finding a Global Minimizer of a Function of Several Variables, Paper Presented at The Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis, Dundee, Scotland.
- Ge, R., P., 1987. The Theory of Filled Function Method for Finding a Global Minimizer of a Nonlinearly Constrained Minimization Problem, Journal of Computational Mathematics, 5 (1) , 1 – 9.
- Ge, R., P., Qin, Y., F., 1987. A Class of Filled Functions for Finding Global Minimizes Of a Function Of Several Variables, Journal of Optimization Theory and Applications, 54(2), 241 – 252.
- Ge, R., P., Qin, Y., F., 1987. The Globally Convexized Filled Functions for Global Optimization, Applied Mathematics and Computation, 35, 131–158.
- Ge, R., 1990. A Filled Function Method for Finding a Global Minimizer of a Function of Several Variables, Mathematical Programming, 46, 191 – 204.

- Ge, R., 1990. The Filled Function Transformations for Constrained Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 39, 1 – 20.
- Guerrero, R., E., P., Maldonado, J., R., C., 2005. Economic Power Dispatch with Non-smooth Cost Functions Using Differential Evolution, *Power symposium, proceedings of the 37th annual North American*, 183 – 190.
- Han, Q., Han, J., 2001. Revised Filled Function Methods for Unconstrained Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 119, 217–228.
- He, S., Chen, W., Wang, H., 2011. A New Filled Function Algorithm for Constrained Global Optimization Problems, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 5853 – 5859.
- Kumar, S., Naresh, R., 2009. Nonconvex Economic Load Dispatch Using an Efficient Real-Coded Genetic Algorithm, *Applied Soft Computing*, 9 (1), 321–329.
- Labbi, Y., Attous, D., 2010. Big Bang – Big Crunch Optimization Algorithm for Economic Dispatch with Valve-Point Effect, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 16 (1), 48 – 56.
- Lin, W., M., Gow, H., J., Tsay, M., T., 2007. A Partition Approach Algorithm for Nonconvex Economic Dispatch, *Electrical Power and Energy Systems*, 29 (5), 432 – 438.
- Lin, Y., Yang, Y., Mammadov, M., 2009. A New Filled Function Method For Non-linear Equations, *Applied Mathematic and Computation*, 210, 411–421.
- Liu, X., 2001. Finding Global Minimization with a Computable Filled Function, *Journal Global Optimization*, 19, 151 – 161.
- Liu, X., 2002. A Computable Filled Function Used for Global Minimization, *Applied Mathematics and Computation*, 126, 21 – 278.

- Liu, X., 2002. Several Filled Function with Mitigators, *Applied Mathematics and Computation*, 1233, 375 – 378.
- Liu, X., 2004. The Barrier Attribute of Filled Function, *Applied Mathematics and Computation*, 149, 641 – 649.
- Liu, X., Xu, W., 2004. A New Filled Function Applied to Global Optimization, *Computers and Operations Research*, 31, 61 – 80.
- Liu, X., 2007. A New Approach for Solving the Multimodal Economic Load Dispatch Problem, *Proceeding of Institute of Electrical and Electronics Engineers Power Engineering Society General Meeting*.
- Malik, T., N., Asar, A., Wyne M.F., Akhtar S., 2010. A New Hybrid Approach for The Solution of Nonconvex Economic Dispatch Problem with Valve-Point Effects, *Electric Power Systems Research*, 80 (9), 1128 – 1136.
- Noman, N., Iba, H., 2008. Differential Evolution for Economic Load Dispatch Problems, *Electric Power Systems Research*, 78 (8), 1322 – 1331.
- Özyön, S., Yaşar, C., Temurtaş, H., 2011. Diferansiyel Gelişim Algoritmasının Valf Nokta Etkili Konveks Olmayan Ekonomik Güç Dağıtım Problemlerine Uygulanması, *6th International Advanced Technologies Symposium (IALTS'11)*, Elazığ, Turkey.
- Öztürk, A., Çobanlı, S., Tosun, S., Döşoğlu, K., 2011. Yapay Arı Kolonisi Algoritması ile Elektrik Güç Sistemi Optimal Yakıt Maliyetinin Belirlenmesi, *6th International Advanced Technologies Symposium (IALTS'11)*, Elazığ, Turkey.
- Pandi, V., R., Panigrahi B., K., 2011. Dynamic Economic Load Dispatch Using Hybrid Swarm Intelligence Based Harmony Search Algorithm, *Expert Systems with Applications*, 38 (7), 8509 – 8514.
- Saber, A., Y., Chakraborty, S., Razzak, S., M., A., Senjyu, T., 2009. Optimization of Economic Load Dispatch of Higher Order General Cost Polynomi-

- als and Its Sensitivity Using Modified Particle Swarm Optimization, *Electric Power Systems Research*, 79 (1), 98 – 106.
- Shang, Y., Pu, D., Jiang, A., 2007. Finding Global Minimizer with One Parameter Filled Function on Unconstrained Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 191, 176 – 182.
- Selvekumar, A., I., Thanushkodi, K., 2008. Anti-Predatory Particle Swarm Optimization: Solution to Nonconvex Economic Dispatch Problems, *Electrical Power Systems Research*, 78 (1), 2 – 10.
- Şahiner, A., Mammadov, M., 2007. Global Optimization Based on Filled Function Method, *Lecture Notes*.
- Wang, X., Zhou, G., 2006. A New Filled Function Method for Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 419 – 429.
- Wang, W., Shang, Y., Zhang, L., 2007. A Filled Function Method with One Parameter for Box Constrained Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 194, 54 – 66.
- Wang, C., Yang, Y., Jing, L., 2009. A New Filled Function Method for Unconstrained Global Optimization, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225, 68 – 79.
- Wang, C., Luo, R., Wu, K., Han, B., 2011. A New Filled Function Method for an Unconstrained Nonlinear Equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1689 – 1699.
- Wu, Z., Y., Lee, H., WJ., Zhang, L., S., Yang, X., M., 2005. A Novel Filled Function Method and Quasi-Filled Function Method for Global Optimization, *Computational Optimization and Applications*, 34, 249 – 272.
- Wu, Z., Y., Mammadov, M., Bai, F., S., Yang, Y., J., 2007. A Filled Function Method for Nonlinear Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 189, 1196 – 1204.

- Wu, Z., Y., Bai, F., S., Lee, H., W., J., Yang, Y., J., 2007. A Filled Function Method for Constrained Global Optimization, *Journal of Global Optimization*, 39, 495 – 507.
- Xu, Z., Huang, H., Pardalos, P., Xu, C., 2001. Filled Function for Unconstrained Global Optimization, *Journal of Global Optimization*, 20, 49 – 65.
- Yalçınöz, T., Yavuzer, T., Altun, H., 2002. Tabu Araştırması Uygulanarak Ekonomik Yük Dağıtım Probleminin Çözümü, *Eloco' 2002 Elektrik-Elektronik Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu*, 30 – 34, Bursa, Türkiye.
- Yang, Y., Shang, Y., 2006. A New Filled Function Method for Global Optimization, *Applied Mathematics and Computation*, 173, 501 – 512.
- Yuan, X., Wang, L., Yuan, Y., Zhang, Y., Cao, B., Yang, B., 2008. A Modified Differential Evolution Approach for Dynamic Economic Dispatch with Valve-Point Effects, *Energy Conversion and Management*, 49 (12), 3447 – 3453.
- Yuan, X., Wang, L., Zhang, Y., Yuan, Y., 2009. A Hybrid Differential Evolution Method for Dynamic Economic Dispatch with Valve-Point Effects, *Expert Systems with Applications*, 36 (2), 4042 – 4048.
- Zhang, L., S., Ng, C., K., Li, D., Tian, W., W., 2004. A New Filled Function Method for Global Optimization, *Journal of Global Optimization*, 28, 17 – 43.
- Zhang, Y., Xu, Y., 2009. A One Parameter Filled Function Method Applied to Non-smooth Constrained Global Optimization, *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 1230 – 1238.
- Zhang, Y., Xu, Y., Zhang, L., 2009. A Filled Function Method Applied to Non-smooth Constrained Global Optimization, *Journal of Global Optimization*, 232, 415 – 426.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gamze BUZKAN
Doğum Yeri ve Yılı : Burdur, 1987
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu :

Lise : 75. Yıl Cumhuriyet Lisesi, 2001-2005
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2005-2009
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2009-2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

M.E.B Etiket Dersanesi, Antalya, 2010 – 2011.

Yayımları (SCI ve diğer makaleler):

- 1) **Buzkan, G.**, Şahiner, A., 2009. Fuzzy Hedef Programlamanın Güncel Bir Hayat Problemi Üzerine Uygulaması. 8. Matematik Sempozyumu Sergi ve Şenlikleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Salonları , Ankara, 23s.
- 2) Şahiner, A., **Buzkan, G.**, Akın, H. S., 2010. Yeni Bir Global Minimum Bulma Yöntemi Üzerine. 5. Ankara Matematik Günleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Salonları , Ankara, 6s.
- 3) Şahiner, A., Akın, H. S., **Buzkan, G.**, 2010. Öncelikli Yapılı Fuzzy Hedef Programlama ve Bir Uygulaması. 5. Ankara Matematik Günleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Salonları , Ankara, 7s.
- 4) Şahiner, A., **Buzkan, G.**, 2010. Diyet Probleminin Fuzzy Hedef Programlama ile Çözümü. SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 14 (2) , 124 – 133.

- 5) Şahiner, A., **Buzkan, G.**, Gökkaya, H., 2011. On n-Cone Normed Spaces. Conference on Summability Theory and Applications. İstanbul Commerce University, İstanbul, Turkey.
- 6) Şahiner, A., Gökkaya, H., **Buzkan, G.**, 2011. Symmetric n-Cone Normed Spaces and Fixed Point Theorems. 2. Workshop in Fixed Point Theory and Applications. Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.