BAZI SİNGULAR GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLARIN NEUTRİX KOMPOZİSYONLARI

NEUTRIX COMPOSITIONS OF SOME SINGULAR GENERALIZED FUNCTIONS

İNCİ AKTÜRK

Prof. Dr. EMİN ÖZÇAĞ
Tez Danışmanı

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim–Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2014

İNCİ AKTÜRK'ün hazırladığı **"Bazı Singular Genelleştirilmiş Fonksiyonların Neutrix Kompozisyonları"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kenan TAŞ

Başkan ....

Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

Danışman ....

Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

Üye ....

Prof. Dr. Haşmet GÜRÇAY

Üye ....

Doç. Dr. Uğur GÜL

Üye ....

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr.Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18/06/2014

İNCİ AKTÜRK

ÖZET

BAZI SİNGULAR GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLARIN NEUTRİX KOMPOZİSYONLARI

İNCİ AKTÜRK

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

Haziran 2014, 61 sayfa

Bu tezde neutrix kalkülüs kullanılarak bazı özel genelleştirilmiş fonksiyonların neutrix kompozisyonları tanımlanmıştır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş fonksiyonların tanımı ve özellikleri ile neutrix, neutrix limit tanımları ve örnekleri, ayrıca genelleştirilmiş fonksiyonların kompozisyonu ve neutrix kompozisyonun tanımları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, x^{-s} ile x_+^r genelleştirilmiş fonksiyonlarının $\left(x_+^r\right)^{-s}$ neutrix kompozisyonu tanımlanmıştır..

Dördüncü bölümde, Heaviside genelleştirilmiş fonksiyonunun negatif kuvvetlerine anlam verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, $\left[H(x)\right]_-^{-s}$ ve $\left[H(x)\right]_+^{-s}$ neutrix kompozisyonları tanımlanmıştır.

Son bölümde, üçüncü bölümde verilen $\left(x_+^r\right)^{-s}$ genelleştirilmiş fonksiyonu için, r yerine $\mu\epsilon\mathbb{R}^+$ gerçel sayısı alınarak, $m = 1, 2, \ldots$, $\mu m\epsilon\mathbb{Z}^+$ için $\left(x_+^\mu\right)^{-m}$ neutrix kompozisyonu tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Neutrix, neutrix limit, genelleştirilmiş fonksiyonlar, genelleştirilmiş fonksiyonların kompozisyonu, test fonksiyonları, delta fonksiyonu.

ABSTRACT

NEUTRIX COMPOSITIONS OF SOME SINGULAR GENERALIZED FUNCTIONS

İNCİ AKTÜRK

Master of Science, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

June 2014, 61 pages

In this thesis by using the neutrix calculus, the neutrix compositions of some special generalized functions are defined.

The thesis consists of five chapters.

The first chapter is an introduction to the thesis.

In the second chapter, the definitions of generalized function with their some properties and the concepts of neutrix, neutrix limit with examples, also the concept of compositions of generalized functions are given.

In the third chapter, the neutrix composition $\left(x_+^r\right)^{-s}$ of the generalized functions x^{-s} and x_+^r is defined.

In the fourth chapter, the meaning was given to the negative powers of Heaviside generalized function $H(x)$. Also, at the end of chapter the neutrix compositions $\left[H(x)\right]_-^{-s}$ and $\left[H(x)\right]_+^{-s}$ are defined.

In the last chapter, let $\mu\epsilon\mathbb{R}^+$, $m = 1, 2, ...$ such that $\mu m\epsilon\mathbb{Z}^+$. Then the neutrix composition $\left(x_+^\mu\right)^{-m}$ of x_+^μ and x^{-m} is defined.

Keywords: Neutrix, neutrix limit, generalized functions, composition of generalized functions, test functions, delta function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımda ve bu tezin oluşturulmasında beni teşvik eden, destekleyen, hiçbir yardımı esirgemeyen, her türlü fikir ve eleştirilerini sunan, düzelti okumalarını yapan, hem bilimsel anlamda hem de hayata dair çok şey öğreten ve en önemlisi sabır ve samimiyetle her daim yanımda olan değerli tez danışmanım Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmalarımda özellikle tez yazımında bana zaman ayırarak tüm bilgilerini paylaşan ve yardımlarını hiç esirgemeyen Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ'a ve Arş. Gör. Esra KARATAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar iyi kötü her anımda benimle olup beni destekleyen tüm arkadaşlarıma ve hocalarıma yürekten teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca her anlamda yanımda olan, bana destek olan, her girdiğim yolda benimle birlikte sıkıntı ve strese katlanıp, fedakarlık gösteren, her daim sabır, sevgi ve duasını hiç eksik etmeyen canım AİLEME en içten teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{N}$	Neutrix
N'	$\mathcal{N}$ Neutrixinin Tanım Kümesi
N''	$\mathcal{N}$ Neutrixinin Değer Kümesi
D	Test Fonksiyonlar Uzayı
D'	Genelleştirilmiş Fonksiyonlar Uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel Sayılar Kümesi
$\delta(x)$	Dirac-delta Fonksiyonu
$\delta_n(x)$	Dirac-delta Dizisi
H(x)	Heaviside Fonksiyonu
$supp(f)$	f Fonksiyonunun Desteği
$\varphi(x)$	Test Fonksiyonu
$\psi(x)$	Sürekli Fonksiyon
$\langle f, \varphi \rangle$	f Genelleştirilmiş Fonksiyonunun φ'deki Değeri
$F(x_+, -n)$	x_+^{-n} e Karşılık Gelen Genelleştirilmiş Fonksiyon
$F(f(x))$	F ile f Fonksiyonlarının Kompozisyonu
$*$	Konvülüsyon Çarpım

1 GİRİŞ

Yakınsak olmayan integrallerden, uygun olarak tanımlanmış ıraksak parçanın atılarak sonlu parçanın elde edilmesi metodu ilk defa Hadamard tarafından verilmiştir. Elde edilen sonlu değer Hadamard sonlu toplamı olarak adlandırılır [5]. Hadamard metodu Van Der Corput [3] tarafından geliştirilen Neutrix Calculus'un bir uygulaması şeklinde düşünülebilir.

Asimptotik açılımlardan (genişlemelerden) istenmeyen sonsuz parçanın atılmasının genel prensibi, Fisher tarafından [6] neutrix ve neutrix limit kavramları kullanılarak verilmiş ve genelleştirilmiş fonksiyonlara uygulanmıştır.

Bu tezde, Van Der Corput [3] tarafından verilen neutrix ve neutrix limit kavramları kullanılarak genelleştirilmiş fonksiyonların neurtix kopozisyonlarının tanımları verilecek, daha sonra neutrix kompozisyonlara örnek olarak, üçüncü bölümde $\left(x_+^r\right)^{-s}$ ve dördüncü bölümde $H(x)$ Heaviside fonksiyonunun negatif kuvvetleri tanımlanacaktır.

En son bölümde daha önce yapılmayan, x_+^μ ve x^{-m} genelleştirilmiş fonksiyonlarının kompozisyonu tanımlanacaktır.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı ve bazı özellikleri, neutrix ve neutrix limit tanımları ve neutrix kavramının genelleştirilmiş fonksiyonların kompozisyonlarının tanımlanmasında nasıl uygulandığını örnekleriyle birlikte vereceğiz.

2.1 Genelleştirilmiş Fonksiyonlar Uzayı

Genelleştirilmiş fonksiyonları tanımlamadan önce genelleştirilmiş fonksiyonların üzerinde tanımlı olduğu test fonksiyonlarını ve bazı temel özelliklerini kısaca verelim. Biz test fonksiyonlarını sadece gerçel eksen üzerinde alacağız.

$\varphi(x)$, tanım kümesi gerçel eksen üzerinde olan gerçel değerli bir fonksiyon olsun.
$\{\overline{x\epsilon\mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0}\}$ kümesine $\varphi(x)$ **'in desteği denir** ve supp φ ile gösterilir.

Her mertebeden türevlenebilir ve desteği kompakt olan fonksiyona **test fonksiyonu** denir [14]. Test fonksiyonları kümesi, üzerindeki bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile bir vektör uzayıdır ve D ile gösterilir.

2.1.1 Örnek :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a, x \geq b \end{cases}$$

olarak tanımlansın. φ (x) her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur ve
supp φ (x) $= \{\overline{x\epsilon\mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0}\} = \overline{(a,b)} = [a,b]$ 'dır [15].

f her mertebeden türevli bir fonksiyon ve φ herhangi bir test fonksiyonu ise, bu fonksiyonların çarpımı $f\varphi$ 'de bir test fonksiyonudur.

Test fonksiyonlarının D doğrusal uzayı üzerindeki topolojisi, m pozitif bir tamsayı ve K, Ω açık alt kümesinin kompakt bir alt kümesi olmak üzere,

$$|f|_{m,k} = \sup_{|p| \leq m} \left\{ \sup_{x\epsilon K} \left| (\partial/\partial_x)^p f(x) \right| \right\}$$

yarınormlar ailesi ile verilir [30].

Genelleştirilmiş fonksiyon tanımını vermeden önce D uzayında yakınsama tanımını vereceğiz.

$\{\varphi_n\} \subset D$ test fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir dizisi olsun. Her n için supp $\varphi_n \subset [a,b]$ olsun. Eğer her $r\epsilon\mathbb{N}$ için $\{\varphi_n^{(r)}\} \longrightarrow 0$ düzgün yakınsıyorsa, o zaman $\big\{\varphi_n(x)\big\}$ dizisi **sıfıra yakınsıyor** denir [14].

2.1.2 Örnek : Her mertebeden türevlenebilen $\varphi(x,a)$ fonksiyonu

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} e^{\frac{-a^2}{a^2-x^2}} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \leq a, x \geq b \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\varphi_n(x) = \Big\{\frac{1}{n}\varphi(x,a)\Big\}$ dizisi D uzayı içinde sıfıra yakınsaktır, ancak $\varphi_n(x) = \Big\{\frac{1}{n}\varphi\big(\frac{x}{n},a\big)\Big\}$ dizisi D içinde sıfıra yakınsamaz. Çünkü bütün fonksiyonlar için ortak sınırlı bir bölge yoktur.

D üzerinde tanımlı doğrusal f fonksiyonunun φ 'deki değerini $\langle f,\varphi\rangle$ ile göstereceğiz.

2.1.3 Tanım : f, test fonksiyonlar uzayı D üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer f fonksiyoneli,

(i) her α_1,α_2 gerçel sayıları ve her $\varphi_1,\varphi_2\epsilon D$ için

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2\rangle = \alpha_1\langle f,\varphi_1\rangle + \alpha_2\langle f,\varphi_2\rangle,$$

(ii) D içinde sıfıra yakınsayan her $\big\{\varphi_n\big\}$ dizisi için $\Big\{\langle f,\varphi_n\rangle\Big\}$ dizisi sıfıra yakınsar,

koşullarını sağlıyorsa, f 'ye bir **genelleştirilmiş fonksiyon** denir [14].

D test fonksiyonları üzerinde tanımlı bütün genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayını $D^{'}$ ile göstereceğiz.

f, $\mathbb{R}$ 'nin her sınırlı alt kümesi üzerinde tanımlı yerel integrallenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman her $\varphi\epsilon D$ için

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden 2.1.3 Tanım'daki koşullar sağlanır. Böylece her yerel integrallenebilir fonksiyona bir genelleştirilmiş fonksiyon karşılık gelir.

(1) eşitliği D uzayı üzerinde tanımlı olan özel doğrusal ve sürekli bir genelleştirilmiş fonksiyonu gösterir. Her $\varphi(x)$ test fonksiyonu ile eşleştirilen bir genelleştirilmiş f fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki değeri doğrusal ve süreklidir ama bu genelleştirilmiş fonksiyon (1) eşitliğinde verilen şekilde ifade edilemez. (1) eşitliği ile ifade edilebilen genelleştirilmiş fonksiyonlara **düzgün (regüler)** ve diğerlerine de **düzgün olmayan (singüler)** genelleştirilmiş fonksiyon adı verilir.

$U \subset \mathbb{R}$, x_0 'ın bir komşuluğu olmak üzere, supp $\varphi \subset U$ olan her φ için $\langle f, \varphi \rangle = 0$ ise, o zaman f genelleştirilmiş fonksiyonuna x_0 'ın U komşuluğunda **sıfırdır** denir. Bir $f(x)$ fonksiyonu x_0 'ın bir U komşuluğunda sıfırlanıyor ise $f(x)$ 'e karşılık gelen f genelleştirilmiş fonksiyonu da bu komşulukta sıfırlanır.

f genelleştirilmiş fonksiyonu x_0 'ın bir komşuluğunda sıfır olmuyorsa, x_0 noktasına f genelleştirilmiş fonksiyonunun **esas noktası** denir.
Buna bir örnek olarak, $x_0 = 0$ noktasının $f(x) = x^2$ fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyon için bir esas nokta olduğu verilebilir.Bundan dolayı gerçel eksen üzerindeki her bir nokta f genelleştirilmiş fonksiyonu için bir esas nokta olur.

f 'nin esas noktalarının kümesine, f genelleştirilmiş **fonksiyonunun desteği** denir ve supp (f) ile gösterilir [14].

Dirac-delta fonksiyonu

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0 \\ \infty & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlıdır.
Bu fonksiyona karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyon

$$\big\langle \delta(x), \varphi(x) \big\rangle = \varphi(0)$$

eşitliği ile ifade edilir. Açıktır ki, bu genelleştirilmiş fonksiyon (1) eşitliği ile tanımlanamaz. Dolayısıyla bu genelleştirilmiş fonksiyon singülerdir ve $x_0 \neq 0$ olan noktaların keyfi komşuluğunda sıfırlanır.

Herhangi bir genelleştirilmiş f fonksiyonu α gerçel sayısı için

$$\langle f(x-\alpha),\varphi(x)\rangle = \langle f(x),\varphi(x+\alpha)\rangle$$

olarak tanımlanır.

f genelleştirilmiş fonksiyonu ve her $\varphi\epsilon D$ için,

$$\begin{aligned}\langle f(x),\varphi(x)\rangle &= \langle f(x),\varphi(-x)\rangle \text{ oluyorsa, } f\text{'ye çift}\\ \langle f(x),\varphi(x)\rangle &= -\langle f(x),\varphi(-x)\rangle \text{ oluyorsa, } f\text{'ye tek}\end{aligned}$$

denir.

2.1.4 Tanım : $\{f_n\}$ genelleştirilmiş fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $\varphi\epsilon D$ için $\langle f_n,\varphi\rangle \longrightarrow \langle f,\varphi\rangle$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi f genelleştirilmiş fonksiyonuna **yakınsıyor** denir.

Yukarıda tanımlanan yakınsamaya göre D' uzayı tam uzay olur, bu da D' uzayının en önemli özelliklerinden biridir [17, 18, 29]. Diğer bir ifade ile, eğer $\{f_n\}$ genelleştirilmiş fonksiyonların dizisi, her $\varphi\epsilon D$ için $\langle f_n,\varphi\rangle$ sayılar dizisinin limiti var olacak şekilde ise bu limit yine D uzayı üzerinde tanımlı sürekli ve doğrusal bir fonksiyoneldir [4].

Diğer bir özellik ise, keyfi bir genelleştirilmiş fonksiyona test fonksiyonlarının dizisi ile yaklaşılabilmesidir [2, 14]. Çünkü D test fonksiyonları uzayı, D' genelleştirilmiş fonksiyonları uzayı içinde yoğundur.

2.1.5 Örnek : $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} n \quad , & |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0 \quad , & |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

O halde $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi Dirac-delta $\delta(x)$ genelleştirilmiş fonksiyonuna yakınsar [15].

f, g genelleştirilmiş fonksiyonları ve herhangi bir α skaleri için $f+g$ 'nin toplamı

$$\langle f+g,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle + \langle g,\varphi\rangle$$

ve αg çarpımı da

$$\langle \alpha g,\varphi\rangle = \alpha\langle g,\varphi\rangle$$

biçimde tanımlıdır. Böylelikle D' doğrusal bir uzay olur.

Genelleştirilmiş fonksiyon türevinin tanımını verebilmek için, öncelikle tek değişkenli, birinci mertebeden sürekli türevlenebilen bir f fonksiyonunu ele alalım. f' bu genelleştirilmiş fonksiyonun türevi olsun. O zaman her $\varphi\epsilon D$ için

$$\begin{aligned}\langle f',\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \Big[f(x)\varphi(x)\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -\big\langle f,\varphi'\big\rangle\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.
Böylece aşağıdaki tanımı verebiliriz.

2.1.6 Tanım : Keyfi bir f genelleştirilmiş fonksiyonu ve her $\varphi\epsilon D$ için

$$\langle g,\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle$$

eşitliği ile tanımlı g fonksiyoneline f **'nin türevi** denir ve f' ile gösterilir. Burada f' türevinin de genelleştirilmiş fonksiyon olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla bir genelleştirilmiş fonksiyonun türevi, yine bir genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan genelleştirilmiş fonksiyonlar her mertebeden türeve sahiptir. Bu da genelleştirilmiş fonksiyonları, fonksiyonlardan ayıran önemli bir özelliktir.
Genel olarak f'nin r 'inci türevi $f^{(r)}$, her $\varphi\epsilon D$ için

$$\big\langle f^{(r)}(x),\varphi(x)\big\rangle = (-1)^r\big\langle f(x),\varphi^{(r)}(x)\big\rangle$$

eşitliği ile tanımlanır.

Yerel integrallenebilir H Heaviside fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Bu fonksiyona karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu H ile gösterirsek, o zaman her $\varphi\epsilon D$ için H genelleştirilmiş fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned}
\left\langle H^{'}(x),\varphi(x)\right\rangle &= -\left\langle H(x),\varphi^{'}(x)\right\rangle \\
&= -\int_0^\infty \varphi^{'}(x)\,dx \\
&= \varphi(0) \\
&= \left\langle \delta(x),\varphi(x)\right\rangle
\end{aligned}$$

Dirac-delta genelleştirilmiş fonksiyonu olur.

Özel olarak, Dirac-delta $\delta(x)$ genelleştirilmiş fonksiyonunun r. mertebeden türevi $\delta^{(r)}$ her $\varphi\epsilon D$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle H^{(r+1)}(x),\varphi(x)\right\rangle &= \left\langle \delta^{(r)}(x),\varphi(x)\right\rangle \\
&= (-1)^r\left\langle \delta(x),\varphi^{(r)}(x)\right\rangle \\
&= (-1)^r\varphi^{(r)}(0)
\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlanır.

x_+^λ yerel integrallenebilir fonksiyonu,

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlıdır. $\lambda > -1$ değerleri için x_+^λ fonksiyonu yerel integrallenebilir olduğundan, bu fonksiyona karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyon her $\varphi\epsilon D$ için

$$\left\langle x_+^\lambda,\varphi(x)\right\rangle = \int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx$$

ile tanımlıdır.

x_+^λ yerel integrallenebilir fonksiyonunun türevini bulalım. $\lambda > 0$ değerleri için, x_+^λ fonksiyonunun türevi $\lambda x_+^{\lambda-1}$ fonksiyonudur. Böylelikle $\lambda > 0$ olduğunda $\frac{d}{dx}x_+^\lambda$ genelleştirilmiş fonksiyonu $\lambda x_+^{\lambda-1}$ ile tanımlanır. Fakat $-1 < \lambda < 0$ değerleri için, $x_+^{\lambda-1}$

fonksiyonu yerel integrallenebilir olmadığından ıraksak

$$\int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

integralinin düzenlenmesi gerekir.

Türevin tanımınından

$$\begin{aligned}\big\langle (x_+^{\lambda})', \varphi(x)\big\rangle &= -\big\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x)'\big\rangle \\ &= -\int_0^{\infty} x^{\lambda}\varphi'(x)\,dx \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty} x^{\lambda}\varphi'(x)\,dx\end{aligned}$$

yazıp kısmi integral alırsak

$$\big\langle (x_+^{\lambda})', \varphi(x)\big\rangle = -\lim_{\epsilon\to 0}\left\{ x^{\lambda}\big[\varphi(x)+C\big]\Big|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}\big[\varphi(x)+C\big]\,dx\right\}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $C=-\varphi(0)$ alınırsa

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\lambda}\big[\varphi(\epsilon)+C\big]=0$$

olacağından

$$\begin{aligned}\big\langle (x_+^{\lambda})', \varphi(x)\big\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]\,dx \\ &= \int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]\,dx \qquad (3)\end{aligned}$$

bulunur.

Burada (3) eşitliği ile verilen genelleştirilmiş fonksiyon $\lambda x_+^{\lambda-1}$ ile gösterilecektir.

Böylece $-2<\lambda<-1$ değerleri için x_+^{λ} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyon

$$\big\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x)\big\rangle = \int_0^{\infty} x^{\lambda}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)\Big]\,dx$$

eşitliği ile tanımlanır.

Gel'fand ve Shilov [14], $-n-1<\lambda<-n$, $n=1,2,3,...$ için x_+^{λ} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu

$$\big\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x)\big\rangle = \int_0^{\infty} x^{\lambda}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx \tag{4}$$

eşitliği ile tanımlamışlardır.

Burada (4) eşitliği $\lambda > -n-1$ ve $\lambda \neq -1, -2, ..., -n$ için

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx &= \int_0^1 x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi^{'}(0) - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu integralde seriyi açarak

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx &= \int_0^1 x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi^{'}(0) - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi^{'}(0) - ... - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\Big]\,dx \\ &+ \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!((\lambda+n)}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\lambda = -n$ değeri için eşitliğin sağındaki son terim ıraksak olacağından bu integral ıraksak olur. Eşitliğin sağındaki son terim ihmal edildiğinde kalan integral yakınsak olacaktır. Gel'fand ve Shilov $\lambda = -n$ değeri için x_+^{-n} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu $F(x_+, -n)$ ile gösterip, bu fonksiyoneli

$$\begin{aligned}&\big\langle F(x_+, -n), \varphi(x)\big\rangle = \big\langle x_+^{-n}, \varphi(x)\big\rangle \\ &= \int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi(x) - \varphi(0) - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)H(1-x)\Big]\,dx \qquad (5)\end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlamışlardır.

Burada $F(x_+, -n)$ genelleştirilmiş fonksiyonu x_+^λ genelleştirilmiş fonksiyonunun $\lambda = -n$ noktasındaki değeri değildir.

(5) eşitliği x_+^{-n} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu gösterir.

x_+^λ $(\lambda \neq -1, -2, ...)$ genelleştirilmiş fonksiyonu için

$$\frac{d}{dx}x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1} \qquad (6)$$

bilinen eşitliği sağlanır. Ama $F(x_+, -n)$ genelleştirilmiş fonksiyonu için (6) eşitliği sağlanmaz.

Gerçekten her $\varphi\epsilon D$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle F^{'}(x_+,-n),\varphi(x)\right\rangle &= -\left\langle x_+^{-n},\varphi^{'}(x)\right\rangle \\
&= -\int_0^\infty x^{-n}\Big[\varphi^{'}(x)-\varphi^{'}(0)-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)H(1-x)\Big]\,dx \\
&= -\int_0^1 x^{-n}\Big[\varphi^{'}(x)-\varphi^{'}(0)-...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(0)\Big]\,dx \\
&\quad -\int_1^\infty x^{-n}\Big[\varphi^{'}(x)-\varphi^{'}(0)-...-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big]\,dx
\end{aligned}$$

elde edilir ve burada kısmi integral kullanırsak

$$\left\langle F^{'}(x_+,-n),\varphi(x)\right\rangle = -\int_0^\infty nx^{-n-1}\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-...-\frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)H(1-x)\Big]\,dx+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$$

bulunur.

Buradan

$$\frac{d}{dx}F(x_+,-n)=-nF(x_+,-n-1)+\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(x)$$

eşitliği elde edilir [14].

(6) eşitliğinin $F(x_+,-n)$ genelleştirilmiş fonksiyonu için sağlanmadığı görülür.

Yerel integrallenebilir $\ln x_+$ fonksiyonu

$$\ln x_+ = \begin{cases} \ln x & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Fisher [12], x_+^{-1} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu

$$x_+^{-1}=\frac{d}{dx}\ln x_+$$

eşitliği ile tanımlamıştır. Daha genel olarak x_+^{-n} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyonu ise $n=2,3,...$ için

$$x_+^{-n}=(-n+1)^{-1}\frac{d}{dx}x_+^{-n+1} \tag{7}$$

eşitliği ile tanımlamıştır. Bu tanım ile basit türev eşitliğinin

$$x_+^{\lambda}=(\lambda+1)^{-1}\frac{d}{dx}\ln x_+^{\lambda+1}$$

her λ gerçel sayısı için sağlandığı görülür.

x_+^{-1} genelleştirilmiş fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}\left\langle x_+^{-1}, \varphi(x)\right\rangle &= -\left\langle \ln x_+, \varphi^{'}(x)\right\rangle \\ &= \int_0^{\infty} x_+^{-1}\Big[\varphi(x) - \varphi(0)H(1-x)\Big]\, dx \\ &= \left\langle F(x_+, -1), \varphi(x)\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$x_+^{-1} = F(x_+, -1)$$

elde edilir.

Bu eşitliğin türevini alırsak

$$x_+^{-2} = F(x_+, -2) + \delta^{'}(x)$$

eşitliği ve tümevarım metodu kullanılırsa

$$x_+^{-n} = F(x_+, -n) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\phi(n-1)\delta^{(n-1)}(x)$$

eşitliği bulunur.

Burada,

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} i^{-1} & , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Böylece Fisher'in x_+^{-n} fonksiyonuna karşılık gelen ve (7) eşitliği ile tanımlanan x_+^{-n} genelleştirilmiş fonksiyonu ile Gel'fand ve Shilov'un tanımladığı $F(x_+, -n)$ genelleştirilmiş fonksiyonu arasındaki ilişkinin

$$x_+^{-n} = F(x_+, -n) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\phi(n-1)\delta^{(n-1)}(x)$$

şeklinde olduğu görülür [12].

2.1.7 Tanım : [29] f ile g fonksiyonları için f ve g 'nin **konvülüsyon çarpımı** ,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

şeklinde tanımlanır. İntegral var iken konvülüsyon çarpımının olduğu açıktır, yani konvülüsyon çarpımının varlığı integralin var olmasına bağlıdır.
Eğer $f * g$ konvülüsyon çarpımı var ise, o zaman $g * f$ konvülüsyon çarpımı da vardır ve bu çarpımlar için

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

eşitliği sağlanır.

2.1.8 Tanım : Fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi için

(i) f_n fonksiyonlarının her biri sonsuz mertebeden türevlenebilir,

(ii) her $\varphi \epsilon D$ için $\langle f_n, \varphi \rangle$ yakınsaktır ve yakınsadığı limit $L(\varphi)$ ile gösterilirse,

(iii) $L(\varphi)$, φ 'ye göre süreklidir, yani D uzayında sıfıra yakınsayan her $\{\varphi_n\}$ dizisi için $L(\varphi_n) \rightarrow 0$ dır,

koşulları sağlanıyorsa, $\{f_n\}$ dizisine **regülerdir** denir.

Bu tanım ile verilen regüler dizi oluşturmanın birçok yolu vardır. Bu çalışma boyunca kullanacağımız regüler fonksiyonlar dizisini oluşturalım.

Öncelikle Dirac-delta $\delta(x)$ fonksiyonuna yakınsayan dizisiyi oluşturalım.

$\rho(x)$ fonksiyonu, her mertebeden sürekli türevi olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun :

(i) $|x| \geq 1$, $\rho(x) = 0$,

(ii) $\rho(x) \geq 0$,

(iii) $\rho(x) = \rho(-x)$,

(iv) $\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1$.

Örneğin;

$$\rho(x) = \begin{cases} ke^{-(\frac{1}{1-x^2})} & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu yukarıdaki koşulları sağlar, burada

$$k^{-1} = \int_{-1}^{1} e^{-(1-x^2)^{-1}}\, dx$$

biçiminde tanımlıdır.

Burada $n = 1, 2, ...$ için $\delta_n(x)$ fonksiyonu

$$\delta_n(x) = n\rho(nx)$$

tanımlanırsa, $\{\delta_n(x)\}$ dizisi her mertebeden türevi olan fonksiyonların bir dizisi olur ve dizi regülerdir. supp $\delta_n \subset \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ şeklindedir ve bu dizi Dirac-delta $\delta(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

$f\epsilon D'$ genelleştirilmiş fonksiyonu verilsin. f_n fonksiyonları,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \big(f * \delta_n(x)\big) \\ &= \big\langle f(x-t), \delta_n(t)\big\rangle \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} f(x-t)\delta_n(t)\, dt \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman $\{f_n\}$, f genelleştirilmiş fonksiyonuna yakınsayan sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonların regüler bir dizisi olur.

2.2 Neutrix , Neutrix Limit ve Özellikleri

Bu kısımda, genelleştirilmiş fonksiyonların kompozisyonunu tanımlamada kullanacağımız neutrix ve neutrix limit kavramlarını örnekleri ile birlikte vereceğiz.

Hadamard sonlu toplamı olarak bilinen, değeri sonsuz olan bir integralden ıraksak parçaların ihmal edilmesi ile sonlu değerlerin elde edilmesi ilk olarak Hadamard tarafından ortaya konulmuştur [16]. Hadamard sonlu parçasının elde edilmesinde kullanılan metodun, neutrix calculusun [3] bir uygulaması olduğu B.Fisher tarafından verilmiş ve genelleştirilmiş fonksiyonların çarpımının, konvülüsyon çarpımının ve kompozisyonunun tanımlanmasında kullanılmıştır [12].

Burada vereceğimiz tanımlar Van Der Corput [3] tarafından verilmiştir.

2.2.1 Tanım : [3] $N^{'}$ boştan farklı bir küme ve $N^{''}$ toplamsal değişmeli bir grup olsun. $f : N^{'} \to \; N^{''}$ olan fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli grup $\mathcal{N}$ ile gösterilsin. Eğer $\mathcal{N}$ içindeki tek sabit fonbksiyon sıfır ise $\mathcal{N}$ ' ye **neutrix** denir ve $\mathcal{N}$ 'ye ait her bir fonksiyona da **ihmal edilebilir fonksiyon** adı verilir.

O halde $f \epsilon \mathcal{N}$ ve $\forall x \epsilon N^{'}$ için $f(x) = c$ ise $c = 0$ olur.

2.2.2 Örnek : $\mathcal{N}$ kümesi, tanım kümesi $[0, 1]$ aralığı olan ve $a \epsilon \mathbb{R}$ olmak üzere $N^{'}$ üzerinde tanımlı $a \sin 2\pi x$ şeklindeki fonksiyonlardan oluşan toplamsal değişmeli bir grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir [4].

Gerçekten, $\forall x \epsilon N^{'}$ için

$$a \sin 2\pi x = c \text{ (sabit)} \Rightarrow a = 0 \text{ ve buradan } c = 0 \text{ olur.}$$

$N^{'} = [0, 1)$ ve $\mathcal{M}$ neutrixi $a \sin 2\pi x$ fonksiyonlarının toplamsal grubu olarak alınırsa, $\mathcal{M}$ neutrixi, $\mathcal{N}$ ' den farklı olur.Çünkü tanım kümeleri aynı değildir.

2.2.3 Örnek : $\mathcal{N}$ kümesi; tanım kümesi $N^{'} = [0, 1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ kapalı aralığı, değer kümesi gerçel sayılar kümesi olan ve a, b keyfi gerçel sayılar olmak üzere

$$a \sin x + bx^2$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Gerçekten $\forall x \epsilon N'$ için

$$a \sin x + bx^2 = c \text{ (sabit)} \Rightarrow a = b = c = 0 \text{ olur.}$$

2.2.4 Örnek : $\mathcal{N}$ kümesi; tanım kümesi $N' = [0, 1]$ kapalı aralığı, değer kümesi gerçel sayılar kümesi olan ve a, b keyfi gerçel sayılar olmak üzere

$$ax^{-1/2} + b\Big\{ \log \big[\log(1/x) \big] \Big\}^2 + O(x), \big(O(x) \to 0, x \to 0\big)$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Gerçekten $\forall x \epsilon N'$ için

$$ax^{-1/2} + b\Big\{ \log \big[\log(1/x) \big] \Big\}^2 + O(x) = c \text{ (sabit)} \Rightarrow a = b = c = 0 \text{ olur.}$$

2.2.5 Örnek : X topolojik uzay, $N' \subset X$ ve $y \notin N'$ noktası bu kümenin bir limit noktası olsun. N'' değer kümesi gerçel sayılar kümesi, $\mathcal{N}$ kümesi de $f : N' \to N''$ olan ve "$f(x) \epsilon \mathcal{N}$ için $\lim_{x \to y} f(x) = c$ oluyorsa $c = 0$" özelliğini sağlayan fonksiyonların oluşturduğu toplamsal değişmeli bir grup olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Gerçekten $f \epsilon \mathcal{N}$ ve $\forall x \epsilon N'$ için

$$f(x) = c \Rightarrow \lim_{x \to y} f(x) = c \text{ olur ve dolayısıyla } c = 0 \text{ elde edilir.}$$

2.2.6 Tanım : [3] Eğer $f(x)$ fonksiyonu N' kümesi üzerinde tanımlı gerçel (komplex) değerli bir fonksiyon ve $f(x) - \alpha \epsilon \mathcal{N}$ olacak şekilde bir α sabit sayısı bulunabiliyorsa, o zaman α sayısına $f(x)$ fonksiyonunun **neutrix limiti** denir ve

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{x \to y} f(x) = \alpha$$

şeklinde gösterilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun neutrix limiti varsa tektir. Gerçekten, $f(x)-\alpha_1 \epsilon \mathcal{N}$ ve $f(x)-\alpha_2 \epsilon \mathcal{N}$ olsun. O zaman $\mathcal{N}$ 'nin toplamsal grup olmasından dolayı

$$\big[f(x)-\alpha_1\big]-\big[f(x)-\alpha_2\big]=\alpha_1-\alpha_2 \epsilon \mathcal{N}$$

olur. $\mathcal{N}$'deki sabit fonksiyon sadece sıfır olduğundan $\alpha_1-\alpha_2=0$ ve buradan da $\alpha_1=\alpha_2$ elde edilir.

2.2.7 Örnek : [15] N' boştan farklı bir küme ve $\mathcal{N}$ de bu küme üzerinde tanımlı, $\lim_{x\to\ y} f(x)=0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların bir kümesi olsun. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrix olur ve $x\to\ y$ için neutrix limit, normal limitin aynısıdır.

Bir neutrixe göre eğer bir fonksiyonun normal anlamda limiti varsa, bu limit neutrix limit ile aynıdır.

2.2.8 Örnek : Tanım kümesi $N'=(0,1)=\big\{\varepsilon:0<\varepsilon<1\big\}$ açık kümesi, değer kümesi N'' gerçel sayılar kümesi, a,b keyfi gerçel sayılar ve $O(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon\to\ 0} O(\varepsilon)=0$ özelliğini sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, $\mathcal{N}:N'\to\ N''$ kümesi de

$$a\ln\varepsilon+b\varepsilon^{-1}+O(\varepsilon)$$

biçimindeki fonksiyonların kümesi olsun. O zaman

$$f(\varepsilon)=\ln\varepsilon+2\varepsilon^{-1}-\cos\varepsilon-1$$

fonksiyonunun neutrix limiti

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon\to\ 0} f(\varepsilon)=-2\text{' dır.}$$

Gerçekten

$$f(\varepsilon)=\ln\varepsilon+2\varepsilon^{-1}-(\cos\varepsilon-1)-2$$

$$f(\varepsilon)+2=\ln\varepsilon+2\varepsilon^{-1}-(\cos\varepsilon-1)$$

ihmal edilebilirdir.

2.2.9 Örnek : Tanım kümesi $N^{'} = (0,1)$ açık kümesi, değer kümesi $N^{''}$ gerçel sayılar kümesi, a, b keyfi gerçel sayılar ve $O(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \to 0} O(\varepsilon) = 0$ özelliğini sağlayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$a \ln^2 \varepsilon^{-1} + b \ln \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)$$

ile tanımlanan $\mathcal{N}$ neutrixini gözönüne alalım.

$$f(\varepsilon) = \varepsilon + \left(\ln \varepsilon^{-1} + 1\right)^2$$

fonksiyonunun neutrix limiti

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 1 \text{ ' dır.}$$

Gerçekten

$$f(\varepsilon) - 1 = \varepsilon + \ln^2 \varepsilon^{-1} + 2 \ln \varepsilon^{-1}$$

ihmal edilebilirdir.

Eğer 2.2.9 örnekteki $\mathcal{N}$ neutrixini $\left(a \ln \varepsilon^{-1} + 1\right)^2 + O(\varepsilon)$ ihmal edilebilir fonksiyonlarından oluştuğunu düşünürsek, o zaman

$$f(\varepsilon) = \varepsilon + \left(a \ln \varepsilon^{-1} + 1\right)^2 + O(\varepsilon)$$

fonksiyonu için neutrix limit

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 0\text{' dır.}$$

2.2.10 Örnek : Tanım kümesi $N^{'} = (0,1)$ açık kümesi, değer kümesi $N^{''}$ gerçel sayılar kümesi, a, b keyfi gerçel sayılar ve $O(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \to 0} O(\varepsilon) = 0$ özelliğini sağlayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$a\varepsilon^{-1/2} + b\left(\ln \ln \varepsilon^{-1}\right)^2 + O(\varepsilon)$$

ile tanımlanan $\mathcal{N}$ kümesini gözönüne alalım. O zaman $\mathcal{N}$ bir neutrixtir.

Gerçekten, $\forall \varepsilon \epsilon N^{'}$ için

$$a\varepsilon^{-1/2} + b\left(\ln \ln \varepsilon^{-1}\right)^2 + O(\varepsilon) = c \text{ (sabit)} \Rightarrow a = b = c = 0\text{'dır.}$$

O zaman

$$f(\varepsilon) = 3\varepsilon^{-1/2} + \left(\varepsilon + 9\right)^{1/2} + 2\left(\ln \ln \varepsilon^{-1}\right)^2$$

fonksiyonu için

$$\mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = 3\text{' olur.}$$

Aşağıdaki örnekler neutrix limitin genelleştirilmiş fonksiyonlara nasıl uygulanabildiğini gösteren örneklerdir.

2.2.11 Örnek : $\mathcal{N}$ neutrixi, tanım kümesi $N' = (0,\infty) = \{\varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty\}$ açık kümesi, değer kümesi N'' gerçel sayılar kümesi ve $O(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} O(\varepsilon) = 0$ özelliğini sağlayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varepsilon^{\lambda} \ln^{r-1} \varepsilon \ , \ \ln^{r} \varepsilon \ , \ O(\varepsilon) \ (\lambda < 0, r = 1, 2, ...)$$

fonksiyonlarının sonlu lineer toplamlarından oluşan fonksiyonların kümesi olsun.
O zaman $\lambda \neq -1, -2, ...$ ve her $\varphi \epsilon D$ için

$$\langle x_{+}^{\lambda}, \varphi \rangle = \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx$$

eşitliği ile tanımlıdır [6].

Gerçekten $\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, ..., -n$ ve her $\varphi \epsilon D$ için

$$\langle x_{+}^{\lambda}, \varphi \rangle = \int_{0}^{1} x^{\lambda} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i}}{i!} \varphi^{(i)}(0)\Big]\, dx + \int_{1}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi^{(i-1)}(0)}{(i-1)!(i+\lambda)}$$

ile tanımlıdır. Bu eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx &= \int_{\varepsilon}^{1} x^{\lambda} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i}}{i!} \varphi^{(i)}(0)\Big]\, dx \\ &\quad + \int_{1}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \int_{\varepsilon}^{1} x^{i+\lambda}\, dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{1} x^{\lambda} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i}}{i!} \varphi^{(i)}(0)\Big]\, dx \\ &\quad + \int_{1}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi^{(i-1)}(0)}{(i-1)!(i+\lambda)} (1 - \varepsilon^{i+\lambda}) \end{aligned}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \mathrm{N}-\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx &= \int_{0}^{1} x^{\lambda} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i}}{i!} \varphi^{(i)}(0)\Big]\, dx \\ &\quad + \int_{1}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi^{(i-1)}(0)}{(i-1)!(i+\lambda)} \end{aligned}$$

olur. O halde $\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1,-2,...,-n$ için

$$\left\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x) \right\rangle = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\lambda} \varphi(x)\, dx$$

elde edilir. Bu da istenilendir.

Not: Bundan sonraki bölümlerde $\mathcal{N}$ neutrixi olarak 2.2.11 örnekteki neutrix alınacaktır.

2.2.12 Örnek : Bir önceki örnekteki $\mathcal{N}$ neutrixini alalım. O zaman her $\varphi \epsilon D$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$\left\langle x_+^{-n}, \varphi \right\rangle = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \varphi(x)\, dx$$

olur [6].

İspat : x_+^{-n} fonksiyonuna karşılık gelen genelleştirilmiş fonksiyon

$$\left\langle x_+^{-n}, \varphi \right\rangle = \int_0^{\infty} x^{-n} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) H(1-x) \Big]\, dx$$

eşitliği ile tanımlandı.Buradan

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \varphi(x)\, dx &= \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) H(1-x) \Big]\, dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{i-n}\, dx + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-1}\, dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) H(1-x) \Big]\, dx \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(i-n+1)} \varepsilon^{i-n+1} - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafının neutrix limiti alınırsa

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \varphi(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^{-n} \Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) H(1-x) \Big]\, dx$$

olur. O halde $n \epsilon \mathbb{N}$ için

$$\left\langle x_+^{-n}, \varphi(x) \right\rangle = \underset{\varepsilon \to 0}{\mathrm{N-lim}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-n} \varphi(x)\, dx$$

elde edilir.

2.3 Genelleştirilmiş Fonksiyonların Neutrix Kompozisyonu

$\Big\{\delta_n(x)\Big\}$ dizisi, burada ve diğer bölümlerde, 2.1 bölüm içinde tanımladığımız, sonsuz türevli fonksiyonların regüler bir dizisi olarak alınacaktır.

2.3.1 Tanım : f herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon ve g sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyon olsun. O zaman f ile g fonksiyonlarının çarpımı, her $\varphi \epsilon D$ için

$$\big\langle fg, \varphi \big\rangle = \big\langle f, g\varphi \big\rangle$$

şeklinde tanımlanır [14, 28].

Burada keyfi $\varphi \epsilon D$ için $g\varphi \epsilon D$ olduğundan bu eşitlik anlamlıdır.

2.3.2 Tanım : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyonları verilsin. f , $F \epsilon L^p(a,b)$ integrallenebilir fonksiyonunun r. türevi, $g^{(r)} \epsilon L^q(a,b)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O zaman (a,b) açık aralığı üzerinde fg çarpımı vardır ve

$$\binom{r}{i} = \frac{r!}{i!(r-i)!}$$

olmak üzere

$$fg = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \Big[F g^{(i)}\Big]^{(r-i)}$$

eşitliği ile verilir [13, 17, 28].

2.3.3 Tanım : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyon ve $g_n = g * \delta_n$ olsun. O zaman f ile g genelleştirilmiş fonksiyonlarının $f.g$ çarpımının var ve (a,b) aralığında h genelleştirilmiş fonksiyonuna eşit olması için gerek ve yeter koşul , (a,b) aralığındaki her $\varphi \epsilon D$ için

$$\lim_{n \to \infty} \big\langle f g_n, \varphi \big\rangle = \lim_{n \to \infty} \big\langle f, g_n \varphi \big\rangle = \big\langle h, \varphi \big\rangle$$

limitinin var olmasıdır.

Bu çarpımın tanımı simetrik olmadığından, $f.g$ çarpımı genelde değişmeli değildir. Ancak aşağıdaki teoremde olduğu gibi, birçok çarpım değişmelidir [10].

2.3.4 Teorem : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyon olsun. Eğer (a,b) açık aralığı üzerinde 2.3.2 tanımdaki fg çarpımı varsa, o zaman $f.g$ ve $g.f$ çarpımları da vardır ve bu açık aralık üzerinde

$$f.g = g.f = f.g$$

dır.

Değişmeli çarpım tanımı aşağıdaki gibidir.

2.3.5 Tanım : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyonları için,

$$f_n = f * \delta_n, \quad g_n = g * \delta_n$$

şeklinde tanımlansın. O zaman f ile g çarpımının (a, b) aralığında var ve h genelleştirilmiş fonksiyonuna eşit olması için gerek ve yeter koşul $\left\{ f_n g_n \right\}$ regüler dizisinin h 'ye yakınsamasıdır.

2.3.6 Tanım : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyon, $f_n = f * \delta_n$,$g_n = g * \delta_n$ fonksiyon dizileri ve $\mathcal{N}$, 2.2.11 örnek içinde tanımlanan neutrix olsun. Eğer desteği (a, b) aralığında olan $\forall \varphi \epsilon D$ için,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{N-lim}} \left\langle f_n g_n, \varphi \right\rangle = \left\langle h, \varphi \right\rangle$$

oluyorsa, f ve g genelleştirilmiş fonksiyonlarının neutrix limiti vardır ve h 'ye eşittir, denir.

2.3.7 Tanım : f ve g herhangi iki genelleştirilmiş fonksiyon ve $g_n = g * \delta_n$ olsun. Eğer desteği (a, b) aralığında olan $\forall \varphi \epsilon D$ için,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{N-lim}} \left\langle f g_n, \varphi \right\rangle = \underset{n \to \infty}{\mathrm{N-lim}} \left\langle f, g_n \varphi \right\rangle = \left\langle h, \varphi \right\rangle$$

oluyorsa, f ve g genelleştirilmiş fonksiyonlarının $f o g$ neutrix çarpımı vardır ve (a, b) üzerinde h 'ye eşittir, denir [18, 28].

$f(x)$ sonsuz mertebeden türevlenebilir ve kökleri $x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları olan bir fonksiyon olsun. Ayrıca bu noktalarda $f^{'} > 0$ olsun. O zaman bu f fonksiyonu ile Dirac-delta fonksiyonunun kompozisyonu,

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \frac{1}{\big|f'(x_n)\big|}\delta(x - x_n)$$

eşitliği ile verilir [14].
Bu eşitliğin türevi alınarak $\delta^{(k)}\big(f(x)\big)$ genelleştirilmiş fonksiyonu

$$\delta^{(k)}\big(f(x)\big) = \sum_n \frac{1}{\big|f'(x_n)\big|}\Big(\frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}\Big)^k \delta(x - x_n)$$

şeklinde tanımlanabilir .

2.3.8 Tanım :f yerel integrallenebilir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varphi \epsilon D$ için,

$$\mathrm{N}-\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(k)}(f(x))\varphi(x)\, dx = \big\langle h(x), \varphi(x)\big\rangle$$

limiti (a, b) üzerinde var ve $h(x)$ genelleştirilmiş fonksiyonuna eşit ise, $\delta^{(k)}(f(x))$ genelleştirilmiş fonksiyonu tanımlıdır ve yukarıdaki eşitlik ile verilir [7, 28].

Bu tanımın daha genel formu aşağıda verilmiştir [11, 28].

2.3.9 Tanım :F herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon, f yerel integrallenebilir fonksiyon ve $F_n(x) = F * \delta_n(x)$ olsun. O zaman $\forall \varphi \epsilon D$ için,

$$\mathrm{N}-\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(f(x))\varphi(x)\, dx = \big\langle h(x), \varphi(x)\big\rangle$$

limiti varsa, $F(f(x))$ genelleştirilmiş fonksiyonu tanımlıdır ve (a, b) üzerinde $h(x)$ genelleştirilmiş fonksiyonuna eşittir.

Burada verilen tanımların kullanılışı ile ilgili örnekler üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde verilecektir.

3 $\mathbf{x^{-s}}$ ve $\mathbf{x_+^r}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONLARININ NEUTRİX KOMPOZİSYONU

Bir genelleştirilmiş fonksiyon ile türevi sıfırdan farklı sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonun kompozisyonu Antosik tarafından verilmiştir [2]. Fisher bu tanımı, ilk olarak bir F genelleştirilmiş fonksiyonu ile (a, b) açık aralığında tek basit köke sahip f yerel integrallenebilir fonksiyon olması durumuna, daha sonra da f 'nin genelleştirilmiş fonksiyon olması durumuna genellemiştir [7, 11, 20]. Bu tanım aynı zamanda Antosik tarafından verilen tanımın bir genelleşmesidir [1].
Schwartz klasik genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde $H\big(\delta^{(s)}(x)\big)$, δ^k, δ^{-k}, $\ln\delta$, δ_+^k ve benzeri formların gösterimlerinin anlamı yoktur. Ancak $\sqrt{\delta} = 0$, $\sqrt{\delta^2+1} = 1+\delta$, $\log(1+\delta) = 0$, $\sin\delta = 0$, $\cos\delta = 1$ ve $(\delta+1)^{-1} = 1$ kompozisyonları Antosik tarafından tanımlanmıştır [1]. Koh ve Li belirli bir $\delta-$ dizisi kullanarak δ^k ve $(\delta')^k$ $(k = 2, 3, ...)$ kompozisyonlarına anlam vermişlerdir [21]. Dirac- delta fonksiyonunun $\Big[\delta^s(x)\Big]^k$ genel formunu Kou ve Fisher tanımlamıştır [20]. Dirac-delta fonksiyonunun negatif kuvvetleri Özçağ tarafından elde edilmiştir [26].

Bu bölümde x^{-s} ve x_+^r genelleştirilmiş fonksiyonlarının neutrix kompozisyonu tanımlanacaktır. Bu bölümde ve diğer bölümlerde, $\rho(t)$ fonksiyonu 2.1 bölüm içinde tanımlanan fonksiyon olarak alınacaktır.

Aşağıdaki iki teorem B.Fisher tarafından verilmiştir [8, 9].

3.1 Teorem : [22] $\left(x_+^r\right)_-^{-s}$ neutrix kompozisyonu vardır ve

$$c(\rho) = \int_0^1 \ln t\rho(t)\,dt$$

olmak üzere $r, s = 1, 2, ...$ için

$$\left(x_+^r\right)_-^{-s} = \frac{(-1)^{rs+s}c(\rho)}{r(rs-1)!}\delta^{(rs-1)}(x)$$

dır.

3.2 Teorem : $\left(x_+^r\right)^{-1}$ neutrix kompozisyonu $r\epsilon\mathbb{N}$ için vardır ve

$$\left(x_+^r\right)^{-1} = x_+^{-r} + (-1)^r \frac{2c(\rho) - r\phi(r-1)}{r!}\delta^{(r-1)}(x)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Temel sonuç teoremini vermeden önce, kullanacağımız kolayca görülebilecek yardımcı teoremleri verelim.

3.3 Yardımcı Teorem : Her $s = 0, 1, 2, ...$ için

$$\int_{-1}^{1} v^i \rho^{(s)}(v)\, dv = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0, 1, ..., s-1 \\ (-1)^s s! & , \quad i = s \end{cases}$$

olur ve ayrıca $v^s\rho^{(s)}(v)$ çift fonksiyon olduğundan

$$\int_{-1}^{0} v^s \rho^{(s)}(v)\, dv = \int_{0}^{1} v^s \rho^{(s)}(v)\, dv = \frac{1}{2}(-1)^s s!$$

eşitliği elde edilir.

3.4 Yardımcı Teorem : Her $s = 0, 1, 2, ...$ için

$$\int_{-1}^{0} v^s \ln|v| \rho^{(s)}(v)\, dv = \int_{0}^{1} v^s \ln|v| \rho^{(s)}(v)\, dv = \frac{1}{2}(-1)^s s! \phi(s) + (-1)^s s! c(\rho)$$

dır.

$x_+^{-s} = \frac{(-1)^{s-1}\left(\ln x_+\right)^{(s)}}{(s-1)!}$ genelleştirilmiş fonksiyonu için aşağıdaki yardımcı teorem kolayca görülebilir.

3.5 Yardımcı Teorem : [23] φ, $D[-1,1]$ kapalı aralığı içinde keyfi bir fonksiyon ise, o zaman $s\epsilon\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left\langle x_+^{-s}, \varphi(x) \right\rangle &= \int_0^1 x^{-s} \left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) \right] dx \\ &- \sum_{i=0}^{s-2} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(s-i-1)} - \frac{\phi(s-1)}{(s-1)!}\varphi^{(s-1)}(0) \end{aligned}$$

dır.

3.2 teoremin daha genel formunu ispatlayalım.

3.6 Teorem : [24] $\left(x_+^r\right)^{-s}$ genelleştirilmiş fonksiyonu vardır ve $r, s = 1, 2, ...$ için

$$\left(x_+^r\right)^{-s} = x_+^{-rs} - (-1)^{rs} \frac{(-1)^s s! \left[2c(\rho) + \phi(s-1)\right] + rs\phi(rs-1)}{(rs)!} \delta^{(rs-1)}(x) \tag{8}$$

dır.

İspat :

$$\left[\left(x_+^r\right)^{-s}\right]_n = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|x_+^r - t\right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt$$

yazılırsa, o zaman

$$(-1)^{s-1}(s-1)! \left[\left(x_+^r\right)^{-s}\right]_n = \begin{cases} \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|x^r - t\right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt & , \quad x \geq 0 \\ \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|t\right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

biçimindedir.

Şimdi $v = nt$ ve $y = nx^r$ değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
(-1)^{s-1}(s-1)! & \int_{-1}^{1} x^k \left[\left(x_+^r\right)^{-s}\right]_n dx \\
&= \int_0^1 x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|x^r - t\right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt\, dx \\
&\quad + \int_{-1}^{0} x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|t\right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt\, dx \\
&= \frac{n^{s-(k+1)/r}}{r} \int_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int_0^1 y^{-1+(k+1)/r} \ln\left|y - v\right| dy\, dv \\
&\quad + \frac{n^{s-(k+1)/r}}{r} \int_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int_1^n y^{-1+(k+1)/r} \ln\left|y - v\right| dy\, dv \\
&\quad - \frac{n^{s-(k+1)/r} \ln n}{r} \int_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v)\, dv \int_0^n y^{-1+(k+1)/r}\, dy \\
&\quad - \frac{(-1)^{k+1} n^s}{k+1} \int_{-1}^{1} \ln\left|v/n\right| \rho^{(s)}(v)\, dv \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned} \tag{10}$$

elde edilir.

$k = 0, 1, ..., rs - 2$ değerleri için

$$\underset{n \to \infty}{\text{N}-\lim} I_1 = 0 \tag{11}$$

ve $k = 0, 1, 2, ...$ değerleri için

$$\underset{n \to \infty}{\text{N}-\lim} I_3 = \underset{n \to \infty}{\text{N}-\lim} I_4 = 0 \tag{12}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_1^n y^{-1+(k+1)/r} \ln \left| y - v \right| dy &= \int_1^n y^{-1+(k+1)/r} \ln \left| y \right| dy \\ &\quad + \int_1^n y^{-1+(k+1)/r} \ln \left| 1 - \frac{v}{y} \right| dy \\ &= I_2' + I_2'' \end{aligned} \tag{13}$$

elde edilir ve burada $k = 0, 1, ..., rs - 2$ değerleri için

$$I_2' = \frac{rn^{(k+1)/r} \ln n}{k+1} - \frac{r^2 \left(n^{(k+1)/r} - 1 \right)}{(k+1)^2} \tag{14}$$

ve

$$I_2'' = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i} \int_1^n y^{-1-i+(k+1)/r} \, dy = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i r \left(n^{-i+(k+1)/r} - 1 \right)}{i(k+1-ri)} \tag{15}$$

bulunur.

3.3 yardımcı teorem ve (13), (14) ve (15) eşitlikleri kullanılırsa $k = 0, 1, ..., rs - 2$ değerleri için

$$\underset{n \to \infty}{\text{N}-\lim} I_2 = \frac{(-1)^s (s-1)!}{rs - k - 1} \tag{16}$$

neutrix limiti elde edilir.

(10), (11), (12) ve (16) eşitliklerinden $k = 0, 1, ..., rs - 2$ değerleri için

$$\underset{n \to \infty}{\text{N}-\lim} \int_{-1}^{1} x^k \left[\left(x_+^r \right)^{-s} \right]_n dx = -\frac{1}{rs - k - 1} \tag{17}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $k = rs - 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{r}\int_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int_0^1 y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_0^1\rho^{(s)}(v)\left[\int_0^v+\int_v^1 y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\right]\,dv \\
&\quad +\frac{1}{r}\int_{-1}^{0}\rho^{(s)}(v)\left[\int_0^{-v}+\int_{-v}^1 y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\right]\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_0^1\rho^{(s)}(v)\int_0^v y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv \\
&\quad +\frac{1}{r}\int_0^1\rho^{(s)}(v)\int_v^1 y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv \\
&\quad\quad +\frac{1}{r}\int_{-1}^0\rho^{(s)}(v)\int_0^{-v} y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv \\
&\quad\quad\quad +\frac{1}{r}\int_{-1}^0\rho^{(s)}(v)\int_{-v}^1 y^{s-1}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv \\
&= J_1+J_2+J_3+J_4 \qquad (18)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $y = uv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$J_1 = \frac{1}{r}\int_0^1 v^s\rho^{(s)}(v)\int_0^1 u^{s-1}\Big[\ln v+\ln\big(1-u\big)\Big]\,du\,dv \qquad (19)$$

ve 3.4 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^s\ln v\rho^{(s)}(v)\int_0^1 u^{s-1}\,du\,dv &= \frac{1}{s}\int_0^1 v^s\ln v\rho^{(s)}(v)\,dv \\
&= (-1)^s(s-1)!\Big[c(\rho)+\frac{1}{2}\phi(s)\Big] \qquad (20)
\end{aligned}$$

bulunur.

Ardından 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v^s\rho^{(s)}(v)\int_0^1 u^{s-1}\ln\big(1-u\big)\,du\,dv &= \frac{1}{2}(-1)^s(s-1)!\int_0^1\ln\big(1-u\big)\,d\big(u^s-1\big) \\
&= \frac{1}{2}(-1)^s(s-1)!\int_0^1\frac{u^s-1}{1-u}\,du \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{s-1}(s-1)!\phi(s) \qquad (21)
\end{aligned}$$

eşitliği ve (19), (20) ve (21) eşitliklerinden

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} J_1 = \frac{(-1)^s(s-1)!}{r}c(\rho) \qquad (22)$$

sonucunu elde ederiz.

J_3 'ü bulmak için $y = uv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{1}{r}\int_{-1}^{0} v^s \rho^{(s)}(v) \int_{-1}^{0} u^{s-1}\Big[\ln|v| + \ln\big(1-u\big)\Big]\,du\,dv \\ &= -\frac{1}{r}\int_{-1}^{0} v^s \rho^{(s)}(v) \int_{-1}^{0} u^{s-1}\ln|v|\,du\,dv \\ &\quad -\frac{1}{r}\int_{-1}^{0} v^s \rho^{(s)}(v) \int_{-1}^{0} u^{s-1}\ln\big(1-u\big)\,du\,dv \end{aligned} \tag{23}$$

bulunur.

Burada 3.4 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} v^s \ln|v| \rho^{(s)}(v) \int_{-1}^{0} u^{s-1}\,du\,dv &= \frac{(-1)^{s-1}}{s}\int_{-1}^{0} v^s \ln|v| \rho^{(s)}(v)\,dv \\ &= -(s-1)!\Big[c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(s)\Big] \end{aligned} \tag{24}$$

ve 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{0} v^s \rho^{(s)}(v) \int_{-1}^{0} u^{s-1}\ln\big(1-u\big)\,du\,dv \\ &\qquad = \frac{1}{2}(-1)^s(s-1)!\int_{-1}^{0}\ln\big(1-u\big)\,d(u^s-1) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\big[(-1)^s - 1\big](s-1)!\ln 2 - \frac{1}{2}(-1)^s(s-1)!\int_{-1}^{0}\frac{u^s-1}{u-1}\,du \\ &\qquad = \frac{1}{2}\big[(-1)^s - 1\big](s-1)!\ln 2 + \frac{1}{2}(-1)^s(s-1)!\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^i}{i} \end{aligned} \tag{25}$$

eşitliği elde edilir.

(23) , (24) ve (25) eşitlikleri kullanılır ve neutrix limit alınırsa

$$\begin{aligned} \underset{n\to\,\infty}{\mathrm{N-lim}}\, J_3 &= \frac{\big[1-(-1)^s\big](s-1)!}{2r}\ln 2 + \frac{(s-1)!}{2r}\phi(s) \\ &\quad -\frac{(s-1)!}{2r}\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{s-i}}{i} + \frac{(s-1)!}{r}c(\rho) \end{aligned} \tag{26}$$

olduğu görülür.

J_2 için 3.3 yardımcı teorem kullanılırsa

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{r}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)\int_v^1 y^{s-1}\Big[\ln y + \ln\big(1-\frac{v}{y}\big)\Big]\,dy\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)\int_v^1 y^{s-1}\ln y\,dy\,dv \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_0^1 v^i\rho^{(s)}(v)\int_v^1 y^{s-i-1}\,dy\,dv \\
&= \frac{(-1)^s(s-1)!}{2rs} - \frac{1}{rs^2}\int_0^1 \rho^{(s)}(v)\,dv \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1,i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)}\int_0^1 \big(v^i - v^s\big)\rho^{(s)}(v)\,dv \\
&= \frac{(-1)^s(s-1)!}{2rs} + \frac{\rho^{(s-1)}(0)}{rs^2} + \frac{(-1)^s(s-1)!\Big[2\phi(s-1)-\phi(s)\Big]}{2r} \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1,i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)}\int_0^1 v^i\rho^{(s)}(v)\,dv \\
&= \frac{\rho^{(s-1)}(0)}{rs^2} + \frac{(-1)^s(s-1)!2\phi(s-1)}{2r} \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1,i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)}\int_0^1 v^i\rho^{(s)}(v)\,dv
\end{aligned} \tag{27}$$

bulunur çünkü,

$$\sum_{i=1,i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)} = \frac{2\phi(s-1)-\phi(s)}{s} = \frac{\phi(s-1)}{s} - \frac{1}{s^2}$$

dir.

Son olarak J_4 için 3.3 ve 3.4 yardımcı teoremleri kullanılırsa ,

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{r}\int_{-1}^0 \rho^{(s)}(v)\int_{-v}^1 y^{s-1}\Big[\ln y + \ln\big(1-\frac{v}{y}\big)\Big]\,dy\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_{-1}^0 \rho^{(s)}(v)\int_{-v}^1 y^{s-1}\ln y\,dy\,dv \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^0 v^i\rho^{(s)}(v)\int_{-v}^1 y^{s-i-1}\,dy\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_{-1}^0\Big[\frac{(-v)^s-1}{s^2} - \frac{(-v)^s\ln|v|}{s}\Big]\rho^{(s)}(v)\,dv \\
&\quad +\frac{1}{rs}\int_{-1}^0 v^s\ln|v|\rho^{(s)}(v)\,dv \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1,i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)}\int_{-1}^0\Big[v^i-(-1)^{s-i}v^s\Big]\rho^{(s)}(v)\,dv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(s-1)!}{2rs} - \frac{\rho^{(s-1)}(0)}{rs^2} - \frac{\big[1-(-1)^s\big](s-1)!}{2r}\Big[\phi(s)+2c(\rho)\Big] \\
&\quad -\frac{1}{r}\sum_{i=1, i\neq s}^{\infty}\frac{1}{i(s-i)}\int_{-1}^{0} v^i\rho^{(s)}(v)\,dv - \frac{(-1)^s(s-1)!}{2rs} \\
&\quad +\frac{(s-1)!}{2r}\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(-1)^{s+i}}{i} - \frac{\big[1-(-1)^s\big](s-1)!}{2r}\ln 2 \qquad (28)
\end{aligned}
$$

elde edilir çünkü

$$
\sum_{i=1, i\neq s}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i(s-i)} = -\frac{(-1)^s}{s^2} + \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s-1}\frac{(-1)^{s+i}}{i} - \frac{1-(-1)^s}{s}\ln 2
$$

dır.

I_2 için 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{r}\int_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int_{1}^{n} y^{s-1}\Big[\ln y + \ln\big(1-\frac{v}{y}\big)\Big]\,dy\,dv \\
&= \frac{1}{r}\int_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int_{1}^{n} y^{s-1}\ln\big(1-\frac{v}{y}\big)\,dy\,dv \\
&= -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(s)}(v)\int_{1}^{n} y^{s-i-1}\,dy\,dv \\
&= -\frac{(-1)^s(s-1)!\ln n}{r} + \frac{1}{r}\sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-s)}\int_{-1}^{1}\big(n^{s-i}-1\big)v^i\rho^{(s)}(v)\,dv
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Buradan

$$
\mathrm{N}{-}\lim_{n\to\infty} I_2 = -\frac{1}{r}\sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-s)}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(s)}(v)\,dv \qquad (29)
$$

olur.

O halde (10), (12), (18), (22) ve (26) - (29) eşitliklerinden,

$$
\mathrm{N}{-}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{rs-1}\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n\,dx = \frac{(-1)^s(s-1)!}{r}\Big[2c(\rho)+\phi(s-1)\Big] \qquad (30)
$$

olduğu görülür.

Son olarak, $k = rs$ olması durumunu inceleyelim. Eğer $x < 0$ ve ψ keyfi sürekli fonksiyon ise, o zaman $v = nt$ değişken değiştirmesinden

$$\begin{aligned}(-1)^s(s-1)!\int_{-1}^{0} x^{rs}\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n \psi(x)\,dx \\ = \int_{-1}^{0} x^{rs}\psi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln|t|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\ = n^s\int_{0}^{1} \psi(x)\,dx\int_{-1}^{1} \ln\Big|\frac{v}{n}\Big|\rho^{(s)}(v)\,dv\end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} x^{rs}\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n \psi(x)\,dx = 0 \tag{31}$$

elde edilir.

I_1 içinde $k = rs$ olması durumunda ,

$$\int_0^{n^{-1/r}} x^{rs}\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n\,dx = \frac{n^{-1/r}}{r}\int_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int_0^1 y^{s-1+1/r}\ln\big|y-v\big|\,dy\,dv$$

olur, buradan keyfi ψ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-1/r}} x^{rs}\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n \psi(x)\,dx = 0 \tag{32}$$

bulunur.

$x^r \geq \frac{1}{n}$ ise, o zaman $v = nt$ değişken değiştirmesi yapılır ve 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(-1)^s(s-1)!\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n &= \int_{-1/n}^{1/n}\ln\big|x^r - t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt \\ &= n^s\int_{-1}^{1}\ln\big|x^r - \frac{v}{n}\big|\rho^{(s)}(v)\,dv \\ &= n^s\int_{-1}^{1}\left[\ln x^r - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{v^i}{in^i x^{ri}}\right]\rho^{(s)}(v)\,dv \\ &= -\sum_{i=s}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{v^i}{in^{i-s}x^{ri}}\rho^{(s)}(v)\,dv\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$s = 1, 2, ...$ için $K_s = \int_{-1}^{1}\big|\rho^{(s)}(v)\big|\,dv$ olmak üzere,

$$\Big|(s-1)!\big[(x_+^r)^{-s}\big]_n\Big| \leq \sum_{i=s}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{\big|v\big|^i}{in^{i-s}x^{ri}}\big|\rho^{(s)}(v)\big|\,dv \leq \sum_{i=s}^{\infty}\frac{K_s}{in^{i-s}x^{ri}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$n^{-1/r} < \eta < 1$ olması durumunda ise,

$$
\begin{aligned}
(s-1)! \int_{n^{-1/r}}^{\eta} & \left| x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \right| dx \\
& \leq K_s \sum_{i=s}^{\infty} \frac{n^{s-i}}{i} \int_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{r(s-i)} \, dx \\
& = K_s \sum_{i=s}^{\infty} \frac{n^{-1/r}}{ri} \int_{1}^{n\eta^r} u^{s-i+1/r-1} \, du \\
& = \begin{cases} K_s \sum_{i=s}^{\infty} \frac{n^{-1/r}}{ri(s-i+1/r)} \left[(n\eta^r)^{s-i+1/r} - 1 \right] & , \quad r \neq 1 \\ K_s \sum_{i=s, i \neq s+1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{i(s-i+1)} \left[(n\eta)^{s-i+1} - 1 \right] + K_s \frac{n^{-1} \ln(n\eta)}{s+1} & , \quad r = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan her $r, s = 1, 2, ...$ için

$$
\lim_{n \to \infty} \left| \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \right| = O(\eta)
$$

olur. O halde ψ sürekli bir fonksiyon ise, $r, s = 1, 2, ...$ için

$$
\lim_{n \to \infty} \left| \int_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \psi(x) \, dx \right| = O(\eta) \tag{33}
$$

elde edilir.

Şimdi $[-1, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve desteği kompakt olan bir $\varphi(x)$ fonksiyonu, Taylor teoreminden $0 < \xi < 1$ için,

$$
\varphi(x) = \sum_{i=0}^{rs-1} \frac{x^i}{i!} \varphi^{(i)}(0) + \frac{x^{rs}}{(rs)!} \varphi^{(rs)}(\xi x)
$$

biçiminde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n, \varphi(x) \right\rangle = & \sum_{i=0}^{rs-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \int_{-1}^{1} x^i \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n dx \\
& + \frac{1}{(rs)!} \int_{-1}^{0} x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \varphi^{(rs)}(\xi x) \, dx \\
& + \frac{1}{(rs)!} \int_{0}^{n^{-1/r}} x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \varphi^{(rs)}(\xi x) \, dx \\
& + \frac{1}{(rs)!} \int_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \varphi^{(rs)}(\xi x) \, dx \\
& + \frac{1}{(rs)!} \int_{\eta}^{1} x^{rs} \left[(x_+^r)^{-s} \right]_n \varphi^{(rs)}(\xi x) \, dx
\end{aligned}
$$

olur.

$\left\{\left[(x_+^r)^{-s}\right]_n\right\}$ regüler dizisinin $[\eta, 1]$ aralığında düzgün yakınsamasından ve (17), (30) - (33) eşitliklerinden,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\left\langle\left[(x_+^r)^{-s}\right]_n, \varphi(x)\right\rangle \\
&\quad= \frac{(-1)^s s!}{(rs)!}\Big[2c(\rho)+\phi(s-1)\Big]\varphi^{(rs-1)}(0) \\
&\quad\quad - \sum_{i=0}^{rs-2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(rs-i-1)} + O(\eta) + \int_\eta^1 \frac{\varphi^{(rs)}(\xi x)}{(rs)!}\,dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

η yeterince küçük alındığında ve 3.5 yardımcı teoremi kullanıldığında $n\epsilon\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\left\langle\left[(x_+^r)^{-s}\right]_n, \varphi(x)\right\rangle \\
&\quad= \frac{(-1)^s s!}{(rs)!}\Big[2c(\rho)+\phi(s-1)\Big]\varphi^{(rs-1)}(0) \\
&\quad\quad - \sum_{i=0}^{rs-2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(rs-i-1)} + \int_0^1 \frac{\varphi^{(rs)}(\xi x)}{(rs)!}\,dx \\
&\quad= \int_0^1 x^{-rs}\left[\varphi(x)-\sum_{i=0}^{rs-1}\frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0)\right]dx \\
&\quad\quad - \sum_{i=0}^{rs-2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(rs-i-1)} \\
&\quad\quad\quad + \frac{(-1)^s s!}{(rs)!}\Big[2c(\rho)+\phi(s-1)\Big]\varphi^{(rs-1)}(0) \\
&\quad= \left\langle x_+^{-rs}, \varphi(x)\right\rangle \\
&\quad\quad -(-1)^{rs}\frac{(-1)^s s!\Big[2c(\rho)+\phi(s-1)\Big]+rs\phi(rs-1)}{(rs)!} \\
&\quad\quad\quad \times\left\langle\delta^{(rs-1)}(x), \varphi(x)\right\rangle
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Bu ise (8) eşitliğinin $[-1, 1]$ aralığı üzerinde kanıtıdır. Ancak (8) eşitliği orijini içermeyen her aralık için doğrudur.

Bu da teoremin kanıtını tamamlar.

4 HEAVİSİDE GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONUNUN NEGATİF KUVVETLERİ

Bu bölümde, 2.3.9 tanımı kullanarak Heaviside genelleştirilmiş $H(x)$ fonksiyonunun k. negatif kuvvetlerini tanımlayacağız.

4.1 Teorem : [27] Gerçel eksen üzerinde $\big[H(x)\big]^{-s}$ neutrix kompozisyonu her $s\epsilon\mathbb{N}$ için vardır ve

$$\big[H(x)\big]^{-s} = H(x)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat : $(x^{-s})_n = x^{-s} * \delta_n(x)$ yazılırsa

$$(x^{-s})_n = x^{-s} * \delta_n(x) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|x-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt \tag{34}$$

dır.

(34) eşitliğinde x yerine $H(x)$ yazılırsa,

$$\Big[\big(H(x)\big)^{-s}\Big]_n = \big[H(x)\big]^{-s} * \delta_n(x) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|H(x)-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt$$

bulunur.

Keyfi bir $\varphi\epsilon D$ için,

$$\begin{aligned}
\Big\langle \Big[\big(H(x)\big)^{-s}\Big]_n, \varphi(x)\Big\rangle &= \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|H(x)-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\
&= \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|H(x)-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\
&\quad + \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|H(x)-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\
&= \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\
&\quad + \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big|1-t\big|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx
\end{aligned} \tag{35}$$

elde edilir.

(35) eşitliğindeki ilk integral için $u = nt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|-t\right|\delta_n^{(s)}(t)\,dt = n^s \int_{-1}^{1}\Big[\ln|u| - \ln n\Big]\rho^{(s)}(u)du$$

elde edilir ve buradan neutrix limite geçilirse,

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} & \varphi(x) \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|-t\right|\delta_n^{(s)}(t)\,dt\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx \left[\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} n^s \int_{-1}^{1}\Big[\ln|u| - \ln n\Big]\rho^{(s)}(u)du\right] \\
&= 0 \qquad (36)
\end{aligned}$$

bulunur.

(35) eşitliğinin ikinci integrali içinde $u = nt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|1-t\right|\delta_n^{(s)}(t)\,dt &= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1/n}^{1/n} t^i\delta_n^{(s)}(t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^{s}\frac{n^{s-i}}{i}\int_{-1}^{1} u^i\rho^{(s)}(u)\,du \\
&\quad - \sum_{i=s+1}^{\infty}\frac{n^{s-i}}{i}\int_{-1}^{1} u^i\rho^{(s)}(u)\,du
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi 3.3 yardımcı teoremi kullanıldığında,

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{n^{s-i}}{i}\int_{-1}^{1} u^i\rho^{(s)}(u)\,du = (-1)^s(s-1)!$$

bulunur ve ayrıca her $i > s$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s-i}}{i}\int_{-1}^{1} u^i\rho^{(s)}(u)\,du = 0$$

elde edilir.

Böylece

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|1-t\right|\delta_n^{(s)}(t)\,dt = (-1)^s(s-1)! \qquad (37)$$

bulunur.

(36) ve (37) eşitlikleri kullanılırsa, $\forall \varphi \epsilon D$ için

$$\begin{aligned}
\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \left\langle \left[\left(H(x) \right)^{-s} \right]_n, \varphi(x) \right\rangle &= \underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| H(x) - t \right| \delta_n^{(s)}(t)\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx \\
&= \left\langle H(x), \varphi(x) \right\rangle
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\left[H(x) \right]^{-s} = H(x)$$

eşitliği bulunur.

Böylece istenen elde edilir.

4.2 Teorem : [27] $\left[H(x)\right]_-^{-s}$ ve $\left[H(x)\right]_+^{-s}$ neutrix kompozisyonları her $s\epsilon\mathbb{N}$ için vardır ve

$$\left[H(x)\right]_-^{-s} = 0 \tag{38}$$

$$\left[H(x)\right]_+^{-s} = H(x) \tag{39}$$

dır.

İspat : $(x_-^{-s})_n = x_-^{-s} * \delta_n(x) = -\frac{1}{(s-1)!} \ln x_- * \delta_n^{(s)}(x)$ yazılırsa, her $s\epsilon\mathbb{N}$ için

$$-(s-1)!(x_-^{-s})_n = \begin{cases} \int_{-1/n}^{1/n} \ln(t-x)\delta_n^{(s)}(t)\, dt & , \quad x < -\frac{1}{n} \\ \int_{x}^{1/n} \ln(t-x)\delta_n^{(s)}(t)\, dt & , \quad |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad x > \frac{1}{n} \end{cases} \tag{40}$$

dır.

(40) eşitliğinde x yerine $H(x)$ yazılırsa her $s\epsilon\mathbb{N}$ için

$$-(s-1)!\left[H(x)_-^{-s}\right]_n = \begin{cases} \int_0^{1/n} \ln t \delta_n^{(s)}(t)\, dt & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

elde edilir.

Burada $u = nt$ değişken değiştirmesi yapılarak, integralin neutrix limiti alınırsa

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\,\infty} \int_0^{1/n} \ln t\delta_n^{(s)}(t)\,dt = \operatorname*{N-lim}_{n\to\,\infty} n^s \int_0^1 \Big[\ln u - \ln n\Big]\rho^{(s)}(u)\,du = 0$$

bulunur ve böylece $\varphi\epsilon D$ için

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\,\infty} \Big\langle \big[\big(H(x)\big)_-^{-s}\big]_n, \varphi(x)\Big\rangle = 0$$

elde edilir.

Dolayısıyla eşitlik (38) görülür.

Şimdi $(x_+^{-s})_n = x_+^{-s} * \delta_n(x) = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\ln x_+ * \delta_n^{(s)}(x)$ yazılırsa, her $s\epsilon\mathbb{N}$ için

$$(-1)^{s-1}(s-1)!(x_+^{-s})_n = \begin{cases} \int_{-1/n}^{x} \ln(x-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt & , \quad |x| \le \frac{1}{n} \\ \int_{-1/n}^{1/n} \ln(x-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt & , \quad x > \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad x < -\frac{1}{n} \end{cases} \tag{41}$$

olur.

(41) eşitliğinde yine x yerine $H(x)$ yazılırsa, her $s\epsilon\mathbb{N}$ için

$$(-1)^{s-1}(s-1)!\Big[\big(H(x)\big)_+^{-s}\Big]_n = \begin{cases} \int_{-1/n}^{0} \ln(-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt & , \quad x < 0 \\ \int_{-1/n}^{1/n} \ln(1-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt & , \quad x > 0 \end{cases} \tag{42}$$

dır.

$u = nt$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{-1/n}^{0} \ln(-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt = (-1)^s n^s \int_0^1 \Big[\ln u - \ln n\Big]\rho^{(s)}(u)\,du = O(n) \tag{43}$$

eşitliği ve 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\int_{-1/n}^{1/n} \ln(1-t)\delta_n^{(s)}(t)\,dt = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{-1/n}^{1/n} t^i \delta_n^{(s)}(t)\,dt = O(1/n) + (-1)^{s-1}(s-1)! \tag{44}$$

elde edilir.

Böylece $\varphi \epsilon D$ için

$$\left\langle \left[\big(H(x)\big)_+^{-s} \right]_n, \varphi(x) \right\rangle = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \int_{-1/n}^{1/n} \ln(-t)\delta_n^{(s)}(t)\, dt + \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \int_{0}^{\infty} \varphi(x) \int_{-1/n}^{1/n} \ln(1-t)\delta_n^{(s)}(t)\, dt$$

bulunur.

(42) - (44) eşitliklerini kullanıp neutrix limite geçilirse

$$\underset{n\to\ \infty}{\mathrm{N-lim}} \left\langle \left[\big(H(x)\big)_+^{-s} \right]_n, \varphi(x) \right\rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx = \big\langle H(x), \varphi(x) \big\rangle$$

(39) eşitliği elde edilir.

5 $\left(\mathbf{x}_+^{\mu}\right)^{-\mathbf{m}}$ NEUTRİX KOMPOZİSYONU

Nicholas ve Fisher, üçüncü bölümde verilen, $r, s = 1, 2, ...$ için $(x_+^r)^{-s}$ kompozisyonunu $\left\{\left[(x_+^r)^{-s}\right]_n\right\}$ regüler dizisinin limiti olarak tanımlamışlardır [24]. Özçağ ve diğerleri $r = 0$ olması durumu için, dördüncü bölümde verilen, $\left[H(x)\right]^{-s}$ kompozisyonunu tanımlamışlardır [27]. Ayrıca $\left(|x|^{r-1/2}\right)^{-4s}$ ve $\left(|x|^{\mu}\right)^{-s}$ gibi bazı kompozisyonlara anlam verilmiştir.

Bu bölümde x^{-m} ve x_+^{μ} genelleştirilmiş fonksiyonlarının neutrix kompozisyonu tanımlanacaktır.

5.1 Teorem : [25] $\left(x_+^{\mu}\right)^{-m}$ genelleştirilmiş fonksiyonu, $\mu > 0$, $m = 1, 2, ...$ ve $\mu m = s$ $(s \epsilon \mathbb{Z}^+)$ için vardır ve

$$\left(x_+^{\mu}\right)^{-m} = x_+^{-s} - (-1)^s \frac{(-1)^m m! \left[2c(\rho) + \phi(m-1)\right] + s\phi(s-1)}{s!} \delta^{(s-1)}(x) \tag{45}$$

dır.

Özel olarak, her $r \epsilon \mathbb{N}$ için

$$(x_+^{\frac{1}{r}})^{-r} = x_+^{-1} - (-1)^r r! \left[2c(\rho) + \phi(r-1)\right] \delta(x) \tag{46}$$

olur.

İspat :

$$\left[\left(x_+^{\mu}\right)^{-m}\right]_n = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_{-1/n}^{1/n} \ln\left|x_+^{\mu} - t\right| \delta_n^{(m)}(t)\, dt$$

yazılırsa, o zaman

$$(-1)^{m-1}(m-1)! [(x_+^{\mu})^{-m}]_n = \begin{cases} \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x^{\mu} - t| \delta_n^{(m)}(t) dt & , \quad x \geq 0 \\ \int_{-1/n}^{1/n} \ln|t| \delta_n^{(m)}(t) dt & , \quad x < 0 \end{cases} \tag{47}$$

biçimindedir.

Şimdi $v = nt$ ve $y = nx^r$ değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{m-1}(m-1)! &\int_{-1}^{1} x^k [(x_+^\mu)^{-m}]_n \, dx \\
&= \int_0^1 x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln \left| x^\mu - t \right| \delta_n^{(m)}(t) \, dt \, dx \\
&\quad + \int_{-1}^{0} x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln \left| t \right| \delta_n^{(m)}(t) \, dt \, dx \\
&= \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(m)}(t) \int_0^{n^{-1/\mu}} x^k \ln |x^\mu - t| \, dx \, dt \\
&\quad + \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(m)}(t) \int_{n^{-1/\mu}}^{1} x^k \ln |x^\mu - t| \, dx \, dt \\
&\quad + \int_{-1}^{0} x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln |t| \delta_n^{(m)}(t) \, dx \, dt \\
&= \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu} \int_{-1}^{1} \rho^{(m)}(v) \int_0^1 y^{-1+(k+1)/\mu} \ln |y - v| \, dy \, dv \\
&\quad + \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu} \int_{-1}^{1} \rho^{(m)}(v) \int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln |y - v| \, dy \, dv \\
&\quad + \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu} \ln n \int_{-1}^{1} \rho^{(m)}(v) \, dv \int_0^n y^{-1+(k+1)/\mu} \, dy \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1} n^m}{k+1} \int_{-1}^{1} \ln |v/n| \rho^{(m)}(v) \, dv \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}
\tag{48}
$$

elde edilir.

$k = 0, 1, ...$ değerleri için

$$
\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} I_3 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} I_4 = 0 \tag{49}
$$

$k = 0, 1, ..., s-2$ değerleri için

$$
\mathrm{N-}\lim_{n\to\infty} I_1 = 0 \tag{50}
$$

olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln |y - v| \, dy &= \int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln y \, dy \\
&\quad + \int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln |1 - v/y| \, dy \\
&= I_2' + I_2''
\end{aligned}
\tag{51}
$$

elde edilir ve burada $k = 0, 1, ..., s-2$ değerleri için

$$I_2' = \frac{\mu n^{(k+1)/\mu} \ln n}{(k+1)} + \frac{\mu^2[1 - n^{(k+1)/\mu}]}{(k+1)^2} \tag{52}$$

ve

$$\begin{aligned} I_2'' &= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i} \int_1^n y^{-1-i+(k+1)\mu}\, dy \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i \mu[n^{-i+(k+1)/\mu} - 1]}{i(k+1-\mu i)} \end{aligned} \tag{53}$$

bulunur.

3.3 yardımcı teorem ve (51), (52) ve (53) eşitlikleri kullanılırsa $k = 0, 1, ..., s-2$ değerleri için

$$\mathop{\mathrm{N-lim}}_{n\to\infty} I_2 = \frac{(-1)^m (m-1)!}{s-k-1} \tag{54}$$

neutrix limiti elde edilir.

(48), (49), (50) ve (54) eşitliklerinden $k = 0, 1, ..., s-2$ değerleri için

$$\mathop{\mathrm{N-lim}}_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} x^k \Big[(x_+^\mu)^{-m}\Big]_n\, dx = -\frac{1}{s-k-1} \tag{55}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $k = s-1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1} \rho^{(m)}(v) \int_0^1 y^{m-1} \ln|y-v|\, dy\, dv \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^1 \rho^{(m)}(v) \Big[\int_0^v + \int_v^1 y^{m-1} \ln|y-v|\, dy\Big]\, dv \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \Big[\int_0^{-v} + \int_{-v}^{1} y^{m-1} \ln|y-v|\, dy\Big]\, dv \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^1 \rho^{(m)}(v) \int_0^v y^{m-1} \ln\big|y-v\big|\, dy\, dv \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_0^1 \rho^{(m)}(v) \int_v^1 y^{m-1} \ln\big|y-v\big|\, dy\, dv \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \int_0^{-v} y^{m-1} \ln\big|y-v\big|\, dy\, dv \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \int_{-v}^{1} y^{m-1} \ln\big|y-v\big|\, dy\, dv \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \end{aligned} \tag{56}$$

elde edilir.

Buradan $y = uv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$J_1 = \frac{1}{\mu} \int_0^1 v^m \rho^{(m)}(v) \int_0^1 u^{m-1} \big[\ln v + \ln(1-u)\big] \, du \, dv \tag{57}$$

ve 3.4 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^m \rho^{(m)}(v) \ln v \int_0^1 u^{m-1} \, du \, dv &= \frac{1}{m} \int_0^1 v^m \ln v \rho^{(m)}(v) \, dv \\ &= (-1)^m (m-1)! \big[c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(m)\big] \end{aligned} \tag{58}$$

bulunur.

Ardından 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^m \rho^{(m)}(v) \int_0^1 u^{m-1} \ln(1-u) \, du \, dv &= \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)! \int_0^1 \ln(1-u) d(u^m - 1) \\ &= \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)! \int_0^1 \frac{u^m - 1}{1-u} \, du \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{m-1} (m-1)! \phi(m) \end{aligned} \tag{59}$$

eşitliği ve (57), (58) ve (59) eşitliklerinden

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} J_1 = \frac{(-1)^m (m-1)! c(\rho)}{\mu} \tag{60}$$

sonucunu elde ederiz.

J_3 'ü bulmak için $y = uv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} J_3 &= -\frac{1}{\mu} \int_{-1}^0 v^m \rho^{(m)}(v) \int_{-1}^0 u^{m-1} \big[\ln|v| + \ln(1-u)\big] \, du \, dv \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_{-1}^0 v^m \rho^{(m)}(v) \int_{-1}^0 u^{m-1} \ln|v| \, du \, dv \\ &\quad -\frac{1}{\mu} \int_{-1}^0 v^m \rho^{(m)}(v) \int_{-1}^0 u^{m-1} \ln\big(1-u\big) \, du \, dv \end{aligned} \tag{61}$$

bulunur.

Burada 3.4 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 v^m \rho^{(m)}(v) \ln|v| \int_{-1}^0 u^{m-1} \, du \, dv &= \frac{(-1)^{m-1}}{m} \int_{-1}^0 v^m \rho^{(m)}(v) \ln|v| \, dv \\ &= -(m-1)! \big[c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(m)\big] \end{aligned} \tag{62}$$

ve 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} v^m \rho^{(m)}(v) \int_{-1}^{0} u^{m-1} \ln(1-u)\, du\, dv \\
&\qquad = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)! \int_{-1}^{0} \ln(1-u) d(u^m - 1) \\
&\qquad = \frac{1}{2}[(-1)^m - 1](m-1)! \ln 2 - \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)! \int_{-1}^{0} \frac{u^m - 1}{u-1}\, du \\
&\qquad = \frac{1}{2}[(-1)^m - 1](m-1)! \ln 2 + \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)! \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i}{i} \qquad (63)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

(61) , (62) ve (63) eşitlikleri kullanılır ve neutrix limit alınırsa

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} J_3 \;=\; & \frac{[1-(-1)^m](m-1)!}{2\mu} \ln 2 + \frac{(m-1)!}{2\mu}\phi(m) \\
& - \frac{(m-1)!}{2\mu} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i}{i} + \frac{(m-1)!}{\mu} c(\rho) \qquad (64)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

J_2 için 3.3 yardımcı teorem kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
J_2 \;=\; & \frac{1}{\mu} \int_0^1 \rho^{(m)}(v) \int_v^1 y^{m-1} \big[\ln y + \ln(1-v/y)\big]\, dy\, dv \\
=\; & \frac{1}{\mu} \int_0^1 \rho^{(m)}(v) \int_v^1 y^{m-1} \ln y\, dy\, dv \\
& - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_0^1 v^i \rho^{(m)}(v) \int_v^1 y^{m-i-1}\, dy\, dv \\
=\; & \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\mu m} - \frac{1}{\mu m^2} \int_0^1 \rho^{(m)}(v)\, dv \\
& - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty} \frac{1}{i(m-i)} \int_0^1 (v^i - v^m) \rho^{(m)}(v)\, dv \\
=\; & \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\mu m} + \frac{\rho^{(m-1)}(0)}{\mu m^2} + \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\mu} \big[2\phi(m-1) - \phi(m)\big] \\
& - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty} \frac{1}{i(m-i)} \int_0^1 v^i \rho^{(m)}(v)\, dv \\
=\; & \frac{\rho^{(m-1)}(0)}{\mu m^2} + \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\mu} \phi(m-1) \\
& - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty} \frac{1}{i(m-i)} \int_0^1 v^i \rho^{(m)}(v)\, dv \qquad (65)
\end{aligned}
$$

bulunur çünkü,

$$\sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty} \frac{1}{i(m-i)} = \frac{2\phi(m-1)-\phi(m)}{m} = \frac{\phi(m-1)}{m} - \frac{1}{m^2}$$

dir.

Son olarak J_4 için 3.3 ve 3.4 yardımcı teoremleri kullanılırsa ,

$$\begin{aligned}
J_4 &= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \int_{-v}^{1} y^{m-1}\big[\ln y + \ln(1-v/y)\big]\, dy\, dv \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \int_{-v}^{1} y^{m-1} \ln y\, dy\, dv \\
&\quad -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^{0} v^i \rho^{(m)}(v)\int_{-v}^{1} y^{m-i-1}\, dy\, dv \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{0}\Big[\frac{(-v)^m-1}{m^2} - \frac{(-v)^m \ln|v|}{m}\Big]\rho^{m)}(v)\, dv \\
&\quad +\frac{1}{\mu m}\int_{-1}^{0} v^m \ln|v|\rho^{(m)}(v)\, dv \\
&\quad -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int_{-1}^{0}\Big[v^i - (-1)^{m-i}v^m\Big]\rho^{(m)}(v)\, dv \\
&= \frac{(m-1)!}{2\mu m} - \frac{\rho^{(r-1)}(0)}{\mu m^2} - \frac{[1-(-1)^m]m!}{2\mu}\big[\phi(m)+2c(\rho)\big] \\
&\quad -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int_{-1}^{0} v^i\rho^{(m)}(v)\, dv - \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu m} \\
&\quad +\frac{(m-1)!}{2\mu}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+i}}{i} - \frac{[1-(-1)^m](m-1)!\ln 2}{2\mu} \qquad (66)
\end{aligned}$$

elde edilir çünkü

$$\sum_{i=1,\, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)} = -\frac{(-1)^m}{m^2} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+i}}{i} - \frac{[1-(-1)^m]}{m}\ln 2$$

dır.

I_2 için 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-1}\big[\ln y + \ln(1-v/y)\big]\, dy\, dv \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-1}\ln(1-v/y)\, dy\, dv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-i-1}\,dy\,dv \\
&= -\frac{(-1)^m(m-1)!\ln n}{\mu} + \frac{1}{\mu}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-m)}\int_{-1}^{1}(n^{m-i}-1)v^i\rho^{(m)}(v)\,dv
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Buradan

$$
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} I_2 = -\frac{1}{\mu}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-m)}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(m)}(v)\,dv \tag{67}
$$

olur.

O halde (48), (49), (56), (60) ve (64) - (67) eşitliklerinden,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{s-1}\Big[(x_+^{\mu})^{-m}\Big]_n\,dx &= \frac{(-1)^m(m-1)!}{\mu}\big[2c(\rho)+\phi(m-1)\big] \\
&= \frac{(-1)^m m!}{s}\big[2c(\rho)+\phi(m-1)\big] \qquad (68)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Son olarak, $k = s$ olması durumunu inceleyelim. Eğer $x < 0$ ve ψ keyfi sürekli fonksiyon ise, o zaman $v = nt$ değişken değiştirmesinden

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m-1}(m-1)!\int_{-1}^{0} x^s\big[(x_+^{\mu})^{-m}\big]_n\psi(x)\,dx \\
&\qquad = \int_{-1}^{0} x^s\psi(x)\int_{-1/n}^{1/n}\ln|t|\delta_n^{(m)}(t)\,dt\,dx \\
&\qquad = n^m\int_{-1}^{0} x^s\psi(x)\,dx\int_{-1}^{1}\ln|v/n|\rho(m)(v)\,dv
\end{aligned}
$$

bulunur ve böylece

$$
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} x^s\big[(x_+^{\mu})^{-m}\big]_n\psi(x)\,dx = 0 \tag{69}
$$

elde edilir.

I_1 içinde $k = s$ olması durumunda ,

$$
\int_{0}^{n^{-1/\mu}} x^s\Big[(x_+^{\mu})^{-m}\Big]_n\,dx = \frac{n^{-1/\mu}}{\mu}\int_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int_{0}^{1} y^{m-1+1/\mu}\ln|(y-v)/n|\,dy\,dv
$$

olur, buradan keyfi ψ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-1/\mu}} x^s\Big[(x_+^\mu)^{-m}\Big]_n\psi(x)\,dx=0 \tag{70}$$

bulunur.

$x^\mu \geq \frac{1}{n}$ ise, o zaman $v = nt$ değişken değiştirmesi yapılır ve 3.3 yardımcı teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(-1)^{m-1}(m-1)!\Big[(x_+^\mu)^{-m}\Big]_n &= \int_{-1/n}^{1/n}\ln|x^\mu-t|\delta_n(m)(t)\,dt\\
&= n^m\int_{-1}^{1}\ln|x^\mu-v/n|\rho^{(m)}(v)\,dv\\
&= n^m\int_{-1}^{1}\Big[\ln|x^\mu-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v^i}{in^ix^{\mu i}}\Big]\rho^{(m)}(v)\,dv\\
&= -\sum_{i=m}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{v^i}{in^{i-m}x^{\mu i}}\rho^{(m)}(v)\,dv
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$m = 1, 2, ...$ için $K_m = \int_{-1}^{1}\left|\rho^{(m)}(v)\right|dv$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left|(m-1)!\Big[(x_+^\mu)^{-m}\Big]_n\right| &\leq \sum_{i=m}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{|v|^i}{in^{i-m}x^{\mu i}}|\rho^{(m)}(v)|\,dv\\
&\leq \sum_{i=m}^{\infty}\frac{K_m}{in^{i-m}x^{\mu i}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$n^{-1/\mu} < \eta < 1$ olması durumunda ise,

$$\begin{aligned}
&(m-1)!\int_{n^{-1/\mu}}^{\eta}\left|\big[(x_+^\mu)^{-m}\big]_n\right|dx\\
&\leq K_m\sum_{i=m}^{\infty}\frac{n^{m-i}}{i}\int_{n^{-1/\mu}}^{\eta}x^{s-\mu i}\,dx\\
&= K_m\sum_{i=m}^{\infty}\frac{n^{-1/\mu}}{\mu i}\int_{1}^{n\eta^\mu}y^{m-i+1/\mu-1}\,dy\\
&= \begin{cases} K_m\sum_{i=m}^{\infty}\frac{n^{-1/\mu}}{\mu i(m-i+1/\mu)}\big[(n\eta^\mu)^{m-i+1/\mu}-1\big] & ,\quad \mu\neq 1\\ K_m\sum_{i=m,i\neq m+1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{i(m-i+1)}\big[(n\eta)^{m-i+1}-1\big]+\frac{K_m n^{-1}\ln(n\eta)}{m+1} & ,\quad \mu=1\end{cases}
\end{aligned}$$

olur.

Buradan her $m = 1, 2, ...$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \right| = O(\eta)$$

olur.

O halde ψ sürekli bir fonksiyon ise, $m = 1, 2, ...$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{n^{-1/\mu}}^{\eta} x^s \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \psi(x)\, dx \right| = O(\eta) \tag{71}$$

elde edilir.

Şimdi $[-1, 1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve desteği kompakt olan bir $\varphi(x)$ fonksiyonu, Taylor teoreminden $0 < \xi < 1$ için,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^s}{s!} \varphi^{(s)}(\xi x) \qquad (0 < \xi < 1)$$

biçiminde yazılabilir.

O halde

$$\begin{aligned} \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n, \varphi(x) \rangle \;\; = \;\; & \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-1}^{1} x^k \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n dx \\ & + \frac{1}{s!} \int_{-1}^{0} x^s \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \varphi^{(s)}(\xi x)\, dx \\ & + \frac{1}{s!} \int_{0}^{n^{-1/\mu}} x^s \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \varphi^{(s)}(\xi x)\, dx \\ & + \frac{1}{s!} \int_{n^{-1/\mu}}^{\eta} x^s \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \varphi^{(s)}(\xi x)\, dx \\ & + \frac{1}{s!} \int_{\eta}^{1} x^s \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \varphi^{(s)}(\xi x)\, dx \end{aligned}$$

olur.

$\left\{ \left[(x_+^{\mu})^{-m} \right]_n \right\}$ regüler dizisinin $[\eta, 1]$ aralığında düzgün yakınsamasından ve (55),

(68) - (71) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\langle \Big[(x_+^{\mu})^{-m}\Big]_n, \varphi(x)\rangle \\
&\quad = \frac{(-1)^m m!}{s!}\Big[2c(\rho)+\phi(m-1)\Big]\varphi^{(s-1)}(0) \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)} + \int_{\eta}^{1}\varphi^{(s)}(\xi x)\,dx + O(\eta)
\end{aligned}$$

elde edilir.

η yeterince küçük alındığında ve 3.5 yardımcı teoremi kullanıldığında $n\epsilon\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\langle \Big[(x_+^{\mu})^{-m}\Big]_n, \varphi(x)\rangle \\
&\quad = \frac{(-1)^m m!}{s!}\Big[2c(\rho)+\phi(m-1)\Big]\varphi^{(s-1)}(0) \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)} + \int_{\eta}^{1}\varphi^{(s)}(\xi x)\,dx + O(\eta) \\
&\quad = \int_0^1 x^{-s}\Big[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\Big]\,dx \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)} \\
&\qquad\quad + \frac{(-1)^m m!}{s!}\Big[2c(\rho)+\phi(m-1)\Big]\varphi^{(s-1)}(0) \\
&\quad = \langle x_+^{-s}, \varphi(x)\rangle \\
&\qquad - (-1)^s\frac{(-1)^m m!\big[2c(\rho)+\phi(m-1)\big] + s\phi(s-1)}{s!} \\
&\qquad \times\langle \delta^{(s-1)}(x), \varphi(x)\rangle
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Bu ise (45) eşitliğinin $[-1,1]$ aralığı üzerindeki kanıtıdır. Ancak (45) eşitliği orijini içermeyen her aralık için doğrudur.
Bu da teoremin kanıtını tamamlar.

5.2 Sonuç : [25] $(x_-^{\mu})^{-m}$ genelleştirilmiş fonksiyonu $\mu > 0$, $m = 1, 2, ...$ ve $\mu m = s$ $(s\epsilon\mathbb{Z}^+)$ için vardır ve

$$\big(x_-^{\mu}\big)^{-m} = x_-^{-s} + \frac{(-1)^m m!\big[2c(\rho)+\phi(m-1)\big] + s\phi(s-1)}{s!}\delta^{(s-1)}(x) \tag{72}$$

dır.

İspat : (72) eşitliği, (45) eşitliği içinde x yerine $-x$ yazılarak takip edilir.

Kaynaklar

[1] Antosik, P., *Composition of Distributions* ,Technical Reports, No.9, University of Wisconsin, **1988 - 1989.**

[2] Antosik, P., Mikusinski, J., Sikorski, R., *Theory of Distributions, The Sequental Approach*, PWN-Elsewier, Warsawa - Amsterdam, **1973.**

[3] Van Der Corput, J.G., Introduction to the neutrix calculus, *Journal d'Analyse Mathematique* 7, 291-398, **1959.**

[4] Ege, İ., *Neutrix Calculus'un Tam Olmayan Beta ve Gama Özel Fonksiyonlarına ve Kısmi Türevlerine Olan Uygulamaları*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **2009.**

[5] Estrada, R., Kanwal, R.P., Regularization, pseudofunction and Hadamard finite part, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 141, 195-207, **1989.**

[6] Fisher, B., *Neutrices and Distributions*, Conferances On Complex Analysis and Applications, Sofia, 169-175, **1989.**

[7] Fisher, B., On defining the distribution $\delta^{(r)}\big(f(x)\big)$, *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 23 , 73-80, **1983.**

[8] Fisher, B., On defining the distribution $\left(x_+^r\right)_-^{-s}$, *Novi Sad Journal of Mathematics* 15, 119-129, **1985.**

[9] Fisher, B., On defining the distribution $\delta^{(s)}\big(f(x)\big)$ for summable f, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 32, 233-241, **1985.**

[10] Fisher, B., On defining the product of distributions, *Mathematische Nanchrichten* 99, 239-249, **1980.**

[11] Fisher, B., On the product of distributions and the change of variable, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 35, 37-42, **1988.**

[12] Fisher, B., Some notes on distributions, *Mathematics Student* 48, 269-281, **1980.**

[13] Fisher, B., The product of distributions, *Quartely Journal of Mathematics Oxford* 22(2), 291-298, **1971.**

[14] Gel'fand, I.M., Shilov, G.E., *Generalized Functions* , Vol. I, Academic Press, **1964.**

[15] Gülen, Ü., *Genelleştirilmiş Fonksiyonların Kompozisyonu*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, **1998.**

[16] Hadamard, J.S., *Le Probleme de Cauchy at Les Equations Aux Derivatives Partielles Linearies Hyperboliques* , Hermann, **1932.**

[17] Halperin, I., *Introduction to the Theory of Distributions* , Canadian Mathematical Congress, Lecture Series, No.1, **1952.**

[18] Hoskins, R., Pinto, J.S., *Distributions, Ultradistributions and Other Generalized Functions* , Ellis Harwood, **1994.**

[19] Kanwal, R.P., *Generalized Functions*, Academic Press, London, **1983.**

[20] Kau, H., Fisher, B., On composition of distributions, *Publicationes Mathematicae Debrecen* 40/3-4, 279-290, **1992.**

[21] Koh, E.L., Kuan, L.C., On the distributions δ^k and $\left(\delta'\right)^k$, *Mathematische Nachrichten* 157, 243- 248, **1992.**

[22] Nicholas, J.D., Fisher, B., A result on the composition of distributions, *Proceeding of Indian Academy of Sciences* 109 (3), 317-323, **1999.**

[23] Nicholas, J.D., Fisher, B., Some results on the composition of distributions, *Novi Sad Journal of Mathematics* 32 (2), 87-94, **2002.**

[24] Nicholas, J.D., Fisher, B., The distribution composition $\left(x_+^r\right)^{-s}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 258, 131-145, **2001.**

[25] Özçağ, E., Aktürk, İ., Tuneska, B.J., Lazarova, L., Note on the distribution composition $\left(x_+^\mu\right)^\lambda$, *Journal of Inequalities and Applications* (yayına gönderildi), **2014.**

[26] Özçağ, E., Defining the kth powers of the Dirac-delta distribution for negative integers, *Applied Mathematics Letters* 14, 419-423, **2001.**

[27] Özçağ, E., Ege, İ., Gürçay, H., On powers of the heaviside function for negative integers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 326, 101-107, **2007.**

[28] Özçağ, E., *Operations On Generalized Functions*, Doktora Tezi, University of Leicester, Leicester, **1993.**

[29] Schwartz, L., *Theorie Des Distributions*, Hermann, Paris, **1966.**

[30] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels* , Academic Press, **1967.**

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı	:	İnci AKTÜRK
Doğum Yeri	:	Ankara
Medeni Hali	:	Bekar
E-posta	:	inciakturk06@gmail.com

Eğitim

Lise	:	2003-2006	Ayaş Naime Ali Karataş Ç.P.L.
Lisans	:	2006-2012	Başkent Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İyi

İş Deneyimi

–

Deneyim Alanları

–

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

–

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Limonska Lazarova, B.J. Tuneska, E. Özçağ and İnci Aktürk, "Note on the distribution composition $\left(x_+^\mu\right)^\lambda$", *Journal of Inequalities and Applications* (yayına gönderildi), **2014.**

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

–