GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

BENARD PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Sefa ALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2014

Sefa ALAN tarafından hazırlanan "BENARD PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Meryem KAYA

Uygulamalı Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum ..……………………

Başkan : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Uygulamalı Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Üye : Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Uygulamalı Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 11/7/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…………………….…….

Sefa ALAN

11/7/2014

BENARD PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sefa ALAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2014

ÖZET

Bu tezde Benard Problemi ele alınmıştır. Problemin çözümlerinin varlık tekliği incelenmiştir. Ayrıca problemde yer alan sistemin yutan kümesinin, yerel olmayan çekicilerinin varlığı ispatlanmıştır. Çalışmada elde edilen sonuçlar kaynaklarda yer alan bilinen sonuçlar yardımıyla oluşturulmuştur.

Bilim Kodu	:	204.1.138
Anahtar Kelimeler	:	Benard Problem, Yutan Küme, Yerel Olmayan Çekici
Sayfa Adedi	:	45
Danışman	:	Doç. Dr. Meryem KAYA

THE PROPERTIES AND THE SOLUTION OF THE BENARD PROBLEM

(M. Sc. Thesis)

Sefa ALAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2014

ABSTRACT

In this thesis, namely the Benard Problem is taken into consideration. The existence and uniqueness of the problem are investigated. Moreover, the existence of the absorbing set of the system considered in the problem is proven, as well as the existence of the global attrator is investigated. The results, which is obtained in this study, are constituted.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Benard Problem, Absorbing Set, Global Attractor

Page Number : 45

Supervisor : Assoc. Prof.Dr. Meryem KAYA

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni aydınlatan ve bana yön veren, kıymetli tecrübe ve bilgilerinden faydalandığım hocam Doç. Dr. Meryem KAYA'ya, ayrıca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli anneme, arkadaşım Fatih SARIKAYA, Emel BOLAT ve Özge KAZAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Doğada, hidrodinamikte ve pek çok bilim dalında, akışkanların hareketleriyle ilgili karşılaşılan olayları açıklamak için bu olayları ifade eden denklemlerle ilgili problemlerin çözümleri ve özellikleri incelenmektedir. Akış hareketleriyle ilgili örneğin atmosferik hareketlerde, okyanusta suyun hareketlerinde, endüstride; gaz yoğunluğunun dağılımı gibi, çevrenin inşasında; doğal havalandırma, merkezi ısıtma gibi olayların incelenmesinde karşılaşılmaktadır.

Benard problemi düşey doğrultuda alttan ısıtılan akışların çeşitli hareketleriyle ilgilidir. Daha fazla ayrıntı için [4] kaynağına bakılabilir.

Bir cismin $0 < x_2 < 1$ bölgesinde $x_2 = 0$ ve $x_2 = 1$ katı yüzeyleri ile sınırlı bir tabakada olan homojen sıkıştırılamaz akışla dolu olduğunu düşünelim.

T_0 ve T_1 sabitler olmak üzere, akış tabakası alttan ısıtılsın, alt tabakadaki sıcaklık T_0, üst tabakada ise $T_1 < T_0$ olsun. $u = (u_1, u_2)$ akışın hızını, p basıncını, T sıcaklığını göstermektedir.

Bu tezde; Benard Problemini 2-boyutlu uzayda ele alacağız [6, 24].
Problemde yer alan sistem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \upsilon \Delta u + \nabla p = \mathrm{e_n}(T + T_1) \ , \qquad \Omega \times (0, \tau) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u.\nabla)T - \kappa \Delta T = 0 \ , \qquad \Omega \times (0, \tau) \tag{1.2}$$

$$\nabla . u = 0 \ , \qquad \Omega \times (0, \tau) \tag{1.3}$$

denklemlerinden oluşur. Burada $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\tau > 0$ dır.

(1.1) - (1.3) denklemleri aşağıdaki sınır koşullarıyla birlikte düşünülecektir.

$x_2 = 0$ ve $x_2 = 1$ ‘ de u=0 (1.4)

$x_2 = 0$ ‘da $T = T_o$ ve $x_2 = 1$ ‘ de $T = T_1 = T_0 - 1$, ayrıca (1.5)

x_1 yönünde periyodik sınır koşulları sağlansın, yani

p,u,T, $\partial u / \partial x_1$, $\partial T / \partial x_1$ ’ ler x_1 yönünde periyodik fonksiyonlar olsun, (1.6)

Genel bir φ fonksiyonu için peryodiklik ,

$$\varphi\big|_{x_1=0} = \varphi\big|_{x_1=1} \quad \text{(n=2)} \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} ,$$

$$\nabla . u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad ,$$

$$(u.\nabla)u = (u_i \partial_i)u_j = \begin{pmatrix} u_1\partial_1 u_1 + u_2\partial_2 u_1 \\ u_1\partial_1 u_2 + u_2\partial_2 u_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{1.8}$$

dır.

(1.1) denkleminde

$$\theta = T + T_0 - x_2(T_1 - T_0) = T + T_0 + x_2 \tag{1.9}$$

dönüşümü uygulanırsa

p yerine

$$p - (x_2 + x_2^2/2)(T_0 - T_1) = p - (x_2 + x_2^2/2) \tag{1.10}$$

alınırsa, (1.1)-(1.3) denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u \text{ - } \upsilon\Delta u + \nabla p = e_2\theta \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u . \nabla)\theta \text{ - } u_2 \text{ - } \kappa \, \Delta\theta = 0 \tag{1.12}$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklemler için sınır koşullarını yeniden düzenlersek,

$x_2=0$ ve $x_2=1$ ' de $u=0$, $\theta=0$ ' dır. (1.13)

Bunun yanında (1.4),(1.6) koşulları, T yerine ϑ alınarak sağlanacaktır. (1.14)

Ayrıca $u(x,0) = u_0$, $\theta(x,0) = \theta_0$ (1.15)

başlangıç koşulları göz önüne alınacaktır. Yukarıda tanımlanan problemin çözümlerinin varlık tekliği incelenecek daha sonra yutan kümesinin varlığı yani (1.11)-(1.15) probleminde yer alan sistemin dissipatif olduğu gösterilecektir. Daha sonra bu sistemin yerel olmayan çekicisinin varlığı gösterilecektir.

2.ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmada kullanılacak temel kavramlar, lemmalar, teoremler, çeşitli notasyon ve eşitsizlikler verilecektir.

2.1.Temel Tanımlar

Tanım

X bir vektör uzayı olmak üzere $X \times X$ üzerinde tanımlı $(.,.)_X$ her $x, y \in X$ ve $a, b \in C$ için

i) $(x, y)_X = \overline{(y, x)_X}$,

ii) $(ax + by, z)_X = a(x, z)_X + b(y, z)_X$,

iii) $(x, x)_X = 0$ ancak ve ancak $x = 0$,

iv) $(x, x)_X > 0$, $u \neq 0$ için

koşullarını sağlayacak şekilde bir dönüşüm ise X uzayında bir iç çarpım olarak adlandırılır [21].

Tanım

X bir vektör uzayı ve $\|.\|$ X üzerinde $\sqrt{(x, x)_x} = \|x\|_x$ ile tanımlı bir norm olmak üzere iç çarpımdan doğan bu norma göre X uzayı tam ise Hilbert uzayı adını alır [1].

Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere K kümesi

$K = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$

İle tanımlansın. Eğer K, Ω da kompakt ise K ya u nun kompakt desteği denir ve suppu ile gösterilir [12].

Tanım

X normlu uzayının duali olan X' uzayındaki bir $\{\phi_n\}_{n\in N}$ dizisi $\forall x\in X$ ve $n\to\infty$ için $\phi_n(x)\to\phi(x)$ oluyorsa ϕ_n dizisi ϕ ye zayıf yıldız yakınsaktır denir ve $\phi_n \xrightarrow{W^*} \phi$ şeklinde gösterilir [5].

Tanım

X normlu uzayındaki $\{x_n\}_{n\in N}$ dizisi $\forall\phi\in X'$ için $n\to\infty$ iken $\phi(x_n)\to\phi(x)$ oluyorsa x_n dizisi $x\in X$ e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{W} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir [5].

Tanım

X normlu uzayındaki $\{x_n\}_{n\in N}$ dizisi $n\to\infty$ için $\|x_n - x\|\to 0$ oluyorsa x_n dizisi $x\in X$ e güçlü yakınsaktır denir ve $x_n\to x$ şeklinde gösterilir [5].

Tanım

X ve Y, K cismi üzerinde Banach uzayları olsun.

a) Eğer $x\in X$ için $\|x\|_Y \le C\|x\|_X$ eşitsizliği sağlanacak şekilde C sabiti varsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülmüştür denir.
b) Sürekli gömülmeye ek olarak X deki her sınırlı dizi Y de prekompakt ise $X\subseteq Y$ gömülmesine kompakt gömülme denir [5].

Tanım

$L^q(\Omega) = H_q(\Omega)\oplus G_q(\Omega)$

şeklinde yazılır burada

$H_q(\Omega) = \{u\in L^q(\Omega) : divu = 0, u.\eta|_{\partial\Omega} = 0\}$

$G_q(\Omega) = \{u\in L^q(\Omega) : u = \nabla p, p\in L^1_{loc}(\Omega) için \nabla p\in L^q(\Omega)\}$

dır. $P : L^2(\Omega) \to H_q(\Omega)$ ya Helmholtz-Leray projeksiyonu olarak adlandırılır [7].

2.2.Fonksiyon Uzayları

Tanım

Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı k ve k ya kadar olan mertebelerden türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir [12].

Tanım

Bir Ω bölgesi üzerinde her mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı $C^\infty(\Omega)$ ile gösterilir [12].

Tanım

Bir Ω bölgesi üzerinde her mertebeden türevleri sürekli olan ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar uzayı $C_0^\infty(\infty)$ ile gösterilir [1].

Tanım

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge, $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, α bir katlı indis olsun. Eğer $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir v fonksiyonu varsa v fanksiyonuna u nun Ω bölgesinde $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n = k.$ mertebeden zayıf türevi denir. Burada k pozitif tamsayıdır [5].

Tanım

p pozitif gerçel sayı ve Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L^p(\Omega)$ uzayı denir. Bu lineer vektör uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır [1].

<u>Tanım</u>

$p=\infty$ olmak üzere Ω da hemen hemen her yerde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

şeklinde tanımlanır [1].

<u>Tanım</u>

X Banach uzayı olmak üzere $1 \le p < \infty$ ve $-\infty < a < b < \infty$ olacak şekilde (a,b) den X e tanımlanmış olan ölçülebilir ve $\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayı $L^p((a,b);X)$ ile gösterilir ve üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır. $p=\infty$ olduğunda $L^\infty((a,b);X)$ uzayı (a,b) den X e tanımlanmış olan $ess\sup_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X < \infty$ koşulunu sağlayan ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır ve üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^\infty((a,b);X)} = ess\sup_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X$$

şeklinde verilir [25].

Tanım

X bir Banach uzayı ve $0 < T < \infty$ olsun.

(a) $C^m\left([0,T],X\right)$, m=0,1,… uzayı $u:[0,T]\to X$ uzayına tanımlı bütün sürekli fonksiyonlardan oluşur ve bu fonksiyonlar [0,*T*] aralığında m-yinci mertabeden sürekli türevlere sahiptirler ve bu uzaydaki norm

$$\|u\| \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{m} \max_{0\le t\le T} \left|u^{(i)}(t)\right|$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada sırasıyla t=0 ve t=*T* sınır noktalarında u fonksiyonları türevli olmalıdır.

(b) $1 \le p < \infty$ olmak üzere, $L_p\left(0,T;X\right)$ uzayı $u:]0,T[\to X$ ölçülebilir fonksiyonlarından oluşmaktadır. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_p \overset{def}{=} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım

$k > 0$ tamsayı, $1 \le p < \infty$ olmak üzere kendisi ve k. mertebeden tüm genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ sınıfına ait olan tüm fonksiyonlar uzayına $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı denir.

$p = 2$ ise $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$,

$p = 0$ ise $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha|\le k} \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\le k} ess\sup_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır [5].

Tanım

S(t) yarı grubu için, eğer her $B \subset V$ sınırlı kümesi için en az bir $t = t(B)$ $\forall t \geq t(B)$

$S(t)B \subset A$ olacak şekilde varsa, $A \subset V$ kümesine V'de **yutan küme** denir [19].

2.3.Kullanılan Eşitsizlikler

Young Eşitsizliği

$1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$ (a, b > 0 , $\varepsilon > 0$)

$C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$

eşitsizliği sağlanır ya da özel olarak

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (a, b > 0)

biçimindedir[5, 24].

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

H bir reel lineer uzay

$(.,.): H \times H \to \mathbb{R}$ iç çarpım, $u \in H$ ve $\|u\| := (u,u)^{1/2}$ iç çarpıma karşılık gelen norm olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliği $u, v \in H$ için

$|(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$

biçiminde ifade edilir [5].

Hölder Eşitsizliği

$1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L_p(\Omega), v \in L_q(\Omega)$ ise

$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$

olur [5].

Ladyzhenskaya Eşitsizliği

$\|u\|_{L^4} \leq c|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}$, $\forall u \in H^1$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir c sabiti vardır.

Uniform Gronwall Lemma

g,h,y fonksiyonları $]t_0,+\infty[$ aralığında üç pozitif lokal integrallenebilir fonksiyonlar ve y' $]t_0,+\infty[$ aralığında lokal integrallenebilen ve ayrıca

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h \ , \ \ \forall\ t \geq t_0 \tag{2.1}$$

şartını sağlayan bir fonksiyon,

$t \geq t_0$ için

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1\ , \ \ \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2\ , \ \ \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3 \tag{2.2}$$

olsun. Bu durumda

$\forall\ t \geq t_0$ için $y(t+r) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\exp(a_1)$ eşitsizliği sağlanır,

burada r , a_1 , a_2 , a_3 pozitif sabitlerdir. (2.3)

İspat: $t_0 \leq t \leq s \leq t+r$ olsun. (2.1) eşitsizliğini $\exp\left(-\int_t^s g(\tau)\,d\tau\right)$ ile çarpalım ve

$\frac{d}{ds}\left(y(s)\exp\left(-\int_s^t g(\tau)\,d\tau\right)\right) \leq h(s)\exp\left(-\int_s^t g(\tau)\,d\tau\right) \leq h(s)$ eşitsizliğini elde edelim.

Eşitsizliğin her iki yanını s'den t+r'ye integralleyelim,

$$y(t+r) \leq y(s)\exp\left(\int_s^{t+r} g(\tau)\,d\tau\right) + \left(\int_s^{t+r} h(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_s^{t+r} g(\tau)\,d\tau\right)$$

$$y(t+r) \leq \left(y(s) + a_2\right)\exp(a_1)$$

son eşitsizlikte s üzerinden t'den t+r'ye integral alırsak (2.3) eşitsizliğine ulaşırız[15].

2.4.İlgili Teorem ve Önermeler

Önerme [25]

m=0,1,... ve $1 \le p < \infty$ X,Y Banach uzayları olsun. Bu durumda

(a) $C^m([0,T],X)$ uzayı

$$\|u\| = \sum_{i=0}^{m} \max_{0 \le t \le T} \left|u^{(i)}(t)\right|$$

normuyla Banach uzayıdır.

(b) $C([0,T],X)$, $L^p(0,T;X)$ uzayında yoğundur ve $C([0,T],X) \subseteq L^p(0,T;X)$ süreklidir.

(c) X ayrılabilir bir uzay ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $L^p(0,T;X)$ uzayı da ayrılabilirdir.

(d) $1 \le q \le r \le \infty$, $X \subseteq Y$ sürekli gömülme ise

$L^r(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;Y)$ de aynı zamanda süreklidir.

Önerme

$$u \in L^2\left(0,T;H^{k+1}(\Omega)\right) \text{ ve } \frac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;H^{k-1}(\Omega)\right)$$

ise $u \in C\left([0,T];H^k(\Omega)\right)$ dır [19, 22] .

Önerme

X Banach uzayı, $1 < p < \infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. X', X uzayının duali olmak üzere

$L^p(a,b;X)$ uzayının dual uzayı $L^q(a,b;X')$ dır[5, 25].

Teorem (Alaoğlu Teoremi) [19]

X bir ayrılabilir Banach uzay ve $\{f_n\}$ X^* da sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $\{f_n\}$ dizisinin zayıf yıldız yakınsak bir alt dizisi vardır.

<u>Sonuç(Alaoğlu Teoremi Sonucu)</u>

X yansımalı bir Banach uzayı ve $\{x_n\}$ X de sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ X de yakınsak bir alt diziye sahiptir.

3.BENARD PROBLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIK TEKLİĞİ

Benard problemi çeşitli araştırmacılar tarafından çeşitli sınır koşulları altında incelenmiştir [2, 3, 10, 16].

Bu kısımda (1.11)-(1.14) ile verilen Benard probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği aşağıda belirtilen sınır koşulları altında incelenmiştir. Öncelikle problemde ele alınan uzaylar verilecektir [6, 24].

3.1. Fonksiyon Uzayları

Bu bölümde öncelikle kullanılacak uzaylar ve notasyonlar verilecektir.

$\Omega=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ bir bölge olsun.

$$V_2=\left\{\theta\in H^1(\Omega): i=1,2 \qquad \theta\big|_{x_i=0}=\theta\big|_{x_i=1}\right\} \tag{3.1}$$

$$V_1=\left\{u\in V_2^n, div.u=0\right\}'dır. \tag{3.2}$$

Bu uzay üzerindeki iç çarpım ve norm

$$((u,v))=\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \ , \ \ \|u\|=\left\{((u,u))\right\}^{1/2} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanır. V_2 uzayı tanımlanan bu iç çarpım ve norma göre bir Hilbert uzaydır. Aynı notasyonla *V* ve *V₁* deki $((.,.))$ iç çarpım notasyonunu ve $\|.\|$ ile de V_1, *V*'deki normu gösteriyoruz.

$$H_2=L^2(\Omega) \tag{3.4}$$

$$H_1=\left\{u=(u_1,u_2)\in\left(L^2(\Omega)\right)^2, \ \ divu=0 \ \ , \ \ u_2\big|_{x_2=0}=u_2\big|_{x_2=1}=0, u_1\big|_{x_1=0}=u_1\big|_{x_1=1}\right\} \tag{3.5}$$

olmak üzere üzerindeki iç çarpım ve norm

$$(u,\theta)=\int_\Omega u.\theta dx \ , \ |u|=\left\{(u,u)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanır.

H= $H_1\times H_2$, $(.,.)$ ve $|.|$ notasyonları ile aynı zamanda *H* ve H_1 üzerindeki skaler çarpımı ve normu göstereceğiz. Burada

A_i, i=1,2 'ler sınırsız lineer operatör olmak üzere.

$A_i : D(A_i) \rightarrow H_i$

$$(A_i u, \theta) = ((u, \theta)) \quad , \quad \forall u, \theta \in D(A_i) \text{ (i=1,2)} \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlansın.

$D(A_1) = V_1 \cap H^2(\Omega)^n$, $D(A_2) = V_1 \cap H^2(\Omega)$ olsun.

$D(A) = D(A_1) \times D(A_2)$ dir.

A_i'ler self-adjoint, pozitif ve bu operatörlerin tersi kompakt, self-adjoint lineer operatördür.

Ayrıca B_1 ve B_2 bilineer operatörleri

$B_1 : D(A_1) \times D(A_2) \rightarrow H_1$, $B_2 : D(A_1) \times D(A_2) \rightarrow H_2$ olmak üzere

$$(B_1(u,\theta)w) = ((u.\nabla)\theta, w) = \int_\Omega [(u.\nabla)\theta] w dx \quad , \quad \forall u, \theta, w \in D(A_1) \tag{3.8}$$

$$(B_2(u,\varphi)\psi) = \int_\Omega [(u.\nabla)\varphi]\psi dx \quad , \quad \forall u \in D(A_1) \ , \ \forall \varphi, \psi \in D(A_2) \tag{3.9}$$

biçiminde tanımlansın. Bu notasyonlarla birlikte, (1.11)-(1.12)'denklemleri,

$$\frac{du}{dt} + \upsilon A_1 u + P_1 B_1(u,u) - e_2 \theta = 0 \tag{3.10}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \kappa A_2 \theta + P_2 B_2(u,\theta) - u_2 = 0 \tag{3.11}$$

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad , \qquad u(0) = u_o \tag{3.12}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada P_i $L^2(\Omega)$ dan H_i (i=1,2) ye dik izdüşüm operatörüdür. φ ve ψ test fonksiyonları olmak üzere (3.10)ve (3.11) denklemlerini sırasıyla bu test fonksiyonları ile skaler çarpar Ω üzerinden integral alırsak

$$\frac{d}{dt}(u,\varphi) + (\upsilon A_1 u, \varphi) + b_1(u,u,\varphi) = (e_2 \vartheta, \varphi) \tag{3.13}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta,\psi) + (\upsilon A_2 \theta, \psi) + b_2(u,\theta,\psi) = (u_2, \psi) \tag{3.14}$$

denklemleri elde edilir.

Burada sırasıyla b_1 ve b_2 üçlineer formları

$$b_1(u,v,w) = \sum_{i,j,=1}^{2} \int_\Omega u_i \partial_i v_j w_j \ , \qquad u,v,w \in V_1$$

$$b_2(x,y,z)=\sum_{i,j,=1}^{2}\int_{\Omega} x_i\partial_i yz\,, \qquad x,y,z\in V_2$$

biçiminde tanımlanır. Üçlineer formun bazı özellikleri aşağıda verilecektir.

Üçlineer Formun Özellikleri

Önerme [24, 19]:

$u\in H$, $v,w\in V$ olsun. Bu durumda

$b(u,v,w)=-b(u,w,v)$

dır.

İspat: $b(u,v,w)=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{m} u_i(\partial_i v_j)w_j dx$

$$=-\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{m}\partial_i(u_i w_j)v_j dx$$

$$=-\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{m}(\partial_i u_i)w_j v_j+u_i(\partial_i w_j)v_j dx$$

$$=-b(u,w,v)$$

Önerme [22, 19]:

$u\in H$, $u\in V$ olsun. Bu durumda

$b(u,u,u)=0$ dır.

İspat: $b(u,u,u)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega} u_i\partial_i u_j u_j dx=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega} u_i\frac{1}{2}\partial_i(u_j)^2 dx$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\partial_i\left(u_i u_j^2\right)dx-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\partial_i u_i u_j^2 dx$$

$\nabla.u=0$ ve $u\in C_0^{\infty}(\Omega)$ olduğundan,

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega} u_i u_j^2\eta_i ds=0 \qquad (3.15)$$

dır.

Önerme [19]:

$u \in H$, $\theta \in V$ olsun. Bu durumda

$b(u,\theta,\theta)=0$ dır.

İspat: Üçlineer formun tanımından

$$b(u,\theta,\theta)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\partial_i\theta_j\theta_j dx$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\frac{1}{2}\partial_i(\theta_j)^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i\left(u_i\theta_j^2\right)dx-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i u_i\theta_j^2 dx$$

$\nabla.u=0$ ve $u\in C_0^{\infty}(\Omega)$ olduğundan

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}u_i\theta_j^2\eta_i ds=0 \tag{3.16}$$

dır.

Önerme [19]:

u periyodik fonksiyon ve $\forall u\in D(A)=H_p^2(Q)\cap V$ için.

$$b(u,u,Au)=0 \tag{3.17}$$

dır.

İspat: Periyodik durumda $Au=-\Delta u$ ve üçlineer formun tanımından

$$b(u,u,Au)=-\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\left(\partial_i u_j\right)\Delta u_j dx$$

$$=-\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\left(\partial_i u_j\right)\partial_k^2 u_j dx$$

yazılır.

Kısmi integrasyon uygulandığında,

$$=-\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k\left(u_i\partial_i u_j\partial_k u_j\right)dx+\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k\left(u_i\partial_i u_j\right)\partial_k u_j dx$$

elde edilir.

$$=-\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\partial\Omega}u_i\partial_i u_j\partial_k u_j\eta_x dx+\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_i\partial_i u_j\partial_k u_j dx+\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\partial_{ik}u_j\partial_k u_j dx$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_i\partial_i u_j\partial_k u_j dx+\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\partial_{ik}u_j\partial_k u_j dx$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}u_i\frac{1}{2}\partial_i\left(\partial_k u_j\right)^2+\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_i\partial_i u_j\partial_k u_j dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i\left(u_i\left(\partial_k u_j\right)^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i u_i\left(\partial_k u_j\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\partial\Omega}u_i\left(\partial_k u_j\right)^2\eta_i dx=0$$

dır. Burada

$$\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_i\partial_i u_j\partial_k u_j dx=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_1\partial_1 u_j\partial_k u_j+\partial_k u_2\partial_2 u_j\partial_k u_j$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_k u_1\partial_1 u_1\partial_k u_1+\partial_k u_2\partial_2 u_1\partial_k u_1+\partial_k u_1\partial_1 u_2\partial_k u_2+\partial_k u_2\partial_2 u_2\partial_k u_2$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_1 u_1\partial_1 u_1\partial_1 u_1+\partial_1 u_2\partial_2 u_1\partial_1 u_1+\partial_1 u_1\partial_1 u_2\partial_1 u_2+\partial_1 u_2\partial_2 u_2\partial_1 u_2+$$

$$+\partial_2 u_1\partial_1 u_1\partial_2 u_1+\partial_2 u_2\partial_2 u_1\partial_2 u_1+\partial_2 u_1\partial_1 u_2\partial_2 u_2+\partial_2 u_2\partial_2 u_2\partial_2 u_2$$

bu ifade düzenlendiğinde

$$=\int_{\Omega}\left(\partial_1 u_1\right)^3+\partial_1 u_2\partial_2 u_1\left(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2\right)+\left(\partial_1 u_2\right)^2\left(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2\right)+\left(\partial_2 u_1\right)^2\left(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2\right)+\left(\partial_2 u_2\right)^3 \text{elde}$$

edilir.

$$=\int_{\Omega}\left(\partial_1 u_1\right)^3+\left(\partial_2 u_2\right)^3$$

$divu=0$ olduğundan

$$=\int_{\Omega}\left(\partial_1 u_1+\partial_2 u_2\right)\left(\left(\partial_1 u_1\right)^2-\partial_1 u_1\partial_2 u_2+\left(\partial_2 u_2\right)^2\right)=0$$

dır.

3.2.Benard Probleminin Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda Benard probleminin çözümlerinin varlığı incelenecektir. Öncelikle (3.10)-(3.12) problemine karşılık gelen varyasyonel problemi elde edelim. Sırasıyla (3.10) ve

(3.11) denklemlerini ϕ ve ψ test fonksiyonlarıyla çarpalım Ω bölgesi üzerinden integral alalım. Buradan

$$\frac{d}{dt}(u,\phi)+\upsilon(\nabla u,\nabla\phi)+b_1(u,u,\phi)=(e_2\vartheta,\phi) \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta,\psi)+\kappa(\nabla\theta,\nabla\psi)+b_2(u,\theta,\psi)=(u_2,\psi) \tag{3.19}$$

denklemleri elde edilir. Süreklilikten (3.18) ve (3.19) sırasıyla $\forall v_1 \in V_1$, $\forall v_2 \in V_2$ için sağlanacaktır. Böylece problemin zayıf çözümü aşağıdaki manada sağlanacaktır.

Tanım

$u_0 \in H_1$, $\theta_0 \in H_2$, $\tau > 0$ olsun. $u \in L^2(0,\tau,V_1) \cap L^\infty(0,\tau,H_1)$,

$\theta \in L^2(0,\tau,V_2) \cap L^\infty(0,\tau,H_2)$ fonksiyonları eğer $\forall \phi,\psi$ test fonksiyonları için (3.18) ve (3.19) u sağlıyorsa $(\Omega\times(0,T))$ üzerinde (3.10) , (3.11) probleminin zayıf çözümü denir.

Zayıf çözümlerin varlığı ile ilgili aşağıdaki teorem verilecektir.

3.2.1.Teorem[8, 23]:

$u_0 \in H_1$, $\theta_0 \in H_2$ ve $\tau > 0$ ise (3.10)(3.12) probleminin en azından bir zayıf çözümü vardır.

İspat: Problemin zayıf çözümlerinin varlığını ispatlamak için iyi bilinen Feado-Galerkin metodu kullanılacaktır [13, 22, 17]. $\{w_i\} \subset D(A_1)$, $\{\tilde{w}_i\} \subset D(A_2)$ dizileri, H_1 ‘ nin ve $H^2(\Omega)$’nın ortonormal bazı olan elemanların dizileri olsunlar.

Her m için u_m, θ_m yaklaşık çözümlerini

$$u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i \ , \ \theta_m(t)=\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_{im}(t)\tilde{w}_i \ , \tag{3.20}$$

biçiminde tanımlayalım. (3.18) ve (3.19) denklemlerinde u yerine u_m , θ yerine θ_m , ϕ yerine w_j , ψ yerine $\tilde{w}_k$ yazalım.

$$\left(u_m'(t),w_j\right)+\upsilon\left(\left(u_m(t),w_j\right)\right)+b_1\left(u_m(t),u_m(t),w_j\right)=<e_n\theta_m,w_j> \quad ,\ \text{j=1,…,m} \tag{3.21}$$

$$\left(\theta_m'(t),\tilde{w}_k\right)+\kappa\left(\left(\theta_m(t),\tilde{w}_k\right)\right)+b_2\left(u_m(t),\theta_m(t),\tilde{w}_k\right)=<u_m^2,\tilde{w}_k> \ ,\ \text{k=1,…,m} \tag{3.22}$$

dır. Burada u_m^2 , u_m 'nin 2. bileşenidir. Bunun yanında

$$u_m(0)=u_{0m}\ ,\ \ \theta_m(0)=\theta_{0m} \tag{3.23}$$

dır. Burada u_{0m},θ_{0m} sırasıyla u_0 ve θ_0 'ın H_1 ve H_2 uzaylarına dik izdüşümüdür. (3.21),(3.22) den

$$\sum_{i=1}^{m}\left(w_i,w_j\right)g_{im}'(t)+\upsilon\sum_{i=1}^{m}\left(\left(w_i,w_j\right)\right)g_{im}(t)+\sum_{i,l=1}^{m}b_1(w_i,w_l,w_j)g_{im}(t)g_{lm}(t)=<e_n\sum_{i=1}^{m}\tilde{g}_{im}(t)\tilde{w}_i,w_j> \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\tilde{w}_i,\tilde{w}_j\right)\tilde{g}_{im}'(t)+\kappa\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\tilde{w}_i,\tilde{w}_j\right)\right)\tilde{g}_{im}(t)+\sum_{i,l=1}^{m}b_2(w_i,\tilde{w}_l,\tilde{w}_j)\tilde{g}_{im}(t)g_{lm}(t)=<\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)w_i,\tilde{w}_j> \tag{3.25}$$

denklemleri elde edilir. (3.24) ve (3.25) denlemleri $g_{im}(t)$, $\tilde{g}_{im}(t)$ i=1,…,m , k=1,…,m fonksiyonları için lineer olmayan bir diferansiyel denklem sistemi verir.
$1\le i,\ j\le m$ olmak üzere bu (3.24),(3.25) diferansiyel denklem sistemini $\left(w_i,w_j\right)$, $(\tilde{w}_i,\tilde{w}_j)$ elemanlarına sahip singüler olmayan matrisler ile sırasıyla çarparsak

$$g_{im}'(t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}g_{im}(t)+\sum_{j,k=1}^{m}\alpha_{ijk}g_{im}(t)g_{km}(t)=\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}<e_n\vartheta,w_j> \tag{3.26}$$

$$\tilde{g}_{im}'(t)+\sum_{j=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ij}\tilde{g}_{im}(t)+\sum_{j,k=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ijk}\tilde{g}_{im}(t)g_{km}(t)=\sum_{j=1}^{m}\tilde{\beta}_{ij}<u_m^2,w_j> \tag{3.27}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulları

$$g_{im}(0)=(u_o,w_j)\ ,\ \tilde{g}_{im}(0)=(\theta_0,\tilde{w}_j) \tag{3.28}$$

biçimindedir. Böylece (3.26),(3.25) denklemleri (3.28) başlangıç koşullarıyla birlikte $[0,t_m]$ aralığında maksimal bir çözüme sahiptir [18]. Daha sonra u_m ve θ_m ile ilgili bazı ön değerlendirmeler elde edilecektir. Bu değerlendirmeler göz önüne alındığında
$\tau_m=\tau$ olmalıdır.

Şimdi sırasıyla (3.24),(3.25) diferansiyel denklem sistemi $g_{jm}(t)$, $\tilde{g}_{jm}(t)$ ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$\left(u_m'(t),u_m\right)+\upsilon\left(\left(u_m(t),u_m\right)\right)+b\left(u_m(t),u_m(t),u_m\right)=< e_n\theta,u_m > \tag{3.29}$$

$$\left(\theta_m'(t),\theta_m\right)+\kappa\left(\left(\theta_m(t),\theta_m\right)\right)+b\left(u_m(t),\theta_m(t),\theta_m\right)=< u_m^2,\theta_m > \tag{3.30}$$

elde edilir. Denklemde yer alan bu terimler yeniden düzenlenirse,

$$2\left(\frac{\partial u^m}{\partial t},u^m\right)=\frac{d}{dt}(u^m,u^m)$$

$$\left(\frac{\partial u^m}{\partial t},u^m\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u^m\right|^2$$

$$\left(A_1u^m,u^m\right)=\left(\left(u^m,u^m\right)\right)=\int_\Omega \nabla u^m.\nabla u^m dx=\|u\|^2$$

$$b(u^m,u^m,u^m)=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\theta^m\right|^2=\left(\frac{\partial \vartheta_m}{\partial t},\theta_m\right)$$

$$\left(A_2\theta^m,\theta^m\right)=\left(\left(\theta^m,\theta^m\right)\right)=\int_\Omega \nabla\theta^m.\nabla\theta^m dx=\|\theta\|^2$$

$$b(u^m,\theta^m,\theta^m)=0$$

Yukarıdaki düzenlemelerden

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m\right|^2+\upsilon\left\|u_m\right\|^2=\left(e_n\theta_m,u_m\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\theta_m\right|^2+\kappa\left\|\theta_m\right\|^2=\left(u_m^2,\theta_m\right)$$

denklemleri yazılır.

Her iki denklemin sağ tarafına Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_m\right|^2+\upsilon\left\|u_m\right\|^2\le\frac{\upsilon}{2}\left|u_m\right|^2+\frac{1}{2\upsilon}\left|\theta_m\right|^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\theta_m\right|^2+\kappa\left\|\theta_m\right\|^2\le\frac{\kappa}{2}\left|\theta_m\right|^2+\frac{1}{2\kappa}\left|u_m\right|^2$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{d}{dt}\left|u_m\right|^2+\upsilon\left\|u_m\right\|^2\le\frac{1}{\upsilon}\left|\theta_m\right|^2$$

$$\frac{d}{dt}\left|\theta_m\right|^2+\kappa\left\|\theta_m\right\|^2\le\frac{1}{\kappa}\left|u_m\right|^2$$

bu denklemlerin sol taraflarına Poincare eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \upsilon|u_m|^2 \leq \frac{1}{\upsilon}|\theta_m|^2$$

$$\frac{d}{dt}|\theta_m|^2 + \kappa|\theta_m|^2 \leq \frac{1}{\kappa}|u_m|^2$$

elde edilir.

Elde edilen denklemler taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2 + |\theta_m|^2\right) + \beta\left(|u_m|^2 + |\theta_m|^2\right) \leq 0 \tag{3.31}$$

elde edilir. Burada

$\left(\upsilon - \frac{1}{\kappa}\right) = \beta_1$, $\left(\kappa - \frac{1}{\upsilon}\right) = \beta_2$ olmak üzere $\min(\beta_1, \beta_2) = \beta$ dır.

$\upsilon\kappa \geq 1$ olmalıdır.

Şimdi elde edilen denklemin sol tarafından son iki terim ihmal edilir ve 0'dan τ'ya integrallenirse

$$|u_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 \leq e^{-\beta t}\left(|u_m(0)|^2 + |\theta_m(0)|^2\right) \quad \forall t \in (0, \tau)$$

yazılır.

$$|u_m(0)|^2 \leq |u_0| \ , \ |\theta_m(0)|^2 \leq |\theta_0| \tag{3.32}$$

eşitsizlikleri sağlanacağından [19]

$$|u_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 \leq |u_0| + |\theta_0|$$

bulunur. u_m , ϑ_m sınırlıdır ve bu sınır m'den bağımsızdır.

Böylece $u_m \in L^\infty(0, \tau, H_1)$, $\theta_m \in L^\infty(0, \tau, H_2)$

elde edilir. u_m ve θ_m üzerinde yeni değerlendirmeler elde etmek için yukarıdaki denklemlerin yeniden düzenlenmesiyle

$$|u_m(\tau)|^2 + |\theta_m(\tau)|^2 + \beta_1\int_0^\tau |u_m(\tau)|^2\, d\tau + \beta_2\int_0^\tau |\theta_m(\tau)|^2\, d\tau \leq |u_m(0)|^2 + |\theta_m(0)|^2 \tag{3.33}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.33) eşitsizliğini 0 dan τ ya integre eder ve sol tarafının ilk iki terimi ihmal edilirse ve (3.32) deki eşitsizlik kullanılırsa

$$\beta_1\int_0^\tau \|u_m(\tau)\|^2\, d\tau + \beta_2\int_0^\tau \|\theta_m(\tau)\|^2\, d\tau \leq |u_0|^2 + |\theta_0|^2 \tag{3.34}$$

bulunur. Böylece (3.34) den

$$\int_0^\tau \|u_m(\tau)\|^2 \, d\tau \le \frac{1}{\beta_1}\left(|u_0|^2 + |\theta_0|^2\right)$$

$$\int_0^\tau \|\vartheta_m(\tau)\|^2 \, d\tau \le \frac{1}{\beta_2}\left(|u_0|^2 + |\theta_0|^2\right)$$

eşitsizlikleri yazılır. Böylece $u_0 \in H_1$, $\theta_0 \in H_2$ olduğu dikkate alınırsa

$u_m \in L^2(0,\tau,H_1)$, $\theta_m \in L^2(0,\tau,H_2)$

elde edilir.

Böylece $\{u_m\}_m$, $L^2(0,\tau,V_1) \cap L^\infty(0,\tau,H_1)$ de ve

$\{\theta_m\}_m$, $L^2(0,\tau,V_2) \cap L^\infty(0,\tau,H_2)$

de sınırlı dizilerdir. Bundan dolayı $\{u_m\}$ ve $\{\theta_m\}$ yakınsak bir alt diziye sahiptirler. Bu diziler aynı sembolle gösterilebilir, yani

$u_m \to u$ ya $L^2(0,\tau,V_1)$ de zayıf yakınsaktır, $L^\infty(0,\tau,H_1)$ de zayıf yıldız yakınsaktır. (3.35)

$\theta_m \to \theta$ ya $L^2(0,\tau,V_2)$ de zayıf yakınsaktır, $L^\infty(0,\tau,H_2)$ de zayıf yıldız yakınsaktır. (3.36)

Böylece [22] 3. bölümde Teorem 3.1 ve daha sonra Teorem 2.2 kullanılırsa

$\{u_m\} \to u \quad L^2(0,\tau,H_1)$ de güçlü (3.37)

$\{\theta_m\} \to \theta \quad L^2(0,\tau,H_2)$ de güçlü (3.38)

olarak yakınsaktır. (3.35)-(3.38) , (3.21) ve (3.22) de Navier Stokes denklemleri için elde edilen sonuçlara benzer şekilde dikkate alınırsa [22]

$$\left(u'(t), w_j\right) + \upsilon\left(\left(u(t), w_j\right)\right) + b\left(u(t), u(t), w_j\right) = < e_n\theta, w_j > \tag{3.39}$$

$$\left(\theta'(t), w_k\right) + \kappa\left(\left(\theta(t), w_k\right)\right) + b\left(u(t), \theta(t), w_k\right) = < u_n, w_k > \tag{3.40}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca süreklilikten bu eşitlikler $\varphi = w_j$, $\psi = w_k$ için geçerlidir.

$$\left(u'(t), \varphi\right) + \upsilon\left(\left(u(t), \varphi\right)\right) + b\left(u(t), u(t), \varphi\right) = < e_n\vartheta, \varphi >$$

$$\left(\theta'(t), \psi\right) + \kappa\left(\left(\theta(t), \psi\right)\right) + b\left(u(t), \theta(t), \psi\right) = < u_n, \psi >$$

Böylece ispat tamamlanır.

3.3 Benard Probleminin Çözümlerinin Tekliği

Bu kısımda Benard Problemi'nin tekliği incelenecektir.

Teklik ispatı için kabul edelim ki $\{z,\delta\}$, $\{v,\eta\}$ (3.10)-(3.12)' probleminin iki çözümü olsun. Bu durumda $u = z - v$, $\theta = \delta - \eta$ olmak üzere,

$$\frac{du}{dt} + \upsilon A_1 u + P_1 B_1(z,z) - P_1 B_1(v,v) = e_2 \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \kappa A_2 \theta + P_2 B_2(z,\delta) - P_2 B_2(v,\eta) = u_2$$

denklemleri sağlanır. Bu denklemler sırasıyla u ve θ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon\|u\|^2 + \left(P_1 B_1(z,z),u\right) - \left(P_1 B_1(v,v),u\right) = \left(e_2\theta,u\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\|\theta\|^2 + \left(P_2 B_2(z,\delta),\theta\right) - \left(P_2 B_2(v,\eta),\theta\right) = \left(u_2,\theta\right)$$

elde edilir. Bu denklemler düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon\|u\|^2 + b_1\left(z,z,u\right) - b_1\left(v,v,u\right) = \left(e_2\vartheta,u\right) \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\|\theta\|^2 + b_2\left(z,\delta,\theta\right) - b_2\left(v,\eta,\theta\right) = \left(u_2,\theta\right) \tag{3.42}$$

yazılır. Burada üçlineer formun özelliklerinden

$$\begin{aligned} b_1(z,z,u) - b_1(v,v,u) &= b_1(z,z,u) - b_1(v,v,u) + b_1(v,z,u) - b_1(v,z,u) \\ &= b_1(z-v,z,u) + b_1(v,z-v,u) \\ &= b_1(u,z,u) + b_1(v,u,u) \\ &= -b_1(u,u,z)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2(z,\delta,\vartheta) - b_2(v,\eta,\theta) &= b_2(z,\delta,\theta) - b_2(v,\eta,\theta) + b_2(v,\delta,\theta) - b_2(v,\delta,\theta) \\ &= b_2(z-v,\delta,\theta) + b_2(v,\delta-\eta,\theta) \\ &= b_2(u,\delta,\theta) + b_2(v,\theta,\theta) \\ &= b_2(u,\delta,\theta) \end{aligned}$$

yazılır.

Şimdi bulduğumuz sonuçları (3.41) ve (3.42) denklemlerinde yerine yazalım ve sağ tarafa Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulayalım. Böylece

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\upsilon\|u\|^2-b_1(u,u,z)=|\theta||u|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2+\kappa\|\theta\|^2-b_2(u,\delta,\theta)=|u||\theta|$$

elde edilir.

Şimdi her iki denklemi de 2 ile çarpıp taraf tarafa toplayalım.

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|\theta|^2\right)+2\upsilon\|u\|^2+2\kappa\|\theta\|^2\leq 2|b_1(u,u,z)|+2|b_2(u,\delta,\theta)|+4|u||\theta|$$

Elde edilen bu eşitsizlikte, Poincare eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}|b_1(u,u,z)|&\leq |u|^{1/2}|\nabla u|^{1/2}|\nabla u|\|z\|\\&\leq\frac{\upsilon}{4}\left(|\nabla u|^{3/2}\right)^{4/3}+\frac{2}{4\upsilon^3}|u|^2\|z\|^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|b_2(u,\delta,\theta)|\leq|-b_2(u,\theta,\delta)|&\leq|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|\theta\||\delta|^{1/2}\|\delta\|^{1/2}\\&\leq\frac{\kappa}{2}\|\theta\|^2+\frac{1}{2\kappa}\|u\||u|\|\delta\|^2\\&\leq\frac{\kappa}{2}\|\theta\|^2+\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\upsilon}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\upsilon}|u|^2\|\delta\|^4\right)\end{aligned}$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitsizlikleri yerine yazarsak,

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|\theta|^2\right)+2\upsilon\|u\|^2+2\kappa\|\theta\|^2\leq\frac{\upsilon}{2}|\nabla u|^2+\frac{27}{2\upsilon^3}|u|^2\|z\|^4+\kappa\|\theta\|^2+\frac{\upsilon}{2\kappa}\|u\|^2+\frac{1}{2\kappa\upsilon}|u|^2\|\delta\|^4+4\left(\frac{1}{2}|u|^2+\frac{1}{2}|\theta|^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|\theta|^2\right)+\kappa\|\theta\|^2+\left(\frac{3\upsilon}{2}-\frac{\upsilon}{2\kappa}\right)\|u\|^2\leq\frac{27}{2\upsilon^3}|u|^2\|z\|^4+\frac{1}{2}|u|^2+\frac{1}{2\kappa\upsilon}|u|^2\|\delta\|^4+\frac{1}{2}|\theta|^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|\theta|^2\right)+\kappa\|\theta\|^2+\left(\frac{3\kappa\upsilon-\upsilon}{2\kappa}\right)\|u\|^2\leq|u|^2\left(\frac{27}{2\upsilon^3}\|z\|^4+\frac{1}{2}+\|\delta\|^4\right)+\frac{1}{2}|\theta|^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|\theta|^2\right)+\kappa\|\theta\|^2+\left(\frac{3\kappa\upsilon-\upsilon}{2\kappa}\right)\|u\|^2\leq\left(|u|^2+|\theta|^2\right)\left(\frac{27}{2\upsilon^3}\|z\|^4+\|\delta\|^4+\frac{1}{2}\right)\tag{3.43}$$

$3\upsilon\kappa>\upsilon$ olmak üzere soldaki son iki terim ihmal edilir ve $z\in L^2(0,\tau,V_1)\cap L^\infty\left(0,\tau;H_1\right)$,

$\delta\in L^2(0,\tau,V_2)\cap L^\infty(0,\tau;H_2)$ olduğundan,

$$\int_0^\tau \|z\|^4\,dt \le 2\|z\|^2_{L^\infty(0,\tau,H_1)}\|z\|^2_{L^2(0,\tau,V_1)} < \infty$$

$$\int_0^\tau \|\delta\|^4\,dt \le 2\|\delta\|^2_{L^\infty(0,\tau,H_2)}\|\delta\|^2_{L^2(0,\tau,V_2)} < \infty$$

olduğundan $f(t) = \dfrac{27}{2\upsilon^3}\|z\|^4 + \|\delta\|^4 + \dfrac{1}{2}$, $[0,T]$ aralığında integrallenebilirdir. Böylece

(3.43)'den $\dfrac{d}{dt}\left[\exp\left(-\int_0^t f(s)ds\right)\left\{|u|^2 + |\theta|^2\right\}\right] \le 0$ dır. (3.44)

u(0)=0 , $\theta(0)=0$ olduğundan, (3.44)'den $z=v$, $\delta=\eta$ dır. Yani çözüm tektir.

Şimdi $u \in C([0,\tau],H_1)$, $\theta \in C([0,\tau],H_2)$ olduğunu gösterelim.

$u_0 \in V_1$, $\theta_0 \in V_2$ olmak üzere (3.39) denklemini ele alalım,

$$\left(u_m'(t),w_j\right)+\upsilon\left(\left(u_m(t),w_j\right)\right)+b\left(u_m(t),u_m(t),w_j\right) = < e_n\theta, w_j > \tag{3.39}$$

$$u_m(0) = u_{m0} \tag{3.45}$$

Denklemin her iki tarafını $g_{jm}'(t)$ ile çarpalım ve j=1,…,m 'ye kadar toplam alalım.

$$\left(u_m'(t),\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t).w_j\right)+\upsilon\left(\left(u_m(t),\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t).w_j\right)\right)+b\left(u_m(t),u_m(t),\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t).w_j\right) = < e_n\theta,\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t).w_j >$$

Bu eşitlikten

$$\left(u_m'(t),u_m'(t)\right)+\upsilon\left(\left(u_m(t),u_m'(t)\right)\right)+b\left(u_m(t),u_m(t),u_m'(t)\right) = < e_n\theta,u_m'(t) > \tag{3.46}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol yanında ki en son terim göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} b\left(u_m(t),u_m(t),u_m'(t)\right) &= \int_\Omega \left(u_m.\nabla u_m.u_m'\right)dt \\ &\le \underbrace{\sup_{t\in\Omega}|\nabla u_m|}_{M_1}\int_\Omega u_m.u_m'dt \\ &\le M_1|u_m||u_m'| \end{aligned}$$

bu son eşitsizliğin sol tarafına Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\le \frac{M_1}{2}|u_m|^2 + \frac{1}{2M_1}|u_m'|^2 \tag{3.47}$$

elde edilir.

Böylece (3.46) dan

$$\left|u_m'(t)\right|^2+\upsilon\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2\le\left|e_n\theta\right|\left|u_m'(t)\right|+\frac{M_1}{2}\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{2M_1}\left|u_m'(t)\right|^2$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terime Young eşitsizliği uygulandığında

$$\left|u_m'(t)\right|^2+\upsilon\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2\le\frac{1}{2}\left|e_n\theta\right|^2+\frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2+\frac{M_1}{2}\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{2M_1}\left|u_m'(t)\right|^2$$

elde edilir.

Denklemin her iki yanını 2 ile çarpıp benzer terimleri aynı tarafa toplayalım, buradan

$$2\left|u_m'(t)\right|^2+\upsilon\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2\le\left|e_n\theta\right|^2+\left|u_m'(t)\right|^2+M_1\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{M_1}\left|u_m'(t)\right|^2$$

yazılır. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\left(1-\frac{1}{M_1}\right)\left|u_m'(t)\right|^2+\upsilon\frac{d}{dt}\left\|u_m(t)\right\|^2\le\left|e_n\theta\right|^2+M_1\left|u_m(t)\right|^2$$

elde edilir.

Şimdi denklemin her iki yanı 0'dan τ 'ya integrallenerek

$$\left(1-\frac{1}{M_1}\right)\int_0^\tau\left|u_m'(t)\right|^2dt+\upsilon\left\|u_m(\tau)\right\|^2\le\upsilon\left\|u_m(0)\right\|^2+\int_0^\tau\left|e_n\theta\right|^2dt+M_1\int_0^\tau\left|u_m(t)\right|^2dt$$

yazılır. Bu eşitsizlikte (3.32) kullanılır ve sağ tarafta esssup alınırsa

$$\left(1-\frac{1}{M_1}\right)\int_0^\tau\left|u_m'(t)\right|^2dt+\upsilon\left\|u_m(\tau)\right\|^2\le\upsilon\left\|u_0\right\|^2+\int_0^\tau ess\sup_{0\le t\le\tau}\left|e_n\theta_m\right|^2dt+M_1\int_0^\tau ess\sup_{0\le t\le\tau}\left|u_m(t)\right|^2dt$$

yazılır.

Ayrıca $u_m\in L^\infty(0,\tau,H_1)$, $\theta_m\in L^\infty(0,\tau,H_2)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\left(1-\frac{1}{M_1}\right)\int_0^\tau\left|u_m'(t)\right|^2dt\le\upsilon\left\|u_0\right\|^2+C_1\tau+M_1C_2\tau<\infty$$

elde edilir. Burada $C_1=ess\sup\limits_{0\le t\le\tau}\left|e_n\theta_m\right|^2$, $C_2=ess\sup\limits_{0\le t\le\tau}\left|u_m(t)\right|^2$ dır. $M_1>1$ olmak üzere,

$u_m'(t)\in L^2(0,\tau;V_1)$ sağlanır. (3.48)

Ayrıca $u_m\in L^2(0,\tau,V_1)$ olduğu dikkate alınırsa $u_m\in C([0,\tau];H_1)$ sağlanır [22, 19].

Şimdi de benzer düşünceyle (3.40)-(3.49) denklemini ele alalım,

$$\left(\theta_m'(t),w_j\right)+\kappa\left(\left(\theta_m(t),w_j\right)\right)+b\left(u_m(t),\theta_m(t),w_j\right)=<u_n,w_j>$$

$$\theta_m(0)=\theta_{m0} \tag{3.49}$$

Denklemin her iki tarafını $\tilde{g}_{jm}'(t)$ ile çarpalım ve j=1,…,m 'ye kadar toplam alalım.

$$\left(\theta_m'(t),\sum_{j=1}^m\tilde{g}_{jm}'(t).w_j\right)+\kappa\left(\left(\theta_m(t),\sum_{j=1}^m\tilde{g}_{jm}'(t).w_j\right)\right)+b\left(u_m(t),\theta_m(t),\sum_{j=1}^m\tilde{g}_{jm}'(t).w_j\right)=<u_n,\sum_{j=1}^m\tilde{g}_{jm}'(t).w_j>$$

$$\left(\theta_m'(t),\theta_m'(t)\right)+\kappa\left(\left(\theta_m(t),\theta_m'(t)\right)\right)+b\left(u_m(t),\theta_m(t),\theta_m'(t)\right)=<u_n,\theta_m'(t)> \tag{3.50}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki en son terim göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned}b\left(u_m(t),\theta_m(t),\theta_m'(t)\right)&=\int_\Omega\left(u_m.\nabla\theta_m\theta_m'\right)dt\\&\le\sup_{t\in\Omega}\left|\nabla\theta_m\right|\int_\Omega u_m\theta_m'dt\\&\le M_1'\left|u_m\right|\left|\theta_m'\right|\end{aligned}$$

bu son eşitsizliğin sağ tarafına Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\le\frac{M_1'}{2}\left|u_m\right|^2+\frac{1}{2M_1'}\left|\theta_m'\right|^2 \tag{3.51}$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\theta_m'(t)\right|^2+\kappa\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta_m(t)\right\|^2\le\left|u_n\right|\left|\theta_m'(t)\right|+\frac{M_1'}{2}\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{2M_1'}\left|\theta_m'(t)\right|^2$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terime Young Eşitsizliği uygulandığında,

$$\left|\theta_m'(t)\right|^2+\kappa\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta_m(t)\right\|^2\le\frac{1}{2}\left|u_n\right|^2+\frac{1}{2}\left|\theta_m'(t)\right|^2+\frac{M_1'}{2}\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{2M_1'}\left|\theta_m'(t)\right|^2$$

elde edilir.

Denklemin her iki yanını 2 ile çarpıp benzer terimleri aynı tarafa toplayalım, buradan

$$2\left|\theta_m'(t)\right|^2+\kappa\frac{d}{dt}\left\|\theta_m(t)\right\|^2\le\left|u_n\right|^2+\left|\theta_m'(t)\right|^2+M_1'\left|u_m(t)\right|^2+\frac{1}{M_1'}\left|\theta_m'(t)\right|^2$$

yazılır. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\left(1-\frac{1}{M_1'}\right)\left|\theta_m'(t)\right|^2+\kappa\frac{d}{dt}\left\|\theta_m(t)\right\|^2\le\left|u_n\right|^2+M_1'\left|u_m(t)\right|^2$$

elde edilir.

Şimdi denklemin her iki yanı 0'dan τ 'ya integrallenerek

$$\left(1-\frac{1}{M_1'}\right)\int_0^\tau \left|\theta_m'(t)\right|^2 dt+\kappa\left\|\theta_m(\tau)\right\|^2 \le \kappa\left\|\theta_m(0)\right\|^2+\int_0^\tau \left|u_n\right|^2 dt+M_1'\int_0^\tau \left|u_m(t)\right|^2 dt$$

yazılır. Bu eşitsizlikte (3.32) kullanılır ve sağ tarafta esssup alınırsa

$$\left(1-\frac{1}{M_1'}\right)\int_0^\tau \left|\theta_m'(t)\right|^2 dt+\kappa\left\|\theta_m(\tau)\right\|^2 \le \kappa\left\|\theta_0\right\|^2+\int_0^\tau \underset{0\le t\le\tau}{ess\sup}\left|u_n\right|^2 dt+M_1'\int_0^\tau \underset{0\le t\le\tau}{ess\sup}\left|u_m(t)\right|^2 dt$$

yazılır.

Ayrıca $u_m \in L^\infty(0,\tau,H_1)$, $\theta_m \in L^\infty(0,\tau,H_2)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\left(1-\frac{1}{M_1'}\right)\int_0^\tau \left|\theta_m'(t)\right|^2 dt \le \kappa\left\|\theta_0\right\|^2+C_3\tau+M_1'C_4\tau<\infty$$

elde edilir. Burada $C_3=\underset{0\le t\le\tau}{ess\sup}\left|u_n\right|^2$, $C_4=\underset{0\le t\le\tau}{ess\sup}\left|u_m(t)\right|^2$ dır.

$M_1'>1$ olmak üzere , $\theta_m'(t)\in L^2(0,\tau;V_2)$ sağlanır. (3.52)

Ayrıca $\theta_m \in L^2(0,\tau,V_2)$ olduğu dikkate alınırsa $\theta_m \in C([0,\tau],H_2)$ elde edilir. Böylece $\forall\tau>0$ için $u_m \in C([0,\tau],H_1)$, $\theta_m \in C([0,\tau],H_2)$ dır.

4. YUTAN KÜME VE YEREL OLMAYAN ÇEKİCİ

Sistemin yutan kümesinin varlığını ispatlamak amacıyla θ için bir değerlendirmeyi elde edeceğiz.

Bunun için aşağıdaki lemmayı elde edelim.

4.1. Maksimum Prensibi

u ve θ

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u.\nabla\right)u-\upsilon\Delta u+\nabla p=e_2\theta \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+(u.\nabla)\theta-u_2-\kappa\Delta\theta=0 \tag{1.12}$$

$$u(x,0)=u_0\ ,\ \theta(x,0)=\theta_0 \tag{1.15}$$

Başlangıç koşullarıyla verilen problemin çözümleri olsun ve hemen hemen her $x\in\Omega$

$$-1\leq\theta\left(x,0\right)\leq 1 \tag{4.1}$$

olsun bu durumda hemen hemen her $x\in\Omega$, hemen hemen her *t* için

$$-1\leq\theta\left(x,t\right)\leq 1 \tag{4.2}$$

dır.

Eğer $\{u,\theta\}$, her $t>0$ için tanımlanmışsa ve (1.11)sağlanıyorsa, o zaman

$$\theta\left(.,t\right)=\tilde{\theta}\left(.,t\right)+\overline{\theta}\left(.,t\right) \tag{4.3}$$

dır, burada hemen hemen her yerde $-1\leq\tilde{\theta}(x,t)\leq 1$ ve $t\to\infty$ iken $H_2\left(=L^2\left(\Omega\right)\right)$ olmak

üzere $\overline{\theta}\left(.,t\right)\to 0$ dır. (4.4)

İspat:

İspat T için verilen denklem göz önüne alınarak yapılacaktır. Varlık teklik sonuçları T için dikkate alındığında (4.1)-(4.2)

Hemen hemen her $x\in\Omega$

$$T_1\leq T\left(x,0\right)\leq T_0 \tag{4.5}$$

Hemen hemen her $x \in \Omega$, hemen hemen her t için

$$T_1 \le T(x,t) \le T_0 \tag{4.6}$$

biçiminde ifade edilir.

(4.6) eşitsizliğini gösterelim. Bunun için öncelikle varlık sonucunu ve

$$(T-T_0)_+ = \max\{T-T_0, 0\} \Rightarrow \begin{cases} 0 & , \ T < T_0 \\ T-T_0 & , \ T > T_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

$$(T-T_1)_- = \max\{T_1-T, 0\} \Rightarrow \begin{cases} 0 & , \ T_1 < T \\ T_1-T & , \ T_1 > T \end{cases} \tag{4.8}$$

tanımı göz önüne alındığında $x_n = 0$ ve $x_n = 1$ de $(T-T_0)_+$=0 olur. Ayrıca x_1 yönünde fonksiyon periyodik olduğundan $(T-T_0)_+$'nın $L^2(0,\tau;V_2)$ uzayına ait olduğu kolayca ifade edilir.

Şimdi

$\dfrac{\partial T}{\partial t} + (u,\nabla)T - K\Delta T = 0$ denkleminin her iki yanını $(T-T_0)_+$ ile çarpıp Ω üzerinde integre edersek,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, (T-T_0)_+\right) + \left((u.\nabla)T, (T-T_0)_+\right) - K\left(\Delta T, (T-T_0)_+\right) = 0 \tag{4.9}$$

yazılır. Her bir terim göz önüne alınırsa

$$\left(\frac{\partial (T-T_0)_+}{\partial t}, (T-T_0)_+\right) = \frac{d}{dt}\left((T-T_0)_+, (T-T_0)_+\right) - \left((T-T_0)_+, \frac{\partial (T-T_0)_+}{\partial t}\right)$$

eşitliğinden

$$\left(\frac{\partial (T-T_0)_+}{\partial t}, (T-T_0)_+\right) + \left((T-T_0)_+, \frac{\partial (T-T_0)_+}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left((T-T_0)_+, (T-T_0)_+\right)$$

yazılır.

$$\left(\frac{\partial (T-T_0)_+}{\partial t}, (T-T_0)_+\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_0)_+\right|^2 \tag{4.10}$$

elde edilir.

$$\left((u.\nabla)T, (T-T_0)_+\right) = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} u_i \partial_i T (T-T_0)_+ = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} u_i \partial_i (T-T_0)_+ (T-T_0)_+ \, dx$$

yazılır. Düzenlenirse

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega} u_i \frac{1}{2}\partial_i (T-T_0)_+^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial i\left(u_i (T-T_0)_+^2\right)dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i u_i (T-T_0)_+^2 dx$$

elde edilir. $\nabla.u = 0$ olduğundan son terim sıfırdır. Ayrıca

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega} u_i (T-T_0)_+^2 \eta_i ds = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. Tanımdan

$$-\left(\Delta T,(T-T_0)_+\right) = -\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i^2 (T-T_0)_+ (T-T_0)_+ \, dx$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i\left(\partial_i (T-T_0)_+ (T-T_0)_+\right)dx + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\partial_i (T-T_0)_+ \partial_i (T-T_0)_+ \, dx$$

elde edilir. Green özdeşliği kullanılırsa

$$=-\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\partial_i (T-T_0)_+ (T-T_0)_+ \eta_i ds + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\nabla (T-T_0)_+ : \nabla (T-T_0)_+ \, dx$$

elde edilir. Buradan

$$(\Delta T,(T-T_0)_+) = \left\|(T-T_0)_+\right\|^2 \tag{4.12}$$

yazılır. Şimdi (4.10),(4.11),(4.12) eşitlikleri (4.9) da yazılırsa

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_0)_+\right|^2 + K\left\|(T-T_0)_+\right\|^2 = 0$ eşitliğini elde etmiş oluruz. Bu eşitliğin sol tarafına

$\left(\|u\| \le c\|Du\|\right)$ poincare eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_0)_+\right|^2 + K\left|(T-T_0)_+\right|^2 \le 0 \tag{4.13}$$

ve $\forall t > 0$ için

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2K\tau}\left|(T-T_0)_+\right|\right] \le 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten

$\left|(T-T_o)_+(t)\right| \le \left|(T-T_0)_+(0)\right| e^{-2Kt}$ bulunur. (4.14)

Ayrıca $\left|(T-T_0)_+(t)\right|$ t'nin azalan bir fonksiyonudur ve (4.5) de $t=0$ için

$\left|(T-T_0)_+(t)\right| = 0$ dır. Böylece her $t>0$ için sıfır olur. Yani her t≥0 için $T(.,t) \le T_0$ elde edilir, (4.5) eşitsizliğinin 1. yanının ispatı için , $(T-T_1)_-$ yi dikkate alınarak benzer metod uygulanır. Yani

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(u.\nabla)T-K\Delta T=0$$

denkleminin her iki yanını $(T-T_1)_-$ ile çarpalım ve Ω üzerinde integre edelim.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t},(T-T_1)_-\right)+\left((u,\nabla)T,(T-T_1)_-\right)-K\left(\Delta T,(T-T_1)_-\right)=0 \tag{4.15}$$

$$\left(\frac{\partial (T-T_1)_-}{\partial t},(T-T_1)_-\right)=\frac{d}{dt}\left((T-T_1)_-,(T-T_1)_-\right)-\left((T-T_1)_-,\frac{\partial}{\partial t}(T-T_1)_-\right)$$

$$2\left(\frac{\partial (T-T_1)_-}{\partial t},(T-T_1)_-\right)=\frac{d}{dt}\left|(T-T_1)_-\right|^2$$

$$\left(\frac{\partial (T-T_1)_-}{\partial t},(T-T_1)_-\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_1)_-\right|^2 \tag{4.16}$$

$$\left((u.\nabla)T,(T-T_1)_-\right)=\int_\Omega u_i\partial_i T\,(T-T_1)_-\,dx$$

$$=\int_\Omega u_i\partial_i(T-T_1)_-\,\partial_i(T-T_1)_-\,dx=\int_\Omega u_i\frac{1}{2}\partial_i(T-T_1)_-^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i\left(u_i(T-T_1)_-^2\right)dx-\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i u_i\,(T-T_1)_-^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u_i\,(T-T_1)_-^2\,\eta_i ds=0 \tag{4.17}$$

$$-\left(\Delta T,(T-T_1)_-\right)=-\int_\Omega \partial_i^2(T-T_1)_-^2\,(T-T_1)_-\,dx$$

$$=-\int_\Omega \partial_i\left(\partial_i(T-T_1)_-\,(T-T_1)_-\right)dx+\int_\Omega \partial_i(T-T_1)_-\,\partial_i(T-T_1)_-\,dx$$

$$=-\int_\Omega \partial_i(T-T_1)_-\,(T-T_1)_-\,\eta_i ds+\int_\Omega \nabla(T-T_1)_-:\nabla(T-T_1)_-\,dx$$

$$=\left\|(T-T_1)_-\right\|^2 \tag{4.18}$$

Şimdi (4.16), (4.17) ve (4.18) i yerine yazalım.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_1)_-\right|^2+K\left\|(T-T_1)_-\right\|^2=0$$

elde ederiz. Poincare eşitsizliğini kullanırsak, $\left(\|u\|\le c\|Du\|\right)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(T-T_1)_-\right|^2+K\left|(T-T_1)_-\right|^2\leq 0 \tag{4.19}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Gronwall Lemmayı kullanarak,

$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{Kt}(T-T_1)_-^2\right)\leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\left|(T-T_1)_-(t)\right|\leq\left|(T-T_1)_-(0)\right|e^{-Kt}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca (4.14) eşitsizliği bu eşitsizlikle birlikte düşünülerek taraf tarafa toplanırsa,

$$\left|(T-T_0)_+(t)\right|+\left|(T-T_1)_-(t)\right|\leq\left\{\left|(T-T_0)_+(0)\right|+\left|(T-T_1)_-(0)\right|\right\}e^{-2Kt}$$

Ayrıca $T=\tilde{T}+\overline{T}$, $\overline{T}=(T-T_0)_+-(T-T_1)_-$ olsun.

Yani T

$$T=\tilde{T}+\overline{T}\ ,\ \overline{T}=(T+T_0)_+-(T-T_1)_-$$

biçiminde yazılsın. Bu durumda $T_1\leq\tilde{T}(x,t)\leq T_0$ (4.20)

olduğunu göstermeliyiz.

$\tilde{T}=T-\overline{T}=T-(T-T_0)_++(T-T_1)_-$ şeklinde tanımlayalım. Buna göre yukarıdaki (4.20) eşitsizliğinden

$$T_1\leq T-(T-T_0)_++(T-T_1)_-\leq T_0$$

Olduğunu göstermeliyiz.

$$\tilde{T}=T-\overline{T}=T-(T-T_0)_++(T-T_1)_-$$

eşitliğini irdeleyelim.

$$T_1=T_0-1\Rightarrow T_1<T_0$$

Bu durumda (4.7) ve (4.8) dikkate alınarak

(i) $T<T_1<T_0\Rightarrow\tilde{T}=T-0+T_1-T=T_1\Rightarrow\tilde{T}=T_1$

(ii) $T_1<T<T_0\Rightarrow\tilde{T}=T-0+0=T\Rightarrow\tilde{T}=T\Rightarrow T_1<\tilde{T}<T_0$

(iii) $T_1<T_0<T\Rightarrow\tilde{T}=T-T+T_0+0=T_0\Rightarrow\tilde{T}=T_0$

$t\to\infty$ için $\overline{T}\to 0$ sağlanır.

$$\overline{T}=(T-T_0)_+-(T-T_1)_-$$

$T_1 \le \tilde{T} \le T_0$ o zaman şunu görürüz,

$T_1 \le \tilde{T}(x,t) \le T_0$ .h.h.h. ve $\bar{T}(.,t) \to 0$, $L^2(\Omega)$ da

$$\left|\bar{T}(.,t)\right| \le \left\{\left|(T-T_0)_+(0)\right| + \left|(T-T_1)_-(0)\right|\right\} e^{-Kt} \tag{4.21}$$

O zaman (4.3) ve (4.4) ten (4.19) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|\bar{\theta}(.,t)\right| \le \left\{\left|(\theta-1)_+(0)\right| + \left|(\theta+1)_-(0)\right|\right\} e^{-Kt} \tag{4.22}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.2. Yutan Küme

Problemin yutan kümesinin varlığını göstermek için Lemma 4.1 Maksimum Prensibinde $\left|\theta(t)\right|$ için verilen düzgün kestirimini kullanacağız.

$L^\infty(0,\infty;H_2)$ de θ nın normunu $|\theta|_\infty$ ile gösterelim.

$\theta(.,t) = \tilde{\theta}(.,t) + \bar{\theta}(.,t)$ eşitliği dikkate alınırsa (4.2),(4.22) den

$|\theta(t)| \le |\tilde{\theta}(t)| + |\bar{\theta}(t)|$ yazılır.

$|\theta(t)| \le |\Omega|^{1/2} + \left\{|(\theta-1)_+(0)| + |(\theta+1)_-(0)|\right\} e^{-Kt}$ elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$|\theta|_\infty \le |\Omega|^{1/2} + \left\{|(\theta-1)_+(0)| + |(\theta+1)_-(0)|\right\} \tag{4.23}$$

yazılır. Böylece

$$\limsup_{t\to\infty} |\theta(t)| \le |\Omega|^{1/2} \tag{4.24}$$

bulunur. Burada $|\Omega|$ notasyonu Ω nın hacmini göstermektedir. Şimdi u için düzgün bir değerlendirme elde edelim.

$$\frac{du}{dt} + (u.\nabla)u - \upsilon\Delta u = e_2\theta \tag{4.25}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + (u.\nabla)\theta - \kappa\Delta\theta = u_2 \tag{4.26}$$

denklemlerini sırasıyla u ve θ ile çarpalım

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, u) + ((u.\nabla)u, u) - \nu(\Delta u, u) = (e_2\theta, u) \tag{4.27}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}, \theta\right) + \left((u.\nabla)\theta, \theta\right) - \kappa\left(\Delta\theta, \theta\right) = \left(u_2, \theta\right) \tag{4.28}$$

Gerekli düzenlemelerden sonra üçlineer formun özellikleri de kullanılarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon|\nabla u|^2 = (e_2\theta, u)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\|\theta\|^2 = (u_2, \theta)$$

denklemlerini elde ederiz.

($|\varphi| \le \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in V_2$) olduğundan, (4.29)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon\|u\|^2 &= (\theta, u_2)\\ &\le |\theta|.|u_2|\\ &\le |\theta|.|u|\\ &\le |\theta|.\|u\|\\ &\le \frac{\upsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\upsilon}|\theta|^2 \qquad (4.30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\|\theta\|^2 &= (u_2, \theta)\\ &\le |u_2|.|\theta|\\ &\le |u|.|\theta|\\ &\le |u|.\|\theta\|\\ &\le \frac{\kappa}{2}\|\theta\|^2 + \frac{1}{2\kappa}|u|^2 \qquad (4.31)\end{aligned}$$

(4.30) ve (4.31) denkleminin her iki yanını 2 ile çarpıp düzenleyelim,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon\|u\|^2 \le \frac{1}{\upsilon}|\theta|^2 \qquad (4.32)$$

$$\frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\|\theta\|^2 \le \frac{1}{\kappa}|u|^2 \qquad (4.33)$$

Gronwall Lemması uygulanırsa,

$$|u(t)|^2 \le |u(0)|^2 e^{-\upsilon t} + \frac{1}{\upsilon^2}|\theta|^2 (1 - e^{-\upsilon t}) \qquad (4.34)$$

elde edilir.

Bu ifadenin sağ tarafı daha da büyütürlürse,

$$|u(t)|^2 \le |u(0)|^2 e^{-\upsilon t} + \frac{1}{\upsilon^2}|\theta|_\infty^2 (1-e^{-\upsilon t}) \tag{4.35}$$

elde edilir.

(4.34) eşitsizliğinde (4.24) göz önüne alındığında

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)|^2 = \frac{|\theta|^2}{\upsilon^2} \le \frac{|\Omega|}{\upsilon^2} \tag{4.36}$$

elde edilir.

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)| \le \frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon} \tag{4.37}$$

Bu sonuç (3.57) ile birlikte düşünüldüğünde H’de bir yutan kümenin varlığı ispatlanmıştır. Çünkü, (4.24) ve (4.36)’dan, $\forall u_0 \in H$ için ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|u(t)| \le \frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon} + \varepsilon \tag{4.38}$$

$$|\theta(t)| \le |\Omega|^{1/2} + \varepsilon \tag{4.39}$$

Sağlanacak şekilde $t > t_0$ için bir $t_0 = t_0(u_0, \varepsilon)$ vardır. Bundan dolayı

$B_0 = \left\{ (u,\theta) \in H, |u| \le \frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon} + \varepsilon, |\theta| \le |\Omega|^{1/2} + \varepsilon \right\}$ kümesi *S(t)* yarı grubu için *H’*de bir yutan kümedir.

Şimdi (4.32) denklemini $t \ge t_0$ için *t’*den *t+1’*e kadar integralleyelim,

$$\int_t^{t+1} \frac{d}{dt}|u|^2 + \upsilon \int_t^{t+1} \|u\|^2 ds \le \frac{1}{\upsilon} \int_t^{t+1} |\theta|^2 ds$$

$|u(t+1)|^2 + \upsilon \int_t^{t+1} \|u\|^2 ds \le |u(t)|^2 + \frac{1}{\upsilon} \int_t^{t+1} |\theta|^2 ds$ elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliği ilk terimi ihmal edilir ve υ ile bölünürse,

$$\int_t^{t+1} \|u\|^2 ds \le \frac{1}{\upsilon}|u(t)|^2 + \frac{1}{\upsilon^2} \int_t^{t+1} |\theta(s)|^2 ds$$

yazılır. (4.38) ve (4.39) den

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \le \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon}+\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\upsilon^2}\left(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon\right)^2 \tag{4.40}$$

eşitsizliği elde edilir.

Daha sonra (4.33) denklemi için benzer işlemler yapılırsa,

$$\int_t^{t+1} \frac{d}{dt}|\theta|^2 + \kappa\int_t^{t+1} \|\theta(s)\|^2\, ds \le \frac{1}{\kappa}\int_t^{t+1} |u|^2 ds$$

eşitsizliğinden

$$|\theta(t+r)|^2 + \kappa\int_t^{t+1} \|\theta(s)\|^2\, ds \le |\theta(t)|^2 + \frac{1}{\kappa}\int_t^{t+1} |u|^2 ds$$

denklemi elde edilir.

Böylece $t \ge t_0$ için (4.38) ve (4.39) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\kappa\int_t^{t+1} \|\theta(s)\|^2 ds \le \left(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon}+\varepsilon\right)^2$$

$$\int_t^{t+1} \|\theta(s)\|^2 ds \le \frac{1}{\kappa}\left(|\Omega|^{1/2}+\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{|\Omega|^{1/2}}{\upsilon}+\varepsilon\right)^2 \tag{4.41}$$

4.2.1. Önerme: *S(t)* yarı grubu için , $A \subset V$ yutan kümesi vardır.

İspat: $$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \upsilon\Delta u = e_2\theta \tag{4.42}$$

Denkleminin $-\Delta u$ ile $L^2(\Omega)^2$ 'de iç çarpımını alalım.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, -\Delta u\right) - \left((u.\nabla)u, \Delta u\right) + \upsilon\left(\Delta u, \Delta u\right) = -\left(e_n\theta, \Delta u\right)$$

Bu eşitsizlik düzenlenir ve sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^1}^2 + \upsilon|\Delta u|^2 \le |\theta|.|\Delta u| + b_1(u,u,\Delta u) \tag{4.43}$$

bulunur. Sağ taraftaki son terim için Hölder ve Ladyhenskaya eşitsizlikleri uygulanırsa

$$\left|b_1(u,u,\Delta u)\right| = \left|\int_\Omega u.\nabla u.\Delta u dx\right| \le 2^{\frac{1}{2}}\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|^{\frac{1}{2}}\left|\Delta u\right|^{\frac{1}{2}}\left|\Delta u\right|$$

$$\le C_7\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|\left|\Delta u\right|^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafına Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\right\|^2 + \upsilon\left|\Delta u\right|^2 \le \left|\theta\right|\left|\Delta u\right| + C^2\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|\left|\Delta u\right|^{\frac{3}{2}}$$

$$\le \frac{\upsilon}{4}\left|\Delta u\right|^2 + \frac{1}{\upsilon}\left|\theta\right|^2 + \frac{\upsilon}{4}\left[\left(\left|\Delta u\right|\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4\left(\frac{\upsilon}{3}\right)^3}\left(C_7\left|u\right|^{\frac{1}{2}}\left\|u\right\|\right)^4$$

yazılır.

$$\le \frac{\upsilon}{4}\left|\Delta u\right|^2 + \frac{1}{\upsilon}\left|\theta\right|^2 + \frac{\upsilon}{4}\left|\Delta u\right|^2 + \frac{27C_7^4}{4\upsilon^3}\left|u\right|^2\left\|u\right\|^4$$

bu eşitsizliğin sağ tarafının üçüncü terimime (4.29) eşitsizliği uygulanırsa

$$\le \frac{\upsilon}{2}\left|\Delta u\right|^2 + \frac{1}{\upsilon}\left|\theta\right|^2 + \frac{C_1^{'}}{\upsilon^3}\left|u\right|^2\left\|u\right\|^4$$

bulunur. Böylece gerekli düzenlemelerden sonra

$$\frac{d}{dt}\left\|u\right\|^2 + \upsilon\left|\Delta u\right|^2 \le \frac{2}{\upsilon}\left|\theta\right|^2 + \frac{2C_1^{'}}{\upsilon^3}\left|u\right|^2\left\|u\right\|^4 \tag{4.44}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bu eşitsizlik için

r =1 , $y = \left\|u\right\|^2$, $g = \frac{2C_1^{'}}{\upsilon^3}\left|u\right|^2\left\|u\right\|^2$, $h = \frac{2}{\upsilon}\left|\theta\right|^2$ seçilerek Uniform Gronwall Lemma

uygulanırsa

(4.38),(4.39),(4.40) ve (4.41)'den, $\forall t \ge t_0$ için,

$$a_1 = a_1(\varepsilon) = \frac{2C_1^{'}}{\upsilon^3}\left(\frac{\left|\Omega\right|^{\frac{1}{2}}}{\upsilon} + \varepsilon\right)^2 .a_3(\varepsilon),$$

$$a_2 = a_2\left(\varepsilon\right) = \frac{2}{\upsilon}\left(\left|\Omega\right|^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right)^2,$$

$a_3 = a_3(\varepsilon) = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\upsilon} + \varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\upsilon}\left(|\Omega|^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right)^2$ eşitlikleri elde edilir.

Buradan

$$\|u(t)\|^2 \le \left(\|u(s)\|^2 + \int_s^{t+r} \frac{2}{\upsilon}|\theta|^2 \, d\tau\right).\left(e^{\int_s^{t+r} g(\tau)d\tau}\right)$$

yazılır. Böylece $\forall t \ge t_0(B,\varepsilon)+1$ için

$$\|u(t)\|^2 \le \left(\|u(s)\|^2 + a_2\right).\left(e^{a_1}\right)$$

$$\|u(t)\|^2 \le (a_2 + a_3).\left(e^{a_1}\right) \tag{4.45}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.28) deki 2. denklem $-\Delta\theta$ ile çarpılır ve u ya paralel şekilde işlemler θ için yapılır.Böylece H daki herhangi sınırlı B kümesi için, $S(t)B$ $t \ge t_1$ için V nin sınırlı B_1 kümesi tarafından içerilecek şekilde bir t_1 vardır. Böylece $S(t)$ V de yutan kümeye sahiptir. $V \subset H$ kompakt gömülmesi dikkate alındığında $S(t)$ kompakttır [9, 14, 15].

4.3. Yerel Olmayan Çekici'nin Varlığı

Teorem 3.2'den [24] (1.11)-(1.15) sistemi Yerel Olmayan Çekici'ye sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Benard Problemi fiziksel olarak ısı iletiminin akış hareketlerini belirler. Bu problem bilim adamları tarafından çeşitli sınır koşulları altında incelenmiştir. Sistemde yer alan ısı denklemi için maksimum değerler verilerek problemin çözümlerinin varlığı, sistemin yutan kümesinin varlığı ve yerel olmayan çekicilerin varlığı hakkında önemli sonuçlar elde edilmiştir [6]. Matematiksel olarak önemli olan bu sonuçlar tezde literatürde var olan kaynaklardan araştırılarak çalışılmıştır. Böyle çeşitli akış hareketlerini ifade eden pek çok modeller günümüzdeki bilim adamları tarafından önerilmektedir. Bu modellerin inceleme ve araştırılmasından tezde incelenen araştırma ışığında yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Adams, R.A. (1975). SobolevSpaces, ***Academic Press,*** New York, 23-79.

2. Birnir B., Svanstedt N. (2004). Existence theory and strong attractors for the Rayleigh-Benard problem with a large aspect ratio, Discrete and Continuous Dynamical Systems,10(1-2).

3. Cabral M., Rosa R., Temam R. (2004). Existence and dimension of theattractor for Benard problem on channel-like domains, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 10(1-2).

4. Chandrasekhar S. (1961). Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford Universty Pres.

5. Evans, L.C. (2000). Partial Differential Equations, ***AMS,***613-651.

6. Foias C., Manley O., Temam R. (1987). Attractors for the Benard problem: existence and physical bounds on their fractal dimension, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 11(8), 939-967.

7. Galdi, G.P. (2000). An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem, Fundamental Direction in Mathematical Fluid Mechanics, ***Adv. Math. Fluid Mech.,***Birkhauser, Basel,1-70.

8. J.M. Ghidaglia, (1984). Etude d'écoulements de fluides visqueux incompressibles: comportement pour les grands temps et applications aux attracteurs, Thése de 3e Cycle, Université Paris Sud, Orsay.

9. Hale J.K. (1988). Asymptotic Behaviour of dissipative Systems, Mathematical Survey and Monographs, 25 American Mathematical Society, Providence, RI.

10. Kapusyan O.,V., MelnikV.S., Valero J. (2007). A Weak Attractor and Properties of solutions for the three-dimensional Benard Problem, \ Discrete and Continuous Dynamical Systems, 18(2-3).

11. Kaya, M., Çelebi, A. O. (2009). Existence of weaksolutions of the g-Kelvin-Voightequation, ***Math. Comput. Modelling,*** 49(3-4), 497-504.

12. Kesevan, S. (1989). Topics in Functional Analysis And Applications, ***John Wiley&Sons,*** India,1-95.

13. Ladyzhenskaya, O.A. (1969). The Matematical Theory of Viscous Incompressible Flow, ***Gordon and Breach,*** New York,7-11.

14. Ladyhenskaya O.A. (1987). On the determination of minimal global attractors for the Navier Stokes and other \ partial differential equations, Uspekhi Math. Nauk, 42(6), 25-60, Russian Math. Survey, 42(6), 27-73.

15. Ladyhenskaya O.A. (1985). Finite dimensionality of bounded invariant sets for Navier-Stokes systems and other dissipative systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI 115 (1982), 137-155, J.Soviet Math., 28, 714-726.

16. Ly H. V., Titi E.S. (1992). Global Gevrey regularity for the Benard Convection in a porous medium with zero Darcy-Prandtl number, J.Nonlinear Sci., 9, 333-362.

17. Morimoto Hiroko, Non-stationary Boussinesq equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. Math. 39, 61-75.

18. Rama Mohana Rao, M. (1979). Ordinary Differential Equations: Theory and Applications. ***Edward Arnold,***1-52.

19. Robinson, J. C. (2001). Infinite- Dimensional Dynamical Systems, ***Cambridge University Press***,109-256.

20. Sell, G. R.,You, Y. (2002). Dynamics of Evolutionary Equations*,* ***Springer-Verlag,*** 61-115.

21. Şuhubi, E. (2001). Fonksiyonel Analiz, ***İTÜ Vakfı Yayınları,*** İstanbul, 322-516.

22. Temam, R. (1977). Navier Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis, ***NorthHolland Publishing Company***, 247-291.

23. Temam, R. (1983). Navier Stokes Equations and Nonlineer Functional Analysis, ***Siam,Philadelphia,***1-35.

24. Temam, R. (1997). Infinite- Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, ***Springer-Verlag***, New York, 43-80.

25. Zeidler, E. (1990). Nonlinear functional analysis and its Applications, II/A: Linear Monotone Operators, ***Springer – Verlag,*** New York, 229-271.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ALAN, Sefa
Uyruğu	: T.C.
Doğumtarihi ve Yeri	: 17.04.1986, Yalova
Medenihali	: Bekar
Telefon	: 0 (535) 3387045
E-Posta	: sefaalan@gmail.com

Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Uygulamalı Matematik	2014
Lisans	Kocaeli Üniversitesi/Matematik	2009
Lise	Şehit Osman Altınkuyu Anadolu Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2009-2010	Milli Eğitim Bakanlığı Yalova E.M. Lisesi	Ücretli Öğretmen
2011-2014	Yalova Pi Analitik Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Hobiler

Yüzme, Araba ile ilgili aktiviteler, DVD Film, Kitap, Müzik dinleme, Keman çalma, Şarkı Söyleme.

GAZİ GELECEKTİR...