

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**İLETİŞİM AĞLARI VE ZEDELENEBİLİRLİK  
ÖLÇÜMLERİ**

**Gürdal ÇELİK**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ**

**İkinci Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Bilim Dalı Kodu : 619.03.03**

**Sunuş Tarihi : 14.03.2014**

**Bornova-İZMİR**

**2014**



**Gürdal ÇELİK** tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “**İletişim Ağları ve Zedelenebilirlik Ölçümleri**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 14.03.2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:**

**İmza**

**Jüri Başkanı** : .....

.....

**Raportör Üye** : .....

.....

**Üye** : .....

.....



# EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**İletişim Ağları ve Zedelenebilirlik Ölçümleri**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

14.03.2014

Gürdal ÇELİK



**ÖZET****İLETİŞİM AĞLARI VE ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ**

ÇELİK, Gürdal

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

İkinci Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT

Mart 2014, 27 sayfa

Bir iletişim ağının bazı merkezlerinin veya bağlantı hatlarının bozulması sonucunda, ağdaki iletişim kesilene kadar geçen sürede ağın dayanma gücünün ölçümüne o ağın zedelenebilirlik değeri denir. Bir iletişim ağının merkezleri bir  $G$  grafının tepelerine, bağlantı hatları ise grafın ayrıtlarına karşılık getirilebilir ve böylece bir iletişim ağı, bir  $G$  grafi ile modellenebilir. Bu durumda, bir iletişim ağının zedelenebilirlik değerini ölçmek için, graflar üzerinde tanımlanmış bazı ölçümler kullanılmaktadır. Bir  $G$  grafının, zedelenebilirlik değerinin ölçülebilmesi için bağlantılılık (connectivity), bütünlük (integrity), saçılma (scattering), dayanıklılık (toughness) sayısı ve çatlak derecesi (rupture degree) gibi ölçümler tanımlanmıştır.

Birinci bölümde, bazı temel graf tanımları verilmiştir.

İkinci bölümde, zedelenebilirlik (vulnerability) tanımı verildikten sonra, tepe bağlantılılık (vertex connectivity) sayısının tanımı verilmiş ve bu ölçümün bazı graflar için neden ayırt edici olmadığı belirtilmiştir. Ardından, graflarda zedelenebilirlik değerini belirlemek için, bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge integrity) ve tepe komşu bütünlük (vertex neighbor integrity) ölçümleri ele alınmıştır. Ayrıca, bu konularda literatürde yer alan sonuçlar listelenmiştir.

Üçüncü bölümde,  $K_n$  ( $n=2,3,4$ ) tam grafının ve  $E_p^t$  ( $p=1,2, 3$  ve  $t=3$ ) ağaç grafının kartezyen çarpımları oluşturulmuş ve elde edilen  $(K_2 \times E_1^3)$ ,  $(K_2 \times E_2^3)$ ,  $(K_2 \times E_3^3)$ ,  $(K_3 \times E_1^3)$ ,  $(K_3 \times E_2^3)$ ,  $(K_3 \times E_3^3)$ ,  $(K_4 \times E_1^3)$ ,  $(K_4 \times E_2^3)$ ,  $(K_4 \times E_3^3)$  graflarının bütünlük (integrity) değerleri hesaplanmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Zedelenebilirlik, Tepe Bağlantılılık Sayısı, Bütünlük Değeri, Ayrıt Bütünlük, Tepe Komşu Bütünlük



**ABSTRACT****NETWORKS AND VULNERABILITY MEASURES**

ÇELİK, Gürdal

Master Thesis, Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Co-Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT

March 2014, 27 pages

As a result of a disruption in various centers or connections of a network, measuring the staying power of the network until the communication is corrupted, is called; the vulnerability value of the network. Centers of the communication networks could be corresponded to the vertices of a  $G$  graph, although, communication lines could be corresponded to the edges of the graph. Thereby, a communication network can be modelled with a graph  $G$ . In view of the circumstances, some measurements which are defined on graphs, are used to measure the vulnerability value of a communication network. Some measure like; connectivity, integrity, scattering, toughness and rupture degree, are described in order to measure the vulnerability value of a graph  $G$ .

Some fundamental graph definitions are given in the first section.

In the second chapter, after primarily describing the vulnerability, the definition of vertex connectivity number is given and the reason of the measurement not being distinguishing is specified for some graphs. Subsequently, integrity, edge integrity and vertex neighbor integrity are given in order to determine the value of vulnerability in the graphs. Additionally, the results in the literature are listed about these themes.

In the third chapter, cartesian products of  $K_n$  ( $n=2,3,4$ ) and  $E_p^t$  ( $p=1,2,3$  and  $t=3$ ) tree graph are formed, and the integrity values obtained of the  $(K_2 \times E_1^3)$ ,  $(K_2 \times E_2^3)$ ,  $(K_2 \times E_3^3)$ ,  $(K_3 \times E_1^3)$ ,  $(K_3 \times E_2^3)$ ,  $(K_3 \times E_3^3)$ ,  $(K_4 \times E_1^3)$ ,  $(K_4 \times E_2^3)$ ,  $(K_4 \times E_3^3)$  graphs are calculated.

**Keywords:** Vulnerability, Vertex Connectivity, Integrity, edge integrity, vertex neighbor integrity.



## TEŞEKKÜR

Çalışmam sırasında bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen, tez danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ 'a ve Sayın Yard. Doç. Dr. Refet POLAT 'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca her konuda bana destek veren sevgili aileme ve dostlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	vii
ABSTRACT .....	ix
TEŞEKKÜR .....	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xv
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	xvii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xix
1. GİRİŞ .....	1
1.1 Temel Graf Tanımları .....	1
2. ZEDELENEBİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ .....	5
2.1 Tepe Bağlantılılık Sayısı .....	5
2.2 Bütünlük .....	7
2.3 Ayrıt Bütünlük .....	10
2.4 Tepe Komşu Bütünlük .....	12
3. $K_n$ ( $n=2,3$ ve $4$ ) ve $E_p^t$ ( $p=1,2,3$ ve $t=3$ ) GRAFLARININ KARTEZYEN ÇARPIMI ve BÜTÜNLÜK DEĞERİ .....	15
3.1 $K_2 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri .....	15
3.1.1 $K_2 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri .....	15
3.1.2 $K_2 \times E_2^3$ Grafının bütünlük değeri .....	16
3.1.3. $K_2 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri .....	18

## İÇİNDEKİLER (devam)

### Sayfa

3.2 $K_3 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri .....	19
3.2.1 $K_3 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri .....	19
3.2.2 $K_3 \times E_2^3$ Grafının bütünlük değeri .....	20
3.2.3 $K_3 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri .....	22
3.3 $K_4 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri .....	23
3.3.1 $K_4 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri .....	23
3.3.2 $K_4 \times E_2^3$ Grafının bütünlük değeri .....	24
3.3.3 $K_4 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri .....	25
4. SONUÇ .....	27
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	29

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1.1. $K_2$ , $K_3$ ve $K_2 \times K_3$ kartezyen çarpımı sonucu oluşan graf .....	3
1.1.2. $B_0$ , $B_1$ , $B_2$ , $B_3$ ve $B_p$ grafları .....	4
1.1.3 $E_p^t$ grafi .....	4
2.1.1. G ve H grafları .....	4
2.1.2. G - $\{v_1, v_4, v_7\}$ ve H - $\{v_1, v_3, v_5\}$ grafları .....	5



**ÇİZELGELER DİZİNİ**ÇizelgeSayfa

4.1  $(K_2 \times E_1^3)$ ,  $(K_2 \times E_2^3)$ ,  $(K_2 \times E_3^3)$ ,  $(K_3 \times E_1^3)$ ,  $(K_3 \times E_2^3)$ ,  $(K_3 \times E_3^3)$ ,  
 $(K_4 \times E_1^3)$ ,  $(K_4 \times E_2^3)$ ,  $(K_4 \times E_3^3)$  graflarının bağlantılılık ve bütünlük değerleri...27



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$V(G)$	G grafinin tepeler kümesi
$E(G)$	G grafinin ayrıtlar kümesi
$\delta(G)$	G grafinin en küçük tepe derecesi
$\Delta(G)$	G grafinin en büyük tepe derecesi
$\kappa(G)$	G grafinin tepe bağlantılılık sayısı
$\lambda(G)$	G grafinin ayrıt bağlantılılık sayısı
$\alpha(G)$	G grafinin örtü sayısı
$\beta(G)$	G grafinin bağımsızlık sayısı
$\tau(G)$	G grafinin dayanıklılık sayısı
$\chi(G)$	G grafinin kromatik sayısı
$I(G)$	G grafinin bütünlük sayısı
$I'(G)$	G grafinin ayrıt bütünlük sayısı
$VNI(G)$	G grafinin tepe komşu bütünlük sayısı
$\omega(G/S)$	$G/N[S]$ grafinin en büyük bileşenin eleman sayısı
$N[u]$	u'nun kapalı komşuluğu
$N(u)$	u'nun açık komşuluğu
$ S $	S kümesinin eleman sayısı
$m(G - S)$	$G - S$ grafinin en büyük boyutlu bileşenin eleman sayısı

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)**

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
$P_p$	p tepeli bir yol graf
$C_p$	p tepeli bir çevre graf
$K_p$	p tepeli bir tam graf
$K_{1,p}$	p+1 tepeli bir yıldız graf
$C_{p-r,r}$	Komet graf
$K_{p,r}$	İki parçalı tam graf

## 1.GİRİŞ

İletişim çağımızın vazgeçilmezleri arasında yer almaktadır. Gelişen teknolojiyle birlikte günümüzde insanlar ve sistemler arasındaki iletişimin hızlı, kesintisiz ve güvenilir olması önem arz etmekte, bu bileşenlerin sürdürülebilirliği adına ağın dayanıklılığı ise üzerinde çalışılması gereken önemli bir unsur olmaktadır. Saniyede milyarlarca veri iletimi sağlayan ve insanlığın hayatını kolaylaştıran ülkeler arası fiber optik internet kabloları günümüz iletişim ağlarının en önemli örneklerinden bir tanesi olarak gösterilebilir. Dolayısıyla bu bağlantının bir anlık duraksaması bile küresel anlamda büyük maddi kayıplara yol açabilmektedir. İletişim ağlarındaki olası zararlar bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının zarar görmesi sonucu oluşmaktadır. **Burada, önemli olan soru, herhangi bir problem karşısında ağın ne kadar zarar gördüğü ve iletişim tamamen kesilmeden ne kadar süre daha işlevini yerine getireceğidir.**

Bu soruların cevaplarını araştırmak ve çözümler üretebilmek için bir iletişim ağı graflar ile modellenmektedir. Bu modellemede iletişim ağının merkezleri grafin tepelerine, bağlantı hatları ise grafin ayrıtlarına karşılık gelir. İletişim ağı graf ile modellendiğinde, bu ağın dayanma gücü bazı parametreler kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bu hesaplamalar ile sistemimizi nasıl modellersek daha az zarar göreceğini ve iletişimi bazı olumsuzluklara rağmen en uzun süre nasıl sağlayabileceğimizi görebiliriz. Elde edilen sonuçlar ile sistemi ayakta tutabilmek için veya daha dayanıklı yapılar oluşturmak için ne yapılması gerektiğine karar verilebilir.

### 1.1 Temel Graf Tanımları

Bu kısımda, öncelikle bazı tanımlar verilmiştir.

**Tanım 1.1.1.** (Harary, 1972) Bir  $G$  grafinin, her bir tepesinden grafin diğer tüm tepelerine ulaşılabiliriyorsa, bu grafa **bağlantılı** (connected) graf denir.

**Tanım 1.1.2.** (Harary, 1972) Bir  $G$  grafinin, her bir tepesinden grafin diğer tüm tepelerine ulaşamıyor ise, bu grafa **bağlantısız** (disconnected) graf denir.

**Tanım 1.1.3.** (Harary, 1972) Bir  $G$  grafinin herhangi bir  $v$  tepesinin derecesi  $o$  tepeye bitişik olan ayrıtların sayısı olarak tanımlanır ve  $deg(v)$  ile gösterilir. Derecesi sıfır olan tepelere **izole tepe** denir.

**Tanım 1.1.4.** (Harary, 1972)  $p$  tepeli bir  $G$  grafinin, tüm tepe derecelerinin en küçüğüne,  $G$  grafinin en küçük tepe derecesi denir ve  $\delta(G)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.1.5.** (Harary, 1972)  $p$  tepeli bir  $G$  grafının, tüm tepe derecelerinin en büyüğüne,  $G$  grafının en büyük tepe derecesi denir ve  $\Delta(G)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.1.6.** (Harary, 1972)  $p$  tepeli bir  $G$  grafının, tüm tepe dereceleri birbirine eşit ise bu grafa **düzenli** (regular) graf denir.

**Tanım 1.1.7.** (Harary, 1972) Uç tepeleri 1 dereceli, iç tepeleri ise 2 dereceli olan grafa **yol graf** (path graph) denir ve  $p$  tepeli bir yol graf  $P_p$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.8.** (Harary, 1972) Tüm tepeleri 2 dereceli olan grafa **çevre graf** (cycle graph) denir ve  $p$  tepeli bir yol graf  $C_p$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.9.** (Harary, 1972)  $p$  tepeli bir  $G$  grafının, tüm tepeleri  $p-1$  dereceli ise  $G$  grafına **tam graf** (complete graph) denir ve  $K_p$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.10.** (Harary, 1972)  $(p+1)$  tepeli birleştirilmiş bir  $G$  grafının, sadece bir tepesi  $p$  dereceli diğer tüm tepeleri 1 dereceli ise bu grafa **yıldız graf** (star graph) denir ve  $K_{1,p}$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.11.** (Bondy and Murty, 1976) Bir  $G$  grafında  $(u,v)$  tepe çifti arasında en az  $k$  tane birbirinden ayrık yol varsa  $G$  grafi  $k$ -bağlantılı graf olarak adlandırılır.

**Tanım 1.1.12.** (Bondy and Murty, 1976) Bağlantılı bir  $G$  grafını, bağlantısız bir graf, ya da tek bir izole tepeden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılması gereken en az tepe sayısına grafın **tepe bağlantılılık** (vertex connectivity) sayısı denir ve  $\kappa(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.13.** (Bondy and Murty, 1976) Bağlantılı bir  $G$  grafını, bağlantısız ya da tek bir izole tepeden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılması gereken en az ayrıt sayısına grafın **ayrıt bağlantılılık** (line connectivity) sayısı denir ve  $\lambda(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.14.** (Bondy and Murty, 1976)  $G$  bir graf ve  $S \subset V(G)$  olsun.  $G$  grafındaki her bir ayrıtın en az bir uç noktası,  $S$  kümesinin bir elemanı ise bu kümeye örtü kümesi, bu kümeler içinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına da grafın **örtü sayısı** (covering number) denir ve  $\alpha(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.15.** (Bondy and Murty, 1976)  $G$  bir graf ve  $S \subset V(G)$  olsun.  $S$  kümesindeki tüm tepeleri ikişerli olarak ele aldığımızda bu tepeler  $G$  grafında bir ayrıta sahip değilse, bu kümeye bağımsız küme denir. Bir  $G$  grafi en az bir bağımsız kümeye sahiptir. Bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman

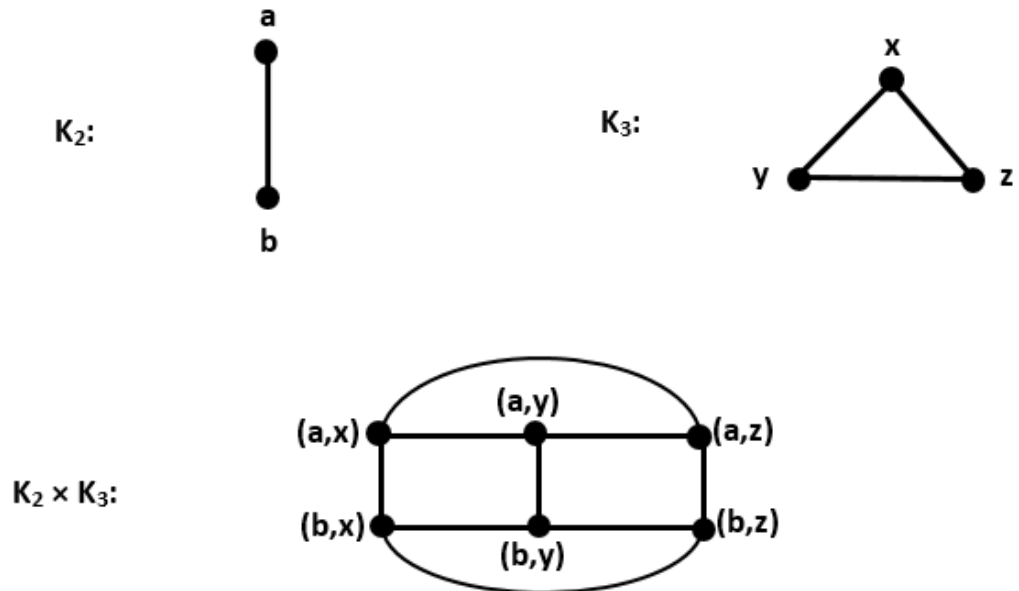
sayısına  $G$  grafinin **bağımsızlık sayısı** (independence number) denir ve  $\beta(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.16.** (Chvatal, 1973) Bir  $G$  grafinin kesim tepesi  $S$  ve  $G - S$  grafinin bileşenlerinin sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere, bu grafin **dayanıklılık** (toughness) sayısı

$$\tau(G) = \min_S \left\{ \frac{|S|}{m(G - S)} \right\} \text{ 'dir.}$$

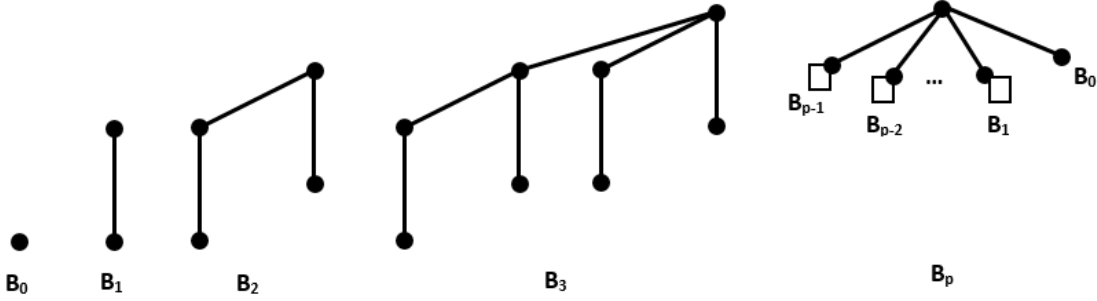
**Tanım 1.1.17.** (Bondy and Murty, 1976)  $G$ ,  $p$ -tepeli bir graf olsun.  $G$  grafinin, birbirine komşu olan tepeleri farklı renkte olacak şekilde, grafin tüm tepelerini boyamak için gerekli olan en az renk sayısına, bu grafin **kromatik sayısı** (chromatic number) denir ve  $\chi(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.1.18.** (Harary, 1972) (**Graflarda kartezyen çarpım işlemi**): Herhangi iki  $G$  ve  $H$  grafinin kartezyen çarpımı  $G \times H$  şeklinde gösterilir.  $G$ 'nin tepeler kümesi  $V_G$  ve  $H$ 'nin tepeler kümesi  $V_H$  olmak üzere  $G \times H$ 'nin tepeler kümesi bu kümelerin kartezyen çarpımıdır. Kartezyen çarpım işleminden oluşacak yeni grafin ayrıtları şu şekilde belirlenir.  $G$  ve  $H$  grafinin herhangi iki tepesi  $u=(u_1, u_2)$  ve  $v=(v_1, v_2)$  olsun. Eğer,  $u_1=v_1$  ve  $u_2$  ile  $v_2$  komşu ise ya da  $u_2=v_2$  ve  $u_1$  ile  $v_1$  komşu ise bu iki tepe ayrıtlarla birleştirilir.  $G$ 'nin tepe sayısı  $p$  ve  $H$ 'nin tepe sayısı  $n$  ise  $G \times H$  grafinin tepe sayısı  $p \times n$ 'dir.  $G$  grafinin ayrıtlarının sayısı  $x$  ve  $H$  grafinin ayrıtlarının sayısı  $y$  ise  $G \times H$  grafinin ayrıtlarının sayısı  $(p \times y) + (n \times x)$  olacaktır.



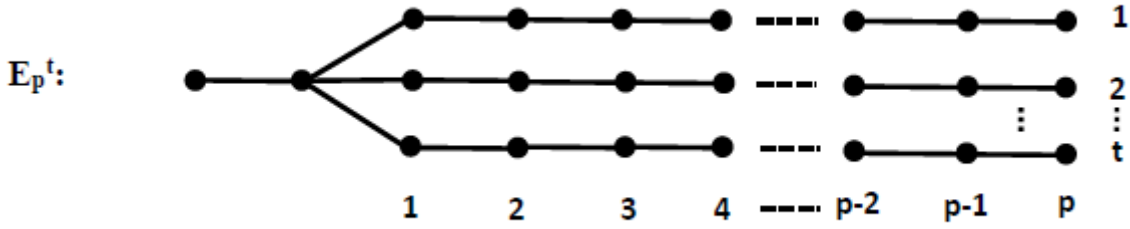
Şekil 1.1.1.  $K_2$ ,  $K_3$  ve  $K_2 \times K_3$  kartezyen çarpımı sonucu oluşan graf.

**Tanım 1.1.19.** (Cormen et al., 1990)  $p$  pozitif bir tamsayı olmak üzere, binomial ağaç  $B_p$  rekürsif olarak tanımlanan bir ağaçtır.  $B_p$  ağacı, Şekil 1.1.2’de görülebileceği gibi iki tane  $B_{p-1}$  grafinin birbirine bir ayrıt ile bağlanmasıyla oluşturulur.



Şekil 1.1.2.  $B_0, B_1, B_2, B_3$  ve  $B_p$  grafları.

**Tanım 1.1.20.** (Cormen et al., 1990)  $E_p^t$  grafi  $t$  adet bacağı bulunan ve her bacağında  $p$  tane tepesi bulunan bir graftır.  $E_p^t$  grafinin tepe sayısı  $n=pt+2$  dir.



Şekil 1.1.3  $E_p^t$  grafi

## 2. ZEDELENE BİLİRLİK ÖLÇÜMLERİ

Bu bölümde, öncelikle zedelenebilirlik kavramının tanımı verilmiş ve iletişim ağlarını modelleyen grafların zedelenebilirlik değerini belirlemek için kullanılan iki ölçüm ele alınmıştır. Aslında bu ölçümler, bir  $G$  grafinin ne kadar zedelendiğini ortaya koymak için sorulan sorulara yanıt aramaktadır.

**Tanım:** (Barefoot et al., 1987a) Zedelenebilirlik (Vulnerability), bir iletişim ağının bazı merkezlerinin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla, ağda iletişim tümüyle kesilene kadar ağın dayanma gücünün ölçümüdür.

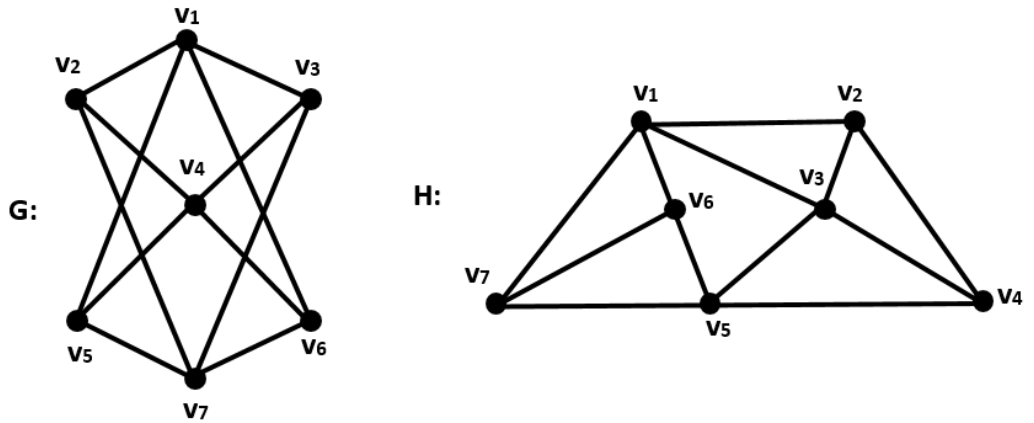
Bu tanımı kullanarak, bir iletişim ağının zedelenebilirlik değerini belirlemek için çeşitli ölçümler tanımlanmıştır. Bu ölçümlerden bazıları, tepe bağlantılılık (vertex connectivity), bütünlük (integrity), saçılma (scattering), dayanıklılık (toughness) ve çatlak (rupture degree) derecesidir.

### 2.1 Tepe Bağlantılılık Sayısı

Zedelenebilirlik tanımını, kullanarak bir iletişim ağının (veya ağı modelleyen grafin) zedelenebilirlik değerini araştırmak için şu soru sorulabilir:

**Soru:** Bir iletişim ağında (ağı modelleyen grafda), iletişimin tümüyle kesilebilmesi (grafın bağlantısız graf olması ya da tek bir izole tepe haline gelmesi) için ağdan (graftan) çıkarılması gereken en az merkez (tepe) sayısı nedir? (Bondy and Murty, 1976)

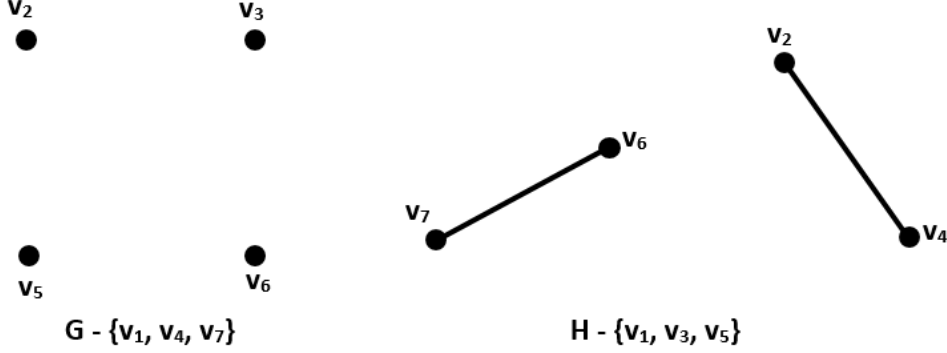
Aslında, bu soru bir  $G$  grafinin tepe bağlantılılık (connectivity) sayısına karşılık gelir ve tepe bağlantılılık sayısı, bir  $G$  grafinin zedelenebilirlik değerini araştırmak için kullanılan en temel ölçümdür. Aşağıdaki iki grafi ele alalım.



Şekil 2.1.1. G ve H grafları

Şekil 2.1.1'de verilen G grafinin  $v_1$ ,  $v_4$  ve  $v_7$  tepeleri H grafinin ise  $v_1$ ,  $v_3$  ve  $v_5$  tepeleri atıldığında graflar bağlantısız hale gelecektir. Yani G ve H graflarının tepe

bağlantılılık sayısı  $\kappa(G) = \kappa(H) = 3$  olup, geriye kalan graflar (bileşenler) Şekil 2.1.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1.2. G - {v<sub>1</sub>, v<sub>4</sub>, v<sub>7</sub>} ve H - {v<sub>1</sub>, v<sub>3</sub>, v<sub>5</sub>} grafları

Elde edilen 3 değeri, sadece graflardan atılacak tepe sayısı olup, bu değerler geriye kalan grafin yapısı (örneğin bileşenlerin boyutu, sayısı, ayrıt sayısı gibi) hiçbir bilgi vermemektedir. Ancak, bir iletişim ağının zedelenebilirliğinin analizinde geriye kalan grafin yapısının mümkün olduğunca çok bilinmesi gereklidir.

Kabul edelim ki, G ve H gibi iki grafin bağlantılılık sayıları birbirinden farklı olsun. Bu durumda grafların yapıları bilinmese bile, bu grafların birbirinden farklı graflar olduğu kolayca söylenebilir. Ancak, G ve H gibi iki grafin bağlantılılık sayıları aynı ise ve bu grafların yapıları bilinmiyorsa, bu iki grafin birbirinden farklı graflar olduğunu kesin olarak söylemek zordur. Bu durumda, bağlantılılık sayısının verilen iki G ve H grafi için ayırt edici olmadığı söylenebilir. Gerçekten, yukarıdaki örnekte,  $\kappa(G) = \kappa(H) = 3$  olup, tepe bağlantılılık sayısı Şekil 2.1.1’deki graflar arasında ayırt edici bir ölçüm değildir.

Yukarıdaki bilgilerin ışığında, bağlantılılık sayısı verilen bir grafin bağlantısız yapılabilmesi için grafdan en az, kaç tane tepe atılması gerektiğini belirtirken geriye kalan graf hakkında hiçbir bilgi vermemektedir. Ancak, geriye kalan grafin yapısı hakkında da bilgiye sahip olunsaydı, bu grafin ne kadar zedelendiği hakkında daha çok bilgi edinilebilirdi.

Sonuç olarak, grafların zedelenebilirlik değerini araştırmak için tepe bağlantılılık sayısı yeterli bir ölçüm değildir. Bu nedenle, grafların zedelenebilirlik değerlerini belirlemek için aşağıdaki gibi başka sorularda sorulabilir:

1. İletişim ağında zarar gören ayrıtların sayısı.
2. İletişim ağı zarar gördükten sonra geriye kalan alt ağın sayısı.
3. İletişim ağı zarar gördükten sonra iletişimin devam ettiği ve en çok merkeze sahip alt ağın eleman sayısı.
4. İletişim ağı zarar gördükten sonra iletişimin devam ettiği ve en az merkeze sahip alt ağın eleman sayısı.

5. İletişim ağında bozulan merkezlerin sayısının, geriye kalan alt ağların sayısına oranı.

Yukarıdaki gibi sorular daha da çoğaltılabilir. Bu sorulardan, bir ya da bir kaç ele alınarak bir iletişim ağının zedelenebilirlik değerini araştırmak için yeni ölçümler oluşturulmuştur. Bütünlük kavramı da bu ölçümlerden birisidir.

## 2.2 Bütünlük

Bir iletişim ağının zedelenebilirliğinin analizinde, ağın zedelenebilirlik değerini elde etmek için aşağıdaki iki soru Barefoot ve arkadaşları tarafından ele alınmıştır. (Bagga et al., 1992; Barefoot et al., 1987a)

1. Ağda, bozulan merkezlerin sayısı kaç tanedir?
2. Ağda, halen iletişimin sürdüğü en çok elemana sahip alt ağın eleman sayısı nedir?

Barefoot, Entringer ve Swart (Barefoot et al., 1987a) bu iki soruyu temel olarak almış ve bu soruların yanıtlarının eş zamanlı olarak en küçük olmasını amaçlayarak bütünlük (integrity) kavramını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

**Tanım 2.2.1.** (Barefoot et al., 1987a)  $G$  bir graf ve  $G$  nin tepelerinin herhangi bir alt kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafının en büyük boyutlu bileşeninin eleman sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere bir  $G$  grafının tepe bütünlük (vertex integrity) değeri

$$I(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Şekil 2.1.1'deki graflar arasında bağlantılılık ölçümünün ayırt edici olmadığı belirtilmişti. Ancak, bu graflar için  $I(G)=4$  ve  $I(H)=5$  olup, bütünlük ölçümünün bu graflar arasında ayırt edici olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle, bazı graf türlerinin zedelenebilirlik değerini araştırmak için bütünlük ölçümü bağlantılılık sayısına göre daha iyi bir ölçümdür.

Bir  $G$  grafının bütünlük değeri, çeşitli graflar için araştırılmış ve elde edilen sonuçların bazıları aşağıda listelenmiştir. Listelenen bu sonuçların bir kısmı da Bagga ve arkadaşları tarafından hazırlanan bir özet makalede yer almıştır (Bagga et al., 1992).

**Teorem 2.2.2.** (Barefoot et al., 1987a; 1987b)

- a)  $K_p$  tam grafının tepe bütünlük sayısı  $p$ 'dir;
- b)  $\bar{K}_p$  boş grafının tepe bütünlük sayısı  $1$ 'dir;
- c)  $K_{1,p}$  yıldız grafının tepe bütünlük değeri  $2$ 'dir;

- d)  $P_p$  yol grafinin tepe bütünlük değeri  $\lceil 2\sqrt{p+1} \rceil - 2$ 'dir;
- e)  $C_p$  çevre grafinin tepe bütünlük değeri  $\lceil 2\sqrt{p} \rceil - 1$ 'dir;
- f)  $C_{p-r,r}$  komet grafinin tepe bütünlük değeri, eğer  $r \leq \sqrt{p+1} - \frac{5}{4}$  ise,  $I(P_p)$ 'dir; aksi halde  $\lceil 2\sqrt{p-r} \rceil - 1$ 'dir;
- g)  $K_{p,r}$  iki parçalı tam grafin tepe bütünlük değeri  $1 + \min\{p, r\}$ 'dir;

**Teorem 2.2.3.** (Goddard and Swart, 1990a)  $G$ ,  $p$  tepeli bir graf olsun.

- a)  $I(G) = 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin boş graf olmasıdır.
- b)  $I(G) = p - 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  grafinin tam graf olmaması ve  $\bar{G}$  grafinin en az 5 tepeli bir kuşağa sahip olmasıdır.
- c)  $I(G) = p$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  grafinin tam graf olmasıdır.

Bir  $G$  grafinin bütünlük değeri için bazı alt ve üst sınırlar, çeşitli graf parametreleri kullanılarak aşağıda verilmiştir.

**Teorem 2.2.4.** (Goddard and Swart, 1990a; 1990b) Herhangi bir  $G$  grafi için,

- a)  $I(G) \leq \alpha(G) + 1$ ;
- b)  $I(G) \geq \delta(G) + 1$ ;
- c)  $I(G) \geq x(G)$ ;
- d)  $I(G) \geq (p - \kappa(G))/\beta(G) + \kappa(G)$ ;
- e)  $I(G) \geq 2\sqrt{\tau\rho} - \tau$ , eğer  $G$  tam graf değil ise.

**Teorem 2.2.5.** (Goddard and Swart, 1990a; 1990b) Herhangi bir  $G$  grafi için,

- a)  $\kappa(G) = \alpha(G)$  olması için gerek ve yeter koşul  $I(G) = \kappa(G) + 1$  olmasıdır.
- b)  $I(G) = \alpha(G) + 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$  grafinin indirgenmiş alt-graf olarak  $2K_2$ 'yi içermemesidir.

Aşağıdaki teorem, bir  $G$  grafinin ve tümleyeninin tepe bütünlük değerlerinin toplamı ve çarpımı için alt sınırlar vermektedir.

**Teorem 2.2.6.** (Bagga et al., 1992)  $p$  tepeli, herhangi bir  $G$  grafi için

- a)  $I(G) + I(\bar{G}) \geq \rho + 1$ ;
- b)  $I(G) \cdot I(\bar{G}) \geq \rho$ .

Teorem 2.2.7. de, iki grafin toplamının bütünlük değeri verilmektedir.

**Teorem 2.2.7.** (Goddard and Swart, 1988) Herhangi bir  $G$  ve  $H$  grafi için

$$I(G + H) = \min\{I(G) + |H|, I(H) + |G|\} \text{ 'dir.}$$

Bu teoremden, herhangi bir  $G$  grafi için  $I(G + K_r) = I(G) + r$  olduğu kolayca görülebilir. (Bagga et al., 1992)

Aşağıdaki teoremlerde, iki grafin kartezyen çarpımları ele alınmış ve elde edilen grafların bütünlük değeri hakkında bilgi verilmiştir.

**Teorem 2.2.8.** (Bagga et al., 1992) Herhangi bir  $G$  ve  $H$  grafi için,  
 $\max\{I(|G|H), I(|H|G)\} \leq I(G \times H) \leq \min\{I(G[H]), I(H[G])\}$  'dir.

**Teorem 2.2.9.** (Bagga et al., 1992) Herhangi bir  $G$  grafi için,

$$\frac{3}{2} I(G) \leq I(K_2 \times G) \leq 2I(G) \text{ 'dir.}$$

**Teorem 2.2.10.** (Atıcı ve Kırılancı, 2000)  $p$  bir tamsayı olmak üzere  $p \geq 3$ ,  
 $a = \lfloor \sqrt{p+1} \rfloor$  ve  $b = \lceil 2\sqrt{p+1} \rceil$  değerleri bir tamsayı olsun. Öyleyse,

$$I(K_2 \times P_p) = \begin{cases} 2I(P_p) - 1, & n + 1 \leq a \left( b - a - \frac{1}{2} \right) \text{ ise,} \\ 2I(P_p), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

**Teorem 2.2.11.** (Atıcı ve Kırılancı, 2000)  $p$  bir tamsayı olmak üzere  $p \geq 3$ ,  
 $a = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$  ve  $b = \lceil 2\sqrt{p} \rceil$  değerleri bir tamsayı olsun. Öyleyse,

- a)  $p = 3$  veya  $p = 4$  için,  $I(K_2 \times C_p) = 2I(C_p) - 1 = 5$ .  
b)  $p \geq 5$  için,

$$I(K_2 \times C_p) = \begin{cases} 2I(C_p) - 1, & p + 1 \leq a \left( b - a - \frac{1}{2} \right) \text{ ise,} \\ 2I(C_p), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

**Teorem 2.2.12.** (Goddard and Swart, 1988)  $p \geq r \geq 2$  olsun. Bu durumda,

$$I(K_{1,p-1} \times K_{1,r-1}) = \min\{p+r-1, 2r\} \text{ 'dir.}$$

**Teorem 2.2.13.** (Goddard and Swart, 1988)  $p \geq r \geq 2$  ise,

$$I(K_p \times K_r) = pr - \max_{1 \leq j < p} j \lfloor \frac{r(p-j)}{p} \rfloor \text{ 'dir.}$$

### 2.3 Ayrıt Bütünlük

Bir iletişim ağının merkezleri yerine bağlantı hatlarının da bozulabileceği düşünülebilir. Bu durumda, iletişim ağını modelleyen grafitan tepeler yerine ayrıtların atılması gereklidir ve geriye kalan ağın yapısını araştırmak için de yine yukarıdaki sorular kullanılabilir.

Bu düşünceyle hareket ederek, bir  $G$  grafinin ayrıt bütünlük ölçümü tanımlanmıştır.

**Tanım 2.3.1.** (Barefoot et al., 1987a)  $G$  bir graf ve  $G$  nin ayrıtlarının herhangi bir alt kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafinin en büyük boyutlu bileşenin eleman sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere bir  $G$  grafinin ayrıt bütünlük (edge integrity) değeri

$$I'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu konuda çeşitli araştırmacılar tarafından elde edilen sonuçlar aşağıda listelenmiştir.

**Teorem 2.3.1.** (Bagga et al., 1994)

- $K_p$  tam grafinin ayrıt bütünlük sayısı  $p$ 'dir;
- $\bar{K}_p$  boş grafinin ayrıt bütünlük sayısı  $1$ 'dir;
- $K_{1,p}$  yıldız grafinin ayrıt bütünlük değeri  $p + 1$ 'dir;
- $P_p$  yol grafinin ayrıt bütünlük değeri  $\lceil 2\sqrt{p} \rceil - 1$ 'dir;
- $C_p$  çevre grafinin ayrıt bütünlük değeri  $\lceil 2\sqrt{p} \rceil$ 'dir;
- $Q_p$   $p$ -küp grafinin ayrıt bütünlük değeri  $2^p$ 'dir;
- $K_{p,r}$  iki parçalı tam grafin ayrıt bütünlük değeri  $p + r$ 'dir;

Aşağıdaki teorem bir ağaç grafin ayrıt bütünlük değerini grafin maksimum tepe derecesine bağlı olarak vermektedir.

**Teorem 2.3.2.** (Bagga et al., 1994)  $T$ ,  $p$  tepeli bir ağaç graf ve  $\Delta(T)$ , grafin maksimum tepe derecesi olsun

- Eğer  $\Delta(T) \geq p/2$  ise,  $I'(T) = \Delta(T) + 1$ ;
- Eğer  $\Delta(T) < p/2$  ise,  $I'(T) \leq (p+3)/2$ .

Aşağıdaki teoremde bir  $G$  grafinin ayrıt bütünlüğü ile bütünlük ve maksimum tepe derecesi arasındaki ilişkiler verilmiştir.

**Teorem 2.3.3.** (Beineke et al., 1996)  $p$  tepeli herhangi bir  $G$  grafi için,

- a)  $I'(G) \geq \Delta(G) + 1$ ;
- b) Eğer  $G$  bağlantılı bir graf ise,  $I'(G) \geq 2\sqrt{p} - 1$ ;
- c)  $G$  grafının çapı 2 ise  $I'(G)=p$ .

**Tanım 2.3.2.** Bir  $G$  grafının ayrıt bütünlüğü grafın tepe sayısına eşit ise bu grafa güvenilir (honest) graf adı verilir. (Bagga et al., 1994)

**Teorem 2.3.4.** (Bagga et al., 1994)

- a)  $p$  tepeli, bir  $G$  grafının ayrıt bağlantılılığı  $\lambda \geq 2$  olmak üzere,

$$I'(G) \geq \min \{ \lceil 2\sqrt{p \cdot \lambda} \rceil, p \}.$$

- b) Çapı 2 olan her graf güvenilir graftır.

Aşağıda iki grafın kartezyen çarpımı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

**Teorem 2.3.5.** (Beineke et al., 1996) Herhangi bir  $G$  ve  $H$  grafi için,

- a)  $I'(G \times H) \leq I'(G) \cdot |V(H)|$ ;
- b)  $I'(G \times K_p) = p \cdot I'(G)$ ;
- c)  $I'(G \times H) \geq I'(G) \cdot (\delta(H) + 1)$ .

**Teorem 2.3.6.** (Bagga et al., 1994) Herhangi bir  $G$  ve  $H$  grafi için,

- a)  $I'(G \times H) \geq \max \{ (1 + \delta(G)) \cdot I'(H), (1 + \delta(H)) \cdot I'(G) \}$ ;
- b)  $I'(G \times H) \leq \min \{ |G| \cdot I'(H), |H| \cdot I'(G) \}$ .

İki grafın kartezyen çarpımının ayrıt bütünlüğü için aşağıdaki kesin sonuçlar elde edilmiştir.

**Teorem 2.3.7.** (Bagga et al., 1994; Beineke et al., 1996)

- a) Herhangi bir  $p$  ve  $r$  pozitif tamsayıları için,  $I'(P_p \times P_r) \geq \lceil 3(pr)^{2/3} - (p+r) \rceil$  ;
- b) Her  $p$  pozitif tam sayısı için,  $I'(P_3 \times P_p) = 3I'(P_p)$ ;
- c) Herhangi bir  $G$  grafi için  $I'(P_2 \times G) = 2I'(G)$ .

**Teorem 2.3.8.** (Bagga et al., 1994)

- a) Herhangi bir  $G$  grafi için,  $I'(C_3 \times G) = 3I'(G)$ ;
- b) Herhangi bir  $G$  grafi için,  $I'(C_4 \times G) = 4I'(G)$ ;
- c) Herhangi bir  $p$  pozitif tam sayısı için ( $p \geq 3$ ),  $I'(C_5 \times C_p) = 5I'(C_p)$ .

Yukarıdaki çalışmaların bazı ağaç grafların da ayrıt bütünlük değerleri belirlenmiştir.

**Teorem 2.3.9.** (Kırlangıç., 2001)  $p$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,  $B_p$  bir binomial ağaç olsun. Bu takdirde,

$$I'(B_p) = \begin{cases} 2^{(p+2)/2} - 1, & \text{eğer } p \text{ çift ise,} \\ 2^{(p-1)/2} + 2^{(p+1)/2} - 1, & \text{eğer } p \text{ tek ise.} \end{cases}$$

**Teorem 2.3.10.** (Kırlangıç., 2001)  $k$  bir tamsayı olmak üzere,  $1 \leq k \leq p$  için,

$$I'(E_p^k) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{pt+2} \rceil, & \text{eğer } \lceil kt + \frac{pt+2}{kt+1} \rceil > \lceil 2\sqrt{pt+2} \rceil - 1, \text{ her } k \text{ için,} \\ \lceil 2\sqrt{pt+2} \rceil - 1, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

## 2.4 Tepe Komşu Bütünlük

1996' da Cozzens ve Wu, tepe komşuluk bütünlük olarak isimlendirdikleri yeni bir graf parametresi tanımlamışlardır. Bu parametre tanımlanırken casus (spy) ağlar ele alınmıştır. Casus ağlarda, herhangi bir casusun yok olmasıyla onunla iletişimde olan diğer casuslarında yok olduğu göz önüne alınarak, bu ağları modelleyen graflarda zedelenebilirlik ölçümü araştırılmıştır. Ele alınan graflarda bir tepenin çıkarılmasıyla ona komşu olan tüm tepeler de graftan çıkarılmaktadır.

**Tanım 2.4.1.** (Cozzens and Wu, 1996) Bir  $G$  grafının herhangi bir tepesi  $u$  olsun.  $u$  'nun açık komşuluğu  $N(u) = \{v \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$  ve kapalı komşuluğu  $N[u] = \{u\} \cup N(u)$  'dır.

**Tanım 2.4.2.** (Cozzens and Wu, 1996)  $S \subseteq V(G)$  olsun,  $G$  grafından  $N[S]$  kümesindeki tüm tepelerin çıkartılmasıyla geriye kalan graf  $G/S$  şeklinde gösterilir ve kalan alt graf (survival subgraph) olarak isimlendirilir.

Cozzens ve Wu bir  $G$  grafının tepe komşuluk bütünlüğünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

**Tanım 2.4.3.** (Cozzens and Wu, 1996)  $G$  bir graf ve  $G$  nin tepelerinin herhangi bir alt kümesi  $S$  olsun.  $G/S$  grafının en büyük boyutlu bileşeninin eleman sayısı  $\omega(G/S)$  olmak üzere bir  $G$  grafının tepe komşu bütünlük (vertex neighbour integrity) değeri

$$VNI(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + \omega(G/S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu konuda elde edilen sonuçların bazıları aşağıda listelenmiştir.

**Teorem 2.4.1.** (Cozzens and Wu, 1996)  $P_p$  grafi,  $p$  tepeli bir yol graf olsun. Öyleyse,

$$VNI(P_p) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{p+3} \rceil - 4, & p \geq 2 \text{ ise,} \\ 1, & p = 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

**Teorem 2.4.2.** (Cozzens and Wu, 1998)  $p \geq 3$  olmak üzere,  $C_p$  grafi,  $p$  tepeli bir çevre graf olsun. Öyleyse,

$$VNI(C_p) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{p} \rceil - 3, & p > 4 \text{ ise,} \\ 2, & p = 4 \text{ ise,} \\ 1, & p = 3 \text{ ise.} \end{cases}$$

**Teorem 2.4.3.** (Cozzens and Wu, 1998)  $p$  tepeli çevre grafının  $k$  inci gücü  $C_p^k$  olsun ( $p \geq 3$  ve  $k \leq p/2$ ). Bu durumda,

$$VNI(C_p^k) = \begin{cases} \lceil 2\sqrt{p} \rceil - (2k + 1), & 1 \leq k < \frac{\sqrt{p}-1}{2} \text{ ise,} \\ \lceil \frac{p}{2k+1} \rceil, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

İki grafın kartezyen çarpımının tepe komşu bütünlük değeri için aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Teorem 2.4.4.** (Gambrell, 2000)

- a) Herhangi  $G$  ve  $H$  grafları için,  $VNI(G \times H) \geq \max\{VNI(G), VNI(H)\}$ ;
- b) Herhangi bir  $G$  grafi için,  $VNI(G \times P_p) \leq p \cdot VNI(G)$ ,

**Teorem 2.4.5.** (Kırlangıç, 2004)  $a = -1 + \lfloor \sqrt{2p+4} \rfloor$ ,  $b = -4 + \lceil \sqrt{2p+4} \rceil$  ve  $p \geq 34$  olsun. Bu durumda  $K_2 \times P_p$  grafının komşu bütünlük değeri  $VNI(K_2 \times P_p)$

$$\begin{cases} a + b, & p \leq \frac{1}{2} (ab + 4a + b - 2) \text{ ise,} \\ a + b + 1, & p > \frac{1}{2} (ab + 4a + b - 2) \text{ ve } p \leq \frac{1}{2} (ab + 4a + 2b + 2) \text{ ise,} \\ a + b + 2, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

**Teorem 2.4.6.** (Kırlangıç, 2004)  $a = \lfloor \sqrt{2p} \rfloor$ ,  $b = \lceil \sqrt{2p} \rceil - 4$  ve  $p \geq 39$  olsun. Bu durumda  $K_2 \times C_p$  grafinin komşu bütünlük değeri  $VNI(K_2 \times C_p)$

$$\begin{cases} a + b - 1, & p \leq \frac{1}{2} (ab + 3a) \text{ ise,} \\ a + b, & p > \frac{1}{2} (ab + 3a) \text{ ve } p \leq \frac{1}{2} (ab + 4a) \text{ ise,} \\ a + b + 1, & p > \frac{1}{2} (ab + 4a) \text{ ve } p \leq \frac{1}{2} (ab + 4a + b + 4) \text{ ise,} \\ a + b + 2, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Buraya kadar, zedelenebilirlik konusunda 2.2, 2.3 ve 2.4'te yer alan bütünlük, ayrıt bütünlük ve tepe komşu bütünlük tanımları ve bu konularda elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir. Literatürde yer alan çalışmalara bakıldığı zaman iki grafin kartezyen çarpımının tepe bütünlük, ayrıt bütünlük ve tepe komşu bütünlük değerini veren kesin bir sonuç bulunmamaktadır. Bu durum tez çalışmamızda, bazı özel grafların kartezyen çarpımlarının bütünlük değerini araştırmak için bizi motive etti. Çalışmalarımız sonucunda elde ettiğimiz bulgular, Bölüm 3 de verilmiştir.

### 3. $K_n$ ( $n=2,3$ ve $4$ ) ve $E_p^t$ ( $p=1,2,3$ ve $t=3$ ) GRAFLARININ KARTEZYEN ÇARPIMI ve BÜTÜNLÜK DEĞERİ

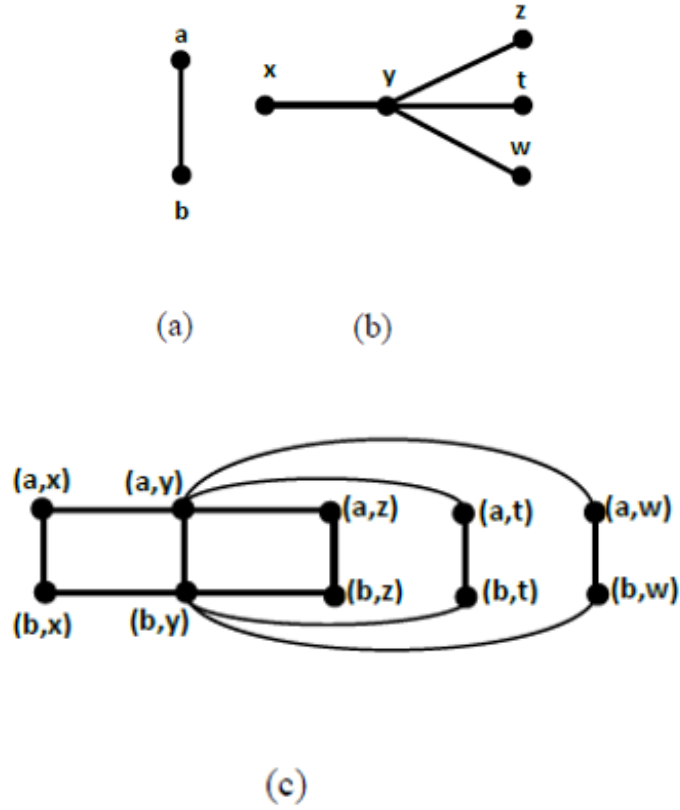
Bu bölümde,  $K_n$  ( $n=2,3$  ve  $4$ ) ve  $E_p^t$  ( $p=1,2,3$  ve  $t=3$ ) grafları ele alınmış ve bu grafların kartezyen çarpımından elde edilen yeni grafların bütünlük değerleri hesaplanmıştır.

#### 3.1 $K_2 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri

Bu kısımda, sırasıyla  $p=1, 2$  ve  $3$  alınarak,  $K_2 \times E_p^3$  graflarının bütünlük değerleri hesaplanmıştır.

##### 3.1.1 $K_2 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri

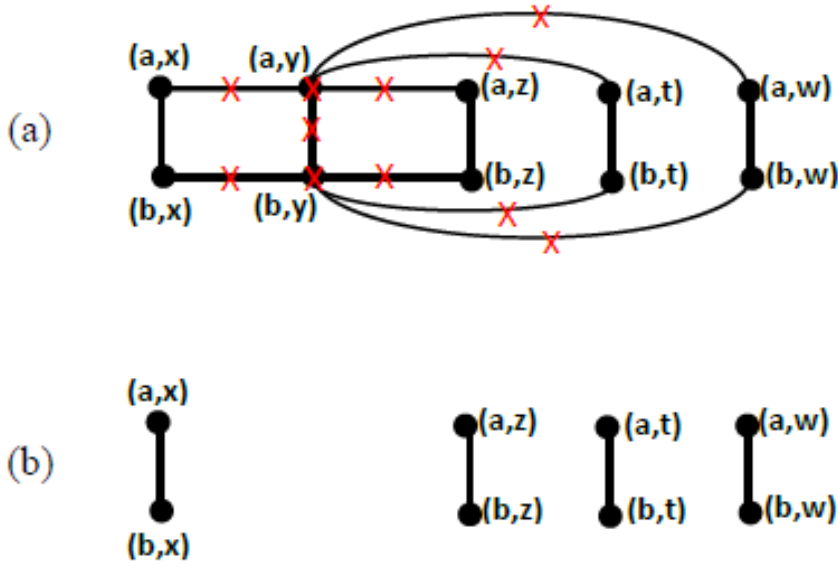
$K_2$ ,  $E_1^3$  ve  $K_2 \times E_1^3$  grafları Şekil 3.1.1.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.1.1.1 (a)  $K_2$  tam grafi (b)  $E_1^3$  grafi (c)  $K_2 \times E_1^3$  grafi

Tepe bütünlük tanımına göre, her  $S \subset V(K_2 \times E_1^3)$  alt kümesini ele alarak,  $\{|S| + m((K_2 \times E_1^3) - S)\}$  toplamını minimum yapan en uygun  $S$  kümesinin bulunması gereklidir. Bu durumda, tüm  $S$  alt kümeleri tek tek ele alındığında, iki durum ortaya çıkar:

Durum 1:  $S$  kümesi, Şekil 3.1.1.1 (c)'deki  $(a,y)$  ve  $(b,y)$  tepelerinden oluşsun.  $S = \{(a,y), (b,y)\}$  ise bu kümedeki tepelerin graftan çıkarılması ile oluşan yeni graf Şekil 3.1.1.2 (b)'deki gibidir.



Şekil 3.1.1.2 (a)  $K_2 \times E_1^3$  grafi (b)  $(K_2 \times E_1^3) - \{S\}$  grafi

Bu durumda,  $|S|=2$  ve  $m((K_2 \times E_1^3) - S)=2$  olup,  $K_2 \times E_1^3$  grafının tepe bütünlük değeri

$$I_1(K_2 \times E_1^3)=4. \quad (3.1)$$

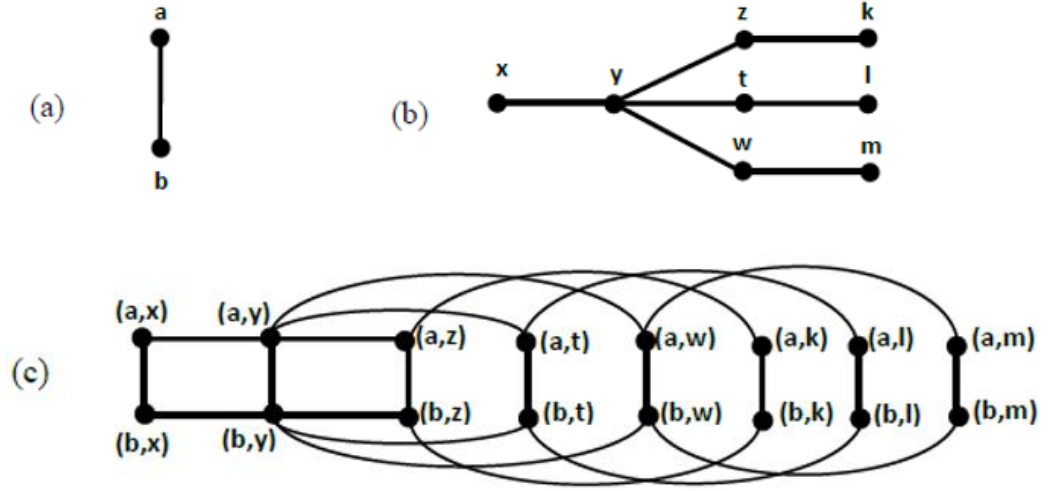
Durum 2:  $S \subset V(K_2 \times E_1^3)$  olmak üzere  $S \neq \{(a,y), (b,y)\}$  olsun. Bu durumda,  $S$  kümesi nasıl seçilirse seçilsin, daima  $\{|S|+m((K_2 \times E_1^3)-S)\}$  değerinin en az 4 olduğu görülebilir ve

$$I_2(K_2 \times E_1^3) \geq 4. \quad (3.2)$$

(3.1) ve (3.2) den,  $I(K_2 \times E_1^3)=\min\{I_1(K_2 \times E_1^3), I_2(K_2 \times E_1^3)\}=4$  'dür.

### 3.1.2 $K_2 \times E_2^3$ Grafının bütünlük değeri

$K_2, E_2^3$  ve  $K_2 \times E_2^3$  grafları Şekil 3.1.2.1'de sırasıyla gösterilmiştir.

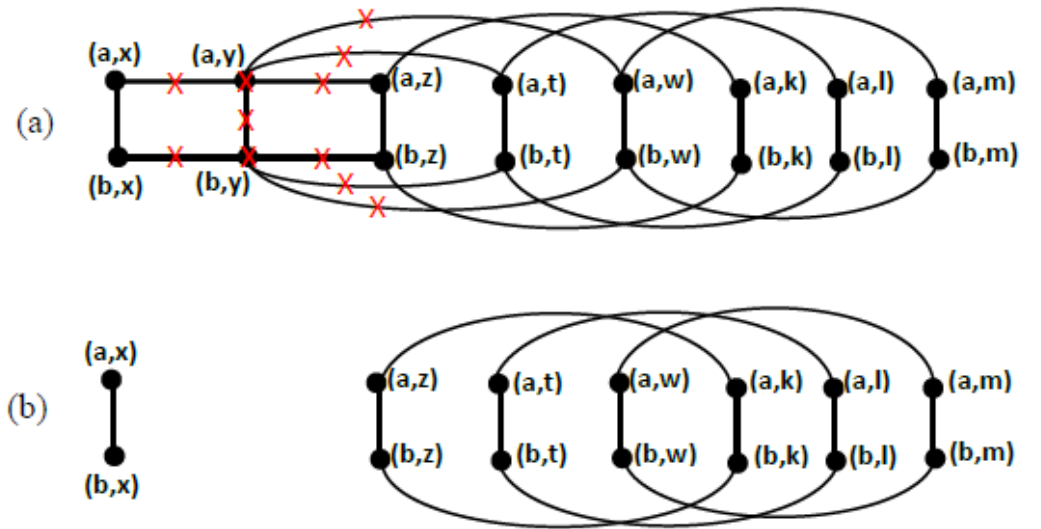


Şekil 3.1.2.1 (a)  $K_2$  tam grafi (b)  $E_2^3$  grafi (c)  $K_2 \times E_2^3$  grafi

$I(K_2 \times E_2^3)$  değerini elde etmek için, her  $S \subset V(K_2 \times E_2^3)$  alt kümesi için, tüm  $S$  alt kümeleri tek tek ele alındığında, iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: Şekil 3.1.2.1 (c)'deki  $K_2 \times E_2^3$  grafindan,  $(a,y)$  ve  $(b,y)$  tepeleri atılsın. Geriye kalan graf, Şekil 3.1.2.2 (b)'deki graf olup, bu graf bir tane  $K_2$ , 3 tane de  $C_4$  alt grafi yani toplam 4 bileşen içerir. Şu anda,  $S = \{(a,y), (b,y)\}$  olduğundan  $|S|=2$  ve  $m((K_2 \times E_2^3) - S) = 4$  olup,

$$I_1(K_2 \times E_2^3) = 6. \quad (3.3)$$



Şekil 3.1.2.2 (a)  $K_2 \times E_2^3$  grafi (b)  $(K_2 \times E_2^3) - \{S\}$  grafi

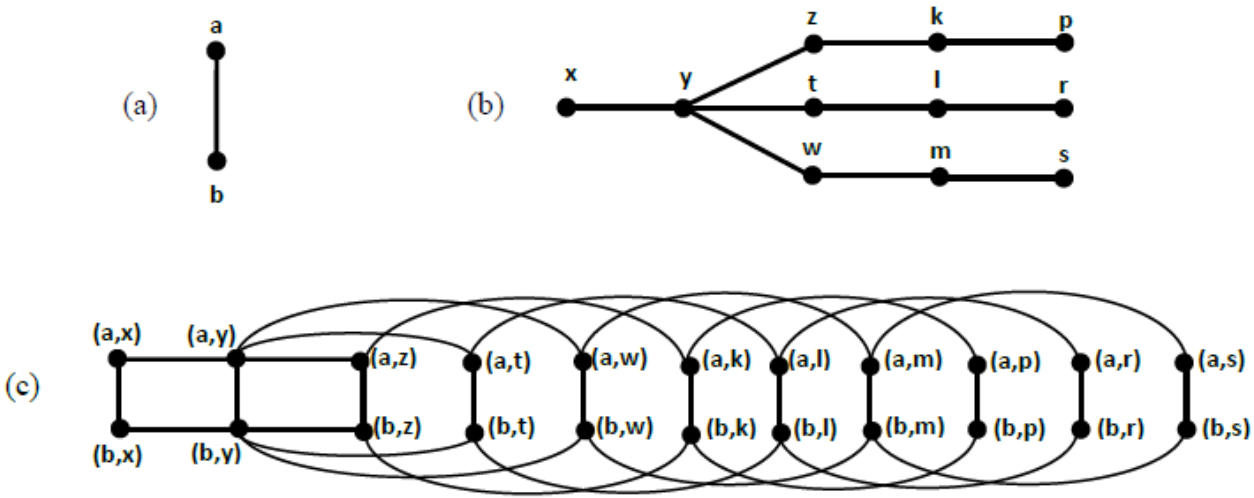
Durum 2:  $S \subset V(K_2 \times E_2^3)$  olmak üzere,  $S \neq \{(a,y), (b,y)\}$  olsun. Bu durumda,  $S$  kümesi nasıl seçilirse seçilsin, daima  $\{|S|+m((K_2 \times E_2^3)-S)\}$  değerinin en az 6 olduğu görülebilir ve

$$I_2(K_2 \times E_2^3) \geq 6. \quad (3.4)$$

(3.3) ve (3.4) den,  $I(K_2 \times E_2^3) = \min\{I_1(K_2 \times E_2^3), I_2(K_2 \times E_2^3)\} = 6$  'dır.

### 3.1.3. $K_2 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri

Bu kısımda,  $K_2$  ve  $E_3^3$  graflarının kartezyen çarpım işleminin sonucu oluşan  $K_2 \times E_3^3$  grafi ele alınmıştır (Şekil 3.1.3.1).

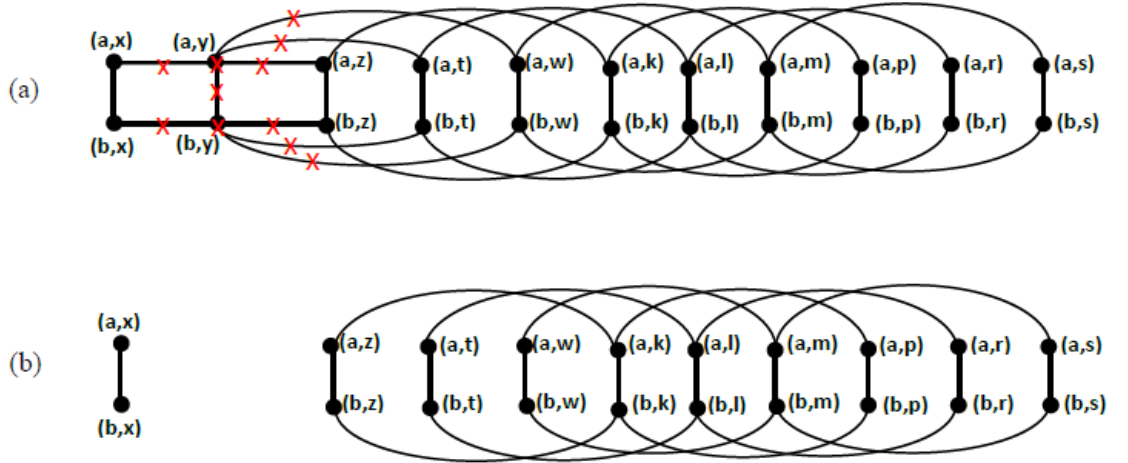


Şekil 3.1.3.1 (a)  $K_2$  tam grafi (b)  $E_3^3$  grafi (c)  $K_2 \times E_3^3$  grafi

$I(K_2 \times E_3^3)$  değerini elde etmek için, her  $S \subset V(K_2 \times E_3^3)$  alt kümesini ele alarak,  $\{|S|+m((K_2 \times E_3^3)-S)\}$  toplamını minimum yapan en uygun  $S$  kümesi arandığında, iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: Şekil 3.1.3.2 (a) daki  $K_2 \times E_3^3$  grafindan,  $(a,y)$  ve  $(b,y)$  tepeleri atılsın. Geriye kalan graf, Şekil 3.1.3.2 (b) deki graf olup, bu graf bir tane  $K_2$ , 3 tane de  $C_6$  alt grafi yani toplam 4 bileşen içerir. Şu anda,  $S = \{(a,y), (b,y)\}$  olduğundan  $|S|=2$  ve  $m((K_2 \times E_3^3) - S) = 6$  olup,

$$I_1(K_2 \times E_3^3) = 8. \quad (3.5)$$



Şekil 3.1.3.2 (a)  $K_2 \times E_3^3$  grafi (b)  $(K_2 \times E_3^3) - \{S\}$  grafi

Durum 2:  $S \subset V(K_2 \times E_3^3)$  olmak üzere,  $S \neq \{(a,y), (b,y)\}$  olsun. Bu durumda,  $S$  kümesi nasıl seçilirse seçilsin, daima  $\{|S|+m((K_2 \times E_3^3)-S)\}$  değerinin en az 8 olduğu görülebilir ve

$$I_2(K_2 \times E_3^3) \geq 8. \quad (3.6)$$

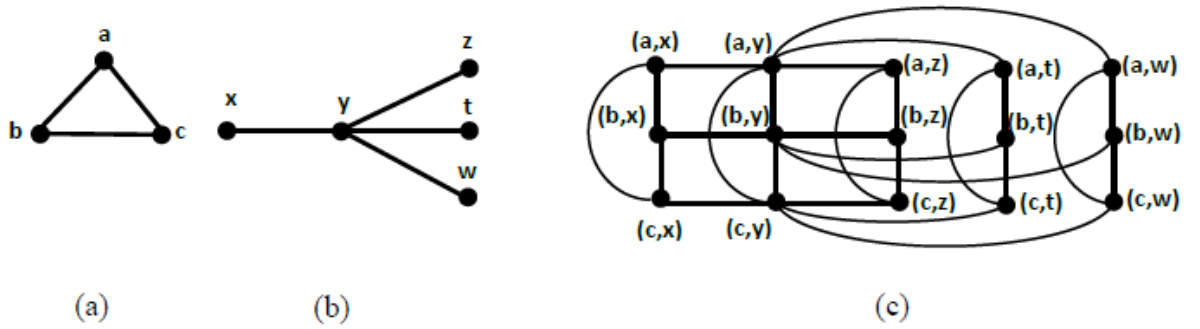
(3.5) ve (3.6) dan,  $I(K_2 \times E_3^3) = \min\{I_1(K_2 \times E_3^3), I_2(K_2 \times E_3^3)\} = 8$  dir.

### 3.2 $K_3 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri

Bu kısımda, sırasıyla  $p=1, 2$  ve  $3$  alınarak,  $K_3 \times E_p^3$  graflarının bütünlük değerleri hesaplanmıştır.

#### 3.2.1 $K_3 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri

$K_3, E_1^3$  ve  $K_3 \times E_1^3$  grafları Şekil 3.2.1.1'de sırasıyla gösterilmiştir.

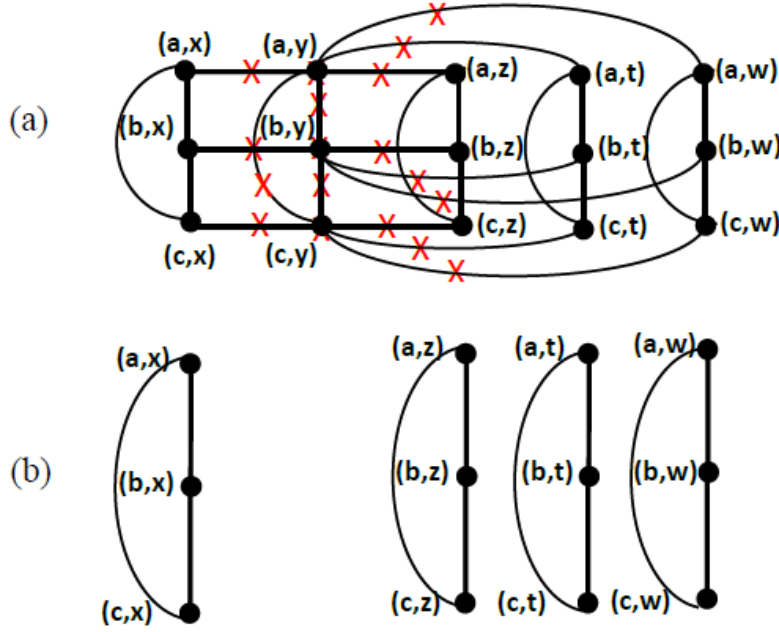


Şekil 3.2.1.1 (a)  $K_3$  tam grafi (b)  $E_1^3$  grafi (c)  $K_3 \times E_1^3$  grafi

Her  $S \subset V(K_3 \times E_1^3)$  alt kümesini ele alarak,  $\{|S|+m((K_3 \times E_1^3)-S)\}$  toplamını minimum yapan en uygun  $S$  kümesi arandığında, iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: Şekil 3.2.1.2 (a)'daki grafdan,  $(a,y)$ ,  $(b,y)$  ve  $(c,y)$  tepeleri atılırsa, geriye kalan graf, Şekil 3.2.1.2 (b)'deki graf olup,  $|S|=3$  ve  $m((K_3 \times E_1^3) - S)=3$ 'dür. Bu durumda,

$$I_1(K_3 \times E_1^3)=6. \quad (3.7)$$



Şekil 3.2.1.2 (a)  $K_3 \times E_1^3$  grafi (b)  $(K_3 \times E_1^3) - \{S\}$  grafi

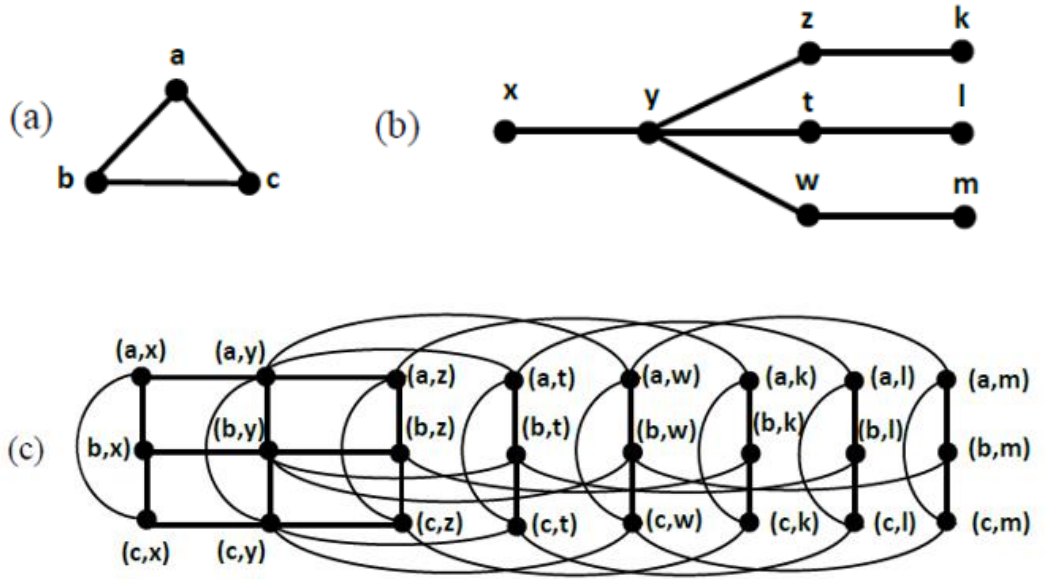
Durum 2:  $S \subset V(K_3 \times E_1^3)$  olmak üzere,  $S \neq \{(a,y), (b,y), (c,y)\}$  ise,  $S$  kümesi nasıl seçilirse seçilsin, daima  $\{|S|+m((K_3 \times E_1^3)-S)\}$  değerinin en az 6 olduğu görülebilir ve

$$I_2(K_3 \times E_1^3) \geq 6. \quad (3.8)$$

(3.7) ve (3.8) den,  $I(K_3 \times E_1^3)=\min\{I_1(K_3 \times E_1^3), I_2(K_3 \times E_1^3)\}=6$  'dır.

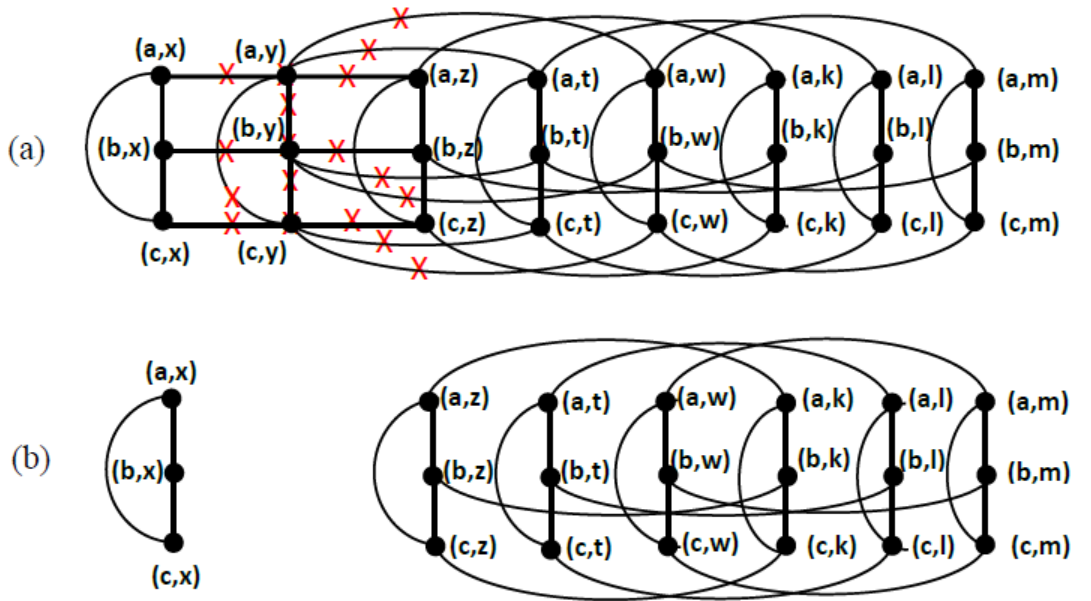
### 3.2.2 $K_3 \times E_2^3$ Grafının bütünlük değeri

$K_3$ ,  $E_2^3$  ve  $K_3 \times E_2^3$  grafları Şekil 3.2.2.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.2.2.1 (a)  $K_3$  tam grafi (b)  $E_2^3$  grafi (c)  $K_3 \times E_2^3$  grafi

$S \subset V(K_3 \times E_2^3)$  olmak üzere  $S = \{(a,y), (b,y) \text{ ve } (c,y)\}$  olsun. Bu kümedeki tepelerin graftan çıkarılması ile oluşan yeni graf Şekil 3.2.2.2 (b)'deki gibidir.

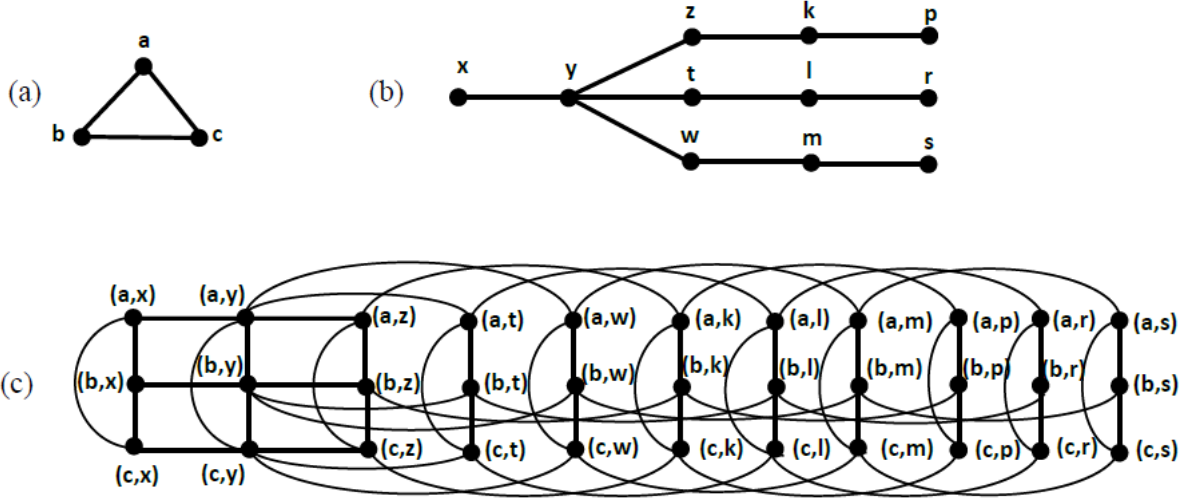


Şekil 3.2.2.2 (a)  $K_3 \times E_2^3$  grafi (b)  $(K_3 \times E_2^3) - \{S\}$  grafi

Buradan,  $I(K_3 \times E_1^3)$  değerini bulmak için yapılan işlemlere benzer şekilde hareket ederek  $I(K_3 \times E_2^3) = 9$  olduğu elde edilir.

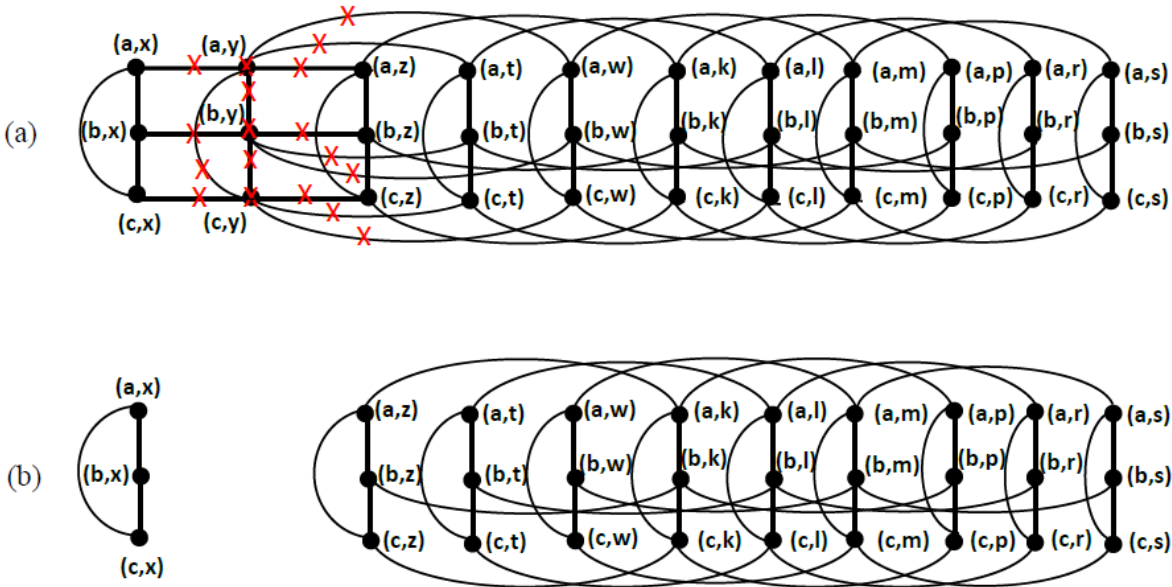
### 3.2.3 $K_3 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri

$K_3$ ,  $E_3^3$  ve  $K_3 \times E_3^3$  grafları Şekil 3.2.3.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.2.3.1 (a)  $K_3$  tam grafi (b)  $E_3^3$  grafi (c)  $K_3 \times E_3^3$  grafi

$S \subset V(K_3 \times E_3^3)$  olmak üzere  $S = \{(a,y), (b,y), (c,y)\}$  olsun. Bu kümedeki tepelerin graftan çıkarılması ile oluşan yeni graf Şekil 3.2.3.2 (b)'deki gibidir.



Şekil 3.2.3.2 (a)  $K_3 \times E_3^3$  grafi (b)  $(K_3 \times E_3^3) - \{S\}$  grafi

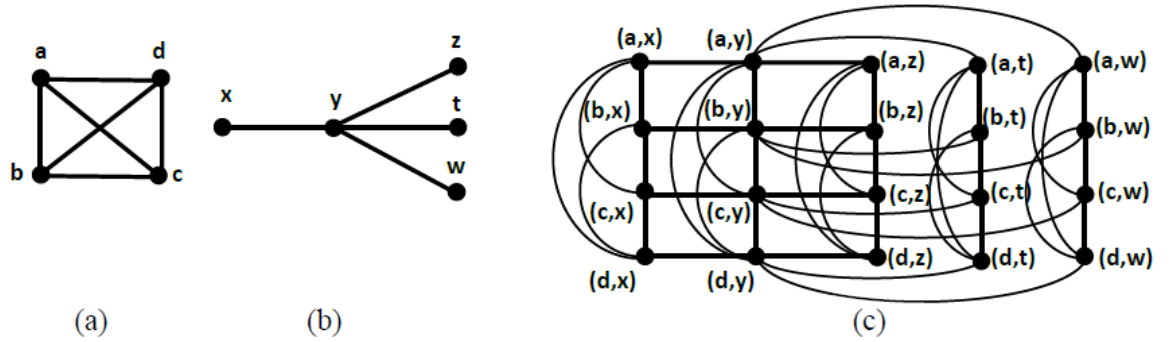
Buradan,  $I(K_3 \times E_1^3)$  değerini bulmak için yapılan işlemlere benzer şekilde hareket ederek  $I(K_3 \times E_3^3) = 12$  olduğu elde edilir.

### 3.3 $K_4 \times E_p^3$ ( $p=1,2,3$ ) Grafının Bütünlük Değeri

Bu kısımda, sırasıyla  $p=1, 2$  ve  $3$  alınarak,  $K_4 \times E_p^3$  graflarının bütünlük değerleri hesaplanmıştır.

#### 3.3.1 $K_4 \times E_1^3$ Grafının bütünlük değeri

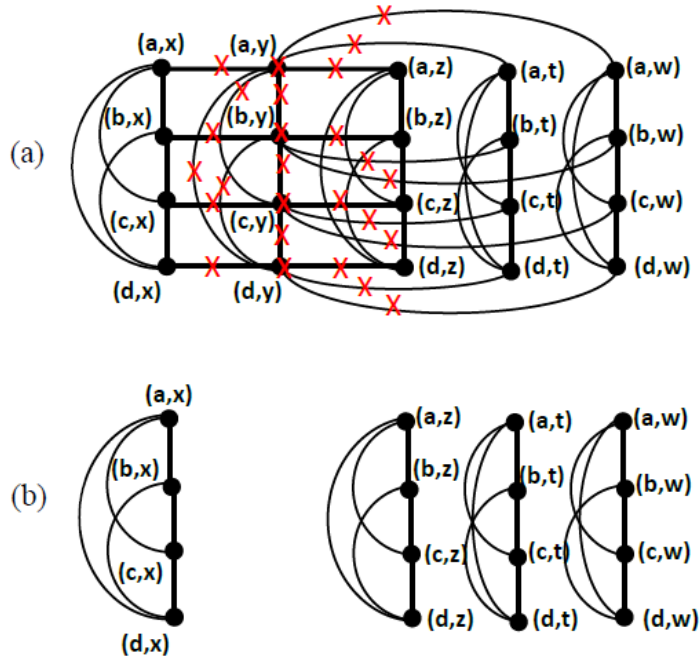
$K_4$ ,  $E_1^3$  ve  $K_4 \times E_1^3$  grafları Şekil 3.3.1.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.3.1.1 (a)  $K_4$  tam grafi (b)  $E_1^3$  grafi (c)  $K_4 \times E_1^3$  grafi

$S \subset V(K_4 \times E_1^3)$  olmak üzere,  $S$  kümesini oluştururken iki durum ortaya çıkar.

Durum 1:  $S = \{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y)\}$  olsun. Bu kümedeki tepelerin graftan çıkarılması ile oluşan yeni graf Şekil 3.3.1.2 (b)'deki gibidir.



Şekil 3.3.1.2 (a)  $K_4 \times E_1^3$  grafi (b)  $(K_4 \times E_1^3) - \{S\}$  grafi

Bu durumda,  $|S|=4$  ve  $\{m((K_4 \times E_1^3) - S)\}=4$  olup  $K_4 \times E_1^3$  grafinin tepe bütünlük değeri

$$I_1(K_4 \times E_1^3)=8. \quad (3.9)$$

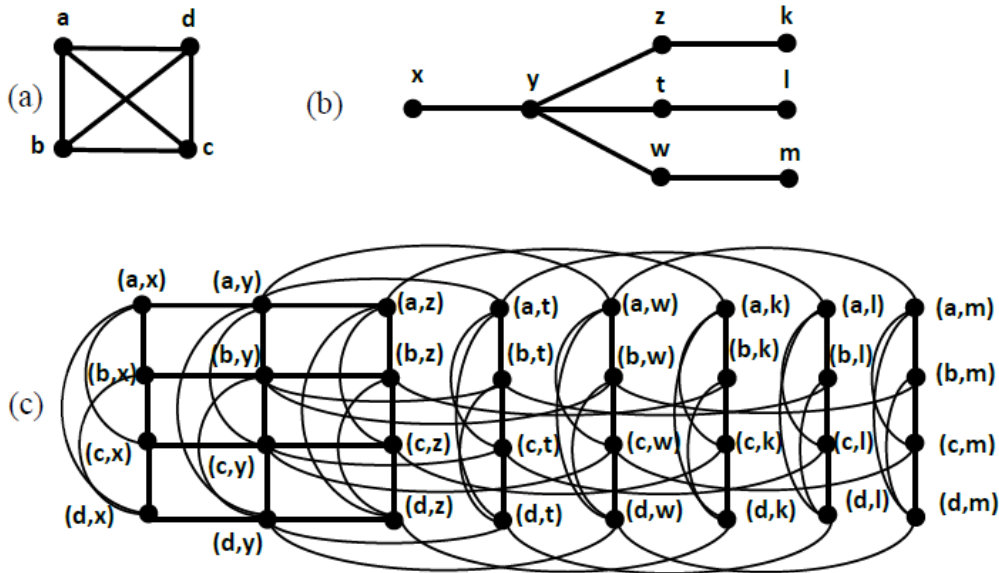
Durum 2:  $S \subset V(K_4 \times E_1^3)$  olmak üzere  $S \neq \{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y)\}$  olsun. Bu durumda,  $S$  kümesi nasıl seçilirse seçilsin, daima  $\{|S|+m((K_4 \times E_1^3)-S)\}$  değerinin en az 8 olduğu görülebilir ve

$$I_2(K_4 \times E_1^3) \geq 8. \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) dan,  $I(K_4 \times E_1^3) = \min\{I_1(K_4 \times E_1^3), I_2(K_4 \times E_1^3)\}=8$  'dir.

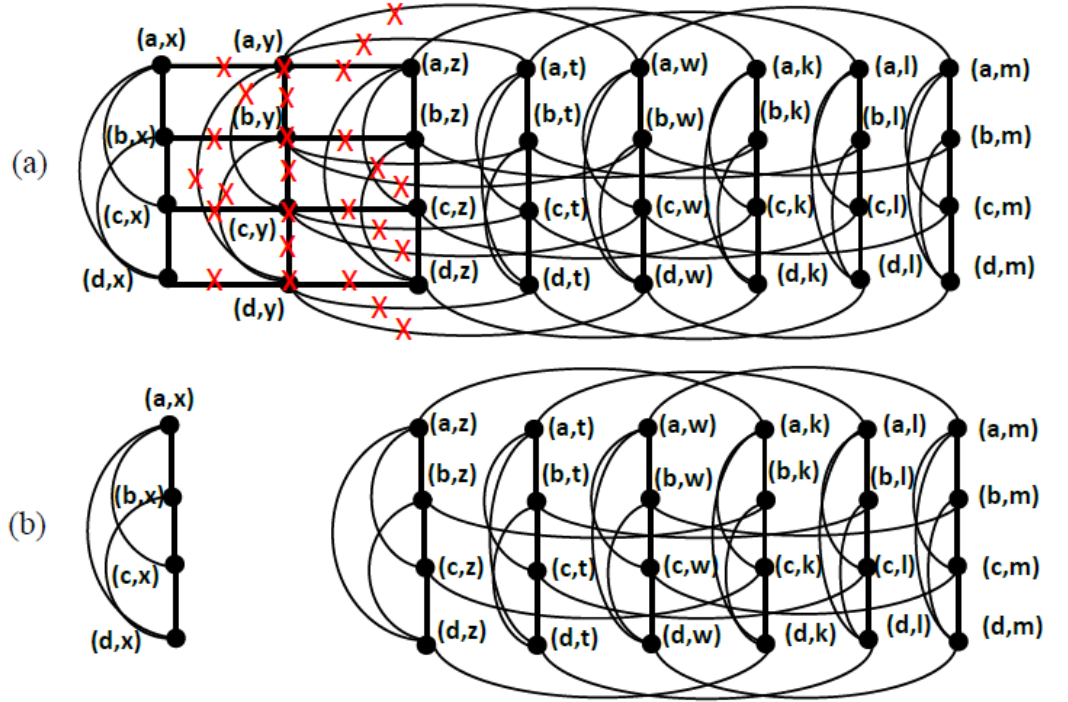
### 3.3.2 $K_4 \times E_2^3$ Grafinin bütünlük değeri

$K_4$ ,  $E_2^3$  ve  $K_4 \times E_2^3$  grafları Şekil 3.3.2.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.3.2.1 (a)  $K_4$  tam grafi (b)  $E_2^3$  grafi (c)  $K_4 \times E_2^3$  grafi

$I(K_4 \times E_2^3)$  değeri için, en uygun  $S$  kümesi olarak,  $S = \{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y)\}$  seçilir ve bu tepeler graftan çıkarılırsa, oluşan yeni graf Şekil 3.3.2.2 (b)'deki gibidir.

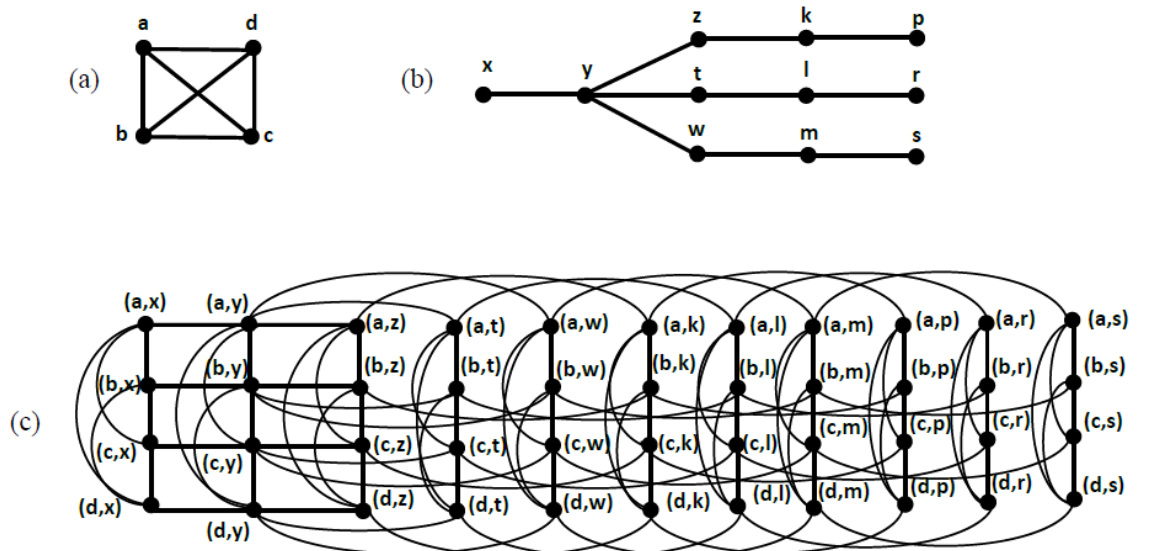


Şekil 3.3.2.2 (a)  $K_4 \times E_2^3$  grafi (b)  $(K_4 \times E_2^3) - \{S\}$  grafi

Buradan,  $I(K_4 \times E_1^3)$  değerini bulmak için yapılan işlemlere benzer şekilde hareket ederek  $I(K_4 \times E_2^3)=12$  olduğu elde edilir.

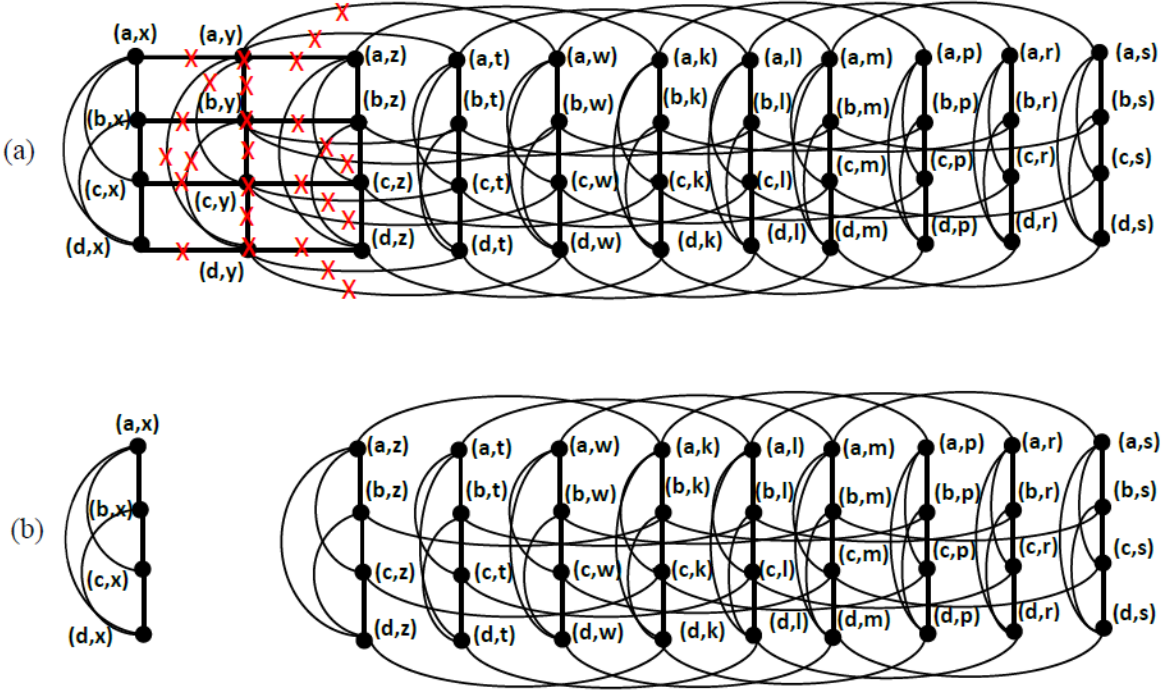
### 3.3.3 $K_4 \times E_3^3$ Grafının bütünlük değeri

$K_4$ ,  $E_3^3$  ve  $K_4 \times E_3^3$  grafları Şekil 3.3.3.1'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.3.3.1 (a)  $K_4$  tam grafi (b)  $E_3^3$  grafi (c)  $K_4 \times E_3^3$  grafi

$I(K_4 \times E_3^3)$  değeri için, en uygun S kümesi olarak,  $S=\{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y)\}$  seçilir ve bu tepeler graftan çıkarılırsa, oluşan yeni graf Şekil 3.3.3.2 (b)'deki gibidir.



Şekil 3.3.3.2 (a)  $K_4 \times E_3^3$  grafi (b)  $(K_4 \times E_3^3) - \{S\}$  grafi

Buradan,  $I(K_4 \times E_1^3)$  değerini bulmak için yapılan işlemlere benzer şekilde hareket ederek  $I(K_4 \times E_3^3)=16$  olduğu elde edilir.

#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada, zedelenebilirlik kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, bir iletişim ağının zedelenebilirlik kavramı için iki parametre ele alınmıştır. Öncelikle, iletişim ağlarının zedelenebilirlik değerini ölçen en temel parametrelerden biri olan bağlantılılık ölçümü ele alınmış ve bağlantılılık sayısı aynı olan graflar arasında, bu ölçümün ayırt edici olmadığı ifade edilmiştir. Ardından bağlantılılık sayısına bir alternatif olarak bütünlük ölçümü ele alınmış ve bu konuda yapılan çalışmalar listelenmiştir. Bu çalışmaların sonunda  $K_n$  ( $n=2,3$  ve  $4$ ) ve  $E_p^t$  ( $p=1,2,3$  ve  $t=3$ ) graflarının kartezyen çarpımları sonucu oluşan 9 farklı graf için bağlantılılık ve bütünlük değerleri hesaplanmıştır. (Bkz. Çizelge 4.1)

$K_n$ ( $n=2,3,4$ ) tam grafinin ve $E_p^t$ ( $p=1,2, 3$ ve $t=3$ ) ağaç grafinin kartezyen çarpımları	Bağlantılılık sayısı ( $\kappa$ )	Bütünlük Sayısı ( $I$ )
$K_2 \times E_1^3$	2	4
$K_2 \times E_2^3$	2	6
$K_2 \times E_3^3$	2	8
$K_3 \times E_1^3$	3	6
$K_3 \times E_2^3$	3	9
$K_3 \times E_3^3$	3	12
$K_4 \times E_1^3$	4	8
$K_4 \times E_2^3$	4	12
$K_4 \times E_3^3$	4	16

**Çizelge 4.1** ( $K_2 \times E_1^3$ ), ( $K_2 \times E_2^3$ ), ( $K_2 \times E_3^3$ ), ( $K_3 \times E_1^3$ ), ( $K_3 \times E_2^3$ ), ( $K_3 \times E_3^3$ ), ( $K_4 \times E_1^3$ ), ( $K_4 \times E_2^3$ ), ( $K_4 \times E_3^3$ ) graflarının bağlantılılık ve bütünlük değerleri.

Bu çalışma sonucunda, kartezyen çarpımı sonucu elde edilen  $K_n \times E_p^3$  graflarının zedelenebilirlik değerlerinin analizinde,  $n$  sabit olmak üzere  $p$  sayısı artış gösterdiğinde bağlantılılık sayısının bu graflar arasında ayırt edici olmadığı, ancak bütünlük sayısının bu graflar arasında ayırt edici olduğu gözlemlenmiştir. Diğer bir deyişle, literatürdeki diğer çalışmalara paralel olarak, bazı graf türlerinde zedelenebilirlik ölçümü olarak bağlantılılık sayısı yerine bütünlük ölçümünün kullanımının daha iyi sonuçlar doğuracağı gözlemlenmiştir.



## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Atıcı, M. and Kırlangıç, A.**, 2000, Counterexamples to the theorems of integrity of prisms and ladders, *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 34:119-127p.
- Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W. D., Lipman, M.J. and Pippert, R.E.**, 1992, A survey of integrity, *Discrete Applied Mathematics*, 37/38:13-28p.
- Bagga, K.S., Beineke, L.W., Lipman, M.J. and Pippert, R.E.**, 1994, Edge-Integrity: a survey, *Discrete Applied Mathematics*, 124:3-12p.
- Barefoot, C.A., Entringer, R. and Swart, H.**, 1987a, Vulnerability in graphs-a comparative survey, *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 1:13-22p.
- Barefoot, C.A., Entringer, R. and Swart, H.**, 1987b, Integrity of trees and powers of cycles, *Congr. Numer.*, 58:103-114p.
- Beineke, L.W., Goddard, W. D. and Lipman, M.J.**, 1996, The edge-Integrity of cartesian products, *JCMCC*, 21:129-145p.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.**, 1976, *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Publishing, New York, 264p.
- Chvatal, V.**, 1973, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Math.*, 5:215-228p.
- Cormen, T., Leiserson, C.E. and Rivest, R.L.**, 1990, *Introduction to Algorithms*, The MIT Pres., Fourth edition, 1312p.
- Cozzens, M.B. and Wu S.-S.Y.**, 1996, Vertex-neighbor-integrity of trees, *Ars Combin.*, 43:169-180p.
- Cozzens, M.B. and Wu S.-S.Y.**, 1998, Vertex-neighbor-integrity of powers of cycles, *Ars Combin.*, 48:257-270p.
- Gambrell, M.J.**, 2000, Vertex-neighbor-integrity of magnifiers, expanders and hypercubes, *Discrete Math*, 216:257-266p.
- Goddard, W. and Swart, H.C.**, 1988, On the integrity of combination of graphs, *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 4:3-18p.
- Goddard, W. and Swart, H.C.**, 1990a, Integrity in graphs: bounds and basics, *J. Comb. Math. Comb. Comput.*, 4:139-151p.
- Goddard, W. and Swart, H.C.**, 1990b, On the toughness of a graph, *Quaestiones Math.* 13:217-232p.
- Harary, F.**, 1972, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 274p.
- Kırlangıç, A.**, 2004, Graph operations and neighbor-integrity, *Mathematica Bohemica*, 3:245-254p.
- Kırlangıç, A.**, 2001, The edge-integrity of some graphs, *JCMCC*, 37:169-148p.