

**T.C**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÖKLİDYEN OLMAYAN UZAYLARDA SABİT AÇILI**  
**YÜZEYLER**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Leyla DİK**  
**(121121106)**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Programı: Geometri**

**Danışman: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)**

**KASIM-2014**

T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİDYEN OLMAYAN UZAYLARDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Leyla DİK

(121121106)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.10. 2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 05.11. 2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof .Dr. Memet BEKTAŞ (F.Ü)

Yrd.Doç.Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

KASIM - 2014

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ hocama üzerimdeki emeklerinden dol ayı şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Leyla DİK  
ELAZIĞ-2014

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET .....	IV
SUMMARY .....	V
SEMBOLLER LİSTESİ .....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. LORENTZ UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR.....	8
4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER .....	16
5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU .....	19
5.1. Örnekler.....	22
6. SABİT SPACELIKE DOĞRULTULU TIMELİKE SABİT AÇILI YÜZEYLER.....	24
6.1. Sabit Spacelike Doğrultulu Spacelike Sabit Açılı Yüzeyler .....	30
7. SONUÇLAR.....	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ .....	38

## ÖZET

### ÖKLİDYEN OLMAYAN UZAYLARDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Öklid uzayının temel tanımları verildi.

İkinci bölümde; Lorentz uzayının önemli tanımlar ve teorem verildi.

Üçüncü bölümde; 3-boyutlu Öklid uzayında sabit açılı yüzeyler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında sabit açılı yüzeylerin bir karakterizasyonu incelenmiştir.

Beşinci bölümün ilk kısmında sabit spacelike doğrultulu, timelike sabit açılı yüzeyler incelendi. İkinci kısmında ise, sabit spacelike doğrultulu, spacelike sabit açılı yüzeyler incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Sabit açılı yüzeyler, Öklid uzayı, Lorentz uzayı

## SUMMARY

### CONSTANT ANGLE SURFACES IN NON-EUCLIDEAN SPACES

This study consists of five sections.

In the first section, the basic definitions of Euclidean space were given.

In the second part, the most important definitions and theorems of Lorentz space were given.

In the third section, fixed-angle surfaces in 3-dimensional Euclidean space have been examined.

In the fourth section, a characterization of constant angle surfaces for Euclidean 3-space was investigated.

In the first part of the fifth section, timelike constant angle surfaces with fixed spacelike direction were examined. In the second part of the fifth section, spacelike constant surfaces with fixed spacelike direction were examined.

**Keywords:** Constant angle surfaces, Euclidean space, Lorentzian space

## SEMBOLLER LİSTESİ

- $E^3$  : 3 boyutlu Öklid Uzay  
 $\mathbb{R}_1^3$  : 3 boyutlu Lorentz uzayı  
 $\chi(\mathbf{M})$  : Vektör alanlarının cümlesi  
 $T_p(\mathbf{M})$  : p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi  
[ ] : Lie operatörü  
 $\mathbf{D}$  : Riemann konneksiyonu  
 $\nabla$  : Levi Civita konneksiyonu  
 $\mathcal{S}_p$  : Şekil operatörü  
 $K(\mathbf{p})$  : Gauss eğriliği  
 $H(\mathbf{p})$  : Ortalama eğriliği  
 $I_p$  : Birinci temel form  
 $II_p$  : İkinci temel form

## 1. GİRİŞ

Sabit açılı yüzey, birim normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan yüzey olarak adlandırılır. Bu kavram son zamanlarda birçok uzayda araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Bu tip yüzeyler helislerin genelleştirilmiş bir türüdür.

Munteanu, M.I ve Nistor, A.I. [22] Öklidyen 3-uzayda sabit açılı yüzey çalışmışlardır. Bu araştırmacılar Öklidyen 3-uzayda sabit açılı yüzeylerin tamamı için bir sınıflandırma elde etmiştir.

Yakın zamanda sabit açılı yüzeyler  $S^2 \times R$  veya  $H^2 \times R$  çarpım uzayında da çalışılmıştır. [2,3,4]. Burada  $S^2$  ve  $H^2$  sırasıyla birim 2-küreyi ve hiperbolik düzlemi göstermektedir. Çarpım uzaylarının farklı geometrik özellikleri bakımından yüzeyler konusu H. Rosenberg ve W. Meeks [6,10] tarafından ele alınmıştır. Bu araştırmacılar çalışmalarında bir  $M^2$  yüzeyinin genel durumunu ve  $M^2 \times R$  çarpım uzayında minimal yüzey özelliklerini ele almışlardır.

Sabit açılı yüzeylerin birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Örneğin sıvı kristaller teorisinde ve katmanlı sıvıların incelenmesinde P. Cermelli ve A.J.Di Scala [1] bu yüzeyleri ele almışlardır. [5] de R. Howard sabit açılı yüzeylerin geometrik özelliklerini kullanarak bir M yüzeyinden sonsuz uzaklıkta bulunan bu ışık kaynağını sınırlı ve yerleşik hale getirilmesini çalışmıştır.

Bu çalışmada ise öklidyen 3-uzayda ve Minkowski 3-uzayda sabit açılı yüzey kavramı açıklanmaya çalışılmıştır. Yüzeyin incelenen bu özelliğine göre bir sınıflandırma yapılmıştır. Örneğin konik yüzeyler sabit açı özelliğini taşıyan özel bir yüzey tipidir. Bu sabit açı özelliği verilen bir yüzeyin birim normali ile sabit bir doğrultusunun yaptığı açının sabit olmasıdır.

## 2. ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 2.1 :** Boş olmayan bir cümle  $A$  ve bir  $K$  cismi üstünde bir vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir  $f: A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş afin uzay denir.

$$A_1) P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$A_2) \forall P \in A$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak biçimde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır [10].

**Tanım 2.2 :** Bir reel afin uzay  $A$  ve  $A$  ile birleşen vektör uzayı da  $V$  olsun.  $V$  de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile  $A$  da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece bu afin uzay Öklid uzayı adını alır [10].

**Tanım 2.3 :**  $d: E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(x, y)$  reel sayısına da  $x, y \in E^n$  noktaları arasındaki uzaklık denir [10].

**Tanım 2.4 :**  $d: E^n \times E^n \rightarrow R$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overline{xy}\|$$

biçiminde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında Öklid metriği denir [10].

**Tanım 2.5 :**  $\forall x, y, z \in E^n$  için  $\widehat{xyz}$  açısının ölçüsü;  $\cos\theta = \frac{\langle \overline{xy}, \overline{yz} \rangle}{\|\overline{xy}\| \|\overline{yz}\|}$  eşitliğinden hesaplanan  $\theta$  reel sayısıdır [10].

**Tanım 2.6 :**  $E^n$  de bir açık alt cümle  $U$  olmak üzere  $f: U \rightarrow R$  fonksiyonun  $k$ -yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler  $f$  fonksiyonuna  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir denir [10].

**Tanım 2.7 :**  $M$  bir topolojik  $n$  – manifold olsun.  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa  $M$  ye  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [10].

**Tanım 2.8 :**  $I \subseteq R$  açık alt cümle olmak üzere diferensiyellenebilir

$$\alpha: I \rightarrow R$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

fonksiyonu verilmiş olsun.  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile tanımlanan  $\alpha(I) \subset E^n$  e  $E^n$  de bir eğri denir [10].

**Tanım 2.9 :**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold ve bir  $P \in M$  noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı  $T_M(P)$  olsun.  $T_M(P)$  vektör uzayına  $M$  nin  $P$  noktasındaki tanjant uzayı denir [10].

**Tanım 2.10 :**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.  $M$  üzerinde bir vektör alanı diye  $\chi: M \xrightarrow[\text{örten}]{\text{birebir}} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$  olarak tanımlanan  $\chi$  fonksiyonuna denir ve  $M$  üzerinde vektör alanlarının cümlesi  $\chi(M)$  ile gösterilir [10].

**Tanım 2.11 :**  $X, Y \in \chi(E^n)$  vektör alanları verilmiş olsun.  $\forall P \in E^n$  için  $X_p = (x_1, \dots, x_n)|_p \in T_{E^n}(P)$  dir.  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  vektör alanı  $C^\infty$  sınıfındandır denir, eğer

$y_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ , koordinat fonksiyonları  $C^\infty$  sınıfından, yani  $y_i \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$  ise bu durumda  $Y$  nin  $X$  e göre kovaryant türevi  $D_X Y = (x_p [y_1], \dots, x_p [y_n])$  şeklinde tanımlanır [10].

**Tanım 2.12 :**  $T_{E^n}(P)$  nin cebirsel duali  $T_{E^n}^*(P)$  ile gösterilir ve  $E^n$  in  $P \in E^n$  noktasındaki kotanjant uzayı adını alır.  $T_{E^n}^*(P)$  nin her bir elemanına  $P \in E^n$  noktasında kotanjant vektör adı verilir [10].

**Tanım 2.13 :**  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  den  $\mathbb{R}$  ye bütün r-lineer fonksiyonların cümlesini  $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = \{f | f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \xrightarrow{r\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$  ile gösterelim. Bu cümle  $\mathbb{R}$  üzerindeki bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına dual vektör uzaylarının çarpımı denir.  $L(V_1, V_2, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$  tensör uzayının her bir elemanına r. dereceden tensör denir. Eğer  $V_1 = V_2 = \dots = V_r = V$  ise  $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$  uzayına kovaryant tensör uzayı bu uzayın her elemanına da kovaryant tensör denir.  $T^r(V$  yada  $\otimes^r(V))$  ile gösterilir [10].

**Tanım 2.14 :** Kovaryant tensörler için verilen tanımda  $V$  yerine  $V^*$  ( $V$  nin dual uzayı) alınırsa  $(V^*)^*$  uzayı  $V$  ye izomorf olduğundan  $V^*$  üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant tensör uzayı denir. Yani

$$L(V^*, V^*, \dots, V^*; R) = V \otimes V \otimes \dots \otimes V \otimes \dots \otimes V = T_s(V^*)$$

bu uzayın elemanlarına kontravaryant s-tensör denir [10].

**Tanım 2.15 :** Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı n- boyutlu vektör uzayı  $V$  ve  $V$  nin duali  $V^*$  olsun.

$$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$$
 vektör uzayına r. dereceden

kovaryant ve s. dereceden kontravaryant tensör uzayı denir ve  $T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V)$

veya  $T_s^r$  şeklinde gösterilir [10].

**Tanım2.16 :**  $f \in \otimes^n V^*$ ,  $g \in \otimes^m V^*$  olmak üzere  $f$  ile  $g$  nin tensörel çarpımı

$f \otimes g, \forall (v_1, \dots, v_n) \in V^n$  ve  $\forall (u_1, \dots, u_m) \in V^m$  için

$$f \otimes g (v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m) = f(v_1, \dots, v_n)g(u_1, \dots, u_m)$$

şeklinde tanımlanır [10].

**Tanım 2.17 :**

$$\wedge: T^1(V) \otimes T^1(V) \rightarrow \wedge^2 V^*$$

$$(f, g) \rightarrow f \wedge g = A_2(f \otimes g)$$

şeklinde tanımlı  $\wedge$  fonksiyonuna dış çarpım fonksiyonu ve  $f \wedge g$  alterne tensörüne de  $f$  ve  $g$  tensörlerinin dış çarpımı denir [10].

**Tanım 2.18 :**

$$x = R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \psi(\alpha \times \beta)$$

şeklinde tanımlı  $\times$  iç işleme vektörel çarpım işlemi ve  $\alpha \times \beta$  vektörüne de vektörel çarpım denir [10].

**Tanım 2.19 :**  $M$  bir  $C^\infty$  manifold olsun.  $M$  üzerinde vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  olmak üzere ;

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için;

$$1) \quad D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z, \forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, R)$$

$$2) \quad D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y, \forall X, Y \in \chi(M), \forall f \in C^\infty(M, R)$$

özellikleri sağlanıyorsa  $D$  ye  $M$  manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve  $D_X$  e de  $X$  e göre kovaryant türev operatörü denir [10].

**Tanım 2.20 :**  $n$ -boyutlu bir  $C^\infty$  manifold  $M$  ve  $M$  üzerinde bir konneksiyon  $D$  olsun.

$$Tor: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow Tor(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre  $M$  üzerinde tanımlı  $D$  konneksiyonun torsiyon tensörü denir [10].

**Tanım 2.21 :**  $V$  bir  $K$  cismi üzerinde vektör uzayı ve  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$  dönüşümü

- 1) 2-lineer
- 2) Alterne  $\forall X, Y \in V$  için  $[X, Y] = -[Y, X]$
- 3)  $\forall X, Y, Z \in V$  için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Y]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa  $[\cdot, \cdot]$  dönüşümüne,  $V$  üzerinde bir Lie operatörü denir [10].

**Tanım 2.22 :**  $E^n$  in bir hiperyüzeyi  $M$  ve  $M$  nin birim normal vektör alanı  $N$  verilsin.

$E^n$  de Rieman konneksiyonu  $D$  olmak üzere  $\forall X \in \chi(M)$  için  $S(X) = D_X N$  şeklinde tanımlı  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde şekil operatörü veya  $M$  nin Weingarten dönüşümü denir [10].

**Tanım 2.23 :**  $M, \bar{M}$  nin bir yarı Riemann altmanifoldu olsun.  $\tilde{\nabla}$  ve  $\nabla$  sırasıyla  $\bar{M}$  ve  $M$  üzerindeki Levi Civita konneksiyonları olmak üzere  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

eşitliğine  $M$  nin Gauss denklemi denir [10].

**Tanım 2.24 :**  $E^n$  de bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere;

$$K: M \rightarrow R$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  nin Gauss eğrilik fonsiyonu ve  $K(P)$  değerine de

$M$  nin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği denir [11].

**Tanım 2.25 :**  $E^n$  de bir hiperyüzey  $M$  olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki şekil operatörü  $S(P)$  olmak üzere

$$H: M \rightarrow R$$

$$P \rightarrow H(P) = \text{İz}(S(P))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $M$  nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve  $H(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki ortalama eğriliği denir [11].

Özel olarak  $H=0$  için,  $M$  yüzeyi minimal yüzey olarak adlandırılır.

**Tanım 2.26 :**  $M$  ve  $\bar{M}$  birer  $C^\infty$  manifold ve  $f: M \rightarrow \bar{M}$  bir  $C^\infty$  fonksiyon olsun. Eğer  $f'$  nin,  $f_*$  jakobian matrisi  $\forall p \in M$  noktasında reguler ise  $f$  ye  $M$  den  $\bar{M}$  içine bir immersiyon (=daldırma) denir [10].

**Tanım 2.27 :**  $\forall u, v \in R(U, X)$  parametrizasyonu ile verilen

$$X: U \subset E^2 \rightarrow E^n$$

$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v), \dots, X_n(u, v))$$

ile belirli olan  $\chi(U)$  yüzeyi göz önüne alınsın. Lineer bağımsız  $\{x_u, x_v\}$  cümlesi yüzeyin vektör alanlarının bir bazıdır. Yüzeyin birim normal vektör alanı ,

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \text{ ile belirlidir.}$$

$$I = (ds)^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

eşitliğine yüzeyin  $I$ . temel formu ya da metriği denir [11].

**Tanım 2.28 :**  $E^n$  de  $M$  bir  $(n - 1)$  altmanifold bir  $P$  noktasında  $M$  nin tanjant uzayı  $T_M(P)$  olduğuna göre  $M$  üzerinde Weingarten dönüşümü  $S: T_M(P) \rightarrow T_M(P)$  idi.  $S$  ile tanımlanan  $II$ . temel form  $M$  üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak  $\forall X_p, Y_p \in T_M(P)$  için

$$II(X_p, Y_p) = \langle S(X_p), Y_p \rangle$$

şeklinde tanımlanır [11].

### 3. LORENTZ UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

**Tanım 3.1 :**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun. Her  $a, b \in \mathbb{R}$  ve  $u, v, w \in V$  için  $\langle, \rangle$  dönüşümüne, aşağıdaki özelliklere sahip ise  $V$  vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [16].

$$1) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$2) \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle,$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

**Tanım 3.2 :**  $\langle, \rangle$ ,  $V$  vektör uzayı üzerinde bir bilinear form olsun. Bu bilinear form üç değişik durum altında incelenebilir [16].

A)

i) Eğer  $\forall v \in V$   $v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle > 0$  ise  $\langle, \rangle$  bilinear formuna pozitif definit,

ii) Eğer  $\forall v \in V$   $v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $\langle, \rangle$  bilinear formuna negatif definit denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için definit durum adı verilir.

B)

i) Eğer  $\forall v \in V$  için  $\langle v, v \rangle \geq 0$  ise  $\langle, \rangle$  bilinear formuna pozitif semi - definit,

ii) Eğer  $\forall v \in V$  için  $\langle v, v \rangle \leq 0$  ise  $\langle, \rangle$  bilinear formuna negatif semi-definit, denir.

Her iki duruma birlikte bilinear formlar için indefinit durum adı verilir.

C)

$\forall w \in V$  için  $\langle v, w \rangle = 0$  iken  $v = 0$  ise  $\langle, \rangle$  a nondejenere bilinear form denir.

Bu duruma ise bilinear formlar için nondejenere durum denir.

**Tanım 3.3 :**  $V$  bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik, bilinear form olsun.  $W \subset V$  olmak üzere;

$$\langle, \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu  $W$  alt uzayının boyutuna,  $\langle, \rangle$  simetrik bilinear formun indeksi denir ve bu indeks genellikle  $V$  ile gösterilir [16].

**Tanım 3.4:**  $M, C^\infty$  manifold ve

$$\langle , \rangle : X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilinear, nondejenere fonksiyonuna  $M$  üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine  $M$  manifoldunun indeksi denir [16].

**Tanım 3.5 :**  $M, C^\infty$  manifold ve  $\langle , \rangle$  de  $M$  üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere  $(M, \langle , \rangle)$  ikilisine bir Semi-Riemann manifoldu denir [16].

**Tanım 3.6 :**  $(M, \langle , \rangle)$  bir Semi-Riemann manifoldu ve boy  $M = n$  olsun. Eğer  $n \geq 2$  ve  $V = 1$  ise  $(M, \langle , \rangle)$  ikilisine bir Lorentz manifoldu denir [16].

Bundan sonra Lorentz manifoldunu  $M$  ile gösterelim.

**Tanım 3.7 :**  $\langle , \rangle|_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü

$$\forall \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall \vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{için}$$

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle|_L = -x_1 \cdot y_1 + \sum_{i=2}^n x_i \cdot y_i$$

ya da

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle|_L = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \cdot y_i \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \text{ ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $\langle , \rangle|_L$  fonksiyonuna  $\mathbb{R}^n$  de bir Lorentz iç çarpımı ve bu iç çarpım ile birleşen  $\mathbb{R}^n$  e de bir vektör uzayı denir. Bu vektör uzayına  $n -$  boyutlu standart Lorentz uzayı denir ve  $L^n$  ile gösterilir.

$\mathbb{R}^n$  üzerinde ki Lorentz iç çarpımının  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  bazına karşılık geldiği matris,

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [9].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  Lorentz iç çarpımını  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ile göstereceğiz ve  $\langle \cdot, \cdot \rangle = g$  gösterimini de kullanacağız.

**Tanım 3.8 :** Bir  $M$  Lorentz manifoldu üzerinde bir tanjant vektör  $v$  olsun. Eğer;  
 $\langle v, v \rangle > 0$  ise  $v$  ye space-like (uzay - benzeri) vektör,  
 $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $v$  ye time-like (zaman - benzeri) vektör,  
 $\langle v, v \rangle = 0$  ise  $v$  ye null veya light-like (ışık - benzeri) vektör,  
denir [13].

**Tanım 3.9 :** Time-like (zaman-benzeri) ve light-like (ışık-benzeri) vektörlere causal vektörler denir [9].

**Tanım 3.10 :**  $M$  bir Lorentz manifoldu olsun.  $M$  manifoldunun bir noktasındaki null vektörlerinin cümlesine; null konisi denir [16].

**Tanım 3.11 :** Bir  $L^n$ ,  $n$ -boyutlu Lorentz uzayının bütün time-like (zaman-benzeri) vektörlerinin cümlesi  $\ell$  olsun  $u \in \ell$  için  
$$C(u) = \{v \in \ell \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$
olmak üzere  $C(u)$  ya  $u$  'yu ihtiva eden  $L^n$  nin bir time-konisi (zaman – konisi) denir [16].

**Tanım 3.12 :**  $L^n$ ,  $n$ -boyutlu bir Lorentz uzayı olsun.

$$\forall \vec{X}, \vec{Y} \in L^n \text{ için } \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$$

ise  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir [3].

**Sonuç 3.1 :** Her ikisi de timelike (zaman-benzeri) olan iki vektör birbirine dik olamaz. Benzer düşünce her ikisi de spacelike (uzay-benzeri) olan iki vektör için de geçerlidir [3].

**Sonuç 3.2 :**  $\vec{0}$  vektörü bütün vektörlere diktir [1].

**Tanım 3.13 :** 4-boyutlu Lorentz uzayına Minkowski uzayı denir [16].

**Tanım 3.14 :**  $L^n$ , n-boyutlu Lorentz uzayında bir vektör,  $\vec{w}$  ve  $\langle , \rangle$  ise  $L^n$  üzerinde bir Lorentz iç çarpımı olsun.  $\vec{w}$  nın normu;

$$\|\vec{w}\|_{|L} = \sqrt{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} \quad \text{şeklinde tanımlanır [4].}$$

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe,  $\| \cdot \|_{|L}$  yerine  $\| \cdot \|$  ifadesini kullanacağız.

**Teorem 3.1 :**  $\vec{x} \in L^n$  olmak üzere;

i)  $\|\vec{x}\| > 0$  dır.

ii)  $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$  bir null vektörüdür.

iii)  $\vec{x}$  bir time-like (zaman-benzeri) vektör olsun. Bu takdirde,

$$\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \text{ olur.}$$

iv)  $\vec{x}$  bir space-like (uzay-benzeri) vektör olsun bu takdirde,

$$\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \text{ olur [2].}$$

**Tanım 3.15 :**  $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$  3-boyutlu Lorentz uzayında olmak üzere;

$$\Lambda|_L : L^3 \times L^3 \rightarrow L^3$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow (\vec{X} \wedge \vec{Y})|_L = (-x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlı  $\wedge|_L$  operatörüne  $L^3$  de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir.

Bunu matris formunda

$$\vec{X} \wedge \vec{Y}|_L = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir [14].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe  $\wedge|_L$  sembolü yerine  $\wedge$  sembolü kullanılacaktır.

**Tanım 3.16 :**  $L^n$ , n-boyutlu Lorentz uzayında bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna  $C^k$ -sınıfından (k-yıncı sınıftan) diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak, f

sadece sürekli ise  $C^0$ -sınıfındandır denir.  $U$  üzerinde tanımlı  $C^1$ -sınıfından fonksiyona  $U$  üzerinde 0-form adı verilir. Ayrıca,

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ - sınıfından}\} \quad \text{ve}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde gösterilir [1].

**Tanım 3.17 :**  $M$  bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer;

$$\vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \vec{v}_p[f], \forall P \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü,  $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  ve  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  için

$$1) \vec{v}_p[\lambda f + \mu g] = \lambda \vec{v}_p[f] + \mu \vec{v}_p[g]$$

$$2) \vec{v}_p[f \cdot g] = g(p) \vec{v}_p[f] + f(p) \vec{v}_p[g]$$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu operatöre Lorentz manifoldunun  $P \in M$  noktasında bir tanjant vektörü denir [1].

$M$  Lorentz manifoldunun bir  $P \in M$  noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi:

$$T_M(P) = \{\vec{v}_p \mid \vec{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. Bu cümle üzerinde iç ve dış işlem, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanırsa  $T_M(P)$  bir reel vektör uzayı olur.  $T_M(P)$  vektör uzayına,  $M$  Lorentz manifoldunun  $P$  noktasındaki tanjant uzayı denir.

**İç İşlem :**

$$+ : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(\vec{v}_p, \vec{w}_p) \rightarrow \vec{v}_p + \vec{w}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}_p + \vec{w}_p)[f] = \vec{v}_p[f] + \vec{w}_p[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

**Dış İşlem:**

$$\cdot : R \times T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

$$(\lambda, \vec{v}_p) \rightarrow \lambda \vec{v}_p$$

$$C^\infty(M, R) \rightarrow R$$

$$(\lambda, \vec{v}_p)[f] = \lambda \vec{v}_p[f], \quad \forall f \in C^\infty(M, R), \quad \lambda \in R$$

**Tanım 3.18:** M bir Lorentz manifoldu olsun.

$$X : M \xrightarrow[\text{örtün}]{1:1} \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna, M Lorentz manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir.

M Lorentz manifoldu üzerinde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi  $\chi(M)$  ile gösterilir. Bu cümle toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir reel vektör uzayıdır.  $\chi(M)$  vektör uzayına, M Lorentz manifoldu üzerinde vektör alanları uzayı denir.

Benzer şekilde  $L^n$ , n-boyutlu Lorentz uzayı üzerinde vektör alanları tanımlanabilir.  $L^n$  üzerinde tanımlanan vektör alanları cümlesi ise  $\chi(L^n)$  ile gösterilir [1].

**Tanım 3.19 :**  $\forall P \in L^n$  için,

$$\partial_1(P) = \frac{\partial}{\partial x_1}(P) = (1, 0, \dots, 0) \Big|_P$$

$$\partial_2(P) = \frac{\partial}{\partial x_2}(P) = (0, 1, \dots, 0) \Big|_P$$

.....

$$\partial_n(P) = \frac{\partial}{\partial x_n}(P) = (0, 0, \dots, 1) \Big|_P$$

olacak biçimde,  $L^n$  üzerindeki her bir P noktasında n tane vektör (tanjant vektör) seçelim. Bu vektörlerin  $L^n$  deki dağılımı ile n tane vektör alanı elde edilir. Bu şekilde tanımlanan,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

vektör alanı n-lisine,  $L^n$  üzerindeki doğal baz vektör alanları sistemi veya kısaca doğal baz alan sistemi denir.

$L^n$ , n-boyutlu Lorentz uzayındaki bu doğal baz alan sistemi için;

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad 1 \leq i, j \leq n \quad \text{ve} \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \text{ ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere ;

$$\epsilon_i \delta_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad 1 \leq i, j \leq n$$

eşitlikleri vardır [16].

**Tanım 3.20 :** Grad:  $C^\infty(L^n, \mathbf{R}) \rightarrow \chi(L^n)$

$$f \rightarrow \text{Grad}(f)$$

öyle ki,  $L^n$  de  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  bir koordinat sistemi olmak üzere,

$$\text{Grad}(f) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \epsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad i=1 \text{ ise} \\ 1 & , \quad 2 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna,  $L^n$  de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  koordinat sistemine göre

koordinat fonksiyonu denir ve genellikle  $\vec{v} = \text{Grad}$  şeklinde gösterilir [16].

**Tanım 3.21 :**  $L^n$ , n -boyutlu Lorentz uzayında bir

$$f: L^n \rightarrow \mathbf{R}$$

reel değerli fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonunun  $P \in L^n$  noktasında ve  $\vec{v}$

yönündeki türevi;  $\bar{v}_p[f] = \langle \vec{v}f, \bar{v}_p \rangle$  şeklinde tanımlanır [16].

**Tanım 3.22 :**  $X \in \chi(L^n)$  ve  $f \in C^\infty(L^n, \mathbf{R})$  olsun.  $\forall P \in L^n$  için

$$(X(f))(P) = X_p[f]$$

olmak üzere,  $X[f] \in C^\infty(L^n, \mathbf{R})$  fonksiyonuna f in X vektör alanı yönündeki türevi

denir [16].

**Tanım 3.23** :  $X, Y \in \chi(L^n)$  vektör alanları verilmiş olsun.  $\forall P \in L^n$  için  $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)_p \in T_{L^n}(P)$  dir.  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektör alanı için

$$y_i : L^n \rightarrow \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n$$

koordinat fonksiyonları  $C^\infty$ -sınıfından iseler,  $Y$  vektör alanına  $C^\infty$ -sınıfındandır denir.

Bu durumda,  $Y$  nin  $X$  e göre kovaryant türevi,

$$D_X Y = X[Y_i] = \langle \vec{\nabla} y_i, X \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial u_k} x_k \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $D$  ye  $Y$  vektör alanının  $X$  vektör alanı yönündeki, Lorentz anlamında kovaryant türevi denir [1].

#### 4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

$E^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında  $\langle, \rangle$ , standart flat metrik ve  $\tilde{\nabla}$  da Lie konneksiyonu olsun.

$E^3$  uzayında bir yönlendirme göz önüne alalım ve bunu sabit  $k$  doğrultusu ile gösterelim.  $E^3$  de izometrik olarak daldırılmış bir  $M$  yüzeyini ele alalım ve bu yüzeyin birim normalini de  $N$  ile gösterelim.

$\theta = (\widehat{N}, k)$ ,  $\theta \in [0, \pi)$  olmak üzere birim normal ve sabit doğrultu arasındaki açı olsun. Bir vektör eğer  $N$ ' ye ortogonal ise  $M$ ' ye teğettir.

$E^3$  uzayında Gauss ve Weingarten formülleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -AX$$

şeklindedir. Burada  $X$  ve  $Y$ ,  $M$  ye teğettir. Ayrıca  $\nabla$ ,  $M$  üzerindeki Levi Civita konneksiyonu ve  $h$ , bir simetrik (1-2) tensör alanıdır ki bu tensör alanı  $II$ . temel form olarak adlandırılır.  $A$  ise  $M$  nin şekil operatörüdür. Buradan  $M$  ye teğet her  $X, Y$  için

$$\langle h(X, Y), N \rangle = g(X, AY)$$

elde edilir.  $g$  ise  $\langle, \rangle$  skaler çarpımın  $M$  ye kısıtlanmışıdır.

$k$  sırasıyla teğet ve normal bileşenleri cinsinden  $U$ ,  $M$  ye teğet olmak üzere

$$k = \vec{U} + \cos\theta \vec{N} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Buradan  $\|\vec{U}\| = \sin\theta$  olduğundan

$$\|k\|^2 = \|U\|^2 + \cos^2\theta \|N\|^2$$

elde edilir.

$\theta \neq 0$  için,  $M$  de birim vektör alanını,  $e_1 = \frac{U}{\|U\|}$  şeklinde tanımlanır.

$e_2$  ise  $e_1$ 'e ortogonal ve  $M$  üzerindeki bir birim vektör alanı olsun.

Böylece  $M$  nin her noktasında tanımlanan  $\{e_1, e_2\}$  ortonormal bazı elde edilir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe  $\theta$  sabit kabul edilecektir.

**Önerme 4.1 :** Yukarıdaki hipoteze göre  $[e_1, e_2] \parallel e_2$  dir [22].

**İspat:** İlk olarak  $[e_1, e_2]$  yi hesaplayalım ve sadece  $e_2$ ' ye bağlı olduğunu gösterelim. Burada

$$[e_1, e_2] = \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 - \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 \quad (4.2)$$

bağıntısını göz önüne alalım.

(4.1) eşitliğinden ve  $e_1$ ' in tanımından  $k = \sin\theta e_1 + \cos\theta N$  eşitliğine  $\tilde{\nabla}_{e_2}$  uygulanırsa

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_2} k = \sin\theta \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 + \cos\theta \tilde{\nabla}_{e_2} N \quad (4.3)$$

olur.  $\langle N, e_1 \rangle = 0$  ifadesinden  $e_2$ ' ye göre türev alınır

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_2} N, e_1 \rangle + \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_1, N \rangle = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir.

Weingarten formülünden;

$$\tilde{\nabla}_{e_2} N = -\rho e_1 - \lambda e_2, \quad \rho, \lambda \in C^\infty(M) \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.2) ve (4.5) den

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \cot\theta (\rho e_1 + \lambda e_2) \quad (4.6)$$

olur. Bu noktada  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  olduğunu göz önüne alalım.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (yani  $\cot\theta \neq 0$ )

durumu ayrıca incelenecektir.

(4.4) , (4.5) ve (4.6) ifadelerinden  $\rho = 0$  bulunur ve dolayısıyla

$$\tilde{\nabla}_{e_2} e_1 = \lambda \cot\theta e_2 \quad (4.7)$$

tekrar Weingarten dönüşümü göz önüne alınır

$$\tilde{\nabla}_{e_1} N = -\alpha e_1 - \gamma e_2, \quad \alpha, \gamma \in C^\infty(M) \quad (4.8)$$

yazılabilir. Aynı metot ile (4.1) ifadesine  $\tilde{\nabla}_{e_1}$  uygulanır ve (4.1) ve (4.8)

kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = \cot\theta (\alpha e_1 + \gamma e_2)$$

elde edilir.

$e_1$  birim olduğundan  $\alpha = 0$  olur. Ayrıca şekil operatörün simetrik olmasından dolayı, yani  $\langle A_{e_1}, e_2 \rangle = \langle e_1, A_{e_2} \rangle$ , olduğundan  $\gamma = 0$  olur. Böylece  $A_{e_1} = 0$  ve

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0 \quad (4.9)$$

dır.

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  ifadesinden  $e_1$ ' e göre türev alınır ve (4.9) kullanılırsa

$$\langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, e_1 \rangle = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir.

Gauss formülü göz önüne alınır;

$$0 = \langle A_{e_1}, e_2 \rangle = \langle h(e_1, e_2), N \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{e_1} e_2, N \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\tilde{\nabla}_{e_1} e_2 = 0 \quad (4.11)$$

olur.

(4.2) , (4.7) ve (4.11) ifadelerinden Lie Operatörü için,

$$\left. \begin{aligned} [e_1, e_2] &= \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 - \tilde{\nabla}_{e_2} e_1 \\ &= 0 - \lambda \cot\theta e_2 \\ &= -\lambda \cot\theta e_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ise  $[e_1, e_2] \parallel e_2$  olduğunu verir.

**Önerme 4.2:**  $M'$  nin  $\nabla$  Levi Civita konneksiyonu için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur [22].

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0 \\ \nabla_{e_1} e_2 &= 0 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \lambda \cot\theta e_2 \\ \nabla_{e_2} e_2 &= -\lambda \cot\theta e_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

## 5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Önerme 4.1 den bir  $M$  yüzeyinin her bir noktasında bir lokal koordinat sistemi seçelim ve bu yüzeyi parametrik olarak

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklinde gösterelim. Öyle ki burada teğet vektörleri için  $r_u = e_1$  ve  $r_v \parallel e_2$  dir.

$\beta$ ,  $M$  üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere  $r_v = \beta(u, v)e_2$  şeklinde olsun. Ayrıca  $M$  üzerindeki metrik

$$g = du^2 + \beta^2(u, v)dv^2 \quad (5.1)$$

şeklinde yazılabilir.

**Hatırlatma 5.1:** Bu yüzey için  $I$ . temel formun katsayıları  $E = 1, F = 0,$   
 $G = \beta^2(u, v)$  şeklindedir [22].

Önerme 4.2 den  $u$  ve  $v$  koordinatlarına göre  $M$  nin Levi Civita konneksiyonunu yazılabilir.

Bu  $r$  parametrizasyonu;

$$r_{uu} = 0 \quad (5.2)$$

$$r_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v \quad (5.3)$$

kısmı diferensiyel denklemlerini sağlar. Burada  $\beta$ ,

$$\beta_u - \beta \lambda \cos\theta = 0 \quad (5.4)$$

denklemini sağlar ve sonuç olarak

$$r_{vv} = \frac{\beta_v}{\beta} r_v - \beta^2 \lambda \cot\theta r_u + \beta^2 \lambda N. \quad (5.5)$$

elde edilir.

$\nabla_{\partial u} \nabla_{\partial v} N = \nabla_{\partial v} \nabla_{\partial u} N$  Schwartz eşitsizliğini kullanarak ve  $M$  yüzeyinin birim normalinin kısmı türevlerinin ifadesi  $M$ :  $N_u = 0$  ve  $N_v = -\lambda r_v$  dir. Buradan  $\lambda$  ya bağlı olarak

$$\lambda_u + \lambda^2 \cot\theta = 0 \quad (5.6)$$

kısmı türevli diferensiyel denklemi yazılabilir.

Şimdi  $M$  yüzeyinin  $r'$  ye bağlı parametrizasyonunu yazmak için  $\lambda$  ve  $\beta$  fonksiyonlarını bulalım.

**Hatırlatma 5.2:**  $N_u = 0$  olduğundan  $II$ . temel formun katsayıları  $e = f = 0$  olur ki bu ise  $M$  nin Gauss eğriliğinin sıfır olması demektir. Dolayısıyla  $M$  yüzeyi lokal olarak flattır denilir [22].

**Hatırlatma 5.3:**  $M$  yüzeyinin Gauss dönüşümünden faydalanılarak bu yüzeyin sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yaptığı söylenebilir.

Yani Gauss dönüşümü  $S^2$  küresinde bir çember üzerinde yatar. Ayrıca  $S^2$  de hiç bir iç noktaya sahip olmadığından bu yüzeyin Gauss eğriliği özdeş olarak 0 dır [22].

**Önerme 5.4 :**  $\lambda$  ve  $\beta$  fonksiyonları

$$\lambda(u, v) = \frac{\tan\theta}{u + \alpha(v)} \quad (5.7)$$

$$\beta(u, v) = \varphi(v) \cdot (u + \alpha(v)), \quad (5.8)$$

ifadeleriyle verilir. Burada  $\alpha$  ve  $\varphi$ ,  $M$  üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır veya

$$\lambda(u, v) = 0 \quad (5.9)$$

$$\beta(u, v) = \beta(v) \quad (5.10)$$

dır [22].

**İspat:** (5.6) denkleminin çözümünden  $\lambda$  bulunur ve (5.4) te yerine yazılırsa  $\beta$  elde edilir.

**Önerme 5.5:**  $E^3$  deki bir  $M$  yüzeyinin sabit açılı bir yüzey olması için gerek ve yeter şart onun aşağıdaki yüzeylerden birine lokal olarak izometrik olmasıdır.

$$(i) \quad r: M \rightarrow E^3, (u, v) \rightarrow (u \cos \theta (\cos v, \sin v) + \gamma(v), u \sin \theta) \quad (5.11)$$

$$\gamma(v) = \cos \theta \left( -\int_0^v \alpha(\tau) \sin \tau \, d\tau, \int_0^v \alpha(\tau) \cos \tau \, d\tau \right) \quad (5.12)$$

burada  $\alpha$ ,  $I$  aralığında bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

(ii)  $x \sin \theta - z \cos \theta = 0$  düzleminin açık bir parçası

(iii)  $\gamma \times R$  silindirin açık bir parçasına ki burada  $\gamma$ ,  $R^2$  de diferensiyellenebilir eğridir. Ayrıca  $\theta$  bir reel sayıdır [22].

**İspat:** İlk olarak bütün bu yüzeylerin  $E^3$  te sabit açılı bir yüzey tanımladığını ispatlayalım. (ii) ifadesinden açıktır ki (iii) deki  $\theta = \frac{\pi}{2}$  olur. (i) ifadesinden  $r_u$  ve  $r_v$

teğet vektörlerini

$$r_u = (\cos \theta \cos v, \cos \theta \sin v, \sin \theta)$$

$$r_v = ((u + \alpha(v)) \cos \theta (-\sin v, \cos v), 0)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece  $N = (-\sin\theta(\cos v, \sin v), \cos\theta)$  birim normal vektörü ve sabit bir  $k$  doğrultusu arasındaki  $\theta$  açısı sabittir.

Tersine  $E^3$  deki sabit açılı bir yüzey önermenin ifadelerini sağladığı ispatlanabilir.

$e_1 = r_u$  olduğundan (4.1) den

$$k = \sin\theta r_u + \cos\theta N$$

elde edilir.

Hatırlatma 5.1 kullanılarak ve bir önceki bağıntıdan kolayca  $\langle r_u, k \rangle = \sin\theta$  ve  $\langle r_u, k \rangle = 0$  olduğu gösterilebilir. Böylece  $r(u, v)$  nin bileşeni,  $z(u, v) = u\sin\theta$  dir.

Bu noktada  $M$  nin parametrizasyonu,

$$r(u, v) = (h(u, v), u\sin\theta) \quad (5.13)$$

olur ve burada  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in R^2$  dir.

Önerme 5.4 ile verilen  $\lambda$  ve  $\beta$  için iki durum vardır.

**Durum I :**  $r_{uu} = 0$  olduğundan  $h_{uu} = 0$  yazılabilir.

Diğer bir deyişle  $e_1 = r_u = (h_u, \sin\theta)$  bir birim vektördür. Bu ise  $|h_u| = \cos\theta$  olması demektir. Böylece  $h_u = \cos\theta f(v)$  olur ki burada herhangi bir  $v$  için  $f(v) \in R^2$  ve  $|f(v)| = 1$  dir. Yani  $f$ ,  $S^1$  çemberinin bir parametrizasyonudur.

Yukarıdaki ifade de integral alınırsa

$$h(u, v) = u\cos\theta f(v) + \gamma(v)$$

elde ederiz. Burada  $\gamma$ ,  $R^2$  de diferensiyellenebilir fonsiyondur.

Ardından  $r_v = (u\cos\theta f'(v) + \gamma'(v), 0)$  ve  $r_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v$  olduğundan

$$\gamma'(v) = \cos\theta \alpha(v) f'(v)$$

yazılabilir.

Genelliği bozmadan kabul edebilir ki  $f$  nin  $S^1$  için doğal bir parametrizasyonu olsun yani  $f(v) = (\cos v, \sin v)$  olarak alınsın. Bu yüzden (5.8) de verilen  $\varphi$  fonsiyonu sabittir, yani,  $u = \cos\theta$  dir.  $M$  nin bir parametrizasyonu olarak

$$r(u, v) = (u\cos\theta(\cos v, \sin v) + \gamma(v), \sin\theta)$$

elde edilir ki, burada  $\gamma$ , (5.12) ile verilen fonsiyondur.

**Durum II :**  $r_{uu} = 0$  ve  $r_{uv} = 0$  olduğundan  $h_{uu} = 0$  ve  $h_{uv} = 0$  olacaktır. Burada  $\mu \in R$  olmak üzere

$$h_u = \cos\theta (\cos\mu, \sin\mu)$$

$R^2$  de bir sabit vektördür. Böylece

$$h(u, v) = u \cos \theta (\cos \mu, \sin \mu) + \gamma(v),$$

dır ki burada  $\gamma, R^2$  de diferensiyellenebilir bir eğridir.

Hatırlatalım ki  $r_u$  ve  $r_v$  birbirine ortogonaldir. Sonuç olarak

$$\gamma(v) = \alpha(v)(-\sin \mu, \cos \mu), \quad \alpha \in C^\infty(I) \quad (5.14)$$

yazılır.  $M$  yüzeyi ;

$$r(u, v) = (u \cos \theta (\cos \mu, \sin \mu) + \gamma(v), u \sin \theta)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\gamma$ , (5.14) eşitliğindeki gibi alınmıştır.

$(x, y)$  düzleminde  $\mu$  açısının bir dönmesi  $M$  için aşağıdaki şekilde parametrize edilir.

$$r(u, v) = (u \cos \theta, \alpha(v), u \sin \theta) \quad (5.15)$$

Burada  $x \sin \theta - z \cos \theta = 0$  düzlem denklemi ele alınabilir.

$\theta$  Sabit açısı göz önüne alındığında aşağıdaki durumlar söz konusu olacaktır.

1) Bu durumlardan ilki  $\theta = 0$  olmasıdır. Bu durumda  $N$  normali  $k$  doğrultusu ile çakışır.  $r_u$  ve  $r_v$ ,  $M$  ye teğet olduklarından  $\langle r_u, k \rangle = 0$  ve  $\langle r_v, k \rangle = 0$  olur. Bu yüzden

$\langle r, k \rangle = \text{sabit}$  elde edilir. Bu  $(x, y)$  düzlemine paralel olan bir düzlemin denklemidir. Bu da  $r(u, v) = (u, v, 0)$  olarak parametrize edilebilir.

2) İkinci olarak  $\theta = \frac{\pi}{2}$  olması durumu ele alınabilir.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  halinde  $k$  yüzeye teğettir. Bu durumda  $M$ ,

$$r(u, v) = (\gamma(v), u),$$

olarak parametrize edilebilir ki burada  $\gamma(v) \in R^2$  dir. Şimdi teorem tam olarak ispatlanmış olur.

(5.12) deki  $\alpha$  fonksiyonları için (5.11) ile parametrize edilen sabit açılı yüzeylerin örneklerini verelim.

## 5.1. Örnekler

Aşağıdaki dört örnekte  $\theta = \frac{\pi}{4}$  olarak alınmıştır.

$$1) \alpha(v) = 1$$

$$r(u, v) = ((1 + u) \cos v - 1, (1 + u) \sin v + \cos v - 1, u)$$

$$2) \alpha(v) = v$$

$$r(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((u + v) \cos v - \sin v, (u + v) \sin v + \cos v - 1, u)$$

$$3) \quad \alpha(v) = \cos v$$

$$r(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u \cos v - \frac{\sin^2 v}{2}, u \sin v + \frac{v + \sin v \cos v}{2}, u \right)$$

$$4) \quad \alpha(v) = 2 \sin v$$

$$r(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u \cos v - v + \cos v \sin v, u \sin v + \sin^2 v, u)$$

Şimdi aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Önerme 5.6 :**

1) 3-boyutlu Öklid uzaydaki sadece minimal sabit açılı yüzeyler k sabit doğrultusu ile  $\theta$  açısı yapan düzlemlerdir.

2) 3-boyutlu Öklid uzaydaki sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli sabit açılı yüzeyler silindirik yüzeylerdir.

**İspat :**  $H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{eG - F^2}$  ortalama eğrilik formülünü göz önüne alalım. Hatırlatma

5.1 ve 5.2 kullanılarak;

$$H = \frac{1}{2} \frac{g}{\beta^2(u, v)} \quad (5.15)$$

elde ederiz.

Bütün minimal yüzeyler için  $g=0$  olmalıdır. Şimdi tekrar k sabit doğrultusu ile  $\theta$  açısı yapan düzlemlere uygun  $\lambda=0$  durumunu göz önüne alalım.

(5.15) ifadesinden  $\lambda=\text{sabit}$  olur. Fakat  $\lambda$ , (5.6) denklemini sağladığından  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alınmalıdır. Bu özel durumlarda  $\gamma \times R$  silindirik yüzeyini bulabiliriz ki ,  $\gamma, R^2$  de diferensiyellenebilir bir eğridir.

## 6. SABİT SPACELIKE DOĞRULTULU TIMELİKE SABİT AÇILI YÜZEYLER

M bir timelike yüzey olsun ve  $\alpha$  da k sabit spacelike doğrultu ile  $N = (n_1, n_2, n_3)$  birim normalini arasındaki sabit açı olsun. Genelliği bozmadan sabit doğrultulu reel eksen olarak ele alınır.

$\alpha$  açısı için aşağıdaki iki durum söz konusudur.

- a) Eğer  $|n_1| > 1$  ise  $g(N, k) = \cosh \alpha$  dir.
- b) Eğer  $|n_1| \leq 1$  ise  $g(N, k) = \cos \alpha$  dir.

Şimdi bu durumları inceleyelim.

a)  $|n_1| > 1$  olduğunu kabul edelim. k spacelike birim vektör olduğundan M üzerinde

$e_1$  timelike birim vektör alanı göz önüne alınırsa

$$k = \sinh \alpha e_1 + \cosh \alpha N \quad (6.1)$$

dir.

**Yardımcı Teorem 6.1. :**  $e_2$ , M üzerinde  $e_1$ 'e ortogonal olan bir birim vektör alanı olsun.  $\chi(M)$  in  $\{e_1, e_2\}$  ortonormal bazı gözönüne alınırsa

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda e_2, \quad \bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \cot \alpha e_2, \quad \lambda = \lambda(u, v)$$

$$\bar{D}_{e_1} N = \bar{D}_{e_1} e_1 = \bar{D}_{e_1} e_2 = 0$$

dir [23].

**İspat:** (6.1) eşitliğini  $\bar{D}_{e_2}$  uygulanırsa

$$\bar{D}_{e_2} k = \sinh \alpha \bar{D}_{e_2} e_1 + \cosh \alpha \bar{D}_{e_2} N \quad (6.2)$$

elde edilir.  $e_2[g(N, e_1)] = 0$  olduğundan

$$g(\bar{D}_{e_2} N, e_1) + g(N, \bar{D}_{e_2} e_1) = 0 \quad (6.3)$$

yazılabilir.

Çünkü  $e_2[g(N, e_1)] = 0$  dir. Burada açıkça söylenebilir ki  $\bar{D}_{e_2} N \in \chi(M)$  dir. Bu yüzden

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda_1 e_1 + \lambda e_2 \quad (6.4)$$

olur. (6.2) ve (6.4) ifadelerinden

$$\bar{D}_{e_2} e_1 = -\coth \alpha (\lambda_1 e_1 + \lambda e_2) \quad (6.5)$$

elde edilir.  $\alpha = 0$  olması durumunu daha sonra incelenecektir. (6.3) ifadesinden

kolayca

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda e_2 \text{ ve } \bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \coth \alpha e_2$$

olduğunu söylenebilir. Şimdi de (6.1) ifadesini  $\bar{D}_{e_1}$  uygulanırsa

$$\bar{D}_{e_1} k = \sinh \alpha \bar{D}_{e_1} e_1 + \cosh \alpha \bar{D}_{e_1} N \quad (6.6)$$

elde edilir.  $e_1[g(N, N)] = 0$  olduğundan ;

$$\bar{D}_{e_1} N = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad (6.7)$$

(6.6) ve (6.7) ve  $e_1[g(N, N)] = 0$  ifadelerinden

$$\bar{D}_{e_1} e_1 = -\mu_2 \coth \alpha e_2 \quad (6.8)$$

elde edilir. M nin S şekil operatörünün simetrik olmasından dolayı

$$g(S(e_1), e_2) = g(e_1, S(e_2)),$$

$$\mu_2 = \lambda_1 = 0$$

olduğu söylenebilir. Dolayısıyla

$$\bar{D}_{e_1} N = \bar{D}_{e_1} e_1 = 0$$

olur.  $R_1^3$ , 3-boyutlu Lorentz uzayının  $\{e_1, e_2, N\}$  bazına uygun olarak

$$\bar{D}_{e_1} e_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 N, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Basit hesaplamalar ile

$$\bar{D}_{e_1} e_2 = 0$$

bulunur. Şimdi aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

### Sonuç 6.2:

$$\bar{D}_{e_1} e_1 = \bar{D}_{e_1} e_2 = 0$$

$$\bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \coth \alpha e_2$$

$$\bar{D}_{e_2} e_2 = -\lambda \coth \alpha e_1$$

dır. M timelike regle yüzeyi

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\beta: M \rightarrow \mathbb{R}$  bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$r_u = e_1, r_v = \beta(u, v) e_2$$

olduğunu kabul edelim. Sonuç 6.2 den

$$r_{uu} = 0, \quad r_{vu} = \beta_u \frac{1}{\beta} r_v, \quad r_{uv} = -\lambda \coth \alpha r_v$$

ve

$$r_{vv} = -\lambda \beta^2 \coth \alpha r_u + \frac{1}{\beta} \beta_v r_v - \lambda \beta^2 N$$

elde edilir.

$$r_{uv} = r_{vu} \text{ ve } N_{uv} = N_{vu}$$

olduğundan

$$\beta_u + \lambda\beta\coth\alpha = 0, \quad \lambda_u - \lambda^2\coth\alpha = 0 \quad (6.9)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (6.9) denklemi çözümlerse

$$\lambda(u, v) = -\frac{\tanh\alpha}{u+\Gamma(v)}, \quad \beta(u, v) = \varphi(v)(u + \Gamma(v)) \quad (6.10)$$

ve

$$\lambda(u, v) = 0, \quad \beta(u, v) = \beta(v) \quad (6.11)$$

elde edilir.

Şimdi M yüzeyi için bir sınıflandırma verilsin. (6.10) ifadesi (6.9) denklemlerinin bir çözümü olsun.  $g(r_u, k) = -\sinh\alpha$  ve  $g(r_v, k) = 0$  olduğundan

$$r(u, v) = (-u\sinh\alpha, h(u, v))$$

yazılabilir ki burada  $h(u, v) \in R_1^2$  dir.  $g(r_u, r_v) = -1$ , olduğundan

$$g(h_u, h_u) = y_u^2 - z_u^2 = -\cosh^2\alpha$$

dır. Böylece

$$h_u = (\cosh\alpha f_1(v), \cosh\alpha f_2(v))$$

elde edilir. Burada  $f(v) = (f_1(v), f_2(v)) \in R_1^2$  ve  $\|f(v)\| = 1$  dir. Böylece

$$r(u, v) = (-u\sinh\alpha, u\cos\alpha f_1(v) + \gamma_1(v), u\cosh\alpha f_2(v) + \gamma_2(v))$$

yazılabilir.

$r_{uv} = r_{vu}$  olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dv} &= \cosh\alpha \frac{df_1}{dv} \Gamma(v) \\ \frac{d\gamma_2}{dv} &= \cosh\alpha \frac{df_2}{dv} \Gamma(v) \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla söylenebilir. Genelliği bozmadan eğer  $f(v) = (\cosh v, \sinh v)$  alınırsa

$$r(u, v) = (-u\sinh\alpha, u\cos\alpha \cosh v + \gamma_1(v), u\cosh\alpha \sinh v + \gamma_2(v)) \quad (6.12)$$

olduğu söylenebilir. Burada

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \cosh\alpha \left( \int_0^v \sinh\tau \Gamma(v) d\tau, \int_0^v \cosh\tau \Gamma(v) d\tau \right)$$

(6.11) ifadesinin (6.9) denkleminin bir çözüm olduğunu kabul edelim.  $\beta_u = 0$  olduğundan  $r_{vu} = 0$  olur.  $r_{uu} = 0$  ve  $r_{uv} = 0$  olduğu içinde  $h_{uu} = 0$  ve  $h_{uv} = 0$  denilebilir. Bu ise  $h_u$ ' nun  $R_1^2$  de bir sabit vektör olması demektir.

Kabul edelim ki  $\alpha$  bir sabit olmak üzere;

$$h_u = (\cosh\alpha \cosh\mu, -\cosh\alpha \sinh\mu)$$

olsun. Dolayısıyla

$$h(u, v) = (\cosh\alpha \cosh\mu + \gamma_1(v), -\cosh\alpha \sinh\mu + \gamma_2(v))$$

yazılabilir.  $r_u$  ve  $r_v$  ortogonal olduğundan

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = (\sinh\mu \Gamma(v), -\cosh\mu \Gamma(v))$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$r(u, v) = (-u \sinh\alpha, u \cosh\alpha \cosh\mu + \sinh\mu \Gamma(v), -u \cosh\alpha \sinh\mu - \cosh\mu \Gamma(v))$$

olduğu görülür. Lorentz transformasyonu göz önüne alınırsa

$$r(u, v) = (u \cosh\alpha, -\Gamma(v), -u \sinh\alpha)$$

yazılabilir. Bu ifade de

$$\sinh\alpha x + \cosh\alpha z = 0 \quad (6.13)$$

Lorentz düzlemi için bir parametrizasyonudur.

**Özel Durum:** Eğer  $\alpha = 0$  ise o zaman  $k = N$  dir. Burada  $M$  nin birim normalinin bir sabit olduğunu söyleyebiliriz.  $k=(1,0,0)$  alınırsa  $M$ ,  $(y, z)$ -düzlemine paralel bir Lorentz düzlemi olur.

**b)**  $|n_1| \leq 1$  olduğunu kabul edelim.  $k$  bir spacelike birim vektör olduğundan  $M$  üzerinde  $e_1$  spacelike birim vektör alanı göz önüne alınırsa

$$k = \sin\alpha e_1 + \cos\alpha N \quad (6.14)$$

dir.

**Yardımcı Teorem 6.3:**  $e_2$ ,  $M$  üzerinde  $e_1$ 'e ortogonal olan bir birim vektör alanı olsun.

$\chi(M)$  nin  $\{e_1, e_2\}$  ortonormal bazı göz önüne alınırsa

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda e_2, \quad \bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \cot\alpha e_2, \quad \lambda = \lambda(u, v)$$

$$\bar{D}_{e_1} N = \bar{D}_{e_1} e_1 = \bar{D}_{e_1} e_2 = 0$$

dir [23].

**Sonuç 6.4:**

$$D_{e_1} e_1 = D_{e_1} e_2 = 0, \quad D_{e_2} e_1 = -\lambda \cot\alpha e_2, \quad D_{e_2} e_2 = -\lambda \cot\alpha e_1$$

dir.

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

yüzeyine  $r_u = e_1, r_v = \beta(u, v)e_2$  olacak şekilde göz önüne alınırsa yukarıdakilere benzer şekilde

$$r_{uu} = 0, r_{vu} = \beta_u \frac{1}{\beta} r_v, r_{uv} = -\lambda \cot \alpha r_v$$

ve

$$r_{vv} = -\lambda \beta^2 \cot \alpha r_u - \frac{1}{\beta} \beta_v r_v + \lambda \beta^2 N$$

elde edilir.

$$r_{uv} = r_{vu} \text{ ve } N_{uv} = N_{vu}$$

olduğundan

$$\beta_u + \lambda \beta \cot \alpha = 0, \lambda_u - \lambda^2 \cot \alpha = 0 \quad (6.15)$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$\lambda(u, v) = 0, \beta(u, v) = \beta(v) \quad (6.16)$$

şeklindedir. (6.16), (6.15) denklemi için bir çözüm ise

$$r(u, v) = (u \sin \alpha, u \cos \alpha \cos v + \gamma_1(v), u \cos \alpha \sin v + \gamma_2(v)) \quad (6.17)$$

M nin bir parametrizasyonudur. Burada

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \cos \alpha \left( \int_0^v \sinh \tau \Gamma(\tau) d\tau, \int_0^v \cosh \tau \Gamma(\tau) d\tau \right)$$

dır. Eğer (6.16), (6.15) denkleminin bir çözümü ise

$$r(u, v) = (u \sin \alpha, u \cos \alpha \cosh \mu + \sinh \mu \Gamma(v), -u \cos \alpha \sinh \mu - \cosh \mu \Gamma(v))$$

elde edilir. Lorentz transformasyonu yardımı ile

$$r(u, v) = (u \cos \alpha, -\Gamma(v), u \sin \alpha)$$

olur. Bu ise

$$\sin \alpha x + \cos \alpha z = 0 \quad (6.18)$$

Lorentz düzlemi için bir parametrizasyonudur.

**Özel Durum :**

1) Eğer  $\alpha = 0$  ise  $k = N$  dir. Böylece  $M$ ,  $(y,z)$  -düzlemine paralel bir Lorentz düzlemidir.

2)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ise o zaman  $k$ ,  $M$  ye teğettir. Yani

$$r(u, v) = (u, \gamma_1(v), \gamma_2(v)) \quad (6.19)$$

olur ki burada  $\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) \in R_1^2$  dir. Bu durumda  $M$  silindirik bir yüzeyin bir parçasıdır. Sonuç olarak (6.12), (6.13), (6.17), (6.18) ve (6.19) ifadeleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teoremi verilebilir.

**Teorem 6.5:** Her  $M$  sabit spacelike doğrultulu timelike sabit açılı yüzey aşağıdaki yüzeylere eşdeğerdir [23].

i)  $r(u, v) = (-u \sinh \alpha, u \cosh \alpha \cosh v + \gamma_1(v), u \cosh \alpha \sinh v + \gamma_2(v))$

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \cosh \alpha \left( \int_0^v \sinh \tau \Gamma(\tau) d\tau, \int_0^v \cosh \tau \Gamma(\tau) d\tau \right)$$

ii)  $r(u, v) = (u \sin \alpha, u \cos \alpha \cosh v + \gamma_1(v), u \cos \alpha \sinh v + \gamma_2(v))$

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \cos \alpha \left( \int_0^v \sinh \tau \Gamma(\tau) d\tau, \int_0^v \cosh \tau \Gamma(\tau) d\tau \right)$$

iii)  $\sinh \alpha x + \cosh \alpha z = 0$

veya

$$\sin \alpha x - \cos \alpha z = 0$$

denklemleriyle verilen bir Lorentz düzlemi

iv)  $(y, z)$  -düzlemi paralel bir Lorentz düzlemi

v) Silindirik yüzeyin bir parçası.

## 6.1. Sabit Spacelike Doğrultulu Spacelike Sabit Açılı Yüzeyler

M bir spacelike yüzey olsun .  $\alpha$  da sabit spacelike k doğrultusu ile  $N = (n_1, n_2, n_3)$  birim normalini arasındaki sabit açı olsun. Genelliği kaybetmeden sabit doğrultu birinci reel eksen olarak alınabilir.  $\alpha$  açısı için bir durum söz konusudur. Yani

$$g(N, k) = \sinh\alpha$$

olmasıdır. Şimdi bu durumu inceleyelim :

k spacelike bir birim vektör olduğundan M üzerindeki  $e_1$  spacelike vektör alanı için

$$k = \cosh\alpha e_1 + \sinh\alpha N \quad (6.1.1)$$

yazılabilir.

**Yardımcı teorem (6.1.1) :**  $e_2, e_1'$  e ortogonal olan M üzerinde bir birim vektör alanı olsun.  $\chi(M)$  in  $\{e_1, e_2\}$  ortonormal bazı için

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda e_2, \quad \bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \tanh\alpha e_2, \quad \lambda = \lambda(u, v)$$

$$\bar{D}_{e_1} N = \bar{D}_{e_1} e_1 = \bar{D}_{e_1} e_2 = 0$$

dir [22].

**İspat :** (6.1.1) eşitliğine  $\bar{D}_{e_2}$  uygulanırsa,

$$\bar{D}_{e_2} k = \cosh\alpha \bar{D}_{e_2} e_1 + \sinh\alpha \bar{D}_{e_2} N \quad (6.1.2)$$

elde edilir.

$$e_2[g(N, e_1)] = 0 \text{ olduğundan}$$

$$g(\bar{D}_{e_2} N, e_1) + g(N, \bar{D}_{e_2} e_1) \quad (6.1.3)$$

olur , buradan  $e_2[g(N, N)] = 0$  olduğundan  $\bar{D}_{e_2} \in \lambda(M)$  olduğu görülür. Böylece

$$\bar{D}_{e_2} N = \lambda_1 e_1 + \lambda e_2 \quad (6.1.4)$$

elde edilir.

(6.1.2) ve (6.1.4) den

$$\bar{D}_{e_2} e_1 = -\tanh\alpha(\lambda_1 e_1 + \lambda e_2) \quad (6.1.5)$$

elde ederiz.  $\alpha = 0$  olması hali daha sonra incelenecektir.

(6.1.3) eşitliğinden  $\bar{D}_{e_2} N = \lambda e_2$  ve  $\bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \tanh\alpha e_2$  olduğu kolayca görülür.

(6.1.1) eşitliğine  $\bar{D}_{e_1}$  uygulanırsa

$$\bar{D}_{e_1} k = \cosh\alpha \bar{D}_{e_1} e_1 + \sinh\alpha \bar{D}_{e_1} N \quad (6.1.6)$$

elde edilir.  $e_1[g(N, N)] = 0$  olduğundan

$$\bar{D}_{e_1} N = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad (6.1.7)$$

yazılabilir . (6.1.6) , (6.1.7) ve  $e_1[g(e_1, e_1)] = 0$  dan

$$\bar{D}_{e_1} e_1 = -\mu_2 \tanh \alpha e_2 \quad (6.1.8)$$

bulunur.

M nin S şekil operatörü simetrik olduğu için  $g(S(e_1), e_2) = g(e_1, S(e_2))$ ,  $\mu_2 = \lambda_1 = 0$  olduğu görülür. Buradan  $\bar{D}_{e_1} N = \bar{D}_{e_1} e_1 = 0$  elde edilir.  $\mathbb{R}_1^3$  ün  $\{e_1, e_2, N\}$  bazına göre  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\bar{D}_{e_2} e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 N$  şeklinde yazılabilir.

Basit hesaplamalar ile  $\bar{D}_{e_1} e_2 = 0$  bulunur.

Şimdi aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 6.1.2:**  $\bar{D}_{e_1} e_1 = \bar{D}_{e_1} e_2 = 0$  ,  $\bar{D}_{e_2} e_1 = -\lambda \tanh \alpha e_2$  ,  $\bar{D}_{e_2} e_2 = \lambda \tanh \alpha e_1$  dir [22].

M spacelike yüzeyi

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

olarak ifade edilebilir.

$\beta: \mu \rightarrow \mathbb{R}$  bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere biz  $r_u = e_1$  ,

$r_v = \beta(u, v) e_2$  kabul edilebilir.

Sonuç 6.2.2 den

$$r_{uv} = 0 , \quad r_{vu} = \beta_u \frac{1}{\beta} r_v , \quad r_{uv} = -\lambda \tanh \alpha r_v$$

ve

$$r_{vv} = \lambda \beta^2 \tanh \alpha r_u + \frac{1}{\beta} \beta_v r_v + \lambda \beta^2 N$$

elde edilir.

$r_{uv} = r_{vu}$  ve  $N_{uv} = N_{vu}$  olduğundan

$$\beta_u + \lambda \beta \tanh \alpha = 0, \lambda_u - \lambda^2 \tanh \alpha = 0 \quad (6.1.9)$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Bu denklem çözülürse

$$\lambda(u, v) = -\frac{\coth \alpha}{u + \Gamma(v)}, \quad \beta(u, v) = \varphi(v)(u + \Gamma(v)) \quad (6.1.10)$$

veya

$$\lambda(u, v) = 0, \quad \beta(u, v) = \beta(v) \quad (6.1.11)$$

bulunur.

Şimdi M için bir sınıflandırma verilebilir. (6.1.10), (6.1.9) denklemi için bir çözümü olsun.

$g(r_u, k) = \cosh \alpha$  ve  $g(r_v, k) = 0$  olduğundan

$$r(u, v) = (u \cosh \alpha, h(u, v))$$

elde edilir. Burada  $h(u, v) \in \mathbb{R}_1^2$  dir.  $g(r_u, r_u) = 1$  olduğundan

$$g(h_u, h_u) = y_u^2 - z_u^2 = -\sinh^2 \alpha$$

yazılabilir. Böylece

$$h_u = (\sinh \alpha f_1(v), \sinh f_2(v))$$

elde edilir ki burada  $f(v) = (f_1(v), f_2(v)) \in \mathbb{R}_1^2$  ve  $\|f(v)\| = 1$  dir. Dolayısıyla

$$r(u, v) = (u \cosh \alpha, u \sinh \alpha f_1(v) + \gamma_1(v), u \sinh \alpha f_2(v) + \gamma_2(v))$$

elde edilir.  $r_{uv} = r_{vu}$  olduğundan

$$\frac{d\gamma_1}{dv} = \sinh \alpha \frac{df_1}{dv} \Gamma(v)$$

$$\frac{d\gamma_2}{dv} = \sinh \alpha \frac{df_2}{dv} \Gamma(v)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Genelliği bozmaksızın eğer  $f(v) = (\cosh v, \sinh v)$  alınırsa

$$r(u, v) = (u \cosh \alpha, u \sinh \alpha \cosh v + \gamma_1(v), u \sinh \alpha \sinh v + \gamma_2(v)) \quad (6.1.12)$$

bulunur ki burada

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \sinh \alpha \left( \int_0^v \sinh \tau \Gamma(\tau) d\tau, \int_0^v \cosh \tau \Gamma(\tau) d\tau \right)$$

dir.

Şimdi de (6.1.11), (6.1.9) denklemleri için bir çözüm olsun.  $\beta_u = 0$  olduğundan  $r_{vu} = 0$  olur.

$r_{uu} = 0$  ve  $r_{uv} = 0$  olduğundan  $h_{uu} = 0$  ve  $h_{uv} = 0$  olduğu söylenebilir. Bu ise  $h_u$  nun  $\mathbb{R}_1^2$  de sabit bir vektör olması demektir.

$\mu$  bir sabit olacak şekilde  $h_u = (\sinh \alpha \sinh \mu, -\sinh \alpha \cosh \mu)$  olduğunu kabul edelim.

Böylece ;

$$h(u, v) = (u \sinh \alpha \sinh \mu + \gamma_1(v), -u \sinh \alpha \cosh \mu + \gamma_2(v))$$

yazılabilir.

$r_u$  ve  $r_v$  ortogonal olduğundan;

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = (\cosh \mu \Gamma(v), -\sinh \mu \Gamma(v))$$

elde edilir. Bu son denklem

$$r(u, v) = (u \cosh \alpha, u \sinh \alpha \sinh \mu + \cosh \mu \Gamma(v), -u \sinh \alpha \cosh \mu - \sinh \mu \Gamma(v))$$

olduğunu verir.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cosh \mu & \sinh \mu \\ 0 & \sinh \mu & \cosh \mu \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lorentz transformasyonu formu uygulanarak;

$$r(u, v) = (\Gamma(v), -\sinh \alpha, \cosh \alpha)$$

elde edilir.

Bu ifade de

$$\cos \alpha y + \sinh \alpha z = 0$$

Lorentz düzlemi için bir parametrizasyonudur.

**Özel durum** :Eğer  $\alpha = 0$  ise o zaman  $k = e_1$  dir. Böylece  $k$ ,  $M$  ye teğettir.

Burada ;

$$r(u, v) = (u, \cosh \mu \Gamma(v), \sinh \mu \Gamma(v))$$

olarak yazılır. Bu durumda  $M$  silindirik yüzeyin bir kısmıdır.

Sonuç olarak aşağıdaki teoremi verilebilir .

**Teorem 6.1.3:** Sabit spacelike doğrultulu her spacelike sabit açılı  $M$  yüzeyi aşağıdaki yüzeylere eşdeğerdir [22].

(i)  $r(u, v) = (u \cosh \alpha, u \sinh \alpha \cosh v + \gamma_1(v), u \sinh \alpha \sinh v + \gamma_2(v))$ ,  
burada

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = \sinh \alpha \left( \int_0^v \sinh \tau \Gamma(\tau) d\tau, \int_0^v \cosh \tau \Gamma(\tau) d\tau \right),$$

dir.

(ii)  $r(u, v) = (u, \gamma_1(v), \gamma_2(v))$  silindirik yüzeyin bir parçasıdır ki burada

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v)) = (\cos \mu \Gamma(v), -\sinh \mu \Gamma(v)),$$

dir.

(iii)  $\cosh \alpha y + \sinh \alpha z = 0$  denklemine sahip bir Lorentz düzlemi.

(\*) denklemden  $M$  spacelike sabit açılı yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H = -\frac{1}{2} \varepsilon \lambda$$

dir ki burada  $\varepsilon = g(k, k)$  dir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 6.1.4:** Minimal spacelike sabit açılı yüzey yukarıdaki düzlemlere karşılık gelir.

**Örnek 6.1.1:**

a) (6.2.12) de  $\Gamma(v) = 1$  ve  $\alpha = 2$  alınırsa

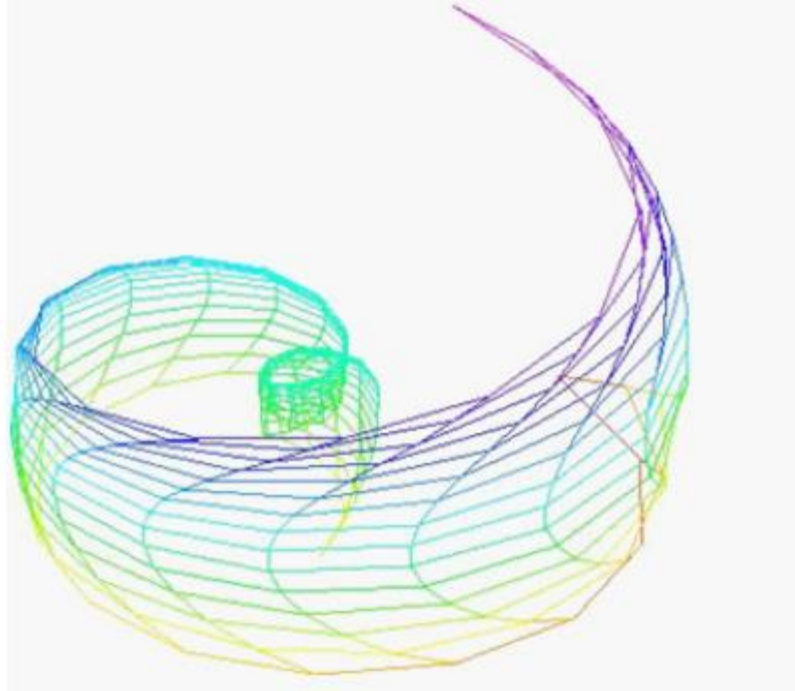
$$M: r(u, v) = (u \cosh(2), \cosh(v) (u \sinh(2) + 1) - 1, \sinh(v) (u \sinh(2) + 1))$$

(Şekil 6.1)

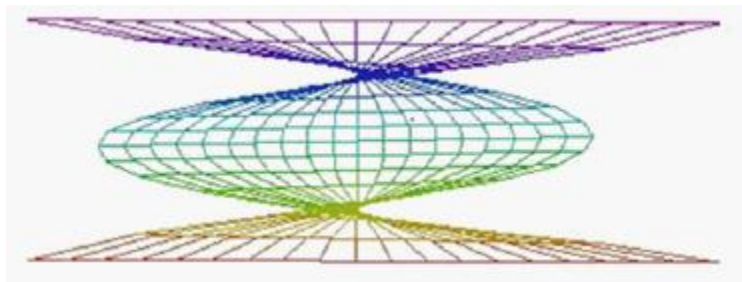
parametrizasyonu elde edilir.

b) (6.2.12) de  $\Gamma(v) = v$  ve  $\alpha = 2$

$$M: r(u, v) = \begin{pmatrix} u \cosh(2), \cosh(v) (u \sinh(2) - 1) + 1 + v \sinh(v), \\ \sinh(v) (u \sinh(2) - 1 + v \cosh(v)) \end{pmatrix} \quad (\text{Şekil 6.2})$$



**Şekil 6.1.** Sabit spacelike doğrultulu timelike sabit açılı yüzey



**Şekil 6.2.** Sabit spacelike doğrultulu spacelike sabit açılı yüzey

## 7. SONUÇLAR

Sırasıyla  $S^2 \times R$ ,  $H^2 \times R$  ve  $E^3$  uzayları için elde edilen aşağıdaki sonuçları karşılaştıralım. Böylece aşağıdaki ifadeleri verebiliriz.  $M$  nin sabit açılı bir yüzey olması için gerek yeter ve şart bu yüzeyin aşağıdaki şekilde bir immersiyonu ile verilmesidir.

$$1) \quad r: M \rightarrow S^2 \times R$$

$$(u, v) \rightarrow (\cos(u\cos\theta)f(v) + \sin(u\cos\theta)f(v) \times f'(v), u\sin\theta)$$

Burada  $f: I \rightarrow S^2$  birim hızlı bir eğridir.

$S^2$  birim küresinde bir ve "  $\times$  ",  $R^3$  deki vektörel çarpımdır.

$$2) \quad r: M \rightarrow \mathcal{H} \times R$$

$$(u, v) \rightarrow (\cosh(u\cos\theta)f(v) + \sinh(u\cos\theta)f(v) \boxtimes f'(v), u\sin\theta)$$

Burada  $f: I \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^2$  hiperboloid modeli üzerindeki birim hızlı bir eğridir ve buradaki "  $\boxtimes$  " da  $R_1^3$ , 3-boyutlu Lorentz uzayında vektörel çarpımdır.

$$3) \quad r: M \rightarrow E^3,$$

$$(u, v) \rightarrow (\cos\theta f(v) + \gamma(v), u\sin\theta)$$

Burada  $f: I \rightarrow R^2$ ,  $S^1$  birim çemberinin bir parametrizasyonudur veya  $f$  bir birim sabit vektördür ki  $\gamma'(v) \perp f(v)$  dir.

**Hatırlatma 1:** Bu durumların hepsinde  $R$  boyunca 3. bileşen her zaman

$$z(u, v) = u\sin\theta \text{ dir [22].}$$

**Hatırlatma 2:**  $S^2 \times R$  deki  $M$  yüzeyi  $K = \cos^2\theta > 0$  sabit Gauss eğriliğine

sahip bir yüzeydir.  $M$  yüzeyi  $\mathcal{H} \times R$  de alınırsa  $K = -\cos^2\theta < 0$  olur.  $E^3$  de ise  $K = 0$  olacaktır [22].

## KAYNAKLAR

- [1] Bektaş, M. 1995 Yüksek Lisans Tezi Fırat Üniversitesi Elazığ
- [2] Ekmekçi, N. 1991 Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
- [3] Ergin, A.A. 1989 Doktora Tezi, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
- [4] Ergüt, M. , Aydın, A.P.(1988), Bildik, N. The Geometry of The Canonical Relative System and One-Parameter Motions In 2-Dimensional Lorentzian Space, The Journal of Fırat Univ. ,3(1), pp 113-122.
- [5] Cermelli, P. and Di Scala, A. J.(2007),: Constant-angle surfaces in liquid crystals, Philosophical Magazine, 87 (12), 1871- 1888 .
- [6] Dillen, F. and Fastenakels, J. and Van der Veken, J. and Vrancken, L.(2007).: Constant Angle Surfaces in  $S^2 \times R$  , Monats. Math. 152 (2), 89–96 .
- [7] Dillen, F. and Munteanu, M.I.(2009).: Constant Angle Surfaces in  $H^2 \times R$  , arXiv:0705.3744v1 [math.DG]. (2007) to appear in Bull. Braz. Math. Soc., .
- [8] Dillen, F. and Munteanu, M.I.(2007).: Surfaces in  $H^+ \times R$  , Proc. of the conference Pure and Applied Differential Geometry, PADGE, Brussels 2007, (Eds. F. Dillen and I. van de Woestyne), 185 - 193 .
- [9] Graves, L.K. (1979), Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces, Transactions of The Ame. Math. Soc. , V. 252
- [10] Hacısalıhoğlu, H.H.(1983).:Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları
- [11] Hacısalıhoğlu, H.H. (1993).: Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi. No:2
- [12] Howard, R.(2011).: The geometry of shadow boundaries on surfaces in space, preprint.
- [13] Kamishima, Y. (1993), Completeness of Lorentz Manifolds of Constant Curvature Admitting Killing Vector Fields. J. Differential Geometry, 37 , pp 569-601
- [14] Magid, M.A. (1991), Timelike Surfaces In Lorentz 3-Space With Prescribed Mean Curvature and Gauss Map ,Hokkaido Mathematical Journal V.19 pp 447-464
- [15] Meeks, W. and Rosenberg, H.(2004).: Stable minimal surfaces in  $M^2 \times R$  , J. Differential Geometry, 68 (3) , 515-534.

- [16] O'neil , B. (1983), Semi Riemann Geometri , Academic Press Newyork
- [17] Prinsen, P. and van der Schoot, P.(2003): Shape and director-field transformations of tactoids, Phys. Rev. E, 68, 021701.1-021701.11 .
- [18] Prinsen, P. and van der Schoot, P.(2004).: Continuous director-field transformations of nematic tactoids, Eur. Phys. J. E, 13, 35-41 .
- [19] Prinsen, P. and van der Schoot, P.(2004).: Parity breaking in nematic tactoids, J. Phys. Cond. Matter, 16, 8835-8850 .
- [20] Rosenberg, H. (2002).: Minimal surfaces in  $M^2 \times R$  , Illinois J. Math., 46 (4), 1177-1195.
- [21] Virga, E.G. (1989).: Drops of nematic liquid crystals, Arch. Rat. Mech. Anal., 107, 371-390.
- [22] Munteanu, M.I. and Nistor, A.I. (2009).: A New Approach on Constant Angle Surfaces in  $E^3$ , Turk J. Math., 33, 169-178.
- [23] Güler, F. Şafak, G. And Kasap, E.(2011).:Timelike Constant Angle Surfaces in Minkowski Space  $R_1^3$ , Int.J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, no.44,2189-2200.

## **ÖZGEÇMİŞ**

1988 Elazığ doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimime başladım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.

**Leyla DİK**