

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KÖŞE YAKINLARINDAKİ AKIŞ ÇİZGİ TOPOLOJİSİ**

**Hazırlayan  
Emrullah ERTUNÇ**

**Danışman  
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2014  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KÖŞE YAKINLARINDAKİ AKIŞ ÇİZGİ TOPOLOJİSİ**

**Hazırlayan  
Emrullah ERTUNÇ**

**Danışman  
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2014  
KAYSERİ**

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Emrullah ERTUNÇ



“Köşe Yakınlarındaki Akış Çizgi Topolojisi” adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan  
Emrullah ERTUNÇ



Danışman  
Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU



Matematik ABD Başkanı  
Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU danışmanlığında Emrullah ERTUNÇ tarafından hazırlanan “Köşe Yakınlarındaki Akış Çizgi Topolojisi” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

07/08/2014

**JÜRİ :**

Başkan : Prof.Dr. İlhan ÖZTÜRK



Üye : Doç.Dr. Ali DELİCEOĞLU

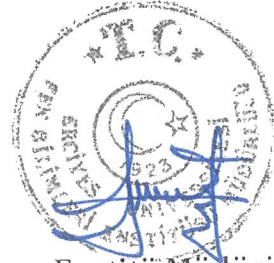


Üye : Doç.Dr. Muammer KULA

**ONAY :**

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 12.08.2014 tarih ve 2014/35-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12 / 08 / 2014



Enstitü Müdürü  
Prof.Dr. Kâzım KEŞLİOĞLU

## TEŞEKKÜR

“Köşe yakınlarındaki akış çizgi topolojisi” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, engin bilgisi ile beni yönlendiren değerli hocam sayın Doç.Dr. Ali DELİCEOĞLU’na,

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıőtan dolayı aileme ve çalışma hayatım boyunca bana her zaman destek veren tüm çalışma arkadaşlarıma,

Yüksek lisans boyunca maddi destek veren TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

## KÖŞE YAKINLARINDAKİ AKIŞ ÇİZGİ TOPOLOJİSİ

Emrullah ERTUNÇ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

### ÖZET

Bu tezde dikdörtgensel kavitini içerisindeki akış yapıları ve köşe civarındaki akış çizgileri incelenmiştir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez boyunca kullanacağımız temel tanımlar, teoremler ve bazı özel yöntemlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, dikdörtgensel kaviti ele alınmıştır. Akış fonksiyonunun katsayısını bulmak için çiftdikleştirme (biorthogonality) özelliği kullanılmıştır. Kaviti içerisinde akış yapıları Stokes denkleminin analitik çözümden elde edilmiştir. Akış fonksiyonunun yakınsaklığı kaviti içerisindeki çeşitli noktalar alınarak karşılaştırılmıştır. Ayrıca farklı görüntü oranları için akış yapıları gösterilmiştir. Bunun için Gürçan [1], Joseph and Sturges [2] ve Driesen ve ark. [3] makaleleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, dikdörtgensel kavitin köşe civarındaki akış yapıları incelenmiştir. Köşe civarında Stokes denkleminin kutupsal koordinatlardaki çözümü dikkate alındı. Daha sonra iç bölgedeki çözümden yararlanılarak eşleştirme (matching) yapıldı ve katsayılar hesaplandı. Bu sayede bir önceki bölümden elde edilemeyen girdap akış yapıları görüldü. Eşleştirmeden önceki ve sonraki akış yapıları karşılaştırıldı. Bunun için Phillips(1989) makalesi incelendi.

**Anahtar Kelimeler:** Kaviti, Girdap, Akış Yapısı, Eşleştirme, Çiftdikleştirme, Girinti ve Çıkıntı Köşesi.

## FLOW LINE TOPOLOGY NEAR THE CORNER

Emrullah ERTUNÇ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, August 2014

Thesis Supervisor: Doç. Dr. Ali DELİCEOĞLU

### ABSTRACT

In this thesis, the flow structure within the rectangular cavity and the flow lines around the corner are investigated.

The thesis consist of three sections.

In the first section, general definitions and theorems which will be used in thesis and some specific methods are introduced.

In the second section, the rectangular cavity is considered. To find coefficients of the streamfunction is used biorthogonality feature. Flow structure within the cavity have been the analytical solution of the Stokes equation for lid-driven cavity. Also convergence of the stream function is compared by taking different point in the cavity. Flow structures are shown for different aspect ratios. For this, Gurcan [1], Joseph and Sturges [2], and Driesen at all. [3] of articles were examined.

In the third section, flow structure in near the corners of the rectangular cavity were investigated. Solution of Stokes equations in polar coordinates are taken into account near the corner. Then, matching has been by using solution of inner region and then the coefficients stream function was evaluated. In this way, eddy flow structure which can not be obtained from the previous section were observed. Flow structure that is matching before and after were compared. For this, Phillips [4] article were investigated.

**Keywords:** Cavity, Eddy, Flow Structure, Matching, Biorthogonality, Reentrant and Salient Corner.

## İÇİNDEKİLER

### KÖŞE YAKINLARINDAKİ AKIŞ ÇİZGİ TOPOLOJİSİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI . . . . .	i
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI . . . . .	ii
KABUL VE ONAY . . . . .	iii
TEŞEKKÜR . . . . .	iv
ÖZET . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
İÇİNDEKİLER . . . . .	vii
TABLolar LİSTESİ . . . . .	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ . . . . .	xii
<b>GİRİŞ . . . . .</b>	<b>1</b>

#### 1. BÖLÜM

##### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1. Hamiltonian Sistemler . . . . .	4
1.2. Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Navier-Stokes Akışı . . . . .	8
1.3. Çiftdikleştirme (Biorthogonality) Metodunun Uygulanması . . . . .	9

#### 2. BÖLÜM

##### DİKDÖRTGENSEL KAVİTİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİ

2.1. Giriş . . . . .	11
2.2. Modelin Formülasyonu . . . . .	12
2.3. Çözüm Yöntemi . . . . .	13
2.4. Kaviti içerisindeki akış modellerinin elde edilmesi . . . . .	16

#### 3. BÖLÜM

##### Köşe Civarındaki Girdap Akış Yapısı

<b>3.1. Stokes Denklemine Kutupsal Koordinatlarda Çözümü</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>3.2. Köşe Civarındaki Akış Çizgilerinin Eşleştirme Yöntemiyle (Matching Yöntemi) İyileştirilmesi</b> . . . . .	<b>33</b>
KAYNAKLAR . . . . .	53
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	55

## TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1.	$\sin(2\lambda_{a,n}) + 2\lambda_{a,n} = 0$ denkleminin ilk 40 kökü verilmiştir. Burada $\lambda_{a,n} = a_n + i b_n$ dir. . . . .	16
Tablo 2.2.	$\sin(2\lambda_{s,n}) - 2\lambda_{s,n} = 0$ denkleminin ilk 40 kökü verilmiştir. Burada $\lambda_{s,n} = a_n + i b_n$ dir. . . . .	17
Tablo 2.3.	$\psi$ çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve $h=2$ için değerleri . . . . .	22
Tablo 2.4.	$\psi$ çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve $h=2$ için değerleri . . . . .	23
Tablo 2.5.	$\psi$ çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve $h=2$ için değerleri . . . . .	23
Tablo 2.6.	$\psi$ çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve $h=2$ için değerleri . . . . .	23
Tablo 2.7.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=20$ ve $N=40$ olduğu durumdaki u hız vektörü değeri . . . . .	23
Tablo 2.8.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=70$ ve $N=90$ olduğu durumdaki u hız vektörü değeri . . . . .	26
Tablo 2.9.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=100$ ve $N=110$ olduğu durumdaki u hız vektörü değeri . . . . .	26
Tablo 2.10.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=20$ ve $N=40$ olduğu durumdaki v hız vektörü değeri . . . . .	26
Tablo 2.11.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=70$ ve $N=90$ olduğu durumdaki v hız vektörü değeri . . . . .	27
Tablo 2.12.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda $N=100$ ve $N=110$ olduğu durumdaki v hız vektörü değeri . . . . .	27
Tablo 2.13.	$h=2$ için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda $N=20$ ve $N=40$ alınarak elde edilen u hız vektörünün değeri . . . . .	27

Tablo 2.14.	h=2 için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda N=70 ve N=90 alınarak elde edilen u hız vektörünün değeri . . . . .	28
Tablo 2.15.	h=2 için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda N=100 ve N=110 alınarak elde edilen u hız vektörünün değeri . . . . .	28
Tablo 2.16.	h=2 için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda N=20 ve N=40 alınarak elde edilen v hız vektörünün değeri . . . . .	28
Tablo 2.17.	h=2 için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda N=70 ve N=90 alınarak elde edilen v hız vektörünün değeri . . . . .	28
Tablo 2.18.	h=2 için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda N=100 ve N=110 alınarak elde edilen v hız vektörünün değeri . . . . .	29
Tablo 2.19.	(-0.9968,-1.9969) noktasında h=2 ve N nin farklı değerleri için $\psi$ nin u ve v hız bileşenleri . . . . .	29
Tablo 2.20.	(-0.9968,-1.9969) noktasında h=2 ve N nin farklı değerleri için $\psi$ nin u ve v hız bileşenleri . . . . .	29
Tablo 2.21.	(-0.9968,-1.9969) noktasında h=2 ve N nin farklı değerleri için $\psi$ nin u ve v hız bileşenleri . . . . .	29
Tablo 3.1.	$\sin(\frac{\pi}{2}(\lambda_k - 1)) = (-1)^k(\lambda_k - 1)$ denkleminin ilk 10 kökü verilmiştir. Burada $\lambda_k = a_k + i b_k$ dir. . . . .	33
Tablo 3.2.	h=1 için $a_1 = b_1 + i c_1$ şeklindedir. . . . .	39
Tablo 3.3.	h=1 için $a_2 = b_2 + i c_2$ şeklindedir. . . . .	39
Tablo 3.4.	h=2 için $a_1 = b_1 + i c_1$ şeklindedir. . . . .	39
Tablo 3.5.	h=2 için $a_2 = b_2 + i c_2$ şeklindedir. . . . .	39
Tablo 3.6.	h=3 için $a_1 = b_1 + i c_1$ şeklindedir. . . . .	40
Tablo 3.7.	h=3 için $a_2 = b_2 + i c_2$ şeklindedir. . . . .	40

Tablo 3.8.	$h=1$ için $\psi$ nin u ve v hız bileşenleri . . . . .	52
Tablo 3.9.	$h=1$ için Phillips [4] yöntemiyle iyileştirilmiş fonksiyonun u ve v hız bileşenleri . . . . .	52
Tablo 3.10.	$h=2$ için $\psi$ nin u ve v hız bileşenleri . . . . .	52
Tablo 3.11.	$h=2$ için Phillips [4] yöntemiyle iyileştirilmiş fonksiyonun u ve v hız bileşenleri . . . . .	52

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	Eyer (saddle noktası) . . . . .	6
Şekil 1.2.	Merkez (center) noktası . . . . .	7
Şekil 1.3.	Köşe (Kusp) Noktası . . . . .	8
Şekil 2.1.	Üst kapağı hareketli kaviti için sınır değer problemi . . . . .	13
Şekil 2.2.	(a) $h=0.75$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b) $h=1.55$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (c) $h=1.65$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (d) $h=1.85$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri . . . . .	24
Şekil 2.3.	(a) $h=1.6297$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b) $h=3.028$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (c) $h=4.425$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (d) $h=5.672$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri (Detaylı bilgi için bkz. Gurcan [1]) . . . . .	25
Şekil 3.1.	Moffat köşesi . . . . .	31
Şekil 3.2.	(a) $h=1$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b) $h=1$ için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c) $h=1$ için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . .	41
Şekil 3.3.	(a) $h=2$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b) $h=2$ için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c) $h=2$ için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . .	42
Şekil 3.4.	(a) $h=3$ için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b) $h=3$ için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c) $h=3$ için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . .	43

- Şekil 3.5. (a)  $h=3$  için kaviti içerisindeki analitik çözümün sol alt köşesindeki ilk girdap merkezine yaklaşılmış akış çizgileri, (b)  $h=3$  için kaviti içerisindeki analitik çözümün sol alt köşesine daha çok yaklaşılmış akış çizgileri, (c)  $h=3$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki ikinci girdap akış çizgileri, (d)  $h=3$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki üçüncü girdap akış çizgileri 44
- Şekil 3.6. (a)  $h=0.4$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=0.4$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=0.4$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 45
- Şekil 3.7. (a)  $h=0.8$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=0.8$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=0.8$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 46
- Şekil 3.8. (a)  $h=1.2$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.2$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.2$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 47
- Şekil 3.9. (a)  $h=1.63$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.63$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.63$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 48
- Şekil 3.10. (a)  $h=1.75$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.75$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.75$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 49
- Şekil 3.11. (a)  $h=1.8$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.8$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.8$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 50

- Şekil 3.12. (a)  $h=2.5$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=2.5$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=2.5$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri . . . . . 51

## GİRİŞ

Endüstrinin birçok üretim alanlarında akış problemleri ile karşılaşılır. Bu akışkanlarında kaviti içinde (dikdörtgensel, sektörel,...v.s) olanları vereceğimiz örnek problemlerde ortaya çıkar. Bunlar tabaka (coating) akışları, mürekkep püskürtmeli yazıcılar, hava akımları ve okyanus akıntıları, boru içindeki sıvı akışları, kavitilerdeki akış, damarlardaki kan akışı, akciğerlerdeki havanın dolaşımı, galaksideki yıldız hareketleri, elektrik üretimi, hava tahminleri, gemi üretimi ve kanat etrafındaki hava akıntılarının modellenmesinde ve hesaplanmasında sıkça kullanılır (daha detaylı bilgi için bkz. Summers and Thompson [5], Thompson [6], Aidun ve ark. [7], Shankar and Despande [8], Sharif [9], Oztop and Dagtekin [10], Bilgil [11]).

Kapak ile sürülen kavite akışı, dinamik akışkanlar alanındaki hesaplamaalarda en çok çalışılan problemlerden birisidir. Basit bir geometrisi olmasına rağmen, kapak ile sürülen kavite akışı Reynolds sayısına bağlı olarak, kavitilerin köşe bölgelerindeki akışın dönerek oldukça çeşitli akış yapıları ortaya çıkarmaktadır.

Literatürde en çok çalışılan kavite akışları; düzgün dört duvar tarafından sınırlanmış dikdörtgensel veya iç içe geçmiş iki daire arasında kalan sektörel kavitilerle sınırlanmış akışkanın, karşılıklı iki duvar veya tek duvarın hareketi ile oluşturduğu akışlardır. Düzgün geometrilere sahip bu akış problemleri analitik olarak çözülebildiği gibi aynı zamanda spektral ve çoklu grid metodu, sonlu elemanlar, false transient, sonlu farklar gibi nümerik tekniklerle çözülebilir. Kavitelerdeki Stokes akış problemi biharmonic denklem,

$$\nabla^4 \psi = 0$$

tarafından yönetilir. Burada  $\psi$  bilinmeyen, akış fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu denklem akış bölgesinin geometrisine göre kartezyen, silindirik,...v.b. koordinatlarda ifade edilebilir. Dikdörtgensel yada buna benzer kavitilerdeki Stokes akış problemi

için biharmonik denklemin kartezyen koordinatlarda alınmasına rağmen bu tez çalışmasının bir kısmında olduğu gibi bu denklemi kutupsal formda almak uygun olacaktır.

Stokes akış problemi üzerine uzun yıllardır birçok bilim adamı çalışma yapmasına rağmen analitik çözümü sadece düzgün geometriler için elde edilebildi. Ayrıca Jeffrey [12] dönen iki silindir arasında kalan iki boyutlu sonlu bir bölge için biharmonik denklemi çözerek ilk akış çizgisi resmini elde eden araştırmacı oldu. Bu tezde de dikdörtgensel kaviti için Stokes akış probleminin çözümü incelenmiştir.

Smith [13] yarı sonsuz şeritsel bir bölgede biharmonik denklemi çözmek için bir algoritma geliştirdi. Smith analitik çözümü kompleks olan özfonksiyonlar (Papkovich-Fadle özfonksiyonları) ve kompleks olan özdeğerlerin sonsuz serisi olarak aldı. Ele alınan bu serinin bilinmeyen katsayılarını bulmak için çiftdikleştirme (biorthogonality) yöntemini kullandı. Joseph and Sturges [2, 14] bu metodu dikdörtgensel kavitiye uyguladı. Daha sonra Driesen ve ark. [3] kavitiyi dikdörtgensel alt bölgelere ayırıp her bir kaviti içerisinde farklı akış fonksiyonları oluşturup çiftdikleştirme (biorthogonality) yöntemini kullanarak lineer denklem sistemine indirgedi ve bilinmeyen katsayıları bu şekilde elde etti. Son olarak Gurcan [1] aynı problemin çözümünü çiftdikleştirme (biorthogonality) metodunu kullanarak akış yapılarını detaylı bir şekilde elde etti. Kavitinin görünüm oranı olan  $A$  parametresini azar azar değiştirerek farklı akış yapıları ve girdap (eddy) oluşum mekanizmasını elde etti.

Aynı problemin çözümünü Shankar [15], sonsuz serinin katsayılarını bulmak için çiftdikleştirme (biorthogonality) şartını kullanmak yerine en küçük kareler metodunu kullandı. Elde ettiği sonuçlar ile Joseph and Sturges [2] tarafından bulunan sonuçları karşılaştırdı ve kendi sonuçlarının onlarınki kadar doğru olduğunu gördü. Shankar ayrıca görünüm oranı olan  $A$ 'nın artırılması ile köşe girdaplarının gelişerek yeni bir girdap oluştuğunu gösterdi. Bu girdap oluşum mekanizması daha önce Shen and Floryan [16] tarafından tarif edilmişti.

Srinivasan [17] aynı problem için köşe singüleritesini inceledi. Analitik çözümü elde etmek için Shankar [15]'in metodunu kullandı ki bu çözüm hareketli kapak

ve sabit duvarların oluşturduğu köşelere yakın yerlerdeki singüleriteye sahipti. Bu çözüm seri kısaltmalarından dolayı köşelere yakın yerlerde bir miktar hata verdi. Bu hatayı, çözüme küçük  $r$ 'ler için bir lokal çözüm ekleyerek minimize etti. Buradaki  $r$  köşe noktasına olan radyal mesafenin ölçüsüdür. Srinivasan [17] bu çalışmayla üst sınır koşullarının köşelere yakın bölgeler için yatay hız bileşeni açısından Shankar'ın metodundan daha iyi sonuçlar elde etti. Fakat aynı köşe bölgeleri için  $\psi = 0$  şartını aynı yakınlıkta elde etti. Ayrıca kavitinin köşelere yakın iç kısımlarda akış fonksiyonu  $\psi$  için oldukça doğru sonuçlara ulaştı.

Diğer yandan Phillips [4] dikdörtgensel kavitinin köşe civarındaki akış yapısını inceledi. Bunun için köşe yakınlarında Stokes akış probleminin çözümünü ele aldı. İlk önce akış bölgesini alt dikdörtgensel bölgelere ayırdı. Bilinmeyen katsayıları çift dikleştirme (biorthogonality) yöntemiyle elde etti ve akış yapılarını oluşturdu. Daha sonra girinti (reentrant) ve çıkıntı (salient) köşelerinde akış yapılarını incelemek için biharmonik denklemi ikinci mertebeden sistemler olarak kutupsal koordinatlarda ifade etti. Adjoint problem elde ederek (bkz bölüm 1.3) bir yöntem geliştirdi. Bu yöntem aslında dikdörtgensel kavitinin köşe civarını bir daire dilimi olarak ele alıp orada bir akış fonksiyonu oluşturmuştur. Buradaki akış fonksiyonunu ele alınan daire diliminin yayı üzerinde dikdörtgensel kavitedeki  $\psi$  akış fonksiyonu ile eşitlenmiştir. Dolayısıyla köşe civarındaki singüleritiler yok olmuş ve akış girdapları rahatlıkla görülmüştür (bkz bölüm 3). Tezin 3. bölümünde dikdörtgensel kaviti için akış çizgileri ve aynı kavitinin köşesindeki akış çizgileri karşılaştırılmıştır.

## 1. BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca kullanacağımız genel tanımlar, metodlar ve bunlarla ilgili teoremler verilecektir.

#### 1.1. Hamiltonian Sistemler

**Tanım 1.1.1.**  $\psi$  akış fonksiyonu olmak üzere

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan sistemlere Hamiltonian sistemler denir.

**Tanım 1.1.2.** Hamiltonian sistemlerin akış fonksiyonu  $\psi$  olsun.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (1.2)$$

şartını sağlayan  $(x_0, y_0)$  noktasına Hamiltonian sisteminin kritik noktası denir.

**Teorem 1.1.1.** Hamiltonian sistemler korunumlu (conservative) bir sistemdir.

**İspat:**

$$\psi(x, y) = c$$

alınıp zamana göre türevi alınırsa ;

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu da  $\psi(x, y)$  akış fonksiyonu zamandan bağımsız olduğunu, yani korunumlu olduğunu verir. ■

Hamiltonian sistemlerde kritik nokta civarında akış yapıları iki tanedir. Bunlar eyer (saddle) ve merkez (center) dir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 1.1.2.** Hamiltonian sistemlerin jakobiyen matrisi

$$J = \begin{pmatrix} \psi_{yx} & \psi_{yy} \\ -\psi_{xx} & -\psi_{xy} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

ve determinanı

$$|J| = \psi_{xx}\psi_{yy} - (\psi_{xy})^2 \quad (1.4)$$

olsun. Eğer

- (i)  $|J| < 0$  ise, kritik nokta eyer (saddle) noktası,
- (ii)  $|J| > 0$  ise, kritik nokta merkez (center) noktasıdır.

Yani  $(x_0, y_0)$  kritik noktasındaki akış yapısını bulabilmek için Jakobiyen matrisinin determinantının işaretine bakılarak yorum yapılabilir.

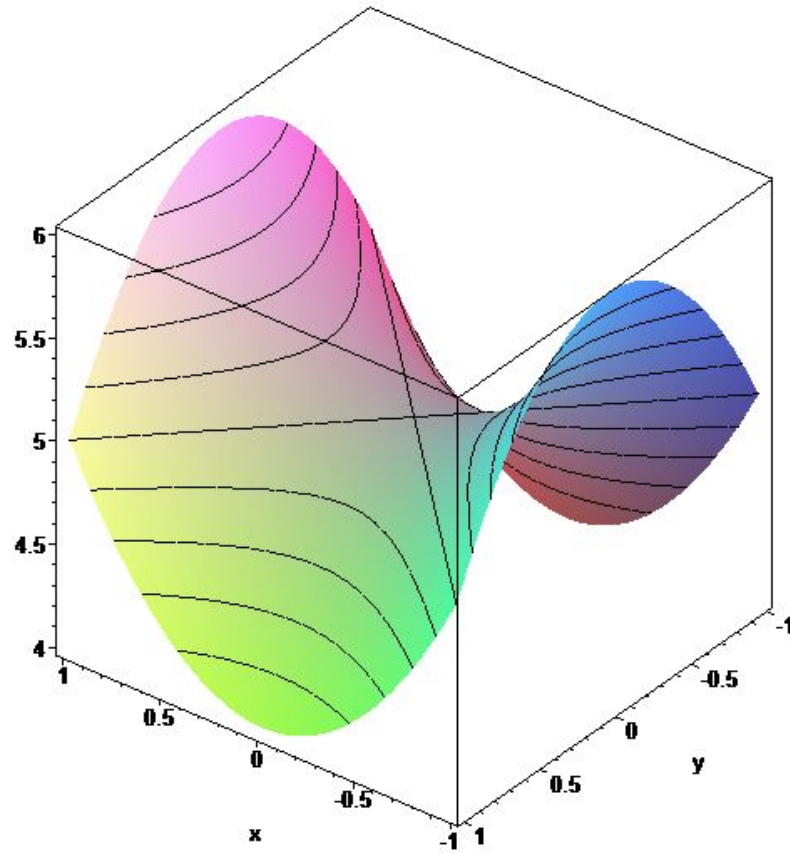
**Tanım 1.1.3.** Eyer noktaları  $\psi$  fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerinin sıfır olduğu fakat fonksiyonun yerel minimum veya yerel maksimum olmadığı noktalardır (bkz. şekil 1.1).

**Tanım 1.1.4.** Merkez noktası  $\psi$  fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerinin sıfır olduğu ve sadece yerel minimum veya yerel maksimum olduğu noktalardır (bkz. şekil 1.2).

**Tanım 1.1.5.** İki eğrinin teğetsel olarak birleştiği noktaya köşe (kusp) noktası denir (bkz. şekil 1.3).

**Tanım 1.1.6.**  $|J| = \psi_{xx}\psi_{yy} - (\psi_{xy})^2 = 0$  olsun. Eğer

- (i) Sıfır, cebirsel çarpanı iki ve geometrik çarpanı bir olacak şekilde bir öz değer ise, kritik noktaya basit (simple) dejenere noktası,
- (ii) Sıfır, hem cebirsel hem de geometrik çarpanı bir olacak şekilde ( $J=0$ ) bir özdeğer ise kritik noktaya basit olmayan (non-simple) dejenere noktası denir.



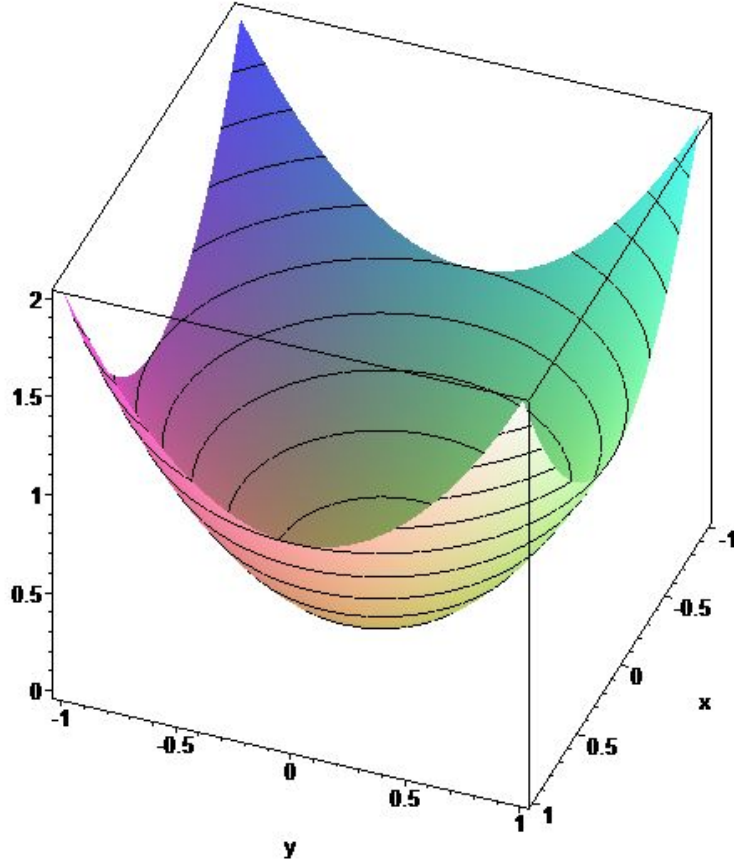
Şekil 1.1. Eyer (saddle noktası)

**Tanım 1.1.7.** Yeni kritik noktaların doğması veya yok olması akışın nitel değişikliklere (şekil olarak) uğradığını gösterir. Dinamik sistemlerdeki bu değişikliğe çatallanma (bifurcation), değişikliğin olduğu noktaya ise çatallanma noktası denir.

Bu çatallanmaların 3 çeşidi vardır. Bunlar eyer-düğüm (saddle-node) çatallanması, transcritical çatallanması ve pitchfork çatallanmasıdır.

**Tanım 1.1.8.** Saddle-Node çatallanmasının genel formu  $r$  bir parametre olmak üzere  $\dot{x} = r + x^2$  şeklindedir. Burada  $f(x) = r + x^2 = 0$  olmak üzere  $x = \pm\sqrt{-r}$  olur ki  $r$ 'nin durumlarına göre üç durum incelenir.  $r < 0$ ,  $r = 0$  ve  $r > 0$  dır. Burada kritik nokta ilk durumda iki iken son durumda sıfır olur.

**Tanım 1.1.9.** Genel formu  $\dot{x} = rx - x^2$  şeklinde olan sistemlere Transcritical Çatallanması (Bifurcation) (TB) denir.  $r$  parametresine göre farklı durumlar söz



Şekil 1.2. Merkez (center) noktası

konusudur. Burada  $f(x) = rx - x^2 = 0$  olmak üzere

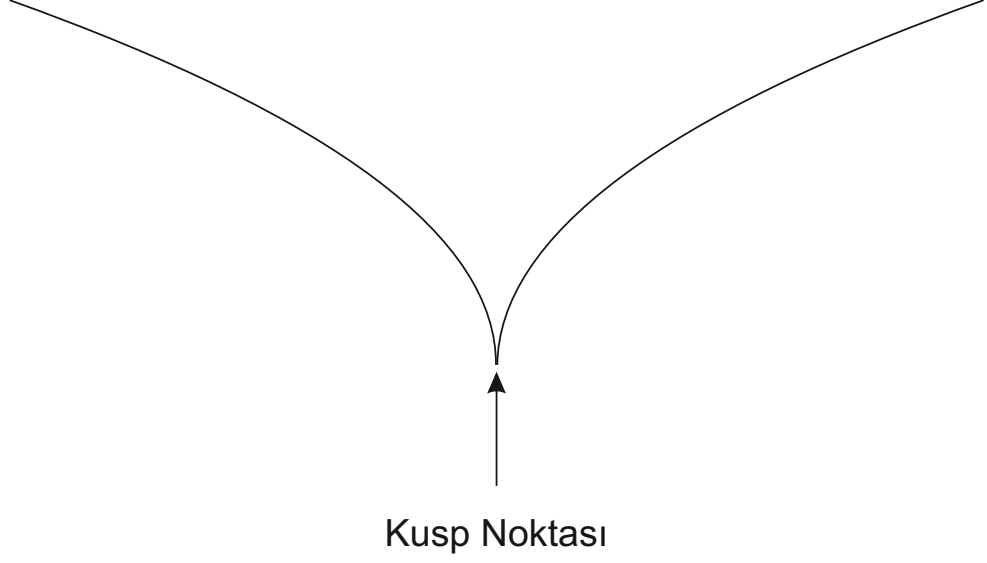
$$rx - x^2 = 0 \rightarrow x(r - x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ve } x = r$$

dir. Dolayısıyla kritik nokta her zaman ikidir. Sadece yerleri değişir.

**Tanım 1.1.10.** Genel formu  $\dot{x} = rx - x^3$  şeklinde olan sistemlere Pitchfork çatallanması denir.

$$f(x) = rx - x^3 = 0 \rightarrow x(r - x^2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ve } x = \pm\sqrt{r}$$

olmak üzere üç durum incelenir. Dolayısıyla  $r$  nin büyüklüğüne ve küçüklüğüne bağlı olarak yapının değişmesi ilk başta tek kritik nokta mevcut iken daha sonra kritik nokta üçe çıkıyor.



Şekil 1.3. Köşe (Kusp) Noktası

## 1.2. Sıfırdan Farklı Reynolds Sayılı Navier-Stokes Akışı

Navier-Stokes denklemleri, ismini Claude-Louis Navier ve George Gabriel Stokes'tan almış olan, sıvılar ve gazlar gibi akışkanların hareketini tanımlamaya yarayan bir dizi denklemlerden oluşur (Bilgil [11]). Öncelikle akışkanın sürekli olduğu kabul edilir. Yani akışkanın tamamının aynı özellikte olduğu, içinde farklı biçimlerin (formların) olmadığı kabul edilir.

Bu denklemler, akışkan içerisindeki birim kütleyle etki eden momentum (ivmelenme) değişimlerinin basınç değişimleri ve sürtünme kayıplarına neden olan viskoz kuvvetlerinin (sürtünmeye benzer) toplamına eşit olduğunun doğruluğunu ortaya koymaktadır. Bu viskoz kuvvetler moleküller arası etkileşimlerden meydana gelmekte ve akışkanın akmaya ne kadar dirençli (viskoz) olduğunu göstermektedir. Böylece, Navier-Stokes denklemlerinin, verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesi olduğu söylenebilir (Bilgil [11]).

Bu denklemler en kullanışlı denklemlerin başında gelmektedir. Çünkü, gerek akademik gerekse ekonomik birçok fenomenin fiziğini açıklamaktadır. Hava akımlarının ve okyanus akıntılarının, boru içindeki sıvı akışlarının, kavitilerdeki akışın, damarlardaki kan akışının, galaksideki yıldız hareketlerinin, elektrik üretiminin, hava tahminlerinin, gemi üretiminin ve kanat etrafındaki hava

akıntılarının modellenmesinde ve hesaplanmasında sıkça kullanılır.

İki boyutlu Navier-Stokes denkleminin genel şekli aşağıdaki gibidir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Burada  $u$  ve  $v$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki hız bileşenleri,  $\rho$  yoğunluk,  $P$  basınç, ve  $\nu$  kinematik viskozitedir. Çözüm yöntemlerinde sağladığı sadelik ve bazı parametrelerin akışa olan etkisini tayin edebilmek adına genellikle bu denklem boyut analizi ile boyutsuz hale getirilebilir.

### 1.3. Çift dikleştirme (Biorthogonality) Metodunun Uygulanması

Şimdi biharmonik denklemin çözümünü ele alıp çift dikleştirme metodunu açıklayalım. Biharmonik denklemin çözümünü değişkenlerine ayrılabilir olarak  $\psi(x, z) = \phi(x)e^{\lambda z}$  olup  $\lambda$ 'lar kompleks ve  $\phi(x)$  fonksiyonu biharmonik denklem içinde aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left( \frac{d^4}{dx^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^4 \right) \phi(x) = \left( \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) \left( \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) \phi(x) = 0. \quad (1.8)$$

Ayrıca  $u = \phi'' + \lambda^2 \phi$  dersek (1.8) denklemini

$$u = \phi'' + \lambda^2 \phi, \quad u'' + \lambda^2 u = 0 \quad (1.9)$$

şeklinde yazılır (Shankar [18]). Diğer yandan  $-1/2 < x < 1/2, z < 0$  sınırları içinde aşağıdaki şartlar verilsin.

(i)  $\psi(x, z)$  çözümü  $x = \pm 1/2$  de kendisi ve türevi sifira eşit olsun.

(ii)  $z \rightarrow -\infty, \psi(x, z) \rightarrow 0$  olmalı. (1.9) denklemini yeniden düzenlersek

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi + u = \lambda^2 \phi, \quad (1.10)$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} u = \lambda^2 u \quad (1.11)$$

yazılır.  $U^t = (\phi, u)$  (Friedman 1956) şeklinde vektör olarak tanımlanırsa (1.10) ve (1.11) denklemlerinin standart formu  $AU = \lambda^2 U$  özproblemi şekline elde edilir. Burada  $A$  operatörü

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & 1 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

şeklinde alınmıştır.  $U^t = (\phi, u)$  ve  $V^t = (\chi, v)$  vektör halinde tanımlayıp (Friedman [19]) iki vektör alalım. Sonra bu iki vektör arasındaki iç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle V, U \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{ \phi(x)\chi(x) + u(x)v(x) \} dx.$$

Ayrıca sınır şartları olarak  $\phi(\pm\frac{1}{2}) = \phi'(\pm\frac{1}{2}) = v(\pm\frac{1}{2}) = v'(\pm\frac{1}{2}) = 0$  olsun.

$$\langle V, AU \rangle = \langle U, \check{A}V \rangle$$

şeklinde  $\check{A}$  adjoint operatörü vardır. Bu adjoint operatörü

$$\check{A} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 1 & -\frac{d^2}{dx^2} \end{pmatrix}$$

şeklinde (Shankar [18]). Bu durumda  $A$ 'nin özvektörü  $U$ , özdeğeri  $\lambda$  ve  $\check{A}$ 'nin özvektörü  $V$ , özdeğeri  $\mu$  olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\langle V, AU \rangle = \langle V, \lambda^2 U \rangle = \lambda^2 \langle V, U \rangle = \langle U, \check{A}V \rangle = \langle U, \mu^2 V \rangle = \mu^2 \langle U, V \rangle$$

dır. Buradan ise  $(\lambda^2 - \mu^2)\langle V, U \rangle = 0$  olur ki  $\lambda \neq \mu$  iken  $\langle V, U \rangle = 0$  dır. Bu ifade bizim aradığımız diklik (biorthogonal) ifadesidir (Shankar [18]).

## 2. BÖLÜM

### DİKDÖRTGENSEL KAVİTİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİ

#### 2.1. Giriş

Bu bölümde bir dikdörtgenel kaviti içerisindeki akış yapıları (girdap, homoklinik, heteroklinik, ...) yavaş viskos akışlar için Stokes denkleminin analitik çözümünden elde edilmiştir. Bunun için dikdörtgenel kavitinin üst kapağı hareketli diğer kenarları ise hareketsiz olan sınır değer problemi göz önüne alınmıştır.

Dikdörtgenel kaviti içerisindeki Stokes akış problemi üzerine birçok bilim adamı çalışmıştır. Örneğin; Smith [13] yarı sonsuz şeritsel bir bölgede biharmonik denklemi çözmek için bir algoritma geliştirdi. Smith bu çalışmasında akış fonksiyonunun analitik çözümünü kompleks öz fonksiyonlar (Papkovich-Fadle) ile kompleks öz değerlerin sonsuz bir serisi şeklinde ifade etti. Elde edilen bu serinin katsayılarını bulmak için sınır koşullarını kullanarak bir denklem sistemi oluşturdu. Bu denklem sistemini de çiftdikleştirme (biorthogonality) yöntemini kullanarak çözdü. Daha sonra Joseph and Sturges [2] bu metodu dikdörtgenel kavitiye uyguladı. Joseph and Sturges [2] bu sayede  $A$  görünüm oranını (aspect ratio) değiştirerek farklı akış yapıları elde etti.

Shankar [15] aynı problemin çözümünü, sonsuz serinin katsayılarını bulmak için çiftdikleştirme (biorthogonality) şartını kullanmak yerine en küçük kareler metodunu kullandı. Elde ettiği sonuçlarla Joseph and Sturges [2] tarafından bulunan sonuçları karşılaştırdı ve kendi sonuçlarının diğer çalışmalardan daha doğru olduğunu gördü. Gürçan [1] dikdörtgenel kaviti içerisindeki akış yapılarını kavitinin görünüm oranı olan  $A$ 'nın değiştirilmesiyle oluşan akış modellerini Joseph and Sturges [2]'in geliştirdiği çiftdikleştirme (biorthogonality) özelliğini kullanarak detaylı bir şekilde ortaya koydu. Ayrıca Gürçan [1] kavitinin görünüm oranı olan  $A$

parametrisini kullanarak girdap (eddy) oluşum mekanizmasını elde etti.

Diğer yandan Driesen, ve ark [3] tarafından yapılan çalışmada kaviti içerisindeki akış yapılarını elde etti. Ele aldığı kavitiyi sonlu sayıda dikdörtgenel alt bölgelere ayırdı. Bu alt bölgelerdeki akış fonksiyonların çözümünü özfonksiyonların serisi olarak aldı. Bu serilerdeki katsayıları bulmak için sınır şartlarını, eşleştirme koşullarını kullandı. Çiftdikleştirme (biorthogonality) metodu yardımıyla lineer denklem sistemine indirgenerek katsayılar elde etti. Bu sayede kaviti içerisindeki herhangi bir bölgedeki akış yapılarını elde etti.

## 2.2. Modelin Formülasyonu

Bu kısımda tek kapağı hareketli dikdörtgenel kaviti içerisindeki iki boyutlu sıkıştırılmaz akış problemi göz önüne alınacaktır. Sıkıştırılmaz akışın yoğunluğu  $\rho$ , viskozitesi  $\eta$  olmak üzere kararlı bir Newtonian akış, Navier-Stokes denklemi ve süreklilik denklemi tarafından yönetilir. Bu denklem,

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1)$$

ve süreklilik denklemi,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde. (2.1) denkleminde  $\mathbf{u}$  ve  $P$  sırasıyla akışkan için hız ve basınç değişkenleridir. Burada  $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  atalet terimi,  $-\nabla P$  basınç terimi ve  $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$  viskos terimi olarak adlandırılır. Ayrıca atalet terimlerinin, basınç ve viskos terimlerine göre önemsenmeyecek kadar küçük olduğu kabul edilir. Böylece (2.1) denklemindeki atalet terimi dikkate alınmazsa Navier-Stokes denklemi Stokes denklemine indirgenir.

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) denkleminde curl operatörü ile basınç gradient terimi  $\nabla P$  elimine edildi. Böylece,

$$\nabla \wedge \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

elde edilir.  $\psi$  akış fonksiyonu (stream function) olduğundan hız bileşenleri,

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

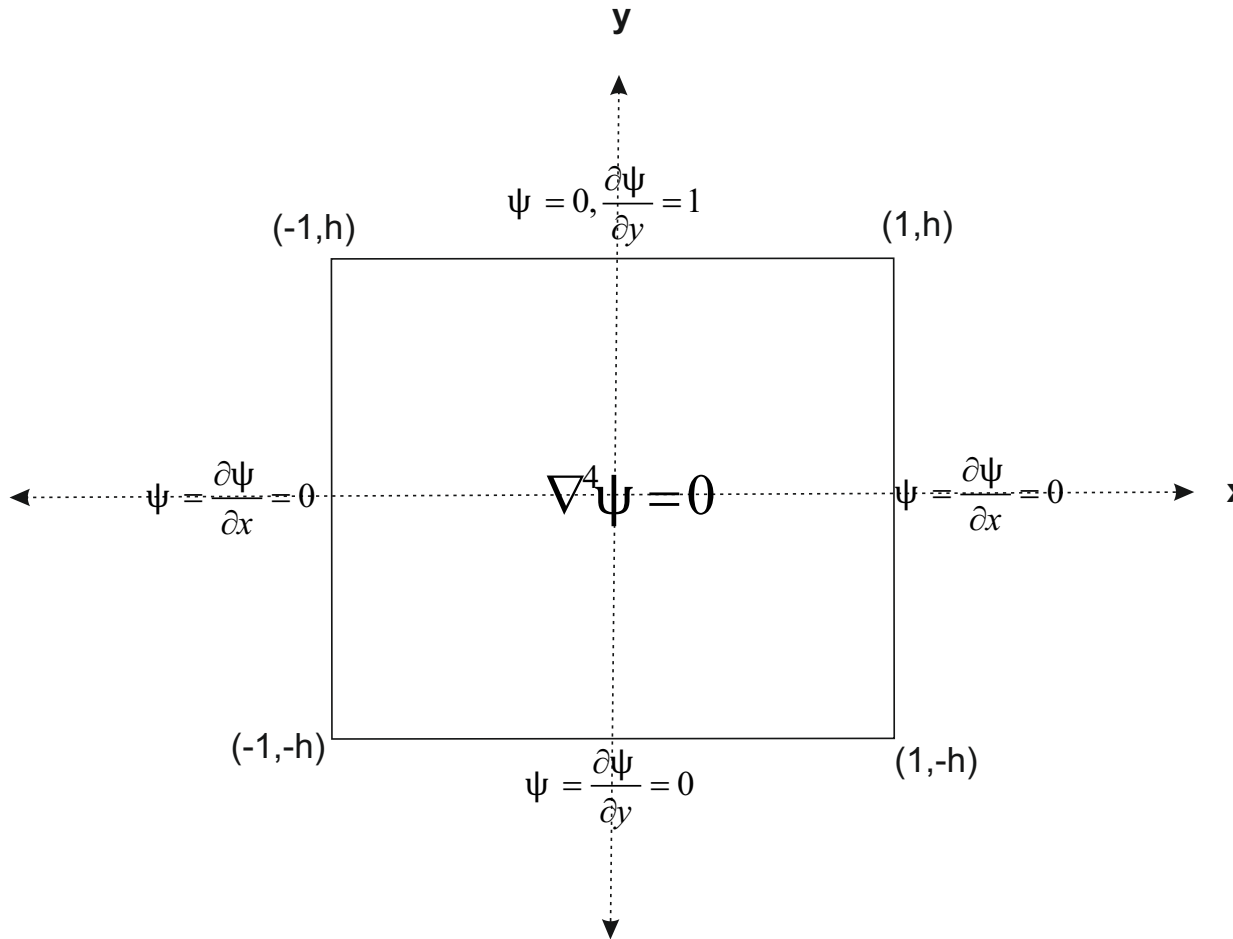
şeklindedir. Burada  $u$  ve  $v$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki hızlarıdır. Sınır şartları ise

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ ve } \psi = \text{sabit} \quad (2.6)$$

şeklindedir. Böylece (2.4) denklemi  $\psi$  için aşağıdaki biharmonik denkleme indirgenir.

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (2.7)$$

### 2.3. Çözüm Yöntemi



Şekil 2.1. Üst kapağı hareketli kaviti için sınır değer problemi

Şekil 2.1'deki gibi  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-h \leq y \leq h$  sınırları arasında kalan, sadece üst kapak hareketli diğer taraflar duvar olan bir dikdörtgensel kaviti düşünelim. Bu kaviti içerisindeki akış fonksiyonu Papkovich-fadle özfonksiyonlarının bir serisi olarak,

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}^2} \left( a_n \frac{\sinh(\lambda_{a,n} y)}{\sinh(\lambda_{a,n} h)} + b_n \frac{\cosh(\lambda_{a,n} y)}{\cosh(\lambda_{a,n} h)} \right) \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} \left( c_n \frac{\sinh(\lambda_{s,n} y)}{\sinh(\lambda_{s,n} h)} + d_n \frac{\cosh(\lambda_{s,n} y)}{\cosh(\lambda_{s,n} h)} \right) \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{a,n}(y)}{\mu_{a,n}^2} \left( e_n \frac{\sinh(\mu_{a,n} x)}{\sinh(\mu_{a,n} h)} + f_n \frac{\cosh(\mu_{a,n} x)}{\cosh(\mu_{a,n} h)} \right) \\
& + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{s,n}(y)}{\mu_{s,n}^2} \left( g_n \frac{\sinh(\mu_{s,n} x)}{\sinh(\mu_{s,n} h)} + h_n \frac{\cosh(\mu_{s,n} x)}{\cosh(\mu_{s,n} h)} \right) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

dır (Gürcan [1]).

Burada  $\psi$  akış fonksiyonu  $\nabla^4 \psi = 0$ , Stokes denklemini sağlaması gerektiğinden dolayı özfonksiyonlar (Papkovich-Fadde Özfonksiyonları),

$$\begin{aligned}
\phi_{a,n}(x) &= \lambda_{a,n} [\sin(\lambda_{a,n}) \cos(\lambda_{a,n} x) - x \cos(\lambda_{a,n}) \sin(\lambda_{a,n} x)], \\
\phi_{s,n}(x) &= \lambda_{s,n} [\cos(\lambda_{a,n}) \sin(\lambda_{a,n} x) - x \sin(\lambda_{a,n}) \cos(\lambda_{a,n} x)] \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{a,n}(y) &= \lambda_{a,n} \left[ \sin(\lambda_{a,n}) \cos\left(\lambda_{a,n} \frac{y}{h}\right) - \frac{y}{h} \cos(\lambda_{a,n}) \sin\left(\lambda_{a,n} \frac{y}{h}\right) \right], \\
\omega_{s,n}(y) &= \lambda_{s,n} \left[ \cos(\lambda_{a,n}) \sin\left(\lambda_{s,n} \frac{y}{h}\right) - \frac{y}{h} \sin(\lambda_{s,n}) \cos\left(\lambda_{s,n} \frac{y}{h}\right) \right] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edildi (Gürcan [1]). Sınır şartları,

i)  $x=\pm 1$  için (yan sınırlar)

$$\psi(\pm 1, y) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(\pm 1, y)}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

ii)  $y=h$  için (üst sınır)

$$\psi(x, h) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(x, h)}{\partial y} = 1 \quad (2.12)$$

iii)  $y=-h$  için (alt sınır)

$$\psi(x, -h) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(x, -h)}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

dır. Özfonksiyonlara sınır koşullarını uygulanarak özdeğerler,

$$\sin(2\lambda_{a,n}) = -2\lambda_{a,n} \quad (2.14)$$

$$\sin(2\lambda_{s,n}) = 2\lambda_{s,n} \quad (2.15)$$

şeklindeki denklemlerin kompleks kökleri olarak elde edildi. Burada ayrıca,

$$\mu_{a,n} = \frac{\lambda_{a,n}}{h} \quad (2.16)$$

$$\mu_{s,n} = \frac{\lambda_{s,n}}{h} \quad (2.17)$$

şeklinde dir. Başka bir deyişle özfonksiyonların genel formu;

$$\phi_{a,n}(x) = c_1 \cos(\lambda_{a,n} x) + c_2 x \sin(\lambda_{a,n} x)$$

$$\phi_{s,n}(x) = c_3 \sin(\lambda_{s,n} x) + c_4 x \cos(\lambda_{s,n} x)$$

şeklinde olduğu açıktır. Bu denklemlere (2.18) sınır koşulu uygulandığında yani;

$\phi_{a,n}(1) = 0$  ve  $\frac{\partial \phi_{a,n}(1)}{\partial x} = 0$  şartları yerine yazıldığında;

$$\phi_{a,n}(1) = c_1 \cos(\lambda_{a,n}) + c_2 \sin(\lambda_{a,n}) = 0$$

$$\frac{\partial \phi_{a,n}(x=1)}{\partial x} = -c_1 \sin(\lambda_{a,n}) + c_2 (\sin(\lambda_{a,n}) + \lambda_{a,n} \cos(\lambda_{a,n})) = 0$$

elde edilir. Burada katsayılar matrisini oluşturduğumuzda aşikar çözüm olmaması için ( $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ ) katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} \cos(\lambda_{a,n}) & \sin(\lambda_{a,n}) \\ -\lambda_{a,n} \sin(\lambda_{a,n}) & \sin(\lambda_{a,n}) + \lambda_{a,n} \cos(\lambda_{a,n}) \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır.

Bu determinantın değerinden ise  $\sin(2\lambda_{a,n}) = -2\lambda_{a,n}$  elde edilir. Benzer şekilde simetrik olan özfonksiyon için uygulanırsa  $\sin(2\lambda_{s,n}) = 2\lambda_{s,n}$  özdeğerleri bulunur.

Şimdi (2.8) akış fonksiyonunun katsayısını bulmak için Gürçan [1], Driesen ve ark [3], Joseph and Sturges [2]'den yararlanılarak bir operatör yardımıyla çift dikleştirme (biorthogonality) özelliğinden lineer denklem sistemi elde edilerek katsayılar bulunacaktır.

Tablo 2.1.  $\sin(2\lambda_{a,n}) + 2\lambda_{a,n} = 0$  denkleminin ilk 40 kökü verilmiştir.  
Burada  $\lambda_{a,n} = a_n + i b_n$  dir.

n	$a_n$	$b_n$	n	$a_n$	$b_n$
1	2.1061961	1.1253643	21	65.166714	2.7820694
2	5.3562686	1.5515743	22	68.309115	2.8055834
3	8.5366824	1.7755436	23	71.451452	2.8280415
4	11.699177	1.9294044	24	74.593734	2.8495344
5	14.854059	2.0468524	25	77.735965	2.8701416
6	18.004933	2.1418907	26	80.878152	2.8899332
7	21.153413	2.2217229	27	84.020298	2.9089714
8	24.300342	2.2905522	28	87.162409	2.9273114
9	27.446202	2.3510482	29	90.304488	2.9450026
10	30.591295	2.4050125	30	93.446537	2.9620894
11	33.735814	2.4537192	31	96.588559	2.9786116
12	36.879894	2.4981022	32	99.730557	2.9946054
13	40.023629	2.5388668	33	102.87253	3.0101035
14	43.167088	2.5765588	34	106.01448	3.0251357
15	46.310323	2.6116089	35	109.15642	3.0397293
16	49.453372	2.6443934	36	112.29834	3.0539090
17	52.596267	2.6751044	37	115.44024	3.0676978
18	55.739031	2.7040651	38	118.58213	3.0811166
19	58.881683	2.7314406	39	121.72400	3.0941846
20	62.024240	2.7573953	40	124.86586	3.1069199

#### 2.4. Kaviti içerisindeki akış modellerinin elde edilmesi

Ele alınan kavitin sağ ve sol kapaklar ( $x=\pm 1$  boyunca) alt kapağı da ( $y=-h$  boyunca) hareketsizdir. Üst kapak ise ( $y=h$  boyunca) sağa doğru hareketli olarak incelenecektir. (2.8) akış fonksiyonundaki bilinmeyen katsayıları bulmak için sınır koşulları kullanıldı. Sınır şartları,

(i)  $x=\pm 1$  için (yan sınırlar)

$$\psi(\pm 1, y) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(\pm 1, y)}{\partial x} = 0, \quad (2.18)$$

(ii)  $y=h$  için (üst sınır)

$$\psi(x, h) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(x, h)}{\partial y} = 1, \quad (2.19)$$

Tablo 2.2.  $\sin(2\lambda_{s,n}) - 2\lambda_{s,n} = 0$  denkleminin ilk 40 kökü verilmiştir.  
Burada  $\lambda_{s,n} = a_n + i b_n$  dir.

n	$a_n$	$b_n$	n	$a_n$	$b_n$
1	3.7488381	1.3843391	21	66.7379232	2.7939647
2	6.9499799	1.6761049	22	69.8802915	2.8169386
3	10.1192589	1.8583838	23	73.0226000	2.8389034
4	13.2772736	1.9915708	24	76.1648556	2.8599441
5	16.4298705	2.0966257	25	79.3070640	2.8801353
6	19.5794083	2.1833976	26	82.4492303	2.8995430
7	22.7270357	2.2573202	27	85.5913587	2.9182255
8	25.8733842	2.3217140	28	88.7334530	2.9362353
9	29.0188310	2.3787576	29	91.8755164	2.9536190
10	32.1636169	2.4299583	30	95.0175517	2.9704187
11	35.3079025	2.4764027	31	98.1595616	2.9866725
12	38.4518000	2.5188996	32	101.3015480	3.0024145
13	41.5953897	2.5580677	33	104.4435131	3.0176761
14	44.7387310	2.5943908	34	107.5854585	3.0324858
15	47.8818688	2.6282542	35	110.7273859	3.0468695
16	51.0248375	2.6599700	36	113.8692966	3.0608510
17	54.1676642	2.6897944	37	117.0111918	3.0744522
18	57.3103703	2.7179402	38	120.1530727	3.0876933
19	60.4529732	2.7445863	39	123.2949403	3.1005929
20	63.5954870	2.7698846	40	126.4367955	3.1131680

(iii)  $y = -h$  için (alt sınır)

$$\psi(x, -h) = 0 \text{ ve } \frac{\partial \psi(x, -h)}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

dır. Burada (2.18) sınır şartı  $\psi(x, y)$  akış fonksiyonuna uygulanırsa ;

$$\begin{aligned} \psi(1, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{a,n}(y)}{\mu_{a,n}^2} (e_n + f_n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{s,n}(y)}{\mu_{s,n}^2} (g_n + h_n) = 0 \\ \psi(-1, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{a,n}(y)}{\mu_{a,n}^2} (-e_n + f_n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{s,n}(y)}{\mu_{s,n}^2} (-g_n + h_n) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $\omega_{a,n}(y)$  ve  $\omega_{s,n}(y)$  fonksiyonları sadece  $y = h$  olması durumunda sıfır olduğundan  $e_n, f_n, g_n, h_n$  katsayıları sıfırdır.

Dolayısıyla  $\psi(x, y)$  akış fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}^2} \left( a_n \frac{\sinh(\lambda_{a,n} y)}{\sinh(\lambda_{a,n} h)} + b_n \frac{\cosh(\lambda_{a,n} y)}{\cosh(\lambda_{a,n} h)} \right) \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} \left( c_n \frac{\sinh(\lambda_{s,n} y)}{\sinh(\lambda_{s,n} h)} + d_n \frac{\cosh(\lambda_{s,n} y)}{\cosh(\lambda_{s,n} h)} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

şekline indirgenir.

Daha sonra (2.19) sınır şartını ( $y=h$ ) yerine yazılırsa;

$$\psi(x, h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}^2} (a_n + b_n) + \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} (c_n + d_n) \right\} = 0, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, h)}{\partial y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}} (a_n \coth(\lambda_{a,n} h) + b_n \tanh(\lambda_{a,n} h)) \right\} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}} (c_n \coth(\lambda_{s,n} h) + d_n \tanh(\lambda_{s,n} h)) \right\} = 1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklindeki denklemler elde edilir.

(2.20) sınır şartını ( $y=-h$ ) yerine yazılırsa,

$$\psi(x, -h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}^2} (-a_n + b_n) + \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} (-c_n + d_n) \right\} = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, -h)}{\partial y} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{a,n}(x)}{\lambda_{a,n}} (a_n \coth(\lambda_{a,n} h) - b_n \tanh(\lambda_{a,n} h)) \right\} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}} (c_n \coth(\lambda_{s,n} h) - d_n \tanh(\lambda_{s,n} h)) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

bulunur.

$$\phi_{1,a}^n = \phi_{a,n}(x), \quad \phi_{2,a}^n = \frac{\partial^2 \phi_{a,n}(x)}{\partial x^2} \quad (2.26)$$

$$\phi_{1,s}^n = \phi_{s,n}(x), \quad \phi_{2,s}^n = \frac{\partial^2 \phi_{s,n}(x)}{\lambda_{s,n}^2} \quad (2.27)$$

olmak üzere yukarıda sınır koşullarından elde edilen denklemleri yeniden düzenleyerek vektörel formda yazılırsa,

(2.19) ve (2.20) denklemlerinden ;

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (a_n + b_n) \begin{bmatrix} \phi_{1,a}^n \\ \phi_{2,a}^n \end{bmatrix} + \left( a_n \left( \frac{\coth(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}} - 1 \right) + b_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}} - 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi_{1,a}^n \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (c_n + d_n) \begin{bmatrix} \phi_{1,s}^n \\ \phi_{2,s}^n \end{bmatrix} + \left( c_n \left( \frac{\coth(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}} - 1 \right) + d_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}} - 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi_{1,s}^n \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

ve

(2.21) ve (2.22) denklemlerinden;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-a_n + b_n) \begin{bmatrix} \phi_{1,a}^n \\ \phi_{2,a}^n \end{bmatrix} + \left( a_n \left( \frac{\coth(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}} + 1 \right) - b_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi_{1,a}^n \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-c_n + d_n) \begin{bmatrix} \phi_{1,s}^n \\ \phi_{2,s}^n \end{bmatrix} + \left( c_n \left( \frac{\coth(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}} + 1 \right) - d_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}} + 1 \right) \right) \begin{bmatrix} \phi_{1,s}^n \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

şeklinde vektörel bir denklem elde edilir. Özfonksiyonların çiftlikleştirme (biorthogonality) özelliklerini kullanarak, bir operatör (adjoint operatörü) yardımıyla katsayılar daha basit şekilde elde edilir. (Gürcan [1], Driesen ve ark. [3], Joseph and Sturges [2]).

Adjointler,

$$\begin{aligned} \gamma_{1,a}^m &= \lambda_{a,m} [\sin(\lambda_{a,m}) \cos(\lambda_{a,m} x) - x \cos(\lambda_{a,m}) \sin(\lambda_{a,m} x)] - 2 \cos(\lambda_{a,m}) \cos(\lambda_{a,m}(x)), \\ \gamma_{2,a}^m &= \lambda_{a,m} [\sin(\lambda_{a,m}) \cos(\lambda_{a,m} x) - x \cos(\lambda_{a,m}) \sin(\lambda_{a,m} x)], \\ \gamma_{1,s}^m &= \lambda_{s,m} [\lambda_{s,m} (\cos(\lambda_{a,m}) \sin(\lambda_{a,m} x) - x \sin(\lambda_{a,m}) \cos(\lambda_{a,m} x))] + 2 \sin(\lambda_{a,m}) \sin(\lambda_{a,m}(x)), \\ \gamma_{2,s}^m &= \lambda_{s,m} [\lambda_{s,m} (\cos(\lambda_{a,m}) \sin(\lambda_{a,m} x) - x \sin(\lambda_{a,m}) \cos(\lambda_{a,m} x))] \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde olmak üzere adjoint operatörü aşağıdaki şekilde alınır.

$$\int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} \gamma_1^m & \gamma_2^m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} dx. \quad (2.31)$$

Burada A matrisi ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Şimdi yukarıda vektörel halde bulunan (2.25) ve (2.26) denklemlerindeki bazı terimleri yok etmek için adjoint operatörü uygulanır.

Örneğin (2.25) denklemini için ;

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} \gamma_{1,s}^m & \gamma_{2,s}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ \phi_{2,a}^n \end{pmatrix} dx &= 0, \\ \int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} \gamma_{1,s}^m & \gamma_{2,s}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx &= 0, \\ \int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} \gamma_{1,s}^m & \gamma_{2,s}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ \phi_{2,s}^n \end{pmatrix} dx &= M_m, \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,s}^m \quad \gamma_{2,s}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = N_{m,n}.$$

benzer şekilde (2.26) denklemi için ;

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ \phi_{2,a}^n \end{pmatrix} dx = K_m ,$$

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = L_{m,n} ,$$

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ \phi_{2,s}^n \end{pmatrix} dx = 0 ,$$

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = 0$$

elde edilir.

O halde (2.25) ve (2.26) vektörel haldeki denklemlere adjoint operatörü uygulandıktan sonra bu denklemler yeniden düzenlenirse ;

$$(a_m + b_m) K_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( a_n \left( \frac{\coth(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}^2} - 1 \right) + b_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}^2} - 1 \right) \right) L_{m,n} \right\} = 4, \quad (2.32)$$

$$(c_m + d_m) M_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( c_n \left( \frac{\coth(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}^2} - 1 \right) + d_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}^2} - 1 \right) \right) N_{m,n} \right\} = 0, \quad (2.33)$$

$$(-a_m + b_m) K_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( a_n \left( \frac{\coth(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}^2} + 1 \right) - b_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{a,n} h)}{\lambda_{a,n}^2} + 1 \right) \right) L_{m,n} \right\} = 0, \quad (2.34)$$

$$(-c_m + d_m) M_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left( c_n \left( \frac{\coth(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}^2} + 1 \right) - d_n \left( \frac{\tanh(\lambda_{s,n} h)}{\lambda_{s,n}^2} + 1 \right) \right) N_{m,n} \right\} = 0 \quad (2.35)$$

dır. Burada  $K_m, M_m, L_{m,n}, N_{m,n}$  ifadeleri;

$$K_m = \int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ \phi_{2,a}^n \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ ise} \\ -4 \cos^4(\lambda_{a,m}), & m = n \text{ ise} \end{cases}$$

$$M_m = \int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,s}^m \quad \gamma_{2,s}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ \phi_{2,s}^n \end{pmatrix} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ ise} \\ -4 \sin^4(\lambda_{s,m}), & m = n \text{ ise} \end{cases}$$

$$L_{m,n} = \int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,a}^m \quad \gamma_{2,a}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,a}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = \begin{cases} \frac{-16\lambda_{a,m}^2 \lambda_{a,n}^2 (\lambda_{a,n}^2 \cos^2(\lambda_{a,m}) - \lambda_{a,m}^2 \cos^2(\lambda_{a,n}))}{(\lambda_{a,m} + \lambda_{a,n})^3 (\lambda_{a,m} - \lambda_{a,n})^3}, & m \neq n \text{ ise} \\ -\cos^2(\lambda_{a,m}) \left( \frac{2}{3} \lambda_{a,m}^2 + \cos^2(\lambda_{a,m}) \right), & m = n \text{ ise} \end{cases}$$

$$N_{m,n} = \int_{-1}^{+1} (\gamma_{1,s}^m \quad \gamma_{2,s}^m) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,s}^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = \begin{cases} \frac{-16\lambda_{s,m}^2 \lambda_{s,n}^2 (\lambda_{s,n}^2 \sin^2(\lambda_{s,m}) - \lambda_{s,m}^2 \cos^2(\lambda_{s,n}))}{(\lambda_{s,m} + \lambda_{s,n})^3 (\lambda_{s,m} - \lambda_{s,n})^3}, & m \neq n \text{ ise} \\ -\sin^2(\lambda_{s,m}) \left( \frac{2}{3} \lambda_{s,m}^2 + \sin^2(\lambda_{s,m}) \right), & m = n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Artık  $N=100$  alınarak lineer denklem sistemi haline getirilip sonlu sayıdaki katsayılar bulunduğundan dolayı kaviti içerisindeki akış modelleri elde edilir.

Şimdi dikdörtgenel kaviti deki görünüm oranı olan  $h$  değeri değiştirilerek aşağıdaki farklı akış yapıları görüldü (bkz. şekil 2.2 ve 2.3). Gurcan [1] kavitinin  $h$  parametrisini değiştirmek kaydıyla girdap (eddy) oluşum mekanizmasını gösterdi. Detaylı bilgi için Gurcan [1], Gurcan [20], Gurcan [21], Gurcan [22]'e bakınız.

$\psi$  akış fonksiyon serisi sonsuz sayıda katsayı içermektedir. Joseph ve Sturges [2] yaptığı çalışmada geliştirdikleri çiftdikleştirme (biorthogonality) seri çözümünün nümerik olarak yakınsadığını gösterdi.

Aşağıdaki tablolarda  $h=2$  için kaviti içerisinde farklı noktalarda  $\psi$  akış fonksiyonunun değeri ve  $\psi$  akış fonksiyonunun  $u$  ve  $v$  hız bileşenleri  $N$  nin durumlarına göre aldığı değerler gösterilmiştir. Tablo 2.3 ve 2.4 baktığımızda alınan noktalar dikdörtgenel kavitinin iç bölgesinde olduğundan dolayı  $N$  değerinin küçük olduğu yerde bile hızla yakınsamaktadır. Yani alınan datalar yeterlidir. Aynı durum  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  hız bileşeni için tablo 2.7, 2.8, 2.9 ve  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  hız bileşeni için tablo 2.10, 2.11, 2.12 de gösterilmiştir.

Fakat dikdörtgensel kavitenin köşe civarını incelediğimizde aynı sonuçlar elde edilememektedir. Çünkü köşe civarında singüler noktalar vardır. Tablo 2.5, 2.6 da köşe civarındaki noktalarda farklı N durumlarında  $\psi$  akış fonksiyonunun değerleri verilmiştir. Ayrıca aynı noktalar için  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  hız bileşeni tablo 2.13, 2.14, 2.15 de ve  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  hız bileşenini de tablo 2.16, 2.17, 2.18 de gösterilmiştir. Bu tabloları incelediğimizde N değerinin çok fazla alınması durumunda akış fonksiyonu bir noktaya yakınsamaktadır. Fakat bu yakınsama çok yavaş olduğundan dolayı dataları artırmaya ihtiyaç duyulacaktır. Ayrıca h=2 için köşe civarındaki ikinci girdap yapısının merkezi olan (-0.9968,-1.9969) noktasında  $\psi$  akış fonksiyonunun u ve v değerleri farklı N ler için tablo 2.19, 2.20, 2.21 de gösterilmiştir. Bu tabloları incelediğimizde herhangi bir yakınsama görülememektedir. Çünkü bu nokta köşeye çok yakın olduğundan dolayı singüler noktalar artacaktır. Bu da girdap (eddy) yapılarının görülememesini veya çok fazla datalar ile görülebileceğini verir. Fakat bu dataları hesaplamak kolay değildir. N=200 alınıp dikdörtgensel kavitiyi 500x500 tipinde ızgaralara ayırıp incelenebilir. Bunun için 250 bin ayrı noktada işlem yapacak programa ihtiyaç duyulacaktır. Bu da hiç kolay değildir. Bütün bu sorunlardan dolayı Phillips [4] tarafından geliştirilen yöntem 3. bölümde incelenmiştir. 3. bölümün sonunda dikdörtgensel kavitideki u ve v hız bileşenleri ile Phillips [4] yöntemiyle iyileştirmeden sonra elde edilen u ve v hız bileşenleri karşılaştırılmıştır.

Tablo 2.3.  $\psi$  çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve h=2 için değerleri

	N=10	N=20	N=40
$\psi(-0.6222, -1.5111)$	0.10795798E-03	0.10789698E-03	0.10788711E-03
$\psi(-0.5556, 1.3333)$	-0.10014830	-0.10002888	-0.10001019
$\psi(-0.5111, 0.2222)$	-0.12145450E-01	-0.12150711E-01	-0.12151445E-01
$\psi(0.0222, -1.5556)$	0.23791438E-03	0.23773470E-03	0.23770603E-03
$\psi(0.0889, 1.0222)$	-0.12723791	-0.12721890	-0.12721528
$\psi(0.6000, 0.1333)$	-0.87168602E-01	-0.87048641E-01	-0.87030043E-01
$\psi(0.6222, -1.4222)$	0.13826523E-03	0.13817345E-03	0.13815872E-03
$\psi(0.6667, 1.6889)$	-0.10056059	-0.10000626	-0.99917774E-01

Tablo 2.4.  $\psi$  çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve h=2 için değerleri

	N=70	N=90	N=110
$\psi(-0.6222, -1.5111)$	0.10788780E-03	0.10788513E-03	0.10788808E-03
$\psi(-0.5556, 1.3333)$	-0.10001037	-0.10000526	-0.10001063
$\psi(-0.5111, 0.2222)$	-0.12151745E-01	-0.12151964E-01	-0.13011847E-01
$\psi(0.0222, -1.5556)$	0.23770672E-03	0.23769888E-03	0.23770722E-03
$\psi(0.0889, 1.0222)$	-0.12721684	-0.12721593	-0.12721725
$\psi(0.6000, 0.1333)$	-0.87030094E-01	-0.87025015E-01	-0.87030325E-01
$\psi(0.6222, -1.4222)$	0.13815935E-03	0.13815534E-03	0.13815967E-03
$\psi(0.6667, 1.6889)$	-0.99909839E-01	-0.99884896E-01	-0.99909006E-01

Tablo 2.5.  $\psi$  çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve h=2 için değerleri

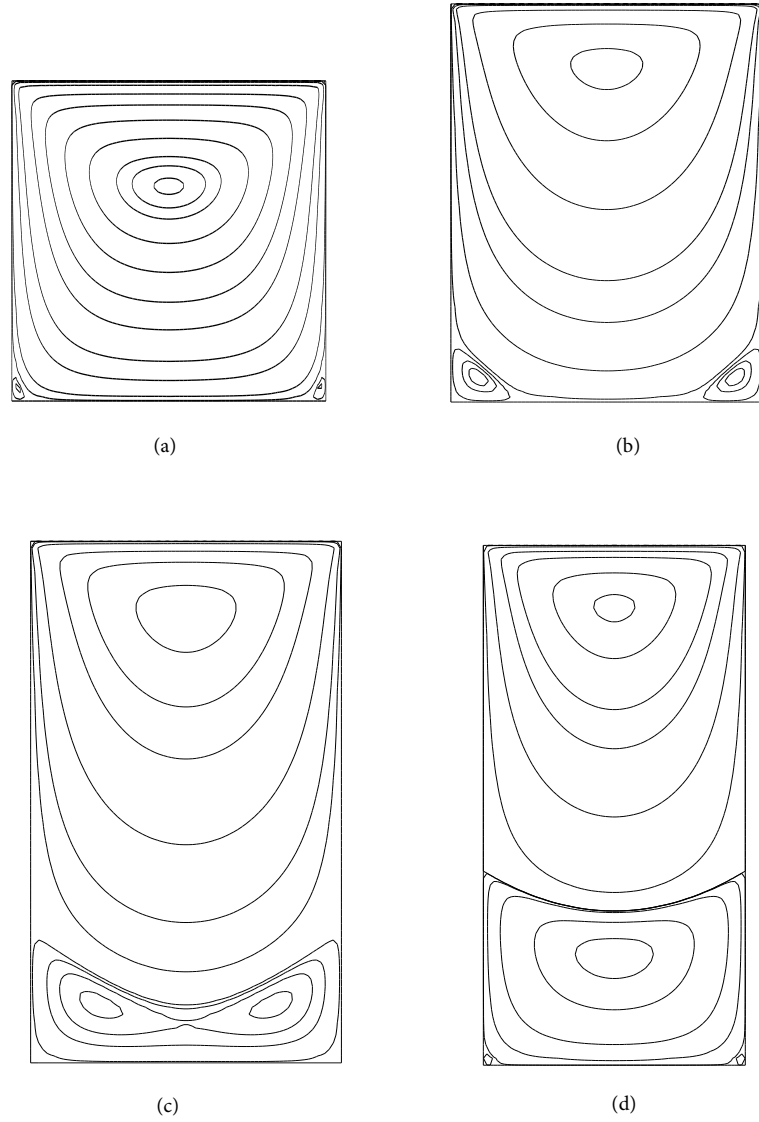
	N=10	N=20	N=40
$\psi(-0.9778, -1.9556)$	-0.70832488E-08	-0.51247795E-08	-0.46877638E-08
$\psi(-0.9556, -1.9556)$	-0.17376048E-07	-0.11454755E-07	-0.10345762E-07
$\psi(-0.9333, -1.9556)$	-0.19801128E-07	-0.98115788E-08	-0.85177203E-08
$\psi(-0.9333, -1.9111)$	0.36015859E-07	0.43566107E-07	0.44147101E-07
$\psi(-0.9111, -1.9556)$	-0.82728637E-08	0.43578891E-08	0.51708324E-08
$\psi(-0.9111, -1.9111)$	0.11471505E-06	0.12431479E-06	0.12482038E-06

Tablo 2.6.  $\psi$  çözümünün çeşitli noktalarda farklı N değerleri ve h=2 için değerleri

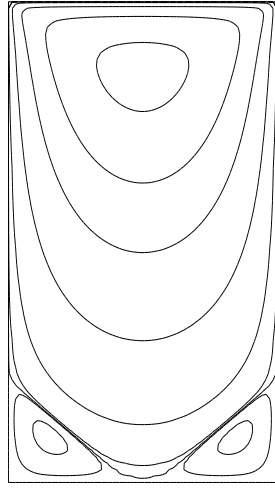
	N=70	N=90	N=110
$\psi(-0.9778, -1.9556)$	-0.46508593E-08	-0.46492095E-08	-0.46491475E-08
$\psi(-0.9556, -1.9556)$	-0.10291211E-07	-0.10289303E-07	-0.10289709E-07
$\psi(-0.9333, -1.9556)$	-0.84967647E-08	-0.84950529E-08	-0.84961068E-08
$\psi(-0.9333, -1.9111)$	0.44160235E-07	0.44163633E-07	0.44160814E-07
$\psi(-0.9111, -1.9556)$	0.51776176E-08	0.51795179E-08	0.51779279E-08
$\psi(-0.9111, -1.9111)$	0.12483192E-06	0.12483663E-06	0.12483280E-06

Tablo 2.7. h=2 için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda N=20 ve N=40 olduğu durumdaki u hız vektörü değeri

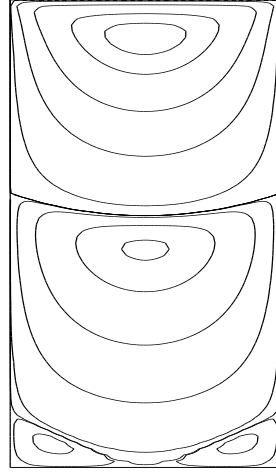
	N=20	N=40
$u = \frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial y}$	3.416463800066776E-004	3.415984182809973E-004
$u = \frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial y}$	-0.128933178911233	-0.128849427519851
$u = \frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial y}$	-3.336102670793183E-002	-3.336131542896623E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial y}$	7.890562737775056E-004	7.889219499354701E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial y}$	-0.190835393123772	-0.190820874887876
$u = \frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial y}$	-2.003785612638778E-002	-2.003830702765445E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial y}$	3.357085784128344E-004	3.356469003728409E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial y}$	-3.962141060652729E-002	-3.940379123486661E-002



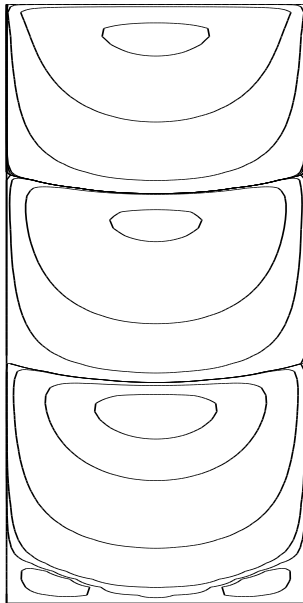
Şekil 2.2. (a)  $h=0.75$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.55$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (c)  $h=1.65$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (d)  $h=1.85$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri



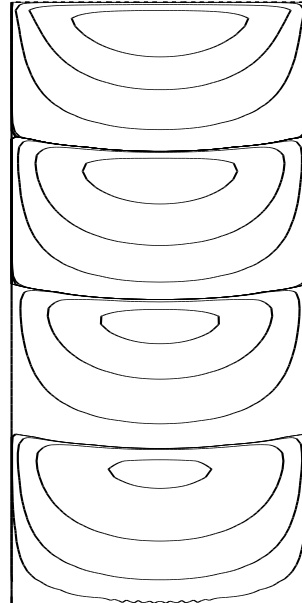
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 2.3. (a)  $h=1.6297$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=3.028$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (c)  $h=4.425$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (d)  $h=5.672$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri (Detaylı bilgi için bkz. Gurcan [1])

Tablo 2.8.  $h=2$  için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda  $N=70$  ve  $N=90$  olduğu durumdaki  $u$  hız vektörü değeri

	N=70	N=90
$u = \frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial y}$	3.415986055605360E-004	3.415854142828661E-004
$u = \frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial y}$	-0.128843677514430	-0.128820330058691
$u = \frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial y}$	-3.336193979735302E-002	-3.336205516374981E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial y}$	7.889195754055170E-004	7.888824935104407E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial y}$	-0.190821444592052	-0.190817456768057
$u = \frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial y}$	-2.003871426531998E-002	-2.003886166673646E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial y}$	3.356453500414506E-004	3.356282840889758E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial y}$	-3.936972467180693E-002	-3.930436558688765E-002

Tablo 2.9.  $h=2$  için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda  $N=100$  ve  $N=110$  olduğu durumdaki  $u$  hız vektörü değeri

	N=100	N=110
$u = \frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial y}$	3.416005964189091E-004	3.415992150885391E-004
$u = \frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial y}$	-0.128846012750617	-0.128843303216905
$u = \frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial y}$	-3.336204481131836E-002	-3.336208416990749E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial y}$	7.889246054558770E-004	7.889205962796346E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial y}$	-0.190822146838263	-0.190821751645046
$u = \frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial y}$	-2.003877206773508E-002	-2.003880533857627E-002
$u = \frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial y}$	3.356475751799090E-004	3.356457100254151E-004
$u = \frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial y}$	-3.937266943889599E-002	-3.936427343285833E-002

Tablo 2.10.  $h=2$  için dikdörtgensel kavitenin farklı noktalarda  $N=20$  ve  $N=40$  olduğu durumdaki  $v$  hız vektörü değeri

	N=20	N=40
$v = -\frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial x}$	-4.289866910026551E-004	-4.289360482409758E-004
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial x}$	0.286783442466580	0.286788165864466
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial x}$	3.873714990890569E-002	3.873892427458836E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial x}$	1.933245569240471E-005	1.932902454152840E-005
$v = -\frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial x}$	-4.426036988762105E-002	-4.426214187843693E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial x}$	-2.927631041023703E-002	-2.927818328726909E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial x}$	5.363606972147294E-004	5.362877722322288E-004
$v = -\frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial x}$	-0.307780414543433	-0.308113944164542

Tablo 2.11.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin farklı noktalarda  $N=70$  ve  $N=90$  olduğu durumdaki  $v$  hız vektörü değeri

	N=70	N=90
$v = -\frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial x}$	-4.289374272845505E-004	-4.289235783637982E-004
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial x}$	0.286791365074152	0.286792593024016
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial x}$	3.873980433463847E-002	3.874034306446792E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial x}$	1.932894934972124E-005	1.932800061623499E-005
$v = -\frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial x}$	-4.426264161266612E-002	-4.426314939829632E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial x}$	-2.927891494331634E-002	-2.927947219008637E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial x}$	5.362883515086831E-004	5.362683292606428E-004
$v = -\frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial x}$	-0.308159318720171	-0.308251461776227

Tablo 2.12.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin farklı noktalarda  $N=100$  ve  $N=110$  olduğu durumdaki  $v$  hız vektörü değeri

	N=100	N=110
$v = -\frac{\partial \psi(-0.6222, -1.5111)}{\partial x}$	-4.289397489719946E-004	-4.289383504022603E-004
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5556, 1.3333)}{\partial x}$	0.286791806103683	0.286792073994838
$v = -\frac{\partial \psi(-0.5111, 0.2222)}{\partial x}$	3.873989663691355E-002	3.873999173374026E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.0222, -1.5556)}{\partial x}$	1.932907520377282E-005	1.932897199600331E-005
$v = -\frac{\partial \psi(0.0889, 1.0222)}{\partial x}$	-4.426266414249668E-002	-4.426273942310111E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6000, 0.1333)}{\partial x}$	-2.927897547350046E-002	-2.927906605183269E-002
$v = -\frac{\partial \psi(0.6222, -1.4222)}{\partial x}$	5.362914315499051E-004	5.362893479344067E-004
$v = -\frac{\partial \psi(0.6667, 1.6889)}{\partial x}$	-0.308154498448873	-0.308166166125891

Tablo 2.13.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=20$  ve  $N=40$  alınarak elde edilen  $u$  hız vektörünün değeri

	N=20	N=40
$u = \frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial y}$	-9.372339081988150E-008	-9.989582204746444E-008
$u = \frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial y}$	-1.167708981958952E-007	-1.324124041371225E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial y}$	1.854309295193546E-007	1.695347030136150E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial y}$	2.382588015970638E-006	2.370176652458198E-006
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial y}$	9.603625630204842E-007	9.578023277866990E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial y}$	4.673334963160142E-006	4.665562622761624E-006

Tablo 2.14.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=70$  ve  $N=90$  alınarak elde edilen  $u$  hız vektörünün değeri

	N=70	N=90
$u = \frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial y}$	-1.014003600207648E-007	-1.014847287025273E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial y}$	-1.340791968347531E-007	-1.340881244369854E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial y}$	1.698678239382003E-007	1.699091345790311E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial y}$	2.369932413902003E-006	2.369968441724405E-006
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial y}$	9.581710540617968E-007	9.582375574709352E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial y}$	4.665539656664753E-006	4.665594135820430E-006

Tablo 2.15.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=100$  ve  $N=110$  alınarak elde edilen  $u$  hız vektörünün değeri

	N=100	N=110
$u = \frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial y}$	-1.014847287025273E-007	-1.015068844891144E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial y}$	-1.341163221792382E-007	-1.341155335421770E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial y}$	1.698638054940435E-007	1.698692196052905E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial y}$	2.369928804191417E-006	2.369935572204250E-006
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial y}$	9.581738318996289E-007	9.581824403389629E-007
$u = \frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial y}$	4.665547204141132E-006	4.665557638432452E-006

Tablo 2.16.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=20$  ve  $N=40$  alınarak elde edilen  $v$  hız vektörünün değeri

	N=20	N=40
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial x}$	3.468785299585460E-007	3.153600299951552E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial x}$	1.557523673415545E-007	1.323813589609594E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial x}$	-3.354502985648270E-007	-3.271927871053074E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial x}$	-2.639366384359882E-006	-2.640780880382282E-006
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial x}$	-9.477914288760624E-007	-9.167452616960917E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial x}$	-4.672200322098796E-006	-4.664809020585987E-006

Tablo 2.17.  $h=2$  için dikdörtgenel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=70$  ve  $N=90$  alınarak elde edilen  $v$  hız vektörünün değeri

	N=70	N=90
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial x}$	3.132313457516993E-007	3.131579938558410E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial x}$	1.331775156774770E-007	1.332008105916608E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial x}$	-3.257310873750506E-007	-3.257328226026500E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial x}$	-2.640730245997710E-006	-2.640794245179879E-006
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial x}$	-9.167855359499339E-007	-9.168014684550685E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial x}$	-4.664746539644688E-006	-4.664799181560036E-006

Tablo 2.18.  $h=2$  için dikdörtgensel kavitenin köşe civarından alınan farklı noktalarda  $N=100$  ve  $N=110$  alınarak elde edilen  $v$  hız vektörünün değeri

	N=100	N=110
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9778, -1.9556)}{\partial x}$	3.131579938558410E-007	3.131640311563058E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9556, -1.9556)}{\partial x}$	1.332296194512033E-007	1.332291250383073E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9556)}{\partial x}$	-3.257035473784937E-007	-3.257056694565269E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9333, -1.9111)}{\partial x}$	-2.640730952968497E-006	-2.640741038517907E-006
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9556)}{\partial x}$	-9.167775305106006E-007	-9.167807391868112E-007
$v = -\frac{\partial \psi(-0.9111, -1.9111)}{\partial x}$	-4.664753738443792E-006	-4.664763981529698E-006

Tablo 2.19.  $(-0.9968, -1.9969)$  noktasında  $h=2$  ve  $N$  nin farklı değerleri için  $\psi$  nin  $u$  ve  $v$  hız bileşenleri

$x=-0.9968$ $y=-1.9969$	N=20	N=40
$u$	-2.661694786705960E-009	-6.161581906498859E-010
$v$	-6.052083207601484E-009	-1.344139138484224E-009

Tablo 2.20.  $(-0.9968, -1.9969)$  noktasında  $h=2$  ve  $N$  nin farklı değerleri için  $\psi$  nin  $u$  ve  $v$  hız bileşenleri

$x=-0.9968$ $y=-1.9969$	N=70	N=90
$u$	-1.201385765780709E-010	-6.701181421795618E-011
$v$	-4.580943457063029E-010	-3.129394476236374E-010

Tablo 2.21.  $(-0.9968, -1.9969)$  noktasında  $h=2$  ve  $N$  nin farklı değerleri için  $\psi$  nin  $u$  ve  $v$  hız bileşenleri

$x=-0.9968$ $y=-1.9969$	N=100	N=110
$u$	-6.029531198383934E-011	-5.683246783116649E-011
$v$	-2.743179529551999E-010	-2.383658270852155E-010

### 3. BÖLÜM

#### Köşe Civarındaki Girdap Akış Yapısı

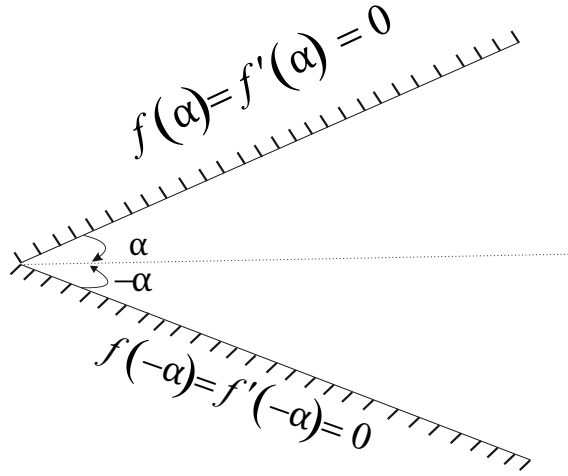
Bu bölümde köşe civarındaki girdap akış yapısı incelenecektir. Bunun için Stokes denkleminin çözümü ele alındı. Stokes denklemi lineer olduğundan değişkenlerine ayrılabilir probleme indirgenip özdeğerler ve özfonksiyonları bulundu. Burada özdeğerler karmaşık, seri de sonsuz olduğundan dolayı serinin köşeye yakın bölgede yakınsaması için çok sayıda terim gerektiği görüldü. Buradan sınıra yakın bölgedeki akış çizgilerinin düzgün yapıda olmadığı gözlemlendi. Bunun için köşeye yakın bölgelerde Stokes denklemini kutupsal koordinatlarda çözümü dikkate alındı (Moffatt [23]). Daha sonra iç bölgelerdeki çözümlerden yararlanılarak yani eşleştirme (matching) yapılarak akış fonksiyonunun katsayıları belirlendi. Bu sayede girinti ve çıkıntı köşelerindeki akış çizgileri daha net elde edildi. Bunun için Timothy N. Philips [4] makalesi incelendi.

#### 3.1. Stokes Denkleminin Kutupsal Koordinatlarda Çözümü

Şekil 3.1'de gösterildiği gibi  $\nabla^4\psi = 0$  Stokes denklemini  $-\alpha$  ile  $\alpha$  açılarıyla sınırlandırılmış köşede (Moffatt köşesi) çözmek için kutupsal koordinatlardan yararlanıldı (Moffatt [23]). Stokes denklemi kutupsal koordinatlarda;

$$\nabla^4\psi = (\nabla^2\psi)^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (3.2)$$



Şekil 3.1. Moffat köşesi

$$(\nabla^2 \psi)^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi(r, \theta) = 0 \quad (3.3)$$

şekindedir.

Şimdi  $\psi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta)$  yapısında olduğunu kabul edip değişkenlerine ayrılabilirlikten çözelim. Bu işlem önce

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \psi) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi(r, \theta) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) r^\lambda f(\theta) \\ &= \lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}f(\theta) + \frac{1}{r}\lambda r^{\lambda-1}f(\theta) + \frac{1}{r^2}r^\lambda f''(\theta) \\ &= r^{\lambda-2}\lambda(\lambda-1)f(\theta) + r^{\lambda-2}\lambda f(\theta) + r^{\lambda-2}f''(\theta) \\ &= [\lambda^2 f(\theta) + f''(\theta)]r^{\lambda-2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde alınıp sonra bu ifadenin karesi alınır;

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \psi)^2 &= \nabla^4 \psi(r, \theta) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) ([\lambda^2 f(\theta) + f''(\theta)]r^{\lambda-2}) \\ &= \lambda^2(\lambda-2)^2 f(\theta) + ((\lambda-2)^2 + \lambda^2) f''(\theta) + f^{(4)}(\theta) \\ &= \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + \lambda^2 \right) \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + (\lambda-2)^2 \right) f(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

dır. Burada  $\lambda$  değerleri;

$$(i) \frac{d^2}{d\theta^2} + \lambda^2 = 0$$

$$(ii) \frac{d^2}{d\theta^2} + (\lambda - 2)^2 = 0$$

diferansiyel denklemleri çözümlenerek elde edildi.

(3.5) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi;

$$(r^2 + \lambda^2)(r^2 + (\lambda - 2)^2) = 0$$

şeklinde olacaktır. Burada  $\lambda \neq 0, 1, 2$  olmak üzere;

$r_{1,2} = \mp \lambda i$  ve  $r_{3,4} = \mp(\lambda - 2)i$  olarak elde edilir.

Buda bize genel çözümleri;

$$f(\theta) = c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta) + c_3 \cos((\lambda - 2)\theta) + c_4 \sin((\lambda - 2)\theta)$$

şeklinde olduğunu verir.

Sonuç olarak aradığımız  $f(\theta)$  ifadesi  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 0, 2$  ve  $\lambda \neq 0, 1, 2$  için değişecektir.

Biz burada  $\lambda \neq 0, 1, 2$  durumunu inceleyeceğimiz için diğer durumlar dikkate alınmamıştır. Ayrıca Stokes denkleminin çözümü  $\psi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta)$  ifadesinde  $\lambda$ 'nın durumlarına göre belirlenmiş olacaktır. Burada sınır şartları;

$$f(\mp\pi/4) = f'(\mp\pi/4) = 0 \quad (3.6)$$

dır. Şimdi şekil 3.1deki gibi  $-\pi/4$  ile  $+\pi/4$  arasında alınan köşede(Moffatt Köşesi)

(3.6) sınır şartları altında problemini çözelim (Moffatt(1964)).  $f(\theta)$  ya (3.6) sınır şartları yazılırsa ;

$$f_k(\theta) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}(\lambda_k - 2)) \cos(\lambda_k \theta) - \cos(\frac{\pi}{4} \lambda_k) \cos((\lambda_k - 2)\theta), & k = \text{tek ise} \\ \sin(\frac{\pi}{4}(\lambda_k - 2)) \sin(\lambda_k \theta) - \sin(\frac{\pi}{4} \lambda_k) \sin((\lambda_k - 2)\theta), & k = \text{çift ise} \end{cases} \quad (3.7)$$

elde edilir.

$\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) için bu denkleminin kökleri;

$$\sin(\frac{\pi}{2}(\lambda_k - 1)) = (-1)^k (\lambda_k - 1) \quad (3.8)$$

şeklindedir. (3.8) denkleminin bütün kökleri kompleksdir.

Bu denklemin ilk 10 tane kökü tablo(3.1) de verildi.

Tablo 3.1.  $\sin(\frac{\pi}{2}(\lambda_k - 1)) = (-1)^k(\lambda_k - 1)$  denkleminin ilk 10 kökü verilmiştir.  
Burada  $\lambda_k = a_k + i b_k$  dir.

n	$a_k$	$b_k$
1	3.73959328359529	1.11902448365292
2	5.80825062961740	1.46392806249506
3	7.84513496948545	1.68163463088189
4	9.86882573170913	1.84238391965234
5	11.8855520481964	1.97019942430647
6	13.8980905530332	2.07641573726756
7	15.9078903891008	2.16733251792852
8	17.9157899924847	2.24682795401416
9	19.9223114647032	2.31746447562466
10	21.9277984480167	2.38102577015350

Ayrıca ileriki kısımda kullanılacağından dolayı (3.3) denkleminin açılımına bakılırsa ;

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \psi)^2 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \\
&= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\
&= r^4 \frac{\partial^4}{\partial r^4} + 2r^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} + 2r^2 \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} - 2r \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial r} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir.

### 3.2. Köşe Civarındaki Akış Çizgilerinin Eşleştirme Yöntemiyle (Matching Yöntemi) İyileştirilmesi

Bu kısımdaki amaç ikinci bölümdeki dikdörtgensel kavitenin köşeye yakın yerlerdeki singüler noktalarda akış fonksiyonunun değerini hesaplamaktır. Çünkü akış çizgileri köşeye yaklaştıkça singüler noktalar ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla (2.21) akış fonksiyonu bu noktalarda ıraksamaktadır. Bu problemi Phillips [4]'Singular Matched Eigenfunction Expansion' isimli makalesinde çözmüştür. Bu yöntem aşağıda açıklanmıştır. Bunun için daire dilimi şeklinde bir bölge (D bölgesi)

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

ele alalım. Köşe civarında  $\psi(r, \theta)$  akış fonksiyonunu kutupsal koordinata çevirerek işlemler yapıldı. İlk olarak Geymonat & Grisvard [24] biharmonik denklemi ikinci

mertebeden sistemler halinde kutupsal koordinatlarda aşağıdaki şekilde düzenledi. Sonra özfonksiyon problemi oluşturulup bu probleme bağlı olarak adjoint problem elde edildi (Phillips [4]). Daha sonra incelediğimiz D bölgesinde ele alınan akış fonksiyonu ile kavitinin iç bölgesindeki noktalar eşleştirilip (matching yöntemi) akış fonksiyonunun katsayıları elde edildi (Phillips [4]). Biharmonik denklemi ikinci mertebeden sistemler halinde kutupsal koordinatlarda

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi - L\psi = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde verilmiştir.

Burada

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1\right)^2 & -2\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1\right) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ve

$$\psi = [\psi_1 \quad \psi_2]^T = \left[ \frac{\psi}{r} \quad \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \frac{\psi}{r} \right]^T. \quad (3.12)$$

Şimdi (3.10) denklemini elde edelim. Bunun için  $\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi$  ifadesini açılırsa

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \psi \\ &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \frac{\psi}{r} \right] \\ &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\psi}{r} \right] \\ &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[ \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\psi_{rr} r - \psi}{r}\right) \right] \\ &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[ \frac{\psi_{rr} r - \psi}{r} \right] \\ &= \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[ \frac{\psi_{rr} r - \psi}{r^3 \psi_{rrr} + r \psi_{rr} - \psi} \right] \\ &= \left[ \frac{r^2 \psi_{rr} - r \psi_r + \psi}{r^4 \psi_{rrrr} + 2r^3 \psi_{rrr} + r^2 \psi_{rr} - r \psi_r + \psi} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulunur. Ayrıca (3.10) denkleminin  $L\psi$  operatörü açılırsa

$$\begin{aligned}
L\psi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 1\right)^2 & -2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\psi}{r} \\ \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \frac{\psi}{r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 1\right)^2 & -2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\psi}{r} \\ \frac{r^2\psi_{rr} - r\psi_r + \psi}{r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r^2\psi_{rr} - r\psi_r + \psi}{r} \\ -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 1\right)^2 \left(\frac{\psi}{r}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 1\right) \frac{r^2\psi_{rr} - r\psi_r + \psi}{r} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{r^2\psi_{rr} - r\psi_r + \psi}{r} \\ \frac{-4\psi_{\theta\theta\theta\theta} - 2\psi_{\theta\theta} - \psi - 2r^2\psi_{rr\theta\theta} + 2r\psi_{r\theta\theta} - 2\psi_{\theta\theta} + 2r^2\psi_{rr} - 2r\psi_r + 2\psi}{r} \end{bmatrix} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $(r\frac{\partial}{\partial r})^2\psi - L\psi$  ifadesi (3.9)'dan dolayı sıfır olduğu açıktır. Diğer yandan biharmonik problemin çözümü  $\psi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^{\lambda_k} f_k(\theta)$  şeklindedir (Moffatt [23]). Aynı problemin çözümünü ikinci mertebeden sistemler olarak,

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^{\lambda_k - 1} f_k(\theta) \quad (3.15)$$

şeklinde aldı (Phillips [4]).

Daha sonra (3.15) denklemini (3.10) denkleminde yerine yazılırsa,

$$L\mathbf{f}_k = \lambda_k \mathbf{f}_k \quad (3.16)$$

özproblem (eigenproblem) elde edilir. Burada  $\mathbf{f}_k$ 'nin genel formu  $[f_k \quad \lambda_k f_k]^T$  şeklindedir. Sonra  $\psi$  fonksiyonuna (3.6) sınır şartları uygulanırsa,

$$f_k(\theta) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4}(\lambda_k - 2))\cos(\lambda_k\theta) - \cos(\frac{\pi}{4}\lambda_k)\cos((\lambda_k - 2)\theta), & k = \text{tek ise} \\ \sin(\frac{\pi}{4}(\lambda_k - 2))\sin(\lambda_k\theta) - \sin(\frac{\pi}{4}\lambda_k)\sin((\lambda_k - 2)\theta), & k = \text{\u00e7ift ise} \end{cases} \quad (3.17)$$

elde edilir. Daha sonra (3.16) özproblemnin adjoint problemi ;

$$\check{L}\mathbf{g}_k = \lambda_k \mathbf{g}_k \quad (3.18)$$

şeklinde alınırsa  $\mathbf{g}_k$ 'ların genel formu  $[g_k \quad f_k]^T$  şeklinde olur (Phillips [4]).

$$g_k(\theta) = 2f_k''(\theta) + [(\lambda_k - 1)^2 - 2]f_k(\theta) \quad (3.19)$$

$$\check{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 1\right)^2 \\ 1 & -2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 1\right) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

dır.

Şimdi Bölüm (1.3) den dolayı (3.16) denklemini soldan  $\mathbf{g}_m^T(\theta)$  ile çarpıp  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  aralığında integralini alırsak özfonksiyonlar birbirlerine dik (biorthogonal) olduğundan ;

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathbf{g}_m^T(\theta) L \mathbf{f}_k(\theta) d\theta = 0, \quad k \neq m \text{ için} \quad (3.21)$$

elde edilir.  $k = m$  olduğu durumda ;

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathbf{g}_m^T(\theta) \mathbf{f}_k(\theta) d\theta = d_k \quad (3.22)$$

dır. Burada  $d_k$

$$d_k = \begin{cases} 4[(\lambda_k - 1)^2 - 1] \frac{\pi}{4} - 2 \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda_k - 1)), & k = \text{tek ise} \\ 4[(\lambda_k - 1)^2 - 1] \frac{\pi}{4} + 2 \cos(\frac{\pi}{2}(\lambda_k - 1)), & k = \text{çift ise} \end{cases} \quad (3.23)$$

şeklindedir.

Dikdörtgensel kavitinin sol alt bölgesindeki akış çizgilerini incelemek için (3.15) akış fonksiyonunun sonlu sayıdaki terimini göz önüne alalım. Aksimetrik olarak yakınsayan bu seride en etkili terimler başlangıç terimleridir. Bu yüzden serinin sadece sonlu sayıdaki terimini almak yeterlidir. Bu seriye kesilmiş seri (truncated series) denir (Phillips [4]). Akış fonksiyonunun sonlu sayıdaki katsayılarını bulmak için  $r = R$ 'de yani yay üzerindeki akış fonksiyonu (bir önceki bölümde ele alınan akış fonksiyonu (2.21)) ile ele aldığımız kesilmiş seri ((3.15)) eşleştirildi (Phillips [4]). Bu sayede köşe civarında daha doğru akış çizgileri elde edildi. Bu eşletirmeyi (Phillips [4]) aşağıdaki şekilde aldı.

$$\sum_{k=1}^K a_k R^{\lambda_k - 1} \mathbf{f}_k(\theta) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} p(R, \theta) \\ q(R, \theta) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Burada

$$p(r, \theta) = \psi \text{ ve } q(r, \theta) = r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \psi.$$

Ayrıca  $\psi$  olarak aldığımız ifade (2.21)'deki denklemin kutupsal koordinatlardaki şeklidir. Şimdi (3.24) denkleminin her tarafını  $\mathbf{g}_m^T(r, \theta)$  ile çarpıp  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  aralığında integralini alınca sol taraftaki ifade de özfonksiyonlar birbirine dik (biorthogonal)

olduğundan dolayı  $k \neq m$  olduğu durumlarda sıfır gelir. Dolayısıyla sol kısımdan sadece  $k = m$  olduğu durum kalır. Yani

$$R^{\lambda_m} d_m a_m = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [p(R, \theta) \mathbf{g}_m(\theta) + q(R, \theta) \mathbf{f}_m(\theta)] d\theta \quad (3.25)$$

bulunur. (3.25) denkleminin sağ tarafındaki integral analitik bir çözümü olmadığından dolayı integrali alınmaz. Bundan dolayı ( $m = 1, 2, \dots, K$ ) değerleri için nümerik integral kullanılır (Gauss-Legendre Yöntemi,...). Nümerik yöntemler sonucunda  $m = 1, 2, \dots, K$  için  $a_m$  değerleri bulunursa (3.15) akış fonksiyonu

$$\psi^D(r, \theta) = \sum_{k=1}^K a_k r^{\lambda_k} f_k(\theta) \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir (Phillips [4]). Daha sonra gerekli datalar bulunarak köşe civarındaki (D bölgesi) akış girdap yapıları elde edildi. Aşağıda dikdörtgensel kavitinin farklı görünüm oranları için yukarıda bahsedilen yöntem kullanıldı. Örneğin tablo 3.2 ve 3.3 de  $h=1$  değeri için (3.26) denklemindeki serisinin ilk iki katsayısı elde edilmiştir. Tablo 3.2 ve 3.3 de görüldüğü gibi (3.26) denkleminin katsayısı sektörel kavitinin yarıçapı olan  $r$  den bağımsız olarak yakınsamaktadır.  $h=1$  için dikdörtgensel kavitinin sol alt köşesi için bu yöntem kullanılırsa akış çizgilerinin oldukça iyileştiği görülmüştür. Başka bir deyişle köşe civarındaki singüler noktalar ortadan kaybolmuştur (bkz. şek. 3.2-(a)-(b)-(c)). Bu da yöntemin oldukça kullanışlı olduğu anlamına gelmektedir. Buna benzer olarak kavitinin  $h=0.4$ ,  $h=0.8$ ,  $h=1$ ,  $h=1.2$ ,  $h=1.63$ ,  $h=1.75$ ,  $h=1.8$ ,  $h=2$ ,  $h=2.5$ ,  $h=3$  görüntü oranları için köşe civarındaki akış çizgilerinde iyileştirmeler gösterilmiştir.

Kavitinin yüksekliği olan  $h$  parametresini 3 olarak aldığımızda analitik çözümden elde edilen akış çizgileri şekil 3.4-(a) da gösterilmiştir. Bu dikdörtgensel kavitinin sol alt köşesindeki ilk girdap yapısına yaklaşılmış akış çizgileri şekil 3.4-(b) de gösterilmiştir. Düzgün olmayan bu akış yapıları Phillips [4] yöntemiyle daha net şekilde elde edilmiştir. Merkezi  $(-0.731, -2.725)$  olan birinci girdap yapısı görülmüştür (şekil 3.4-(c)). Diğer yandan şekil 3.5 (b)-(c) de analitik çözümden elde edilen akış çizgilerinin sol alt köşesine yaklaştıkça olması gereken ikinci girdap yapısı ve üçüncü girdap yapısı görülememiştir. Bununla beraber Phillips [4] yöntemiyle  $r$  parametresini küçülterek  $(-0.983, -2.984)$  merkezli ikinci girdap yapısının var olduğu

görülmüştür (şekil 3.5-(c)). Aynı şekilde  $r$  parametresini daha çok küçültülerek (-0.9995,-2.9995) merkezli üçüncü girdap yapısı görülmüştür (şekil 3.5-(d)). Fakat üçüncü girdap yapısına baktığımızda akış çizgilerinin diğerleri kadar düzgün bir yapıda olmadığı dikkat çekmiştir. Bunun sebebi de Phillips [4] yönteminde aldığımız  $r$  yarıçaplı daire diliminin yayı üzerinde eşleştirme yapıldığından dolayı düzensiz gelmiştir. Çünkü dikdörtgensel kavitenin köşe civarında singüler noktalar olduğundan doğru bir eşleştirme yapılamamıştır. Dolayısıyla Phillips [4] yöntemi analitik çözümden elde edilemeyen girdap yapılarını görmemizi sağlamıştır. Bu da yöntemin oldukça kullanışlı olduğu anlamına gelmektedir. Benzer biçimde şekil 3.9 (a) da  $h=1.63$  görünüm oranı için analitik çözümden elde edilen akış çizgileri verilmiştir. Bu dikdörtgensel kavitenin sol alt köşesine yaklaştığımızda olması gereken girdap yapısı görülememiştir (şekil 3.9-(b)). Fakat Phillips [4] yöntemini uyguladığımızda merkezi (-0.981,-1.616) olan girdap yapısı görülmüştür (şekil 3.9-(c)).

$h=1$  için dikdörtgensel kavitenin  $N=100$  olduğu durumdaki  $\psi$  akış fonksiyonunun  $u$  ve  $v$  hız bileşenlerinin farklı noktalardaki değerleri tablo 3.8 de gösterilmiştir. Phillips [4] tarafından geliştirilen yöntemle iyileştirmeler yapıldıktan sonra  $u$  ve  $v$  değerleri ( $M=4$  alınarak) tablo 3.9 da verilmiştir. Bu iki tabloyu karşılaştırdığımızda Phillips [4] tarafından geliştirilen yöntemle sadece 4 terimle  $N=100$  olduğu terime yakınsadığı görülmüştür. Ayrıca köşeye çok yakın noktalarda bile yakınsama ilk terimde dahi elde edilebildiğinden dolayı singüler noktaların ortadan kalktığı görülmüştür. Dolayısıyla köşe civarında oluşan sonsuz tane girdap (eddy) yapılarının birkaçı kolaylıkla görülebilmıştır (bkz. şekil 3.5).

Benzer durum  $h=2$  alındığında tablo 3.10 ve 3.11 de gösterilmiştir. Yine iyileştirilmiş fonksiyonun az datalar için yakınsadığı görülebilmektedir. Bu da bize bu yöntemin kullanışlı olduğunu gösterir.

Tablo 3.2.  $h=1$  için  $a_1 = b_1 + i c_1$  şeklindedir.

$r a_1$	$b_1$	$c_1$
r=0.10	-8.571635986976647E-003	-1.571984463160238E-002
r=0.15	-8.571643528865072E-003	-1.571985643001854E-002
r=0.20	-8.571658277100266E-003	-1.571986359786638E-002
r=0.25	-8.571667188979667E-003	-1.571986469256700E-002
r=0.30	-8.571672120781748E-003	-1.571986416006773E-002
r=0.35	-8.571674780764657E-003	-1.571986339619819E-002
r=0.40	-8.571676171704746E-003	-1.571986279853098E-002
r=0.45	-8.571676879888185E-003	-1.571986243300974E-002

Tablo 3.3.  $h=1$  için  $a_2 = b_2 + i c_2$  şeklindedir.

$r a_2$	$b_2$	$c_2$
r=0.10	-1.478180635410304E-003	-2.045314224484181E-003
r=0.15	-1.478070595350023E-003	-2.044073223962520E-003
r=0.20	-1.477841105088035E-003	-2.043696720720687E-003
r=0.25	-1.477738772157469E-003	-2.043617792105376E-003
r=0.30	-1.477696293774803E-003	-2.043599277181319E-003
r=0.35	-1.477678148883031E-003	-2.043594965482665E-003
r=0.40	-1.477670333948142E-003	-2.043593835120031E-003
r=0.45	-1.477666533105004E-003	-2.043593470539490E-003

Tablo 3.4.  $h=2$  için  $a_1 = b_1 + i c_1$  şeklindedir.

$r a_1$	$b_1$	$c_1$
r=0.10	4.156441815477287E-006	2.199584802476319E-004
r=0.15	4.156749345835194E-006	2.199590642909352E-004
r=0.20	4.156977909891174E-006	2.199591970814856E-004
r=0.25	4.157087938335287E-006	2.199592184405726E-004
r=0.30	4.157140312989388E-006	2.199592183035845E-004
r=0.35	4.157165336527243E-006	2.199592163608179E-004
r=0.40	4.157176874595977E-006	2.199592155046237E-004
r=0.45	4.157181860357763E-006	2.199592164816894E-004

Tablo 3.5.  $h=2$  için  $a_2 = b_2 + i c_2$  şeklindedir.

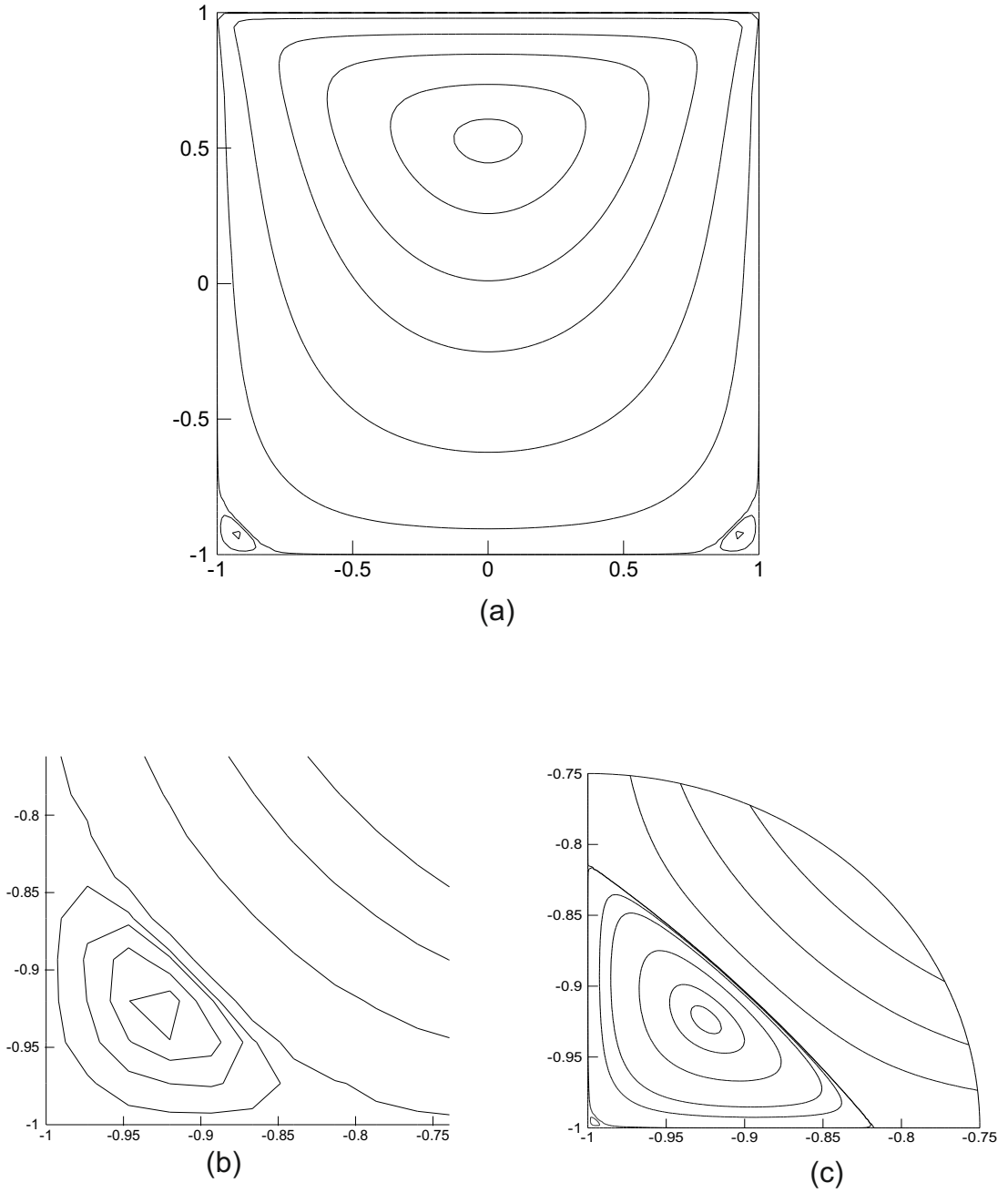
$r a_2$	$b_2$	$c_2$
r=0.10	-7.125398070780605E-006	1.971602529597169E-005
r=0.15	-7.118202835981133E-006	1.968209032278528E-005
r=0.20	-7.120379295175977E-006	1.967593857279329E-005
r=0.25	-7.121408303452461E-006	1.967474295338215E-005
r=0.30	-7.121807905454060E-006	1.967442293257917E-005
r=0.35	-7.121969617800484E-006	1.967430923345002E-005
r=0.40	-7.122034821595956E-006	1.967426233632128E-005
r=0.45	-7.122068334914651E-006	1.967423701893414E-005

Tablo 3.6.  $h=3$  için  $a_1 = b_1 + i c_1$  şeklindedir.

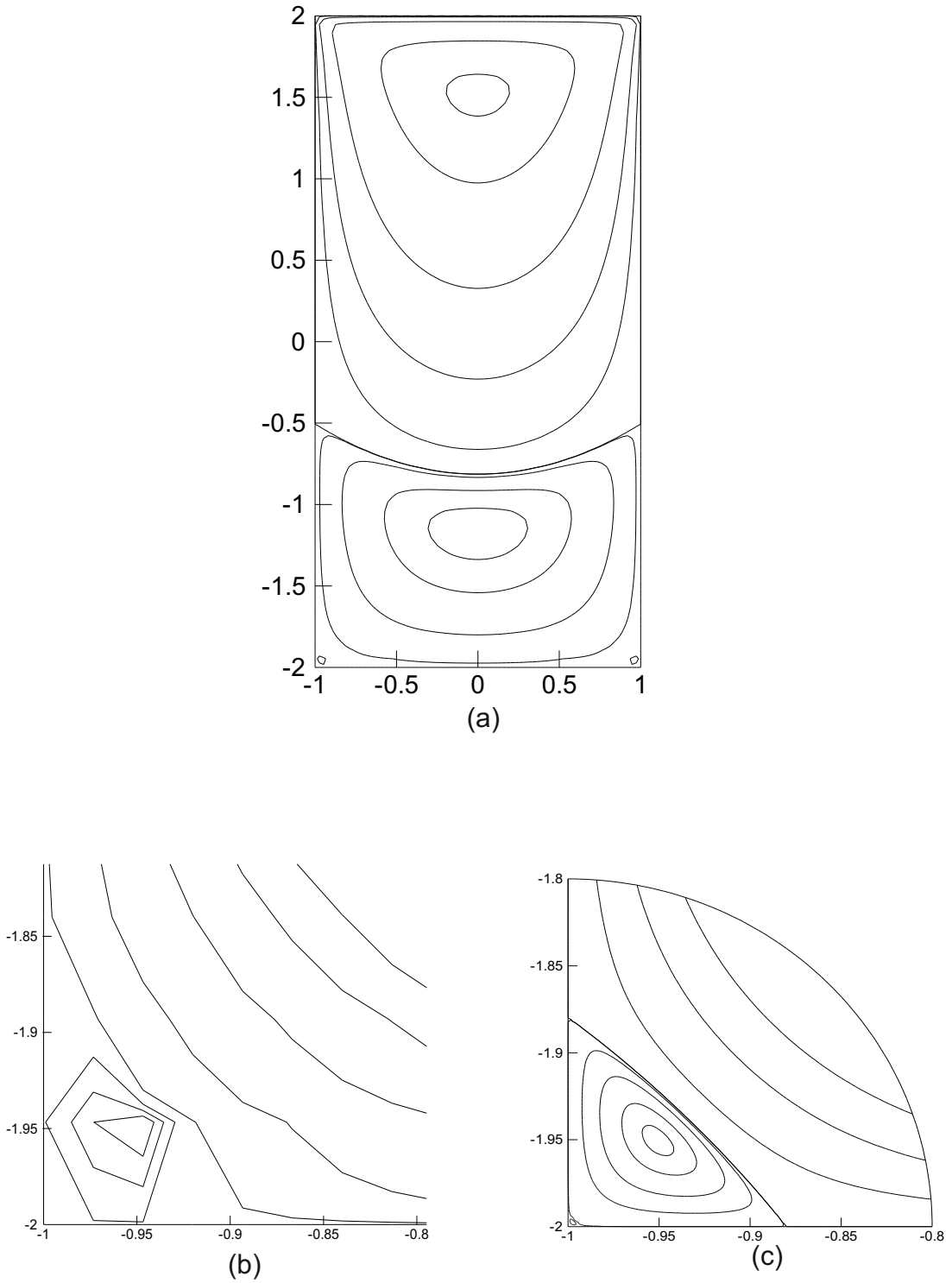
$r a_1$	$b_1$	$c_1$
r=0.10	1.782304250455645E-006	-6.672825692187511E-007
r=0.15	1.782318585337922E-006	-6.673642458101648E-007
r=0.20	1.782311700639903E-006	-6.673713666715934E-007
r=0.25	1.782310242508154E-006	-6.673717114776418E-007
r=0.30	1.782309993891790E-006	-6.673716012935818E-007
r=0.35	1.782309948651107E-006	-6.673716519818524E-007
r=0.40	1.782309913187451E-006	-6.673717770482207E-007
r=0.45	1.782309893682645E-006	-6.673718539154379E-007

Tablo 3.7.  $h=3$  için  $a_2 = b_2 + i c_2$  şeklindedir.

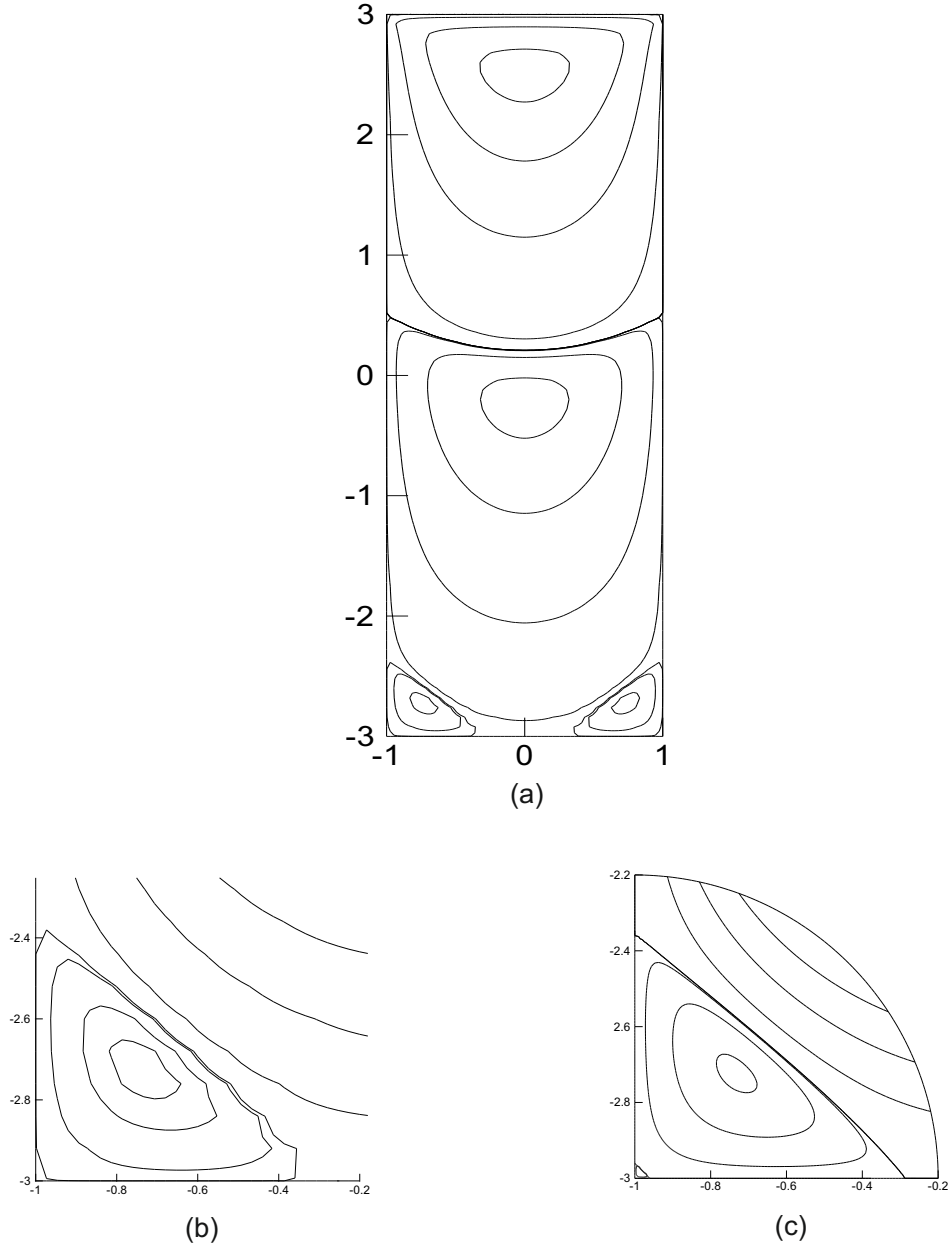
$r a_2$	$b_2$	$c_2$
r=0.10	4.368716212236548E-007	6.400261947021009E-008
r=0.15	4.393461795335798E-007	6.573962710551421E-008
r=0.20	4.395018900455553E-007	6.574747670500999E-008
r=0.25	4.395098524100937E-007	6.573484615323093E-008
r=0.30	4.395093880207245E-007	6.573269622634526E-008
r=0.35	4.395091907144400E-007	6.573390935326154E-008
r=0.40	4.395093587497688E-007	6.573512815359778E-008
r=0.45	4.395095707257668E-007	6.573562863493782E-008



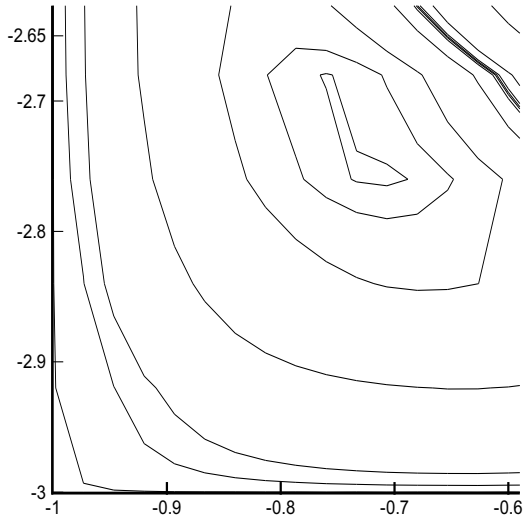
Şekil 3.2. (a)  $h=1$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



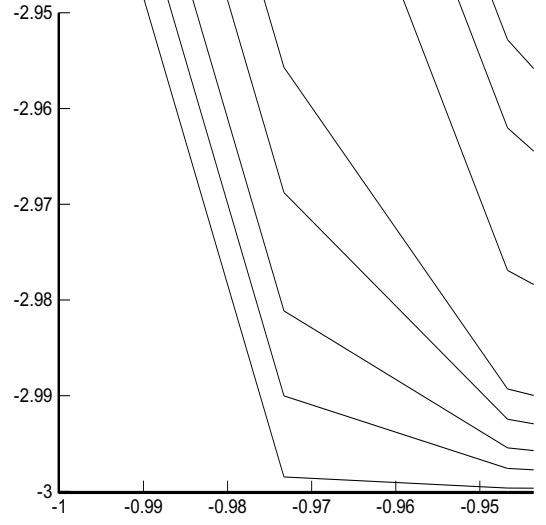
Şekil 3.3. (a)  $h=2$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=2$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=2$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



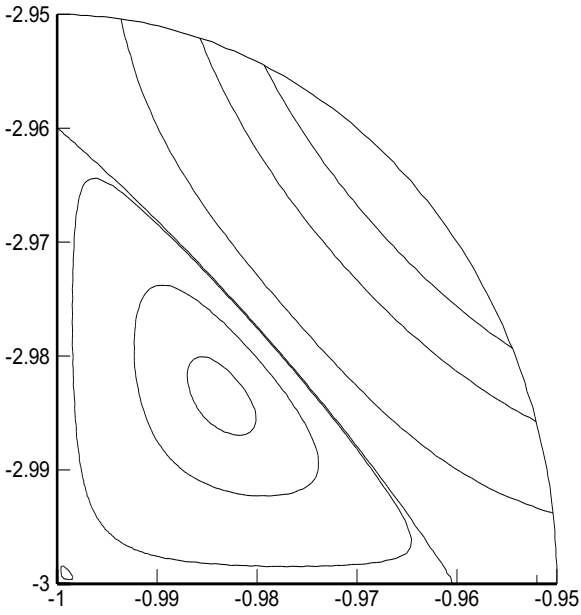
Şekil 3.4. (a)  $h=3$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=3$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=3$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



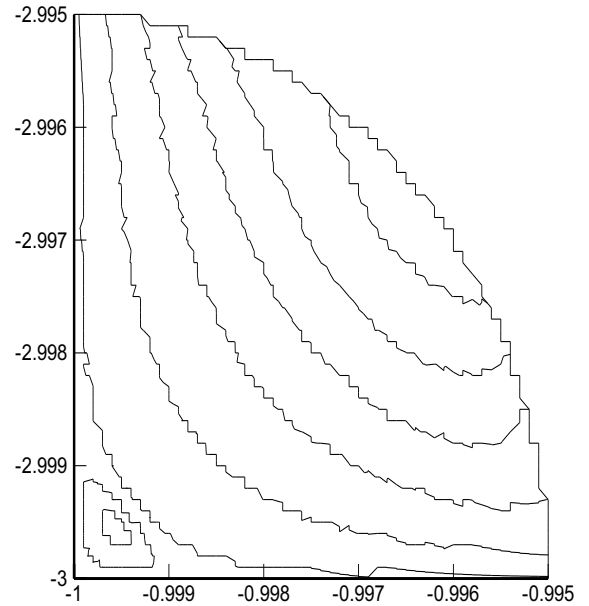
(a)



(b)

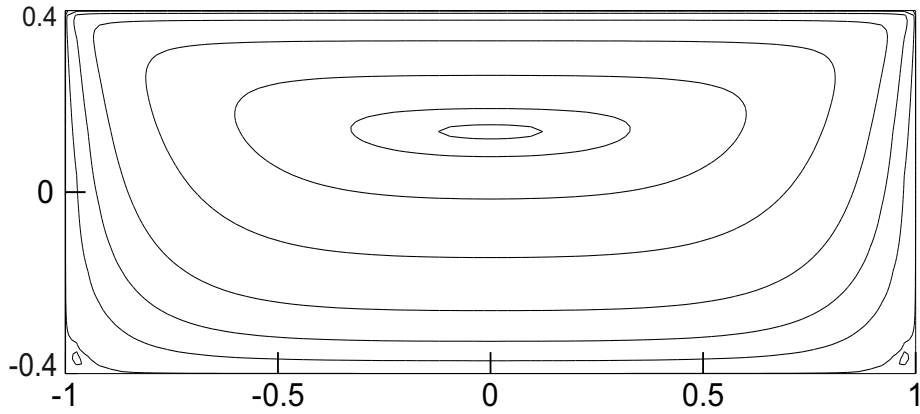


(c)

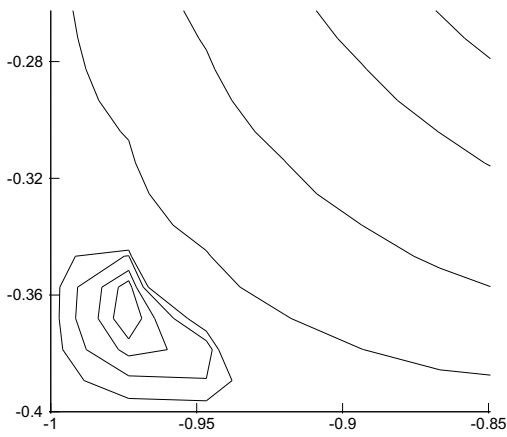


(d)

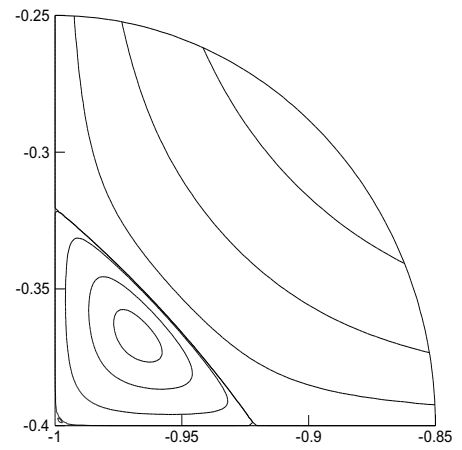
Şekil 3.5. (a)  $h=3$  için kaviti içerisindeki analitik çözümün sol alt köşesindeki ilk girdap merkezine yaklaşmış akış çizgileri, (b)  $h=3$  için kaviti içerisindeki analitik çözümün sol alt köşesine daha çok yaklaşmış akış çizgileri, (c)  $h=3$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki ikinci girdap akış çizgileri, (d)  $h=3$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki üçüncü girdap akış çizgileri



(a)

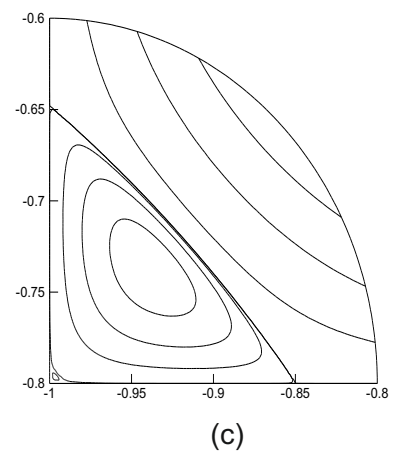
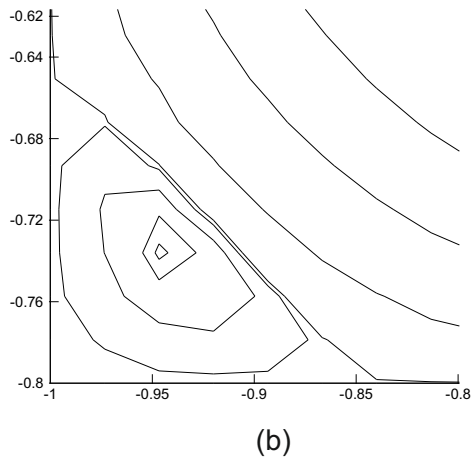
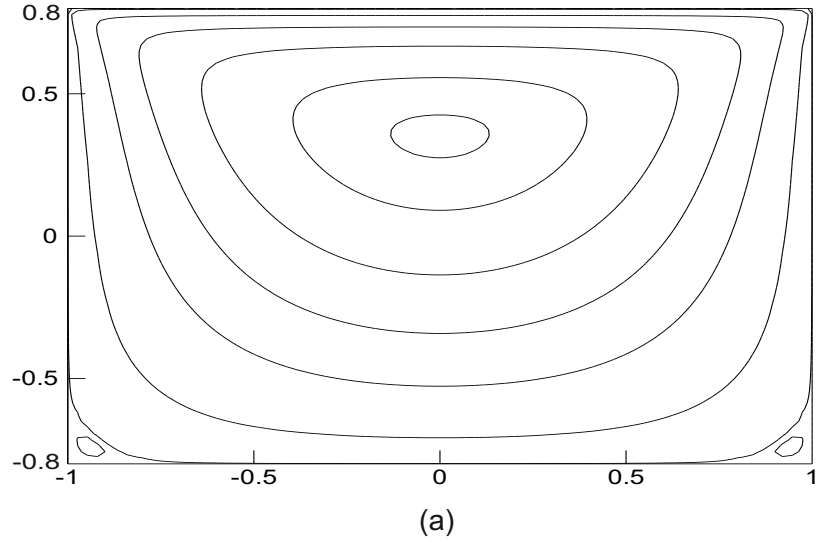


(b)

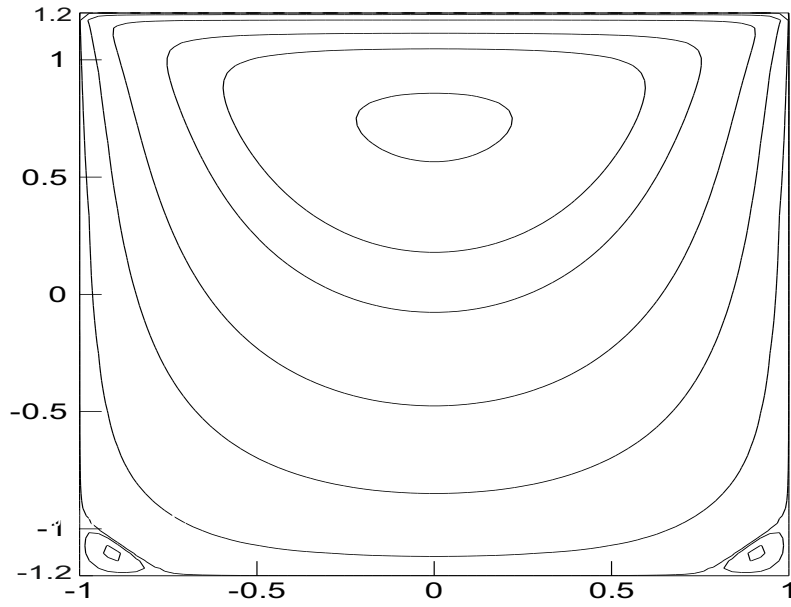


(c)

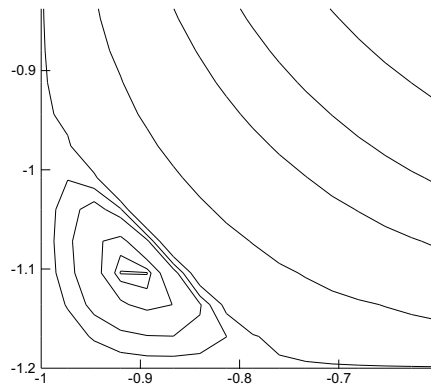
Şekil 3.6. (a)  $h=0.4$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=0.4$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=0.4$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



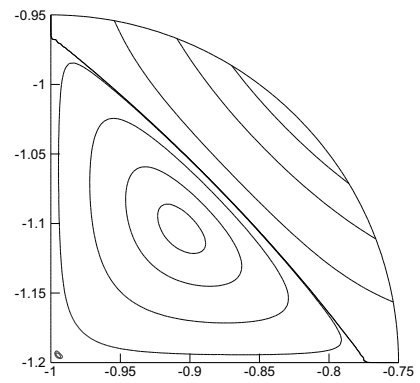
Şekil 3.7. (a)  $h=0.8$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=0.8$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=0.8$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



(a)

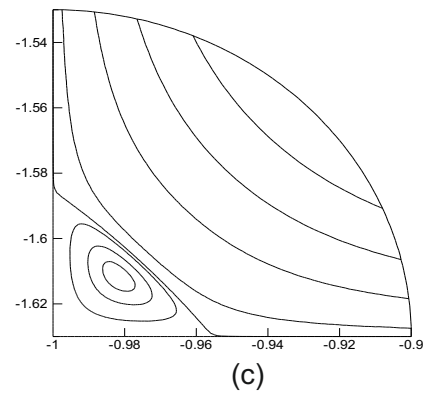
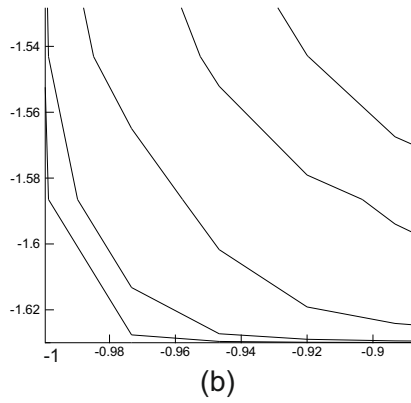
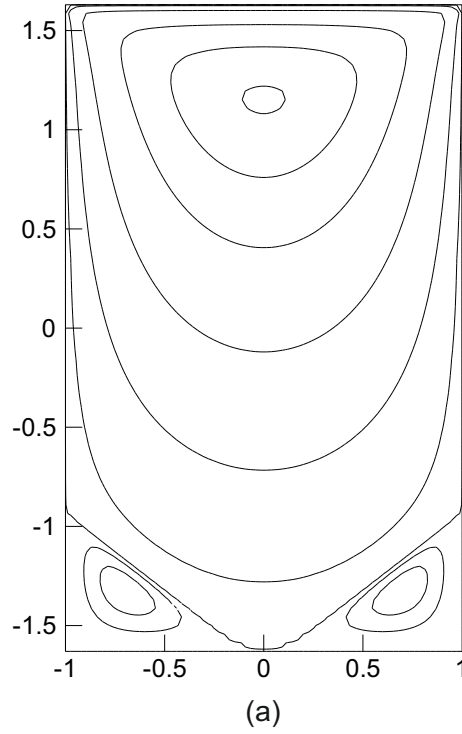


(b)

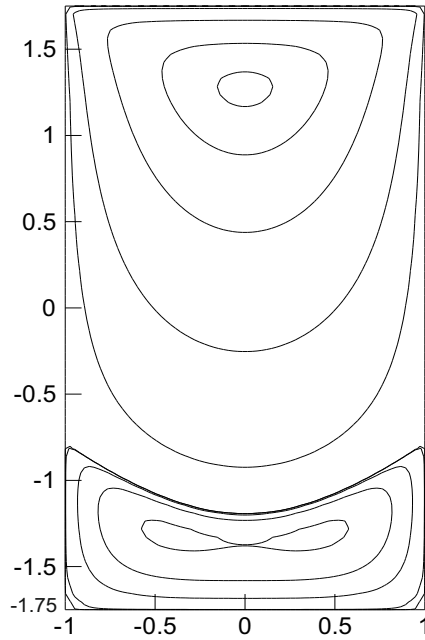


(c)

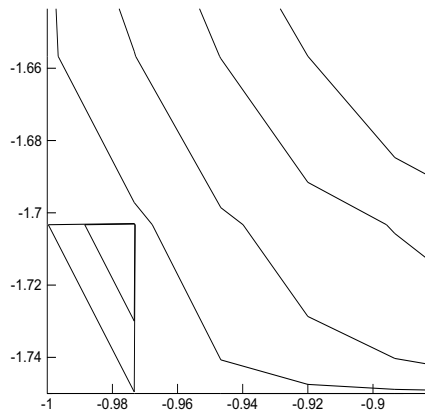
Şekil 3.8. (a)  $h=1.2$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.2$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.2$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



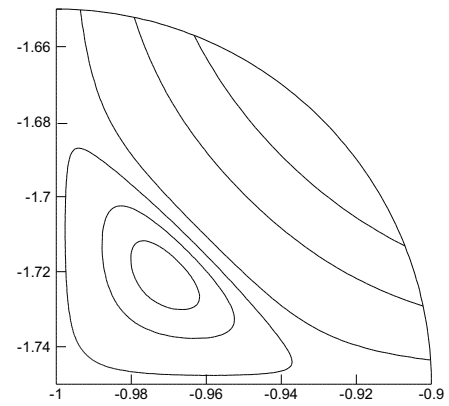
Şekil 3.9. (a)  $h=1.63$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.63$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.63$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



(a)

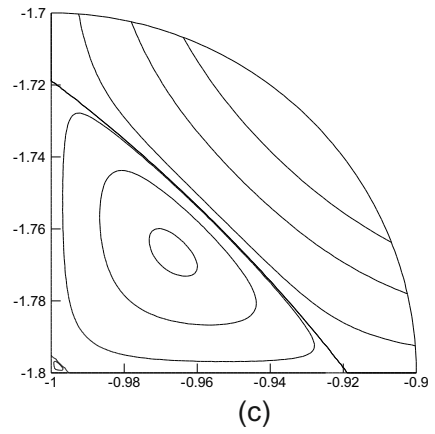
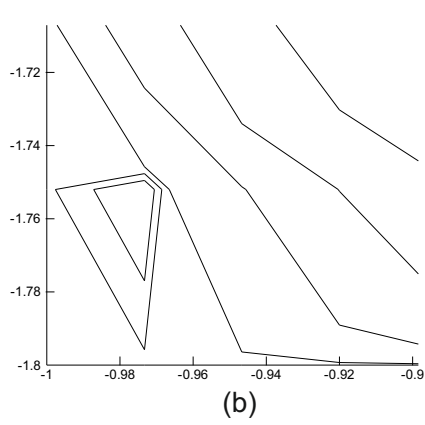
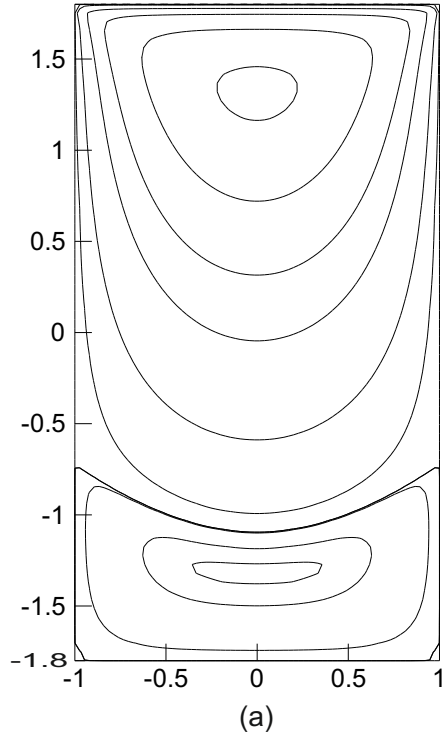


(b)

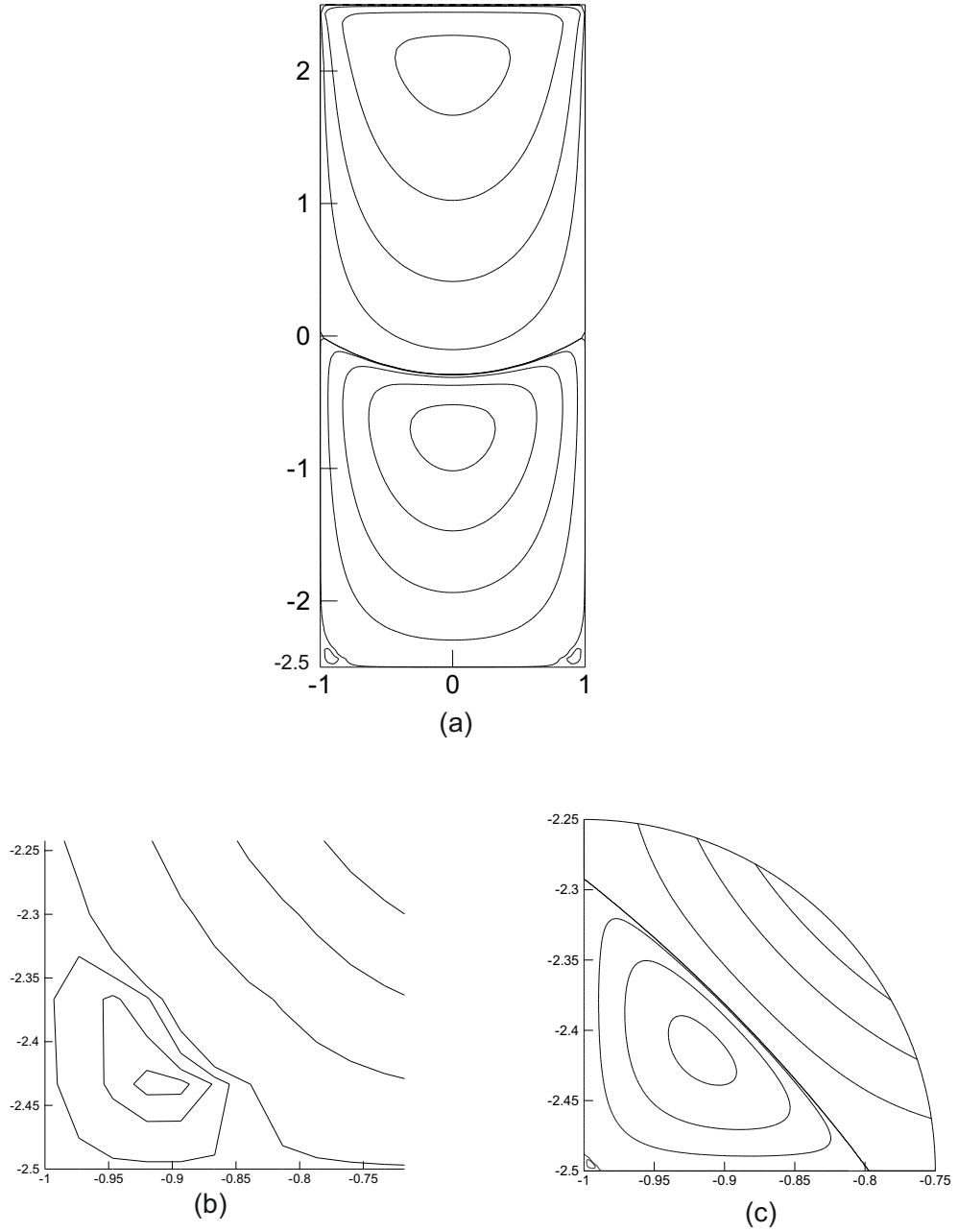


(c)

Şekil 3.10. (a)  $h=1.75$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.75$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.75$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



Şekil 3.11. (a)  $h=1.8$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=1.8$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=1.8$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri



Şekil 3.12. (a)  $h=2.5$  için kaviti içerisindeki analitik çözümden elde edilen akış çizgileri, (b)  $h=2.5$  için kavitinin sol alt köşesindeki analitik çözümün akış çizgileri, (c)  $h=2.5$  için Phillips [4] yöntemiyle elde edilen köşe civarındaki akış çizgileri

Tablo 3.8.  $h=1$  için  $\psi$  nin u ve v hız bileşenleri

(x,y)	u	v
(-0.8326,-0.8230)	-2.956266929715531E-003	3.071542556479773E-003
(-0.9239,-0.9224)	-6.949953884722151E-006	6.085087280949061E-006
(-0.9785,-0.9379)	1.551822861148798E-005	-6.435257725633024E-005

Tablo 3.9.  $h=1$  için Phillips [4] yöntemiyle iyileştirilmiş fonksiyonun u ve v hız bileşenleri

(x,y)	u	v
(-0.8326,-0.8230)	-2.956267452576281E-003	3.071543076292173E-003
(-0.9239,-0.9224)	-6.949841852616212E-006	6.084457791525942E-006
(-0.9785,-0.9379)	1.551832963318633E-005	-6.435255253106884E-005

Tablo 3.10.  $h=2$  için  $\psi$  nin u ve v hız bileşenleri

(x,y)	u	v
(-0.8834,-1.8835)	1.315045594555261E-005	-1.309739862521188E-005
(-0.9504,-1.9505)	6.489079667400751E-009	-8.799009488709113E-009
(-0.9971,-1.9972)	4.219903307277416E-011	-3.575763811473142E-010

Tablo 3.11.  $h=2$  için Phillips [4] yöntemiyle iyileştirilmiş fonksiyonun u ve v hız bileşenleri

(x,y)	u	v
(-0.8834,-1.8835)	1.315046065857166E-005	-1.309740077297313E-005
(-0.9504,-1.9505)	6.484923569569696E-009	-8.790714080651662E-009
(-0.9971,-1.9972)	3.824873886618878E-011	-3.030160971053178E-011

## KAYNAKLAR

1. Gurcan, F., 2003. Streamline topologies in Stokes flow within lid-driven cavities, **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, 17((1)):19–30.
2. Joseph, D.D. ve Sturges, L., 1978. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problem, **Applied Math., SIAM**(34):7–27.
3. C. H. Driesen, J. G. M. Kuerten, M.S., 1998. Low reynold number flow over partially covered cavities., **Engineering Math.**, (34):3–20.
4. Phillips, T.N., 1989. Singuler matched eigenfunction expansions for Stokes flow around a corner, **Appl. Math.**, (42):13–26.
5. P. H. Gaskell, M. D. Savage, J.L.S. ve Thompson, H.M., 1995. Modelling and analysis of meniscus roll coating, **Fluid Mechanics**, (298):113–137.
6. Thompson, H.M., 1992. Ph.D. thesis, Universty of Leeds.
7. C. K. Aidun, N.G.T. ve Benson, J.D., 1991. Global stability of a lid-driven cavity with troughflow, **Physics of Fluids**, A(3):2081–2090.
8. P. N. Shankar, M.D.D., 2000. Fluids mechanics in the driven cavitiy, **Fluid Mechanics**, (136):93–136.
9. Sharif, M.A.R., 2007. Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavity with hot moving lid on top and cooled from bottom, **Therm. Eng.**, (27):1036–1042.
10. H. F. Oztop, .D., 2004. Mixed convection in two side lid-driven differentially heated square cavitiy, **Heat Mass Transfer Engineering**, (47):1761–1769.
11. Bilgil, H., 2010. Sektörel kavitilerdeki 2-D Navier-Stokes denkleminin çözüm hareketlerinin çatallanmaları, Ph.D. thesis, Erciyes Universty.
12. Jeffrey, G.B., 1992. On water waves near the share, **Proc. Roy. Soc.**, (A)(102):162.
13. Smith, R.C.T., 1952. The bending of a semi infinite strip, **Sci. Res., Austral**(5):227.
14. C. H. Liuand, D.D.J., 1977. Stokes flow in wedge-shaped trenches, **Fluid Mechanics**, 80(3):443–463.
15. Shankar, P., 1993. The eddy structure in Stokes flow in a cavity, **Fluid Mechanics**, (250):371.
16. C. Shen, J.M.F., 1985. Low reynold number flow over cavities, **Phsy. Fluids**, (11)(28):3191–3202.

17. Srinivasan, R., 1995. Accurate solution for steady plane flow in the driven cavity, **Zamp**, (46):524–545.
18. Shankar, P.N., 2007. *Slow Viscous Flow*, Imperial College Press.
19. Friedman, B., 1956. *Principles and Techniques of Applied Mathematics*.
20. F. Gurcan, A.D., 2006. Saddle connections near degenerate critical points in Stokes flow within cavities, **Applied Math. and Computation**, (172):1133–1144.
21. F. Gurcan, M.C.T.W. ve Savage, M.D., 2006. Eddy genesis and transformation of Stokes flow in a double lid-driven cavity, **Mechanical Engineering Science**, **220**:1765–1774.
22. Gurcan, F., 1997. Flow bifurcation in rectangular lid-driven cavity flows, Ph.D. thesis, University of Leeds.
23. Moffatt, H.K., 1964. Viscous and resistive eddies near a sharp corner, **Fluid Mechanics**, (18):1–18.
24. G. Geymonant, P.G., 1985. Eigenfunction expansions for non self adjoint operators and separation of variables., **Springer-Verlag**.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Emrullah ERTUNÇ

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 1 Ocak 1988, Kayseri

Medeni Durumu: Evli

Tel: +90 536 781 09 84

Yazışma Adresi: Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü KAYSERİ

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	ERU Fen Bilimleri Enstitüsü	2014
Lisans	ERU Fen Fakültesi Matematik	2012
Lise	Aydınlıkevler Lisesi, Kayseri	2006

### YABANCI DİL

İngilizce