



**T.C.**  
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLARIN YENİ ÇARPIMI ÜZERİNDE**  
**BAZI PARAMETRELERİN İNCELENMESİ**

**Nurettin Talha DİNÇ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2014**  
**KONYA**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Nurettin Talha DİNÇ tarafından hazırlanan ‘‘Grafların Yeni arpımı üzerinde Bazı Parametrelerin İncelenmesi’’ adlı tez çalışması 21/02/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy okluđu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri yeleri

#### Başkan

Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK

#### Danışman

Doç. Dr. A. Dilek MADEN

#### ye

Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN

### İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.



Prof. Dr. Aşır GENÇ  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Nurettin Talha DİNÇ

Tarih: 21/02/2014

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

### GRAFLARIN YENİ ÇARPIMI ÜZERİNDE BAZI PARAMETRELERİN İNCELENMESİ

Nurettin Talha DİNÇ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Dilek MADEN

2014, 40 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Doç. Dr. A. Dilek MADEN

Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN

Bu çalışmada, ilk olarak grafların derece dizisi üzerine inşa edilmiş yeni bir graf çarpımı olan derece çarpım grafi tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra da bu çarpım grafi üzerinde bağımsızlık sayısı, klik sayısı, kromatik sayısı, klik örtü sayısı, diameter, radius, Wiener indeks, Randic indeks gibi graf parametreleri incelenmiştir. Son olarak da derece çarpım grafının mükemmel graf olduğu elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Çarpım grafi, Derece çarpım grafi, Mükemmel graf

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**SOME GRAPH PARAMETERS  
ON A NEW TYPE OF GRAPH PRODUCT**

**Nurettin Talha DİNÇ**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
SELÇUK UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. A. Dilek MADEN**

**2014, 40 Pages**

**Jury**

**Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK**

**Assoc. Prof. A. Dilek MADEN**

**Assoc. Prof. Ahmet ERDOĞAN**

In this study firstly, we define a new type of graph product namely degree product which is based on the degree squence of graphs. Then we examine properties over this new graph. Further we discuss relations among this product and some graph parameters such as independence number, clique number, chromatic number, clique cover number, diameter, radius, Wiener index, Randic index. Finally we show that the degree product of graphs are actually perfect graphs.

**Keywords:** Degree product, Graph product, Perfect ggraphs.

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. A. Dilek MADEN yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma süresince kılavuz olan ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. A. Dilek MADEN'e, bu tezin ilhamını veren sayın hocam Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK'e, her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Nurettin Talha DİNÇ  
KONYA-2014

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ .....</b>	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER .....</b>	<b>vii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR .....</b>	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR .....</b>	<b>3</b>
2.1. Grafin Tanımı .....	3
2.2. Graflarda Uzaklık .....	5
2.3. Yol ve Devir .....	6
2.4. Bazı Özel Graflar .....	7
2.5. Alt Graf ve İndirgenmiş Alt Graf .....	9
<b>3. GRAF PARAMETRELERİ .....</b>	<b>10</b>
3.1. Bağımsızlık Sayısı .....	10
3.2. Klik Sayısı .....	10
3.3. Kromatik Sayısı .....	11
3.4. Klik Örtü Sayısı .....	12
3.5. Eccentricity, Diameter ve Radius .....	12
3.6. Wiener İndeks .....	13
3.7. Randic İndeks .....	14
3.8. Düzensizlik ve Eşitlik İndeksi .....	14
3.9. Mükemmel Graf.....	15
<b>4. GRAF ÇARPIMLARI.....</b>	<b>16</b>
4.1. Kartezyen Çarpım .....	16
4.2. Strong Çarpım.....	17
4.3. Lexicografik Çarpım.....	19
<b>5. GRAFLARIN YENİ ÇARPIMI .....</b>	<b>22</b>
5.1. Grafların Derece Çarpımı .....	22
<b>6. DERECE ÇARPIM GRAFI ÜZERİNDE GRAF PARAMETRELERİ .....</b>	<b>31</b>
<b>7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>	<b>37</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>38</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>40</b>

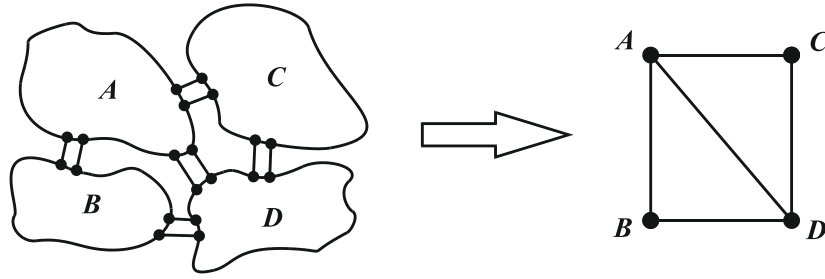
## SİMGELER VE KISALTMALAR

SEMBOLLER	ANLAMI
$ A $	: $A$ kümesinin eleman sayısı
$\subseteq$	: altkümesidir
$m$	: boyut ( $E$ nin eleman sayısı)
$\geq$	: büyük ya da eşittir
$>$	: büyüktür
$der(e_i)$	: $e_i$ köşesinin derecesi
$\notin$	: elemanı değildir
$\in$	: elemanıdır
$\neq$	: eşit değildir
$=$	: eşittir
$\alpha(G)$	: $G$ grafinin bağımsızlık sayısı
$dia(G)$	: $G$ grafinin diameter sayısı
$t(G)$	: $G$ grafinin düzensizlik indeksi
$e(G)$	: $G$ grafinin eşitlik indeksi
$\theta(G)$	: $G$ grafinin klik örtü sayısı
$w(G)$	: $G$ grafinin klik sayısı
$\chi(G)$	: $G$ grafinin kromatik sayısı
$rad(G)$	: $G$ grafinin radius sayısı
$R(G)$	: $G$ grafinin Randic indeksi
$\overline{G}$	: $G$ grafinin tamamlayıcısı
$W(G)$	: $G$ grafinin Wiener indeksi
$G \diamond H$	: $G$ ile $H$ grafinin derece çarpım grafi
$G \boxtimes H$	: $G$ ile $H$ grafinin kartezyen çarpım grafi
$G \bullet H$	: $G$ ile $H$ grafinin lexicografik çarpım grafi
$G \square H$	: $G$ ile $H$ grafinin strong çarpım grafi
$\Delta(G)$	: $G$ nin noktalarının derecelerinin maksimumu
$\delta(G)$	: $G$ nin noktalarının derecelerinin minimumu
$K_{r,s}$	: iki parçalı graf (kümelerin eleman sayısı $r$ ve $s$ )
$\supseteq$	: kapsar
$e$	: kenar
$E$	: kenar kümesi
$v$	: köşe
$V$	: köşe kümesi
$\leq$	: küçük ya da eşittir
$<$	: küçüktür
$n$	: mertebe ( $V$ nin eleman sayısı)
$E_n$	: $n$ mertebeli boş graf
$C_n$	: $n$ mertebeli devir graf
$K_n$	: $n$ mertebeli tam graf
$P_n$	: $n$ mertebeli yol graf

**SEMBOLLER****ANLAMI**

$\varepsilon(G)$	:	$u$ köşesinin eccentricity sayısı
$\{e_i, e_j\}$ veya $e_i e_j$	:	uç köşeleri $e_i$ ve $e_j$ olan kenar
$D_{u,v}$	:	uç köşeleri $u$ ve $v$ olan yürüme
$d(u, v)$	:	uç köşeleri $u$ ve $v$ olan yürümenin en kısa uzunluğu
$ D_{u,v} $	:	uç köşeleri $u$ ve $v$ olan yürümenin uzunluğu
$G = (V, E)$	:	$V$ köşe kümeli $E$ kenar kümeli bir $G$ grafi
$V_1 \times V_2$	:	$V_1$ ile $V_2$ kümesinin kartezyen çarpım kümesi





Şekil 1.2.

Bir graf, işte yukarıdaki gibi bir şekildir. Nokta sayısı sonsuz olabilir. Bazı noktalar, “... ilişkisi var” anlamına gelen bir çizgi ile birleştirilir. Çizgilerin boyu veya şekli hiç önemli değildir, var ya da yok olmaları önemlidir. Noktaların konumu da önemli değildir. Bu özellikleri nedeniyle bir grafın sonsuz farklı şeklinin çizilebileceği açıktır.

Grafların uygulama alanları oldukça geniş olduğu için 18. yüzyıldan günümüze kadar graflar üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Önemli bir yere sahip olan bu çalışmalardan biri de graf çarpımlarıdır.

Graf çarpımları basitçe anlatılmak istenilirse herhangi iki graftan yeni bir graf elde etmek graflar üzerinde bir genişleme yapmaktır. Örneğin kimyadaki herhangi iki atomdan yeni bir element elde etmeye benzetilebilir.

Klavžar ve Imrich [13] e göre graf çarpımlarının temel ögesi olan “grafların kartezyen çarpımı” ilk olarak 1912 yılında Alfred North Whitehead (1861-1947) ve Bertrand Russell (1872-1970) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonraları 1960 yılında Gert Sabidussi (1929- ) [21] tarafından tekrar ele alınmış ve yeniden düzenlenmiştir. Kartezyen graf çarpımından ilham alınarak günümüze kadar yüzlerce graf çarpımı tanımlanmış ve bunlar üzerine teorem ve uygulamalar kurulmuştur. Örnek olarak [11], [17] ve [22] verilebilir.

Bu çalışmada da daha önceden tanımlanmış ve üzerine çalışmalar yapılmış graf çarpımlarından esinlenerek yeni bir graf çarpımı tanımlanmıştır. Bu yeni graf çarpımı üzerinde de graf parametreleri incelenmiştir.

Çalışmamızın 2. Bölümünde graf teorisinin temel tanım ve teoremlerine; 3. Bölümünde Graf Teori de kullanılan genel parametrelerin tanımları ve örneklerine; 4. Bölümünde önceki graf çarpımları ve teoremlerine yer verilmiştir.

5. Bölümde çalışmamızın ana konusu olan yeni graf çarpımının tanımı ve özellikleri; 6. Bölümde ise yeni tanımladığımız graf çarpımı üzerinde graf parametreleri incelenmiş ve eşitlikler elde edilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde Graf Teori de kullanılan bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir. Daha detaylı bilgi almak için [1], [2], [9] ve [27] referanslarına bakılabilir.

### 2.1. Grafın Tanımı

**Tanım 2.1.1.**  $V$ , elemanları *köşeler* olarak adlandırılan boştan farklı bir küme,  $E$  de elemanları *kenarlar* olarak adlandırılan ve  $V$  nin bir ya da iki elemanlı alt kümelerinden oluşan herhangi bir küme olsun. Bu şekilde tanımlanan  $G = (V, E)$  ikilisine *graf* adı verilir.

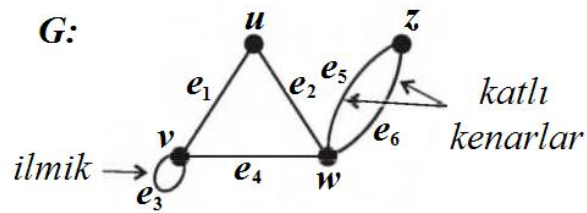
Köşe kümesi ve kenar kümesi sonlu olan bir graf, *sonlu graf* olarak adlandırılır. Bu durumda  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  olmak üzere  $|V| = n$  sayısına grafın *mertebesi*;  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$  olmak üzere  $|E| = m$  sayısına da grafın *boyutu* denir.

Graflar somut olarak gösterilirken, her bir köşe bir nokta ile temsil edilir. Her bir  $\{v_i, v_j\}$  kenarı ise  $v_i$  ve  $v_j$  köşesine karşılık gelen noktaları birleştiren bir doğru parçası ya da basit bir eğri ile temsil edilir.  $\{v_i, v_j\}$  kenarında,  $v_i$  ve  $v_j$  ye kenarın *uç noktaları* denir. Tek elemanlı bir  $\{v\}$  kenarının uç noktaları, aynı ve  $v$  dir. Böyle bir kenara *ilmik* adı verilir.

Aynı uç noktalar kümesine sahip olan kenarlar ise *kathı kenarlar* olarak adlandırılır. Bir  $e = \{v_i, v_j\}$  kenarında  $v_i$  ile  $v_j$  köşeleri için *komsudur* denir.

Bir kenar yukarıda görüldüğü gibi, kullanılıştındaki sadelik bakımından  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) ile gösterilebilir.

**Örnek 2.1.1.** Köşe kümesi  $V = \{u, v, w, z\}$  olan ve kenar kümesi  $e_1 = uv$ ,  $e_2 = uw$ ,  $e_3 = vv$ ,  $e_4 = vw$ ,  $e_5 = wz$ ,  $e_6 = wz$  olmak üzere  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  olarak tanımlanan bir  $G = (V, E)$  grafının somut gösterimi Şekil 2.1.1. deki gibidir.



Şekil 2.1.1.

Şekil 2.1.1. de dikkat edilirse, bir küme içerisinde aynı isimli bir eleman birden fazla yazılamayacağından, grafın kenarları yeniden adlandırılmıştır.

Katlı kenarlar bulunduran graflar soyut olarak gösterilirken, böyle bir karışıklığa meydan vermemek için grafın kenarlarını yeniden adlandırmak bu nedenle akıllıcadır.

Bir graf, ilmik ya da katlı kenarlar bulundurup bulundurmamasına göre isim alır.

**Tanım 2.1.2.** Katlı kenarlar ya da ilmik bulunduran graflara *pseudo-graf*; yalnız katlı kenarlar bulunduran graflara *çoğul-graf*; katlı kenarlar ve ilmik bulundurmeyen graflara ise *basit graf* adı verilir.

Şekil 2.1.2. de sırasıyla pseudo-graf, çoğul-graf ve basit grafa birer örnek verilmiştir.



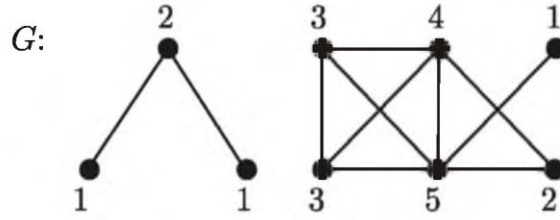
Şekil 2.1.2. Sırasıyla pseudo-graf, çoğul-graf ve basit graf

Bu çalışma basit graflar üzerine olduğundan, bundan böyle “basit graf” yerine “graf” ifadesi kullanılacaktır.

**Tanım 2.1.3.**  $G$  bir graf,  $v \in V(G)$  olsun.  $v$  köşesi ile çakışık olan kenarların sayısına  $v$  köşesinin derecesi denir ve  $der(v)$  gösterilir.

Her bir ayrıntı komşu olduğu köşeye tam olarak 1 derece kazandırırken, bir ilmik ise komşu olduğu köşeye 2 derece birden kazandırır. 0 dereceli bir köşe *izole köşe* olarak adlandırılır. Derecesi 1 olan köşeye ise *pendant köşe* adı verilir. Bir  $G$  grafının

en az dereceli köşesine *minimum dereceli* denir ve  $\delta(G)$  ile gösterilir. En çok dereceli köşesine ise *maksimum dereceli* denir ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir. Herhangi bir grafın derecelerinin küçükten büyüğe doğru yazılarak oluşturulan diziye *derece dizisi* denir. Şekil 2.1.3. de köşeleri dereceleriyle adlandırılmış  $G$  grafında  $\delta(G)=1$ ,  $\Delta(G)=5$  ve derece dizisi  $(1,1,1,2,2,3,3,4,5)$  dir.



Şekil 2.1.3. Köşeleri, dereceleriyle adlandırılmış bir graf

## 2.2. Graflarda Uzaklık

**Tanım 2.2.1.**  $u$  ve  $v$ , bir  $G$  grafının herhangi iki köşesi olsunlar.  $G$  nin  $u$  köşesi ile başlayıp  $v$  köşesi ile biten,  $(u = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_k = v)$  sonlu dizisine *bir  $u-v$  yürümesi* denir.

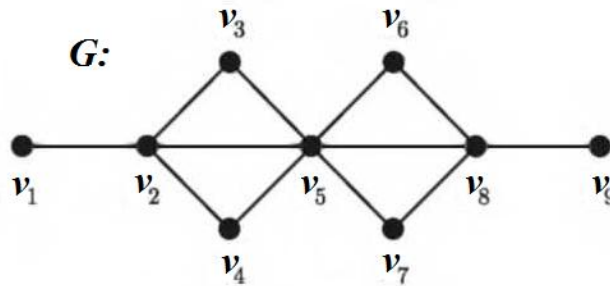
Burada  $i = 1, 2, \dots, k$  olmak üzere  $e_i = v_{i-1}v_i$  dir.  $u$  ve  $v$  köşelerine yürümenin uç köşeleri adı verilir. Uç köşeleri  $u$  ve  $v$  olan bir yürüme  $D_{u,v}$  ile gösterilir. Yürümedeki kenarların sayısı olan  $k$ , *yürümenin uzunluğu* olarak tanımlanır. Herhangi bir  $D_{u,v}$  yürümenin uzunluğu  $|D_{u,v}|$  ile gösterilir. Başlangıç köşesi  $u$  bitiş köşesi  $v$  olan bir yürümenin en kısa uzunluğu  $d(u,v)$  ile gösterilir. Hiç kenar içermeyen, uzunluğu 0 olan bir yürümeye *aşikâr yürüme* denir.

Bir yürümenin kenarları, köşelerden kolayca anlaşılacağı için yürümede sadece köşeler de gösterilebilir.  $A = u_0u_1u_2\dots u_k$  ve  $B = v_0v_1v_2\dots v_l$  iki  $A$  ve  $B$  yürümesi olsunlar. Bu yürümenin eşit olması için gerekli ve yeterli koşul,  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq i \leq l$  için  $k = l$  ve  $u_i = v_i$ , olmasıdır. Aksi halde bu yürümler farklıdır.

$u-v$  yürümesinde eğer  $u = v$  ise yürüme *kapalı*,  $u \neq v$  ise yürüme *açık* olarak adlandırılır.

### 2.3. Yol ve Devir

**Tanım 2.3.1.** Bir yürümede hiç kenar tekrar etmiyorsa bu yürümeye *gezi* adı verilir. Hiçbir köşenin tekrar etmediği bir yürümeye ise *yol* denir. Herhangi bir  $G$  grafın tüm köşeleri için birbirinden farklı iki köşeyi bağlayan bir yol bulunabiliyorsa bu  $G$  grafına *bağlantılı graf* denir. Hiç kenar tekrar etmeyen bir yürümede bazı köşeler tekrar ediyebilir. Tersine; köşelerin tekrar etmediği bir yürümede hiç kenar tekrar etmeyebilir. Her yol bir gezidir. Ama her gezi bir yol değildir.



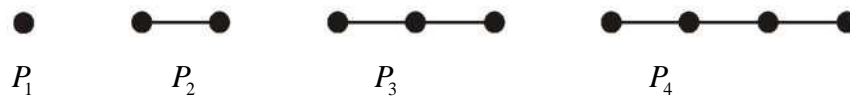
Şekil 2.3.1.

Şekil 2.3.1. deki  $G$  grafında  $(v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_3, v_4)$  bir  $v_1 - v_4$  yürümesi olup bu yürüme bir gezi değildir.  $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_2, v_4)$  bir  $v_1 - v_4$  gezisi olup bu gezi bir yol değildir.  $(v_1, v_3, v_4)$  bir  $v_1 - v_4$  yoludur.

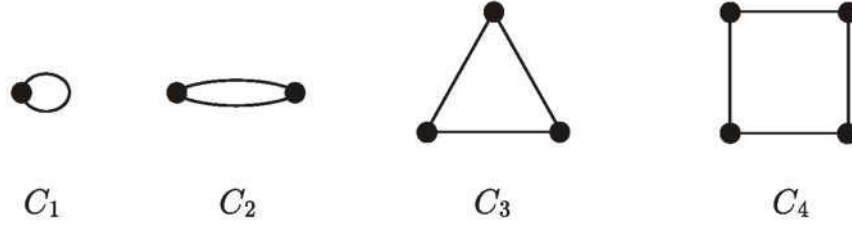
Tanımdan dolayı her yol bir yürümedir. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

**Tanım 2.3.2.** Bir  $G$  grafının aşıkâr olmayan bir kapalı gezisi,  $G$  nin bir *çevresi* olarak adlandırılır.  $n$  tane farklı  $v_i$  köşesinden oluşan  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$   $n \geq 3$  çevresi de *devir* adını alır.  $n$  uzunluğunda bir çevrim *n-devir* adını alır. Bir 3-devir, *üçgen* olarak da adlandırılır.

Yol ve devir olan  $n$  mertebeli bir graf sırasıyla  $P_n$  ve  $C_n$  ile gösterilir. Şekil 2.3.2. de ve Şekil 2.3.3. de 4 ya da 4 ten az mertebeli yol ve devir grafları gösterilmiştir.



Şekil 2.3.2. Mertebesi 4 ya da 4 ten az olan yol grafları



Şekil 2.3.3. Mertebesi 4 ya da 4 ten az olan devir graflar

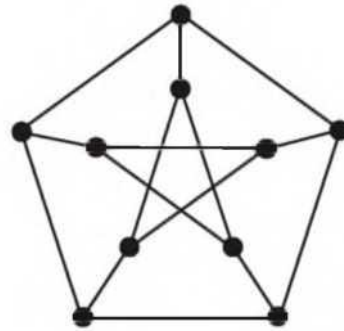
## 2.4. Bazı Özel Graflar

**Tanım 2.4.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  nin her bir köşesi  $r$  dereceli ise yani  $G$  grafi için  $der(v_i) = r$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ise,  $G$  grafına  **$r$ -regüler** adı verilir.

3-regüler graflar, kübik graf olarak adlandırılırlar. Şekil 2.4.1. de, bütün 4 mertebeli regüler graflar gösterilmiştir.  $G_4$  grafi, kübik graftır. Diğer yandan en iyi bilinen kübik graf muhtemelen Şekil 2.5.2. de gösterilmiş olan Petersen grafidir.



Şekil 2.4.1. 4 mertebeli regüler graflar

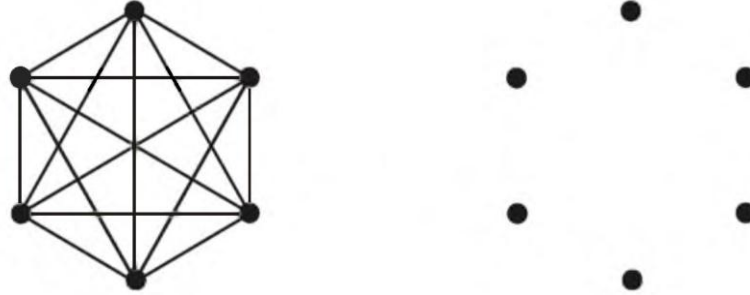


Şekil 2.4.2. Petersen Grafi

**Tanım 2.4.2.** Karşılıklı olarak tüm köşeleri birbirine komşu olan grafa ***tam graf*** denir,  $n$  mertebeli bir tam graf,  $K_n$  ile gösterilir. Bir tam graf, köşe kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün kenarları bulundurur. Bu nedenle  $n$  mertebeli ve  $m$  boyutlu bir

tam graf için  $m = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$  eşitliği geçerlidir. Bir tam grafın her bir köşesi  $n-1$  dereceli olup bu yüzden regüler bir graftır.

Hiç kenar bulundurmeyen graf da **boş graf** olarak adlandırılır,  $n$  mertebeli bir boş graf  $E_n$  ile gösterilir. Şekil 2.4.3. de sırasıyla  $K_6$  ve  $E_6$  grafları gösterilmiştir.



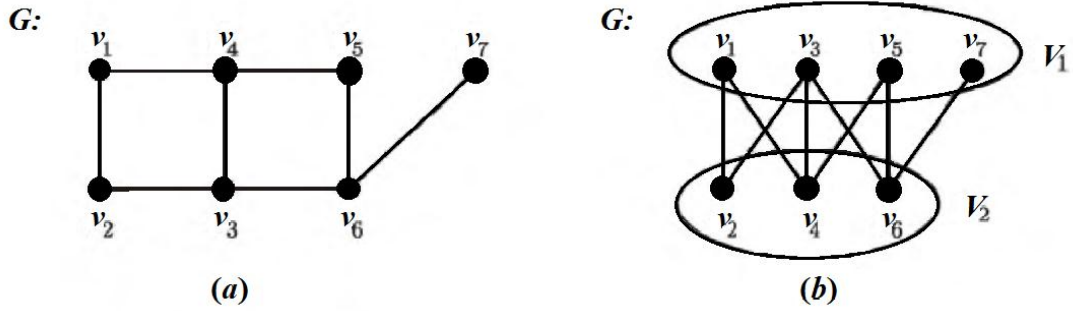
Şekil 2.4.3. Sırasıyla 6 mertebeli tam graf ve boş graf

**Tanım 2.4.3.** Bir  $G$  grafı verilsin.  $G$  ile aynı köşe kümesine sahip  $H$  grafının herhangi iki  $u$  ve  $v$  köşenin komşu olması ancak ve ancak  $G$  grafında  $u$  ve  $v$  köşesinin komşu olmamasına bağlı ise bu  $H$  grafı  $G$  grafının **tamamlayıcısı** olarak adlandırılır ve  $\bar{G}$  ile gösterilir.

$n$  köşeye sahip bir  $G$  grafı ile  $\bar{G}$  tamamlayıcısının birleşmesiyle  $K_n$  tam grafı oluşur.  $K_n$  tam grafının tamamlayıcısı  $E_n$  boş grafıdır.

**Tanım 2.4.4.** Bir  $G$  grafı verilsin. Eğer  $G$  nin köşelerini  $k \geq 1$  tane, maksimum mertebeli bağımsız ve ayrık kümeye ayırmak mümkünse  $G$  ye  **$k$ -parçalı graf** denir,  $k = 2$  ise özel olarak  $G$  ye **iki-parçalı graf** adı verilir.

Köşe kümeleri  $V_1$  ve  $V_2$  olan iki-parçalı graflar,  $V_1 = r$  ve  $V_2 = s$  olmak üzere  $K_{r,s}$  ile sembolize edilirler. Şekil 2.4.4. (a) da iki-parçalı bir graf verilmiş ve iki-parçalı oluşunun kolayca görülebilmesi için Şekil 2.4.4. (b) de yeniden düzenlenmiştir. Verilen grafın köşe kümeleri  $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$  ve  $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$  dir. O halde  $G$  grafı bir  $K_{4,3}$  grafıdır.

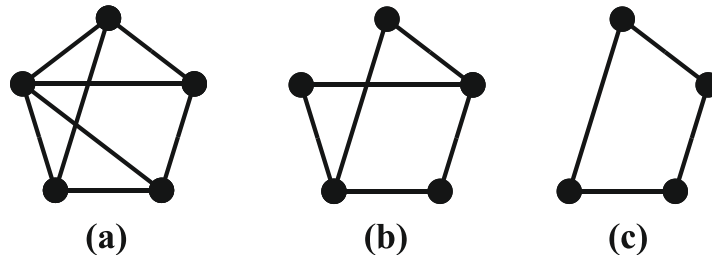


Şekil 2.4.4. İki-parçalı bir graf

## 2.5. Alt Graf ve İndirgenmiş Alt Graf

**Tanım 2.5.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf olsun.  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ , kenar kümesi  $E(G)$ ;  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$ , kenar kümesi  $E(H)$  olmak üzere; eğer  $V(G) \subseteq V(H)$  ve  $E(G) \subseteq E(H)$  oluyorsa  $H$  grafına  $G$  grafının **alt grafi** denir ve  $H \subseteq G$  ile gösterilir. Şekil 2.5.1. (b) de verilen graf, (a) grafının alt grafidir.

**Tanım 2.5.2.**  $G$  ve  $H$  iki graf ve  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ , kenar kümesi  $E(G)$ ;  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$ , kenar kümesi  $E(H)$  olmak üzere  $V(H) \subset V(G)$  ve  $E(H) \subset E(G)$  olsun. Eğer  $H$  grafi “ $H$  grafindaki her bir  $u, v$  köşe çiftlerinin  $H$  grafinda  $uv$  kenarını oluşturabilmesi için gerek ve yeter şart  $uv$  kenarının  $G$  grafinda bir kenar olmasıdır.” şartını sağlarsa  $H$  grafına  $G$  grafının **indirgenmiş alt grafi** denir. Diğer bir deyişle  $H$  grafindaki köşelere çakışık olan her bir kenar  $G$  grafinda da aynı köşelere çakışık ise  $H$  grafi  $G$  grafının indirgenmiş alt grafi olur. Şekil 2.5.1. (c) de verilen graf, (a) grafının indirgenmiş alt grafidir.



Şekil 2.5.1.

### 3. GRAF PARAMETRELERİ

Bu bölümde Graf Teori de kullanılan bazı temel parametreler verilmiştir. Daha detaylı bilgi almak için [1], [2], [9] ve [27] referanslarına bakılabilir.

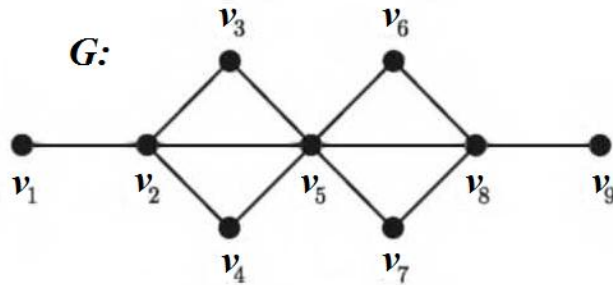
#### 3.1. Bağımsızlık Sayısı

**Tanım 3.1.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  nin karşılıklı olarak birbirine komşu olmayan köşelerinin kümesine **bağımsız küme** denir.

Bir  $G$  grafının bağımsız kümelerindeki maksimum eleman sayısı, grafın **bağımsızlık sayısı** olarak adlandırılır ve bu değer  $\alpha(G)$  ile gösterilir.

$$\alpha(G) = \max\{|V_i| : V_i \text{ bağımsız küme}\}$$

**Örnek 3.1.1.** Şekil 3.1.1. deki  $G$  grafında  $V_1 = \{v_1\}$ ,  $V_2 = \{v_1, v_3\}$ ,  $V_3 = \{v_2, v_8\}$ ,  $V_4 = \{v_2, v_7, v_9\}$ ,  $V_5 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9\}$   $G$  grafının bağımsız kümelerinden bazılarıdır.  $V_5$ , kümesi  $G$  nin bağımsız kümelerinin en genişidir. O halde  $\alpha(G) = 6$  dır.



Şekil 3.1.1.  $G$  grafi için  $\alpha(G)=6$  dır

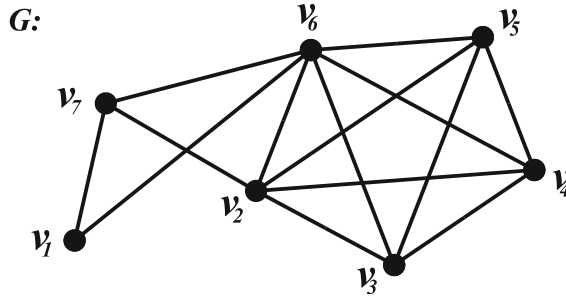
#### 3.2. Klik Sayısı

**Tanım 3.2.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  nin karşılıklı olarak birbirine komşu olan köşelerinin kümesine **klik kümesi** denir.

Bir  $G$  grafının klik kümelerindeki maksimum eleman sayısı, grafın **klik sayısı** olarak adlandırılır ve bu değer  $w(G)$  ile gösterilir.

$$w(G) = \max\{|V_i| : V_i \text{ klik küme}\}$$

**Örnek 3.2.1.** Şekil 3.2.1. deki  $G$  grafında  $V_1 = \{v_1, v_6, v_7\}$ ,  $V_2 = \{v_2, v_7\}$ ,  $V_3 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ ,  $V_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$   $G$  grafının klik kümelerinden bazılarıdır.  $V_4$  kümesi  $G$  nin klik kümelerinin en genişidir. O halde  $w(G) = 5$  dir.

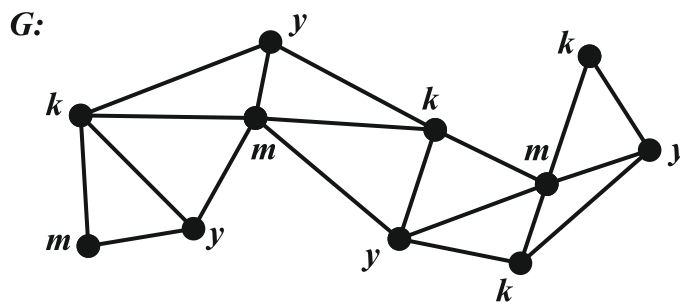


Şekil 3.2.1.  $G$  grafi için  $w(G)=5$  dir

### 3.3. Kromatik Sayısı

**Tanım 3.3.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafının birbirine komşu olan köşelerini farklı renkte boyamak için gerekli olan en az renk sayısı **kromatik sayı** olarak adlandırılır ve  $\chi(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.3.1.** Şekil 3.3.1. deki  $G$  grafının komşu köşelerini farklı renge boyamak için gerekli olan en az renk; kırmızı ( $k$ ), mavi ( $m$ ), yeşil ( $y$ ) olduğundan  $\chi(G) = 3$  dür.



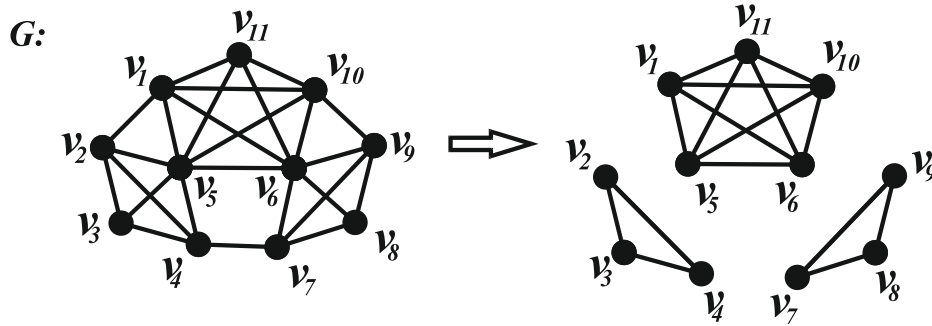
Şekil 3.3.1.  $G$  grafi için  $\chi(G)=3$  dür

### 3.4. Klik Örtü Sayısı

**Tanım 3.4.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $V(G)$  köşe kümesini maksimum klik kümeleri ile parçalanmasına  $G$  grafının *klik örtüsü* denir. Bu parçalanmanın minimum sayısı ise *klik örtü sayısı* olarak adlandırılır ve  $\theta(G)$  ile gösterilir.

Klik örtü sayısı için  $\theta(G) = \chi(\overline{G})$  eşitliği geçerlidir.

**Örnek 3.4.1.** Şekil 3.4.1. deki  $G$  grafında  $V_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$ ,  $V_2 = \{v_6, v_9, v_{10}\}$ ,  $V_3 = \{v_1, v_5, v_6, v_{10}, v_{11}\}$ ,  $V_4 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $V_5 = \{v_4, v_7\}$ ,  $V_6 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$ ,  $V_7 = \{v_7, v_8, v_9\}$   $G$  grafının klik kümelerinden bazılarıdır.  $V_2, V_3, V_7$  klik kümeleri ile  $V(G)$  köşe kümesini minimum sayıda parçalayabileceğimizden  $\theta(G) = 3$  olarak bulunur.



Şekil 3.4.1.  $G$  grafi için  $\theta(G)=3$  dür

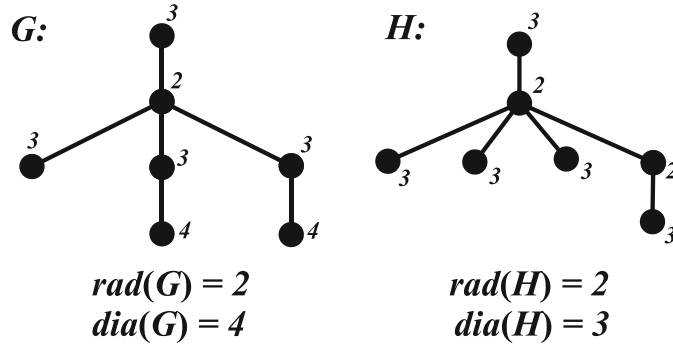
### 3.5. Eccentricity, Diameter ve Radius

**Tanım 3.5.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafi içinde herhangi bir  $u \in V(G)$  köşesinin diğer köşelere olan en kısa mesafelerinin en büyük değeri;  $u$  köşesinin *eccentricity* si olarak adlandırılır ve  $\varepsilon(u)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.5.2.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafi içindeki eccentricity lerin maksimum değeri  $G$  grafının *diameter* ı olarak adlandırılır ve  $dia(G)$  ile gösterilir.

**Tanım 3.5.3.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafi içindeki eccentricity lerin minimum değeri  $G$  grafının *radius* u olarak adlandırılır ve  $rad(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.5.1.** Şekil 3.5.1. de  $G$  ve  $H$  grafının köşeleri eccentricity değerleri ile adlandırılmıştır.  $G$  grafi için maksimum eccentricity değeri dört olduğundan  $dia(G) = 4$ , minimum eccentricity değeri iki olduğundan  $rad(G) = 2$  dir. Aynı şekilde  $H$  grafi için maksimum eccentricity değeri üç olduğundan  $dia(H) = 3$ , minimum eccentricity değeri iki olduğundan  $rad(H) = 2$  dir.



Şekil 3.5.1.

### 3.6. Wiener İndeks

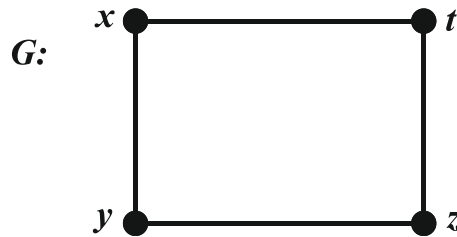
**Tanım 3.6.1.** Bir  $G$  grafi ve  $u, v \in V(G)$  verilsin.  $\sum_{u, v \in V(G)} d(u, v)$  toplamı  $G$  grafının

*Wiener indeks* i olarak adlandırılır ve  $W(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.6.1.** Şekil 3.6.1. deki  $G$  grafında  $d(x, y) = 1$ ,  $d(x, t) = 1$ ,  $d(x, z) = 2$ ,  $d(y, z) = 1$ ,  $d(y, t) = 2$ ,  $d(z, t) = 1$  olduğuna göre

$$\sum_{u, v \in V(G)} d(u, v) = d(x, y) + d(x, t) + d(x, z) + d(y, z) + d(y, t) + d(z, t)$$

$$= 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8 \text{ olur. Buradan da } W(G) = 8 \text{ olarak bulunur.}$$

Şekil 3.6.1.  $G$  grafi için  $W(G) = 8$  dir

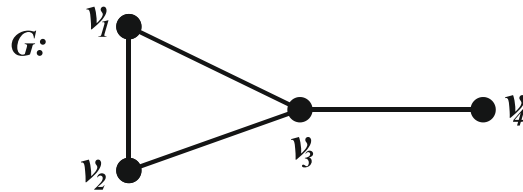
### 3.7. Randic İndeks

**Tanım 3.7.1.** Bir  $G$  grafi ve  $u, v \in V(G)$  verilsin.  $u$  ile  $v$  köşeleri komşu olmak koşuluyla  $\sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{\sqrt{\text{der}(u)\text{der}(v)}}$  toplamı  $G$  grafinin **Randic indeks** i olarak adlandırılır ve  $R(G)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.7.1.** Şekil 3.7.1. deki  $G$  grafinde  $\text{der}(v_1)=2$ ,  $\text{der}(v_2)=2$ ,  $\text{der}(v_3)=3$ ,  $\text{der}(v_4)=1$ , olduğuna göre

$$\begin{aligned} \sum_{u,v \in V(G)} \frac{1}{\sqrt{\text{der}(u)\text{der}(v)}} &= \frac{1}{\sqrt{\text{der}(v_1)\text{der}(v_2)}} + \frac{1}{\sqrt{\text{der}(v_1)\text{der}(v_3)}} + \frac{1}{\sqrt{\text{der}(v_2)\text{der}(v_3)}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\text{der}(v_3)\text{der}(v_4)}} = \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\text{Buradan da } R(G) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6} \text{ olarak bulunur.}$$



Şekil 3.7.1.  $G$  grafi için  $R(G) = \frac{3+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}$  dır

### 3.8. Düzensizlik ve Eşitlik İndeksi

**Tanım 3.8.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafinin birbirinden farklı dereceye sahip köşe sayısı **düzensizlik indeksi** olarak adlandırılır ve  $t(G)$  ile gösterilir.

Aşağıdaki eşitlik indeksi tanımı bizim tarafımızdan tanımlamıştır.

**Tanım 3.8.2.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafinin aynı dereceye sahip maksimum köşe sayısı **eşitlik indeksi** olarak adlandırılır ve  $e(G)$  ile gösterilir.

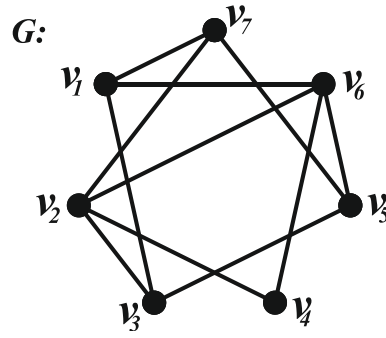
Herhangi bir  $G$  grafının  $V(G)$  köşe kümesini

$A_i = \{u \in V(G) : \text{der}(u) = a, a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$  kümeleriyle  $V(G) = \bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ,

$\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset$  olacak şekilde parçalayabiliriz. Bu parçalama sayesinde  $t(G) = k$  ve

$e(G) = \max |A_i|$  olduğu kolaylıkla görülür.

**Örnek 3.8.1.** Şekil 3.8.1. deki  $G$  grafında  $\text{der}(v_1) = 3$ ,  $\text{der}(v_2) = 4$ ,  $\text{der}(v_3) = 3$ ,  $\text{der}(v_4) = 2$ ,  $\text{der}(v_5) = 3$ ,  $\text{der}(v_6) = 4$ ,  $\text{der}(v_7) = 3$  olduğuna göre  $G$  grafının  $V(G)$  köşe kümesini; dereceleri eşit olan köşelere sahip  $A_1 = \{v_4\}$   $A_2 = \{v_1, v_3, v_5\}$   $A_3 = \{v_2, v_6\}$  kümeleriyle parçalayabiliriz. Buradan da  $t(G) = 3$  ve  $e(G) = 3$  olarak bulunur.



Şekil 3.8.1.  $G$  grafi için  $t(G)=3$  ve  $e(G)=3$  dür

### 3.9. Mükemmel Graf

**Tanım 3.9.1.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafının bütün indirgenmiş  $H$  alt grafları için  $\chi(G) = w(H)$  eşitliği sağlanıyorsa  $G$  grafi ***w-mükemmel graf*** olarak adlandırılır.

**Tanım 3.9.2.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafının bütün indirgenmiş  $H$  alt grafları için  $\theta(G) = \alpha(H)$  eşitliği sağlanıyorsa  $G$  grafi  ***$\alpha$ -mükemmel graf*** olarak adlandırılır.

**Tanım 3.9.3.** Bir  $G$  grafi verilsin.  $G$  grafi hem “ $w$ -mükemmel” hem de “ $\alpha$ -mükemmel” oluyorsa  $G$  grafına ***mükemmel graf*** denir.

## 4. GRAF ÇARPIMLARI

Bu bölümde Graf Teori de kullanılan temel graf çarpımları verilmiş ve üzerinde bazı graf parametreleri incelenmiştir. Daha detaylı bilgi almak için [10], [11], [17], [18] ve [22] referanslarına bakılabilir.

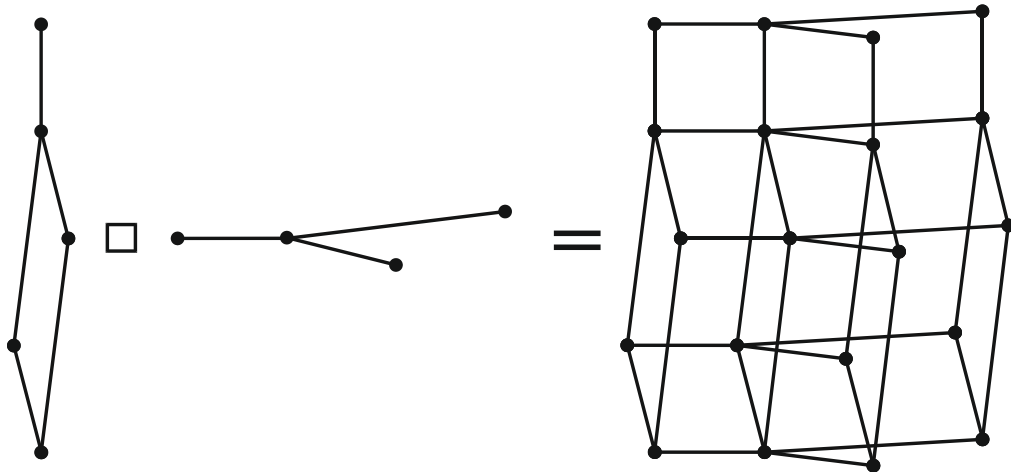
### 4.1. Kartezyen Çarpım

**Tanım 4.1.1.**  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ ,  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$  olmak üzere  $V(G) \times V(H)$  kartezyen kümesinden  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  elemanlarını alalım. Eğer

$$i) u_1 = u_2 \text{ ve } v_1 v_2 \in E(H) \text{ veya } ii) v_1 = v_2 \text{ ve } u_1 u_2 \in E(G)$$

durumlarından biri gerçekleşiyorsa  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  köşeleri komşudur.

Bu şekilde oluşan grafa  $G$  ile  $H$  grafının *kartezyen çarpım grafi* denir ve  $G \square H$  ile gösterilir. Şekil 4.1.1. de basit iki grafın kartezyen çarpımı verilmiştir.



Şekil 4.1.1. Kartezyen çarpım grafi

**Teorem 4.1.1.** ([19])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\alpha(G \square H) \geq \alpha(G)\alpha(H) \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** [19] da; Lemma 2.7 ve Tablo 1 den ispatı yapılmıştır.

**Teorem 4.1.2.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$w(G \square H) \geq \max \{w(G), w(H)\} \quad (4.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** Kartezyen çarpım grafi değişmeli olduğundan genelliği bozmaksızın  $\max \{w(G), w(H)\} = w(G)$  alalım.  $G$  grafının maksimum elemana sahip klik kümesi  $C_G = \{u_1, u_2, \dots, u_{w(G)}\}$  ve  $v \in V(H)$  için  $K = \{(u_1, v), (u_2, v), \dots, (u_{w(G)}, v)\}$  kümesi  $K \subset V(G \square H)$  olsun.  $1 \leq i \leq j \leq w(G)$  ve  $i \neq j$  için  $u_i u_j \in V(G \square H)$  olacağından  $K$  kümesi  $G \square H$  çarpım grafının maksimum klik kümesidir.

O halde  $w(G \square H) \geq \max \{w(G), w(H)\}$  dir.

**Teorem 4.1.3.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf ve  $w_{\max} = \max \{w(G), w(H)\}$  olmak üzere

$$W(G_1 \square G_2) \geq \binom{w_{\max}}{2} + (\alpha_1 \alpha_2 - 1)(\alpha_1 \alpha_2 + w_{\max} - 1) \text{ dir.} \quad (4.3)$$

**İspat.** [5] de; Teorem 14. den ispatı yapılmıştır.

## 4.2. Strong Çarpım

**Tanım 4.2.1.**  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ ,  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$  olmak üzere  $V(G) \times V(H)$  kartezyen kümesinden  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  elemanlarını alalım.

Eğer

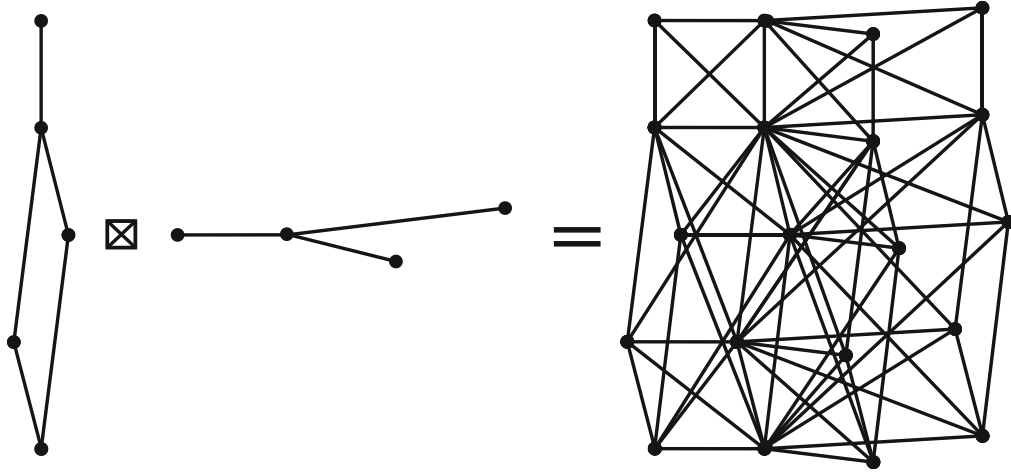
**i)**  $u_1 = u_2$  ve  $v_1 v_2 \in E(H)$  veya **ii)**  $v_1 = v_2$  ve  $u_1 u_2 \in E(G)$  veya

**iii)**  $u_1 u_2 \in E(G)$  ve  $v_1 v_2 \in E(H)$

durumlarından biri gerçekleşiyorsa  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  köşeleri komşudur.

Bu şekilde oluşan grafa  $G$  ile  $H$  grafının **strong çarpım grafi** denir ve  $G \boxtimes H$  ile gösterilir.

Şekil 4.2.1. de basit iki grafın strong çarpımı verilmiştir.



Şekil 4.2.1. Strong çarpım grafi

**Teorem 4.2.1.** ([19])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\alpha(G \boxtimes H) \geq \alpha(G)\alpha(H) \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** [19] da; Lemma 2.7 ve Tablo 1 den ispatı yapılmıştır.

**Teorem 4.2.2.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$w(G \boxtimes H) = w(G)w(H) \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** İlk önce  $w(G \boxtimes H) \geq w(G)w(H)$  eşitsizliğini gösterelim.

$G$  grafının maksimum elemana sahip klik kümesi  $C_G = \{u_1, u_2, \dots, u_{w(G)}\}$  ve  $H$  grafının maksimum elemana sahip klik kümesi  $C_H = \{v_1, v_2, \dots, v_{w(H)}\}$  olsun.

$1 \leq p \leq r \leq w(G)$ ,  $1 \leq q \leq s \leq w(H)$  için  $a = (u_p, v_q) \in C_G \times C_H$ ,  $b = (u_r, v_s) \in C_G \times C_H$  köşeleri Tanım 4.2.1. e göre **i**)  $u_p = u_r$  ise  $v_q v_s \in E(H)$ , **ii**)  $v_q = v_s$  ise  $u_p u_r \in E(G)$ , **iii**)  $u_p u_r \in E(G)$  ve  $v_q v_s \in E(H)$  durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u_p, v_q)$  ve  $b = (u_r, v_s)$  köşeleri komşudur. Yani  $C_G \times C_H$  kümesi  $G \boxtimes H$  çarpım grafının maksimum klik kümesidir. Böylece  $w(G \boxtimes H) \geq w(G)w(H)$  olduğu görülür.

Tersine  $w(G \boxtimes H) \leq w(G)w(H)$  olduğunu gösterelim.

$G \boxtimes H$  çarpım grafının maksimum klik kümesini  $n \leq |V(G)|$ ,  $m \leq |V(H)|$  olacak şekilde

$C = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), \dots, (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_m)\}$  olarak alalım.

$1 \leq p \leq r \leq n$  için  $u_p u_r \in E(G)$  olduğundan  $m \leq w(G)$  ve  $1 \leq q \leq s \leq m$  için  $v_q v_s \in E(H)$  olduğundan  $m \leq w(H)$  olacaktır. Böylece  $nm \leq w(G)w(H)$  bulunur.

Buradan da  $w(G \boxtimes H) \leq w(G)w(H)$  olduğu görülür.

O halde “ $w(G \boxtimes H) = w(G)w(H)$  dir.”

**Teorem 4.2.3.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$W(G_1 \boxtimes G_2) \geq \binom{w_1 w_2}{2} + (\alpha_1 \alpha_2 - 1)(\alpha_1 \alpha_2 + w_1 w_2 - 1) \quad (4.6)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** [5] de; Teorem 14. den ispatı yapılmıştır.

### 4.3. Lexicografik Çarpım

**Tanım 4.3.1.**  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ ,  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$  olmak üzere  $V(G) \times V(H)$  kartezyen kümesinden  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  elemanlarını alalım.

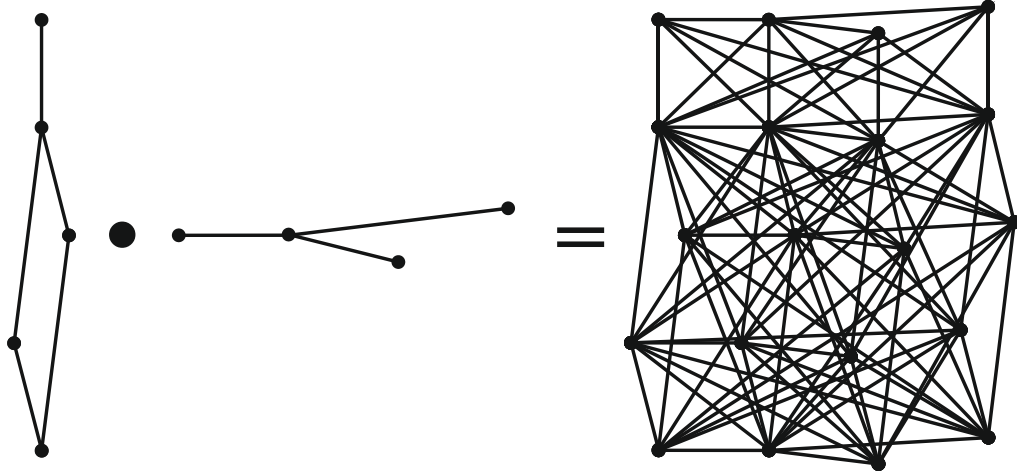
Eğer

$$i) u_1 u_2 \in E(G) \text{ veya } ii) u_1 = u_2 \text{ ve } v_1 v_2 \in E(H)$$

durumlarından biri gerçekleşiyorsa  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  köşeleri komşudur.

Bu şekilde oluşan grafa  $G$  ile  $H$  grafının *lexicografik çarpım grafi* denir ve  $G \bullet H$  ile gösterilir.

Şekil 4.3.1. de basit iki grafın lexicografik çarpımı verilmiştir.



Şekil 4.3.1. Lexicografik çarpım grafi

**Teorem 4.3.1.** ([19])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\alpha(G \bullet H) = \alpha(G)\alpha(H) \quad (4.7)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** [19] de; Lemma 2.7 ve Tablo 1 den ispatı yapılmıştır.

**Teorem 4.3.2.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$w(G \bullet H) = w(G)w(H) \quad (4.8)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** İlk önce  $w(G \bullet H) \geq w(G)w(H)$  eşitsizliğini gösterelim.

$G$  grafının maksimum elemana sahip klik kümesi  $C_G = \{u_1, u_2, \dots, u_{w(G)}\}$  ve  $H$  grafının maksimum elemana sahip klik kümesi  $C_H = \{v_1, v_2, \dots, v_{w(H)}\}$  olsun

$1 \leq p \leq r \leq w(G)$ ,  $1 \leq q \leq s \leq w(H)$  için  $a = (u_p, v_q) \in C_G \times C_H$ ,  $b = (u_r, v_s) \in C_G \times C_H$

köşeleri Tanım 4.2.1. e göre **i)**  $g_p g_r \in E(G)$  veya **ii)**  $g_p = g_r$  ve  $h_q h_s \in E(H)$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u_p, v_q)$  ve  $b = (u_r, v_s)$  köşeleri

komşudur. Yani  $C_G \times C_H$  kümesi  $G \bullet H$  çarpım grafının maksimum klik kümesidir.

Böylece  $w(G \bullet H) \geq w(G)w(H)$  olduğu görülür.

Tersine  $w(G \bullet H) \leq w(G)w(H)$  olduğunu gösterelim.

$G \bullet H$  çarpım grafinin maksimum klik kümesini  $n \leq |V(G)|$ ,  $m \leq |V(H)|$  olacak şekilde  $C = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), \dots, (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_m)\}$  olarak alalım.

$1 \leq p \leq r \leq n$  için  $u_p u_r \in E(G)$  olduğundan  $n \leq w(G)$  ve  $1 \leq q \leq s \leq m$  için  $h_q h_s \in E(H)$  olduğundan  $m \leq w(H)$  olacaktır. Böylece  $mn \leq w(G)w(H)$  bulunur. Buradan da  $w(G \bullet H) \leq w(G)w(H)$  olduğu görülür.

O halde “ $w(G \bullet H) = w(G)w(H)$  dir.”

**Teorem 4.3.3.** ([5])  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$W(G_1 \bullet G_2) \geq \binom{w_1 w_2}{2} + (\alpha_1 \alpha_2 - 1)(\alpha_1 \alpha_2 + w_1 w_2 - 1) \quad (4.8)$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** [5] de; Teorem 14. den ispatı yapılmıştır.

Bu şekilde çarpım grafları üzerinde parametre incelemelerine benzer olarak daha detaylı bilgi almak için [6], [8], [12], [14], [15], [20], [23], [24], [28] referanslarına bakılabilir.

## 5. GRAFLARIN YENİ ÇARPIMI

4. bölümde graf çarpımlarının en önemli üç tanesi gösterilmiştir ve üzerlerinde graf parametrelerinden birkaçı değerlendirilmiştir. Bu bölümde bu graf çarpımlarından esinlenerek yeni bir graf çarpımı “derece çarpım” oluşturulmuş ve özellikleri incelenmiştir.

### 5.1. Grafların Derece Çarpımı

**Tanım 5.1.1.**  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ ,  $H$  grafının köşe kümesi  $V(H)$  ve  $u_1, u_2 \in V(G)$ ,  $v_1, v_2 \in V(H)$  olmak üzere  $V(G) \times V(H)$  kartezyen kümesinden  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  elemanlarını alalım.

Eğer,

$$i) u_1 = u_2 \Rightarrow der(v_1) = der(v_2) \text{ veya}$$

$$ii) v_1 = v_2 \Rightarrow der(u_1) = der(u_2) \text{ veya}$$

$$iii) v_1 \neq v_2, u_1 \neq u_2 \Rightarrow [der(u_1) = der(u_2) \text{ veya } der(v_1) = der(v_2)]$$

şartlarından biri gerçekleşiyorsa  $a = (u_1, v_1)$  ile  $b = (u_2, v_2)$  köşeleri komşudur.

Bu şekilde oluşan grafa  $G$  ile  $H$  grafının **derece çarpım grafi** denir ve  $G \diamond H$  ile gösterilir.

5. ve 6. bölümün tamamında

$G$  grafının köşe kümesini  $A_i = \{u \in V(G) : der(u) = a, a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$  kümeleriyle

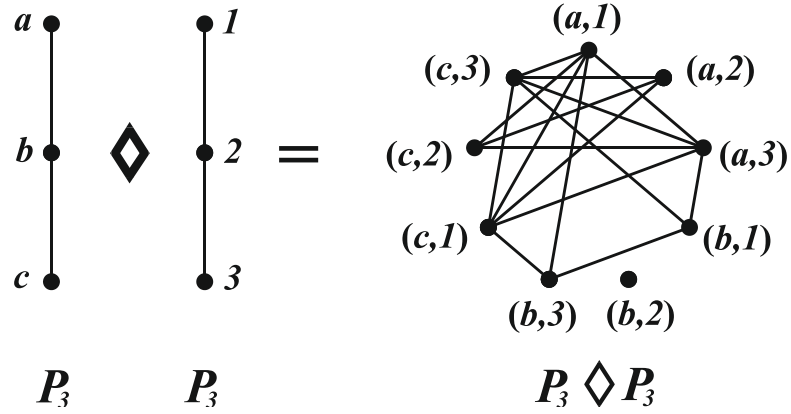
$$\bigcap_{i=1}^k A_i = \emptyset, \quad V(G) = \bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

$H$  grafının köşe kümesini  $B_j = \{v \in V(H) : der(v) = b, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$  kümeleriyle

$$\bigcap_{j=1}^l B_j = \emptyset, \quad V(H) = \bigcup_{j=1}^l B_j = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_l$$

olacak şekilde parçalanmıştır.

Şekil 5.1.1. de  $P_3$  yol grafi ile  $P_3$  yol grafının derece çarpımı verilmiştir.



Şekil 5.1.1.  $P_3$  yol grafi ile  $P_3$  yol grafinin derece çarpımı

**Önerme 5.1.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf ve  $|V(G)| \geq 2$ ,  $|V(H)| \geq 2$  olmak üzere  $G \diamond H$  çarpım grafında pendant köşe bulunmaz.

**İspat. Durum 1.** Farzedelim ki  $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq s \leq l$  için  $|A_r| = 1$  ve  $|B_s| = 1$  olsun.

$|A_r| = 1 \Rightarrow A_r = \{u\}$  ve  $|B_s| = 1 \Rightarrow B_s = \{v\}$  alalım. O zaman  $A_r \times B_s \subset V(G) \times V(H)$  kümesi sadece tek bir  $a = (u, v)$  köşesinden oluşur. Ayrıca  $1 \leq i \leq |V(G)|$ ,  $1 \leq j \leq |V(H)|$  için  $b = (u_i, v_j)$  köşesini alalım.  $der(u) \neq der(u_i)$ ,  $der(v) \neq der(v_j)$  olduğu açıktır.

$a = (u, v)$  köşesiyle  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri Tanım 5.1.1. e göre

$$i) u = u_i \Rightarrow der(v) \neq der(v_j)$$

$$ii) v = v_j \Rightarrow der(u) \neq der(u_i)$$

$$iii) u \neq u_i, v \neq v_j \Rightarrow [der(u) \neq der(u_i) \text{ veya } der(v) \neq der(v_j)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u, v)$  köşesi  $G \diamond H$  çarpım grafında hiçbir köşe ile komşu değildir. O halde  $der(a_{rs}) = 0$  olur.

**Durum 2.** Farzedelim ki  $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq s \leq l$  için  $|A_r| = 1$  ve  $|B_s| \geq 2$  olsun.

$A_r = \{u\}$ ,  $B_s = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  alalım. O zaman  $A_r \times B_s \subset V(G) \times V(H)$  kümesi için  $|A_r \times B_s| \geq 2$  olacaktır.  $a = (u, v_q) \in A_r \times B_s$  köşelerini ve  $1 \leq i \leq |V(G)|$ ,  $1 \leq j \leq |V(H)|$  için  $b = (u_i, v_j) \in V(G) \times V(H)$  köşelerini alalım.

O halde  $der(u) \neq der(u_i)$ ,  $der(v_q) = der(v_j)$  veya  $der(v_q) \neq der(v_j)$  olacaktır.

$a = (u, v_q)$  köşeleriyle  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri Tanım 5.1.1. e göre

*i*)  $u = u_i \Rightarrow v_q, v_j \in B_s$  iken  $der(v_q) = der(v_j)$  veya  $der(v_q) \neq der(v_j)$

*ii*)  $v_q = v_j \Rightarrow der(u) \neq der(u_i)$

*iii*)  $u \neq u_i, v_q \neq v_j \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} der(u) \neq der(u_i) \text{ veya} \\ v_q, v_j \in B_s \text{ iken } der(v_q) = der(v_j) \text{ veya } der(v_q) \neq der(v_j) \end{array} \right]$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u, v_q)$  köşeleri  $G \diamond H$  çarpım grafında ya hiçbir köşe ile komşu değildir ya da  $b = (u_i, v_j)$  köşelerinin en az iki tanesiyle komşudur. O halde  $der(a_{rs}) = 0$  veya  $der(a_{rs}) \geq 2$  olur.

**Durum 3.** Farzedelim ki  $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq s \leq l$  için  $|A_r| \geq 2$  ve  $|B_s| \geq 2$  olsun.

$A_r = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ,  $B_s = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  alalım.  $a = (u_p, v_q) \in A_r \times B_s$  köşelerini ve  $1 \leq i \leq |V(G)|$ ,  $1 \leq j \leq |V(H)|$  için  $b = (u_i, v_j) \in V(G) \times V(H)$  köşelerini alalım.

O halde  $der(u_p) = der(u_i)$  veya  $der(u_p) \neq der(u_i)$ ;  $der(v_q) = der(v_j)$  veya  $der(v_q) \neq der(v_j)$  olacaktır.

$a = (u_p, v_q)$  köşeleriyle  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri Tanım 5.1.1. e göre

*i*)  $u_p = u_i \Rightarrow v_q, v_j \in B_s$  iken  $der(v_q) = der(v_j)$  veya  $der(v_q) \neq der(v_j)$

*ii*)  $v_q = v_j \Rightarrow u_p, v_q \in A_r$  iken  $der(u_p) = der(u_i)$  veya  $der(u_p) \neq der(u_i)$

*iii*)  $u_p \neq u_i, v_q \neq v_j \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} u_p, v_q \in A_r \text{ iken } der(u_p) = der(u_i) \text{ veya } der(u_p) \neq der(u_i) \\ \text{veya} \\ v_q, v_j \in B_s \text{ iken } der(v_q) = der(v_j) \text{ veya } der(v_q) \neq der(v_j) \end{array} \right]$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u_p, v_q)$  köşeleri  $G \diamond H$  çarpım grafında ya hiçbir köşe ile komşu değildir ya da  $b = (u_i, v_j)$  köşelerinin en az iki tanesiyle komşudur. O halde  $der(a_{rs}) = 0$  veya  $der(a_{rs}) \geq 2$  olur.

Buradan görüldüğü üzere  $G \diamond H$  çarpım grafında pendant köşe bulunmaz.

**Teorem 5.1.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere  $G \diamond H$  çarpım grafının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart  $|A_i| \geq 2$  veya  $|B_j| \geq 2$  olmalıdır.

**İspat.** Farzedelim ki  $|A_r|=1$  ve  $|B_s|=1$  olsun.  $(1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq l)$

$|A_r|=1 \Rightarrow A_r = \{u\}$  ve  $|B_s|=1 \Rightarrow B_s = \{v\}$  alalım. O zaman  $A_r \times B_s \subset V(G) \times V(H)$  kümesi sadece tek bir  $a = (u, v)$  köşesinden oluşur. Ayrıca  $1 \leq i \leq |V(G)|$ ,  $1 \leq j \leq |V(H)|$  için  $a_{ij} = (g_i, h_j)$  köşesini alalım.  $der(u) \neq der(u_i)$ ,  $der(v) \neq der(v_j)$  olduğu açıktır.

$a = (u, v)$  köşesiyle  $a_{ij} = (g_i, h_j)$  köşeleri Tanım 5.1.1. e göre

$$i) u = u_i \Rightarrow der(v) \neq der(v_j)$$

$$ii) v = v_j \Rightarrow der(u) \neq der(u_i)$$

$$iii) u \neq u_i, v \neq v_j \Rightarrow [der(u) \neq der(u_i) \text{ veya } der(v) \neq der(v_j)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $a = (u, v)$  köşesi  $G \diamond H$  çarpım grafında hiçbir köşe ile komşu değildir. Böylece  $G \diamond H$  çarpım grafi bağlantısız olur.

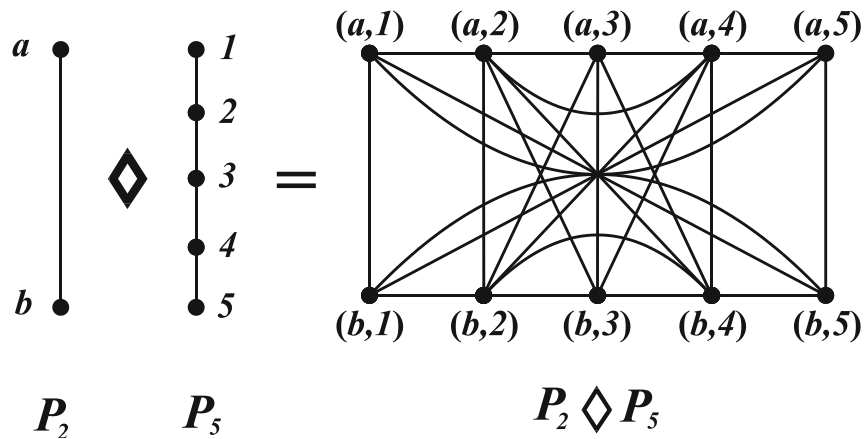
O halde  $|A_i| \geq 2$  veya  $|B_j| \geq 2$  ise  $G \diamond H$  çarpım grafi bağlantılıdır.

Tersine farzedelim ki  $G \diamond H$  çarpım grafi bağlantısız olsun.

Önerme 2. den  $a = (u, v) \in V(G \diamond H)$  için  $der(a) = 0$  dir.  $a = (u, v) \in A_r \times B_s$  ve

$b = (g_i, h_j) \in A_i \times B_j$  olmak üzere  $a = (u, v)$  köşesi  $b = (g_i, h_j)$  köşeleriyle komşu olmadığından  $der(u) \neq der(u_i)$  ve  $der(v) \neq der(v_j)$  olur. Böylece  $A_r = \{u\} \Rightarrow |A_r|=1$  ve  $B_s = \{v\} \Rightarrow |B_s|=1$  bulunur.

O halde  $G \diamond H$  çarpım grafi bağlantılı ise  $|A_i| \geq 2$  veya  $|B_j| \geq 2$  dir.



**Şekil 5.1.2.**  $P_2$  yol grafi ile  $P_5$  yol grafının derece çarpımı bağlantılıdır.

**Önerme 5.1.2.**  $G$  ve  $H$  iki graf ve  $|V(G)|=n$ ,  $|V(H)|=m$  olmak üzere  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki  $A_r \times B_s$  kümesinden oluşturulan indirgenmiş alt graflar tam graftır.

**İspat.**  $A_r = \{u_1, u_2, \dots, u_g\}$ ,  $B_s = \{v_1, v_2, \dots, v_h\}$  ( $1 \leq r \leq k$ ,  $1 \leq s \leq l$ ) olsun.

$der(u_1) = der(u_2) = \dots = der(u_n)$  ve  $der(v_1) = der(v_2) = \dots = der(v_m)$  olduğu açıktır.

$1 \leq p \leq i \leq g$ ,  $1 \leq q \leq j \leq h$  için  $a = (u_p, v_q)$  köşeleriyle  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri

Tanım 5.1.1. e göre

$$i) u_p = u_i \Rightarrow der(v_q) = der(v_j)$$

$$ii) v_q = v_j \Rightarrow der(u_p) = der(u_i)$$

$$iii) u_p \neq u_i, v_q \neq v_j \Rightarrow [der(u_p) = der(u_i) \text{ veya } der(v_q) = der(v_j)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden bütün  $a = (u_p, v_q)$  köşeleri tüm  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri ile komşudur. Yani  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki  $A_r \times B_s$  kümesindeki her bir köşe birbiriyle komşudur.

O halde  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki  $A_r \times B_s$  kümesinden oluşturulacak indirgenmiş alt graflar “ $gh$ ” köşeye sahip tam graftır.

**Teorem 5.1.2.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere  $G \diamond H$  graf çarpımının tam graf olabilmesi için gerek ve yeter şart  $G$  ve  $H$  graflarının regüler graf olmasıdır.

**İspat.** Farzedelim ki  $G$  ve  $H$  grafları regüler iki graf olsun.

$$V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, |V(G)|=n, der(u_1) = der(u_2) = \dots = der(u_n),$$

$$V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, |V(H)|=m, der(v_1) = der(v_2) = \dots = der(v_m) \text{ olmak üzere}$$

$1 \leq p \leq i \leq n$ ,  $1 \leq q \leq j \leq m$  için  $a = (u_p, v_q)$  ve  $b = (u_i, v_j)$  köşeleri

Tanım 5.1.1. e göre

$$i) u_p = u_i \Rightarrow der(v_q) = der(v_j)$$

$$ii) v_q = v_j \Rightarrow der(u_p) = der(u_i)$$

$$iii) u_p \neq u_i, v_q \neq v_j \Rightarrow [der(u_p) = der(u_i) \text{ veya } der(v_q) = der(v_j)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden bütün  $a = (u_p, v_q)$  köşeleriyle tüm  $b = (u_i, v_j)$

köşeleri komşudur. Yani  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki tüm köşeler birbirleriyle komşudur.

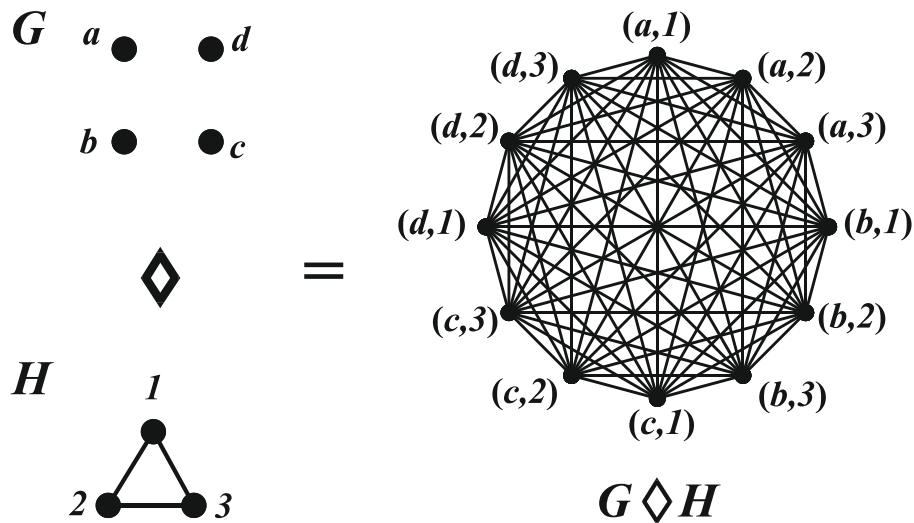
O zaman  $G$  ve  $H$  grafları regüler graf ise  $G \diamond H$  çarpım grafi tam graftır.

Tersine  $G \diamond H$  çarpım grafi  $|V(G)|=n$ ,  $|V(H)|=m$  olacak şekilde  $nm$  köşeye sahip tam graf ve  $a=(u_p, v_q)$ ,  $b=(u_i, v_j) \in V(G \diamond H)$  olsun.  $1 \leq p \leq i \leq n$ ,  $1 \leq q \leq j \leq m$  için bütün  $a=(u_p, v_q)$  köşeleri tüm  $b=(u_i, v_j)$  köşeleriyle komşu olduğundan Tanım 5.1.1. e göre  $der(u_1)=der(u_2)\dots=der(u_n)$ ,  $der(v_1)=der(v_2)=\dots=der(v_m)$  olacaktır.

O zaman  $G \diamond H$  çarpım grafi tam graf ise  $G$  ve  $H$  grafları regüler graflardır.

O halde “ $G$  ve  $H$  grafları regüler graftır  $\Leftrightarrow G \diamond H$  çarpım grafi tam graftır.”

Şekil 5.1.3. de 4-regüler ve 3-regüler iki grafın derece çarpımı  $K_{12}$  tam grafına izomorf olduğu gösterilmiştir.



Şekil 5.1.3. 4-regüler  $G$  ile 3-regüler  $H$  grafının derece çarpımı.

**Önerme 5.1.3.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki  $A_i \times B_j$  kümeleri tarafından oluşturulan indirgenmiş tam alt grafdaki köşelerin dereceleri birbirine eşittir ve  $a=(u, v) \in A_i \times B_j$  için  $der(a) \geq |A_i \times B_j|$  dir.

**İspat.**  $|V(G)|=n$ ,  $|V(H)|=m$  olsun.  $V(G \diamond H)$  kümesini aşağıdaki gibi ayrı ayrı indirgenmiş tam alt grafların köşe kümelerinin birleşimi şeklinde düşünebiliriz.

$$V(G \diamond H) = \left\{ \begin{array}{l} A_1 \times B_1 \cup A_1 \times B_2 \cup \dots \cup A_1 \times B_j \cup \dots \cup A_1 \times B_l \\ A_2 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \cup \dots \cup A_2 \times B_j \cup \dots \cup A_2 \times B_l \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ A_i \times B_1 \cup A_i \times B_2 \cup \dots \cup A_i \times B_j \cup \dots \cup A_i \times B_l \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ A_k \times B_1 \cup A_k \times B_2 \cup \dots \cup A_k \times B_j \cup \dots \cup A_k \times B_l \end{array} \right\}$$

$a = (u, v) \in A_i \times B_j$  köşesi Önerme 5.1.2. den  $A_i \times B_j$  kümesindeki bütün köşelerle komşudur.

Ayrıca  $a = (u, v) \in A_i \times B_j$  köşesi  $i$  inci satırdaki

$A_i \times B_1$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_1|$  tane ,  $A_i \times B_2$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_2|$  tane, ...,  $A_i \times B_{j-1}$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_{j-1}|$  tane ,  $A_i \times B_{j+1}$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_{j+1}|$  tane, ...,  $A_i \times B_{l-1}$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_{l-1}|$  tane ,  $A_i \times B_l$  kümesinden  $(|A_i| - 1)|B_l|$  tane köşeyle komşudur.

Ayrıca  $a = (u, v) \in A_i \times B_j$  köşesi  $j$  inci sütundaki

$A_1 \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_1|$  tane ,  $A_2 \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_2|$  tane, ...,  $A_{i-1} \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_{i-1}|$  tane ,  $A_{i+1} \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_{i+1}|$  tane, ...,  $A_{k-1} \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_{k-1}|$  tane ,  $A_k \times B_j$  kümesinden  $(|B_j| - 1)|A_k|$  tane köşeyle komşudur.

O halde  $G \diamond H$  çarpım grafi içindeki indirgenmiş tam alt graflardaki bütün köşelerinin dereceleri birbirine eşittir ve  $a = (u, v) \in A_i \times B_j$  için  $der(a) \geq |A_i \times B_j|$  olduğu açıkça görülür.

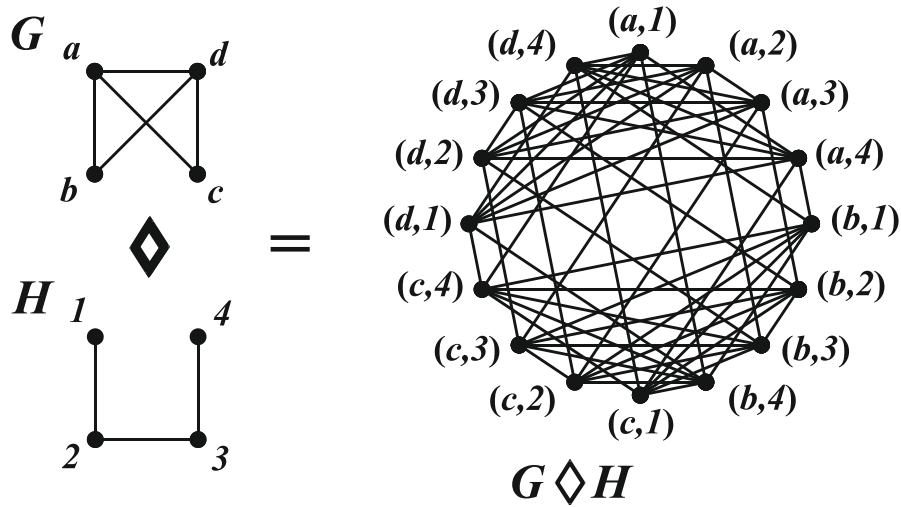
**Sonuç 5.1.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf ve  $|V(G)| = n$ ,  $|V(H)| = m$  olsun.

$G \diamond H$  graf çarpımı içindeki indirgenmiş tam alt graflardaki herhangi bir  $a = (u, v) \in A_i \times B_j$  köşesinin derecesi

$$\begin{aligned}
\text{der}(a) &= \left( \begin{aligned} &(|A_i \times B_j| - 1) + \\ &(|A_i| - 1)|B_1| + \dots + (|A_i| - 1)|B_{j-1}| + (|A_i| - 1)|B_{j+1}| + \dots + (|A_i| - 1)|B_m| + \\ &(|B_j| - 1)|A_1| + \dots + (|B_j| - 1)|A_{i-1}| + (|B_j| - 1)|A_{i+1}| + \dots + (|B_j| - 1)|A_n| \end{aligned} \right) \\
&= (|A_i \times B_j| - 1) + (|A_i| - 1)(m - |B_j|) + (|B_j| - 1)(n - |A_i|) \\
&= |A_i|(m+1) + |B_j|(n+1) - (|A_i||B_j| + n + m + 1)
\end{aligned}$$

O halde  $\text{der}(a) = |A_i|(m+1) + |B_j|(n+1) - (|A_i \times B_j| + |V(G)| + |V(H)| + 1)$  olarak bulunur.

**Örnek 5.1.1.** Şekil 5.1.4. deki  $G$  grafının köşe kümesini  $A_1 = \{b, c\}$ ,  $A_2 = \{a, d\}$ ;  $H$  grafının köşe kümesini  $B_1 = \{1, 4\}$ ,  $B_2 = \{2, 3\}$  kümeleriyle parçalarsak  $(a, 1) \in A_1 \times B_1$  köşesinin derecesi  $\text{der}((a, 1)) = 2(4+1) + 2(4+1) - (4+4+4+1) = 7$  olarak bulunur.



Şekil 5.1.4.  $G$  ile  $H$  grafının derece çarpımı.

**Önerme 5.1.4.**  $G$  ve  $H$  iki graf  $x, y \in V(G \diamond H)$  olmak üzere  $G \diamond H$  graf çarpımında  $d(x, y) = 1$  veya  $d(x, y) = 2$  dir.

**İspat.**  $G$  ve  $H$  iki graf olsun.  $x = (u_p, v_q) \in A_p \times B_q$   $y = (u_r, v_s) \in A_r \times B_s$  ve  $x, y \in V(G \diamond H)$  olmak üzere

Farzedelim ki  $x$  ile  $y$  köşesi aynı indirgenmiş tam alt graf içinde olsun.

O halde  $x$  ile  $y$  köşesi komşu olacağından  $d(x, y) = 1$  dir.

Farzedelim ki  $x$  ile  $y$  köşesi farklı indirgenmiş tam alt grafların içinde ve birbirine komşu olsun. O halde  $x$  ile  $y$  köşesi komşu olduklarından  $d(x, y) = 1$  dir.

Farzedelim ki  $x$  ile  $y$  köşesi farklı indirgenmiş tam alt grafların içinde ve birbirine komşu olmasın.  $z = (u_p, v_j) \in A_p \times B_j$  veya  $z = (u_i, v_q) \in A_i \times B_s$  olacak şekilde en az bir köşe bulabiliriz ki  $xz \in E(G \diamond H)$  ve  $yz \in E(G \diamond H)$  olacağından  $d(x, y) = 2$  dir.

## 6. DERECE ÇARPIM GRAFI ÜZERİNDE GRAF PARAMETRELERİ

Bu bölümde derece çarpım grafi üzerinde graf parametreleri incelenmiş ve eşitlikler bulunmuştur. Ayrıca derece çarpım grafinin mükemmel graf olduğu ispatlanmıştır.

**Teorem 6.1.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\alpha(G \diamond H) = t(G)t(H) \quad (6.1)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** İlk önce  $\alpha(G \diamond H) \geq t(G)t(H)$  eşitsizliğini gösterelim.

$$K = \{u_1, \dots, u_k : u_1 \in A_1, \dots, u_k \in A_k, \text{der}(u_1) \neq \dots \neq \text{der}(u_k)\}$$

$$L = \{v_1, \dots, v_l : v_1 \in B_1, \dots, v_l \in B_l, \text{der}(v_1) \dots \neq \text{der}(v_l)\}$$

kümelerini alalım. Buradan  $t(G) = |K| = k$  ve  $t(H) = |L| = l$  olduğu açıktır.

$1 \leq p \leq r \leq k$ ,  $1 \leq q \leq s \leq l$  için  $a = (u_p, v_q) \in K \times L$ ,  $b = (u_r, v_s) \in K \times L$  köşeleri Tanım

5.1.1. e göre

$$i) u_p = u_r \Rightarrow \text{der}(v_q) \neq \text{der}(v_s) \text{ veya}$$

$$ii) v_q = v_s \Rightarrow \text{der}(u_p) \neq \text{der}(u_r) \text{ veya}$$

$$iii) u_p \neq u_r, v_q \neq v_s \Rightarrow [\text{der}(u_p) \neq \text{der}(u_r) \text{ veya } \text{der}(v_q) \neq \text{der}(v_s)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $K \times L$  kümesindeki köşeler  $G \diamond H$  çarpım grafinde birbirleriyle komşu değildir. Yani  $K \times L$  kümesi  $G \diamond H$  çarpım grafinin maksimum bağımsızlık kümesidir. Buradan da  $\alpha(G \diamond H) \geq t(G)t(H)$  olduğu görülür.

Tersine  $\alpha(G \diamond H) \leq t(G)t(H)$  olduğunu gösterelim.

$G \diamond H$  çarpım grafinin maksimum bağımsızlık kümesini  $k \leq |V(G)|$ ,  $l \leq |V(H)|$  olacak

şekilde  $S = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_l), \dots, (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_l), \dots, (u_k, v_1)\}$  olarak

alalım.  $1 \leq p \leq r \leq k$  için  $\text{der}(u_p) \neq \text{der}(u_r)$  olduğundan  $k \leq t(G)$  ve  $1 \leq q \leq s \leq l$  için

$\text{der}(v_q) \neq \text{der}(v_s)$  olduğundan  $l \leq t(H)$  olacaktır. Böylece  $kl \leq t(G)t(H)$  bulunur.

Buradan da  $\alpha(G \diamond H) \leq t(G)t(H)$  olduğu görülür.

**Teorem 6.1.2.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$w(G \diamond H) = e(G)e(H) \quad (6.2)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** İlk önce  $w(G \diamond H) \geq e(G)e(H)$  eşitsizliğini gösterelim.

Maksimum elemanlara sahip  $A_i = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  ve  $B_j = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  kümelerini alalım. Buradan  $e(G) = |A_i| = n$  ve  $e(H) = |B_j| = m$  olduğu açıktır.

$1 \leq p \leq r \leq n$ ,  $1 \leq q \leq s \leq m$  için  $a = (u_p, v_q) \in A_i \times B_j$ ,  $b = (u_r, v_s) \in A_i \times B_j$  köşeleri

Tanım 5.1.1. e göre

$$\text{i) } u_p = u_r \Rightarrow \text{der}(v_q) = \text{der}(v_s) \text{ veya}$$

$$\text{ii) } v_q = v_s \Rightarrow \text{der}(u_p) = \text{der}(u_r) \text{ veya}$$

$$\text{iii) } u_p \neq u_r, v_q \neq v_s \Rightarrow [\text{der}(u_p) = \text{der}(u_r) \text{ veya } \text{der}(v_q) = \text{der}(v_s)]$$

durumlarından birini gerçekleştirdiğinden  $A_i \times B_j$  kümesindeki bütün köşeler  $G \diamond H$  çarpım grafında birbirleriyle komşudur. Yani  $A_i \times B_j$  kümesi  $G \diamond H$  çarpım grafının maksimum klik kümesidir. Buradan da  $w(G \diamond H) \geq e(G)e(H)$  olduğu görülür.

Tersine  $w(G \diamond H) \leq e(G)e(H)$  olduğunu gösterelim.

$G \diamond H$  çarpım grafının maksimum klik kümesini  $n \leq |V(G)|$ ,  $m \leq |V(H)|$  olacak şekilde  $C = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_m), \dots, (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_2, v_m), \dots, (u_n, v_m)\}$  olarak alalım.

$1 \leq p \leq r \leq n$  için  $\text{der}(u_p) = \text{der}(u_r)$  olduğundan  $n \leq e(G)$  ve  $1 \leq q \leq s \leq m$  için  $\text{der}(v_q) = \text{der}(v_s)$  olduğundan  $m \leq e(H)$  olacaktır. Böylece  $mn \leq e(G)e(H)$  bulunur.

Buradan da  $w(G \diamond H) \leq e(G)e(H)$  olduğu görülür.

**Teorem 6.1.3.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\chi(G \diamond H) = e(G)e(H) \quad (6.3)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.**  $K_n$  tam grafi için  $\chi(K_n) = n$  olduğu açıktır.  $G \diamond H$  çarpım grafında “ $kl$ ” tane indirgenmiş tam alt graf ve  $e(G)e(H)$  maksimum elemana sahip  $A_i \times B_j$  kümesinin eleman sayısı olduğundan  $\chi(G \diamond H) \geq e(G)e(H)$  dir.

Tersine  $a \in A_p \times B_q$ ,  $b \in A_r \times B_s$  için  $|A_p \times B_q| \geq |A_r \times B_s|$  ve  $a$  ile  $b$  komşu olsun. O halde  $a$  ile  $b$  farklı renkte olmalıdır. ( $1 \leq p \leq r \leq k$ ,  $1 \leq q \leq s \leq l$ )

Eğer  $|A_p \times B_q| = |A_r \times B_s|$  ise minimum kullanılabilir renk sayısı  $|A_p \times B_q|$  kadardır.

Aksine  $|A_p \times B_q| > |A_r \times B_s|$  ise minimum kullanılabilir renk sayısı  $|A_p \times B_q|$  kadardır.

Buradan da  $\chi(G \diamond H) \leq e(G)e(H)$  olduğu görülür.

**Teorem 6.1.4.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$\theta(G \diamond H) = t(G)t(H) \quad (6.4)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.**  $E_n$  boş grafi için  $\chi(E_n) = 1$  olduğu açıktır.  $G$  ve  $H$  basit iki graf, olmak üzere  $\overline{G \diamond H}$  çarpım grafının tamamlayıcısında “ $kl$ ” tane indirgenmiş boş alt graf oluşur. O halde  $t(G) = k$ ,  $t(H) = l$  ise  $\chi(\overline{G \diamond H}) \geq t(G)t(H)$  dir.

Buradan da  $\theta(G \diamond H) \geq t(G)t(H)$  dir.

Tersine  $x, y \in V(G \diamond H)$  için  $a \in A_p \times B_q$ ,  $b \in A_r \times B_s$  olsun ve  $A_p \times B_q$ ,  $A_r \times B_s$  kümelerinde birbirlerine komşu olmayan köşeler bulunabileceğinden farzedelim ki  $a$  ile  $b$  köşeleri komşu olmasın. ( $1 \leq p \leq r \leq k$ ,  $1 \leq q \leq s \leq l$ )

$ab \notin E(G \diamond H) \Rightarrow ab \in E(\overline{G \diamond H})$  olur.  $a$  ile  $b$  köşeleri  $\overline{G \diamond H}$  çarpım grafının tamamlayıcısında komşu olduklarından farklı renkte olmalıdırlar ve her bir  $A_p \times B_q$  kümesi için farklı bir renk kullanmamız gerekir. O halde  $\chi(\overline{G \diamond H}) \leq t(G)t(H)$  olur.

Buradan da  $\theta(G \diamond H) \leq t(G)t(H)$  dir.

**Önerme 6.1.1.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere

$$rad(G \diamond H) = dia(G \diamond H) = 2 \quad (6.5)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Önerme 5. den  $x, y \in V(G \diamond H)$  için  $G \diamond H$  graf çarpımında  $d(x, y) = 1$  veya  $d(x, y) = 2$  olduğundan  $rad(G \diamond H) = dia(G \diamond H) = 2$  olduğu kolaylıkla görülür.

**Teorem 6.1.5.**  $G$  ve  $H$  iki graf,  $|V(G)| = n$ ,  $|V(H)| = m$  olmak üzere

$$W(G \diamond H) = mn(mn - 1) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \binom{|A_i \times B_j|}{2} - m(k-1)(n-l) \quad (6.6)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Önerme 5 den  $x, y \in V(G \diamond H)$  için  $G \diamond H$  çarpım grafında  $x$  ile  $y$  köşesi komşu olduklarında  $d(x, y) = 1$ , komşu olmadıklarında  $d(x, y) = 2$  dir.

O halde  $G \diamond H$  çarpım grafının wiener indeksini

$$W(G \diamond H) = 2 \left[ \binom{|V(G \diamond H)|}{2} - |E(G \diamond H)| \right] + |E(G \diamond H)| = 2 \binom{|V(G \diamond H)|}{2} - |E(G \diamond H)| \text{ şeklinde}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |E(G \diamond H)| &= \binom{|A_1 \times B_1|}{2} + \dots + \binom{|A_1 \times B_l|}{2} + \dots + \binom{|A_2 \times B_1|}{2} + \dots + \binom{|A_2 \times B_l|}{2} + \dots + \binom{|A_k \times B_l|}{2} \\ &+ (|A_1| - 1)(m - B_1) + (|A_1| - 1)(m - B_2) + \dots + (|A_1| - 1)(m - B_l) \\ &+ (|A_2| - 1)(m - B_1) + (|A_2| - 1)(m - B_2) + \dots + (|A_2| - 1)(m - B_l) \\ &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ &+ (|A_k| - 1)(m - B_1) + (|A_k| - 1)(m - B_2) + \dots + (|A_k| - 1)(m - B_l) \end{aligned}$$

Buradan da  $|E(G \diamond H)| = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \binom{|A_i \times B_j|}{2} + m(k-1)(n-l)$  olarak bulunur.

$$|V(G)| = n \text{ ve } |V(H)| = m \text{ olduğundan } \binom{|V(G \diamond H)|}{2} = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2} \text{ dir.}$$

O halde “ $W(G\Diamond H) = mn(mn-1) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \binom{|A_i \times B_j|}{2} - m(k-1)(n-l)$ ” olur.

**Sonuç 6.1.1.**  $G$  ve  $H$  regüler iki graf ve  $|V(G)| = n$  ve  $|V(H)| = m$  olsun.

$$W(G\Diamond H) = \binom{mn}{2} \quad (6.6)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.**  $G$  regüler olduğundan  $V(G) = A$ ,  $|A| = n$  ve  $H$  regüler olduğundan  $V(H) = B$ ,  $|B| = m$  olacaktır. O halde

$$\begin{aligned} W(G\Diamond H) &= mn(mn-1) - \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \binom{|A \times B|}{2} - m(1-1)(1-1) \\ &= mn(mn-1) - \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2} \\ &= \binom{mn}{2} \end{aligned}$$

**Teorem 6.1.6.**  $G$  ve  $H$  iki graf,  $|V(G)| = n$ ,  $|V(H)| = m$  olsun.  $a_{ij} = (u_i, v_j) \in A_i \times B_j$  köşeleri için  $der(a_{ij}) = x_{ij}$  olmak üzere

$$R(G\Diamond H) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \binom{|A_i \times B_j|}{2} \frac{1}{x_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{|A_i \times B_j|}{\sqrt{x_{ij}}} \left( \sum_{\substack{p=1 \\ i \neq p}}^k \frac{|A_p \times B_j|}{\sqrt{x_{pj}}} + \sum_{\substack{q=1 \\ j \neq q}}^l \frac{|A_i \times B_q|}{\sqrt{x_{iq}}} \right) \quad (6.7)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Eğer  $u, v \in V(G\Diamond H)$  için  $u$  ile  $v$  köşeleri aynı indirgenmiş tam alt graf içinde ise

$$R^1(G\Diamond H) = \sum_{u, v \in V(G\Diamond H)} \frac{1}{\sqrt{der(u)der(v)}} = \sum_{u, v \in V(G\Diamond H)} \frac{1}{der(u)} \text{ olur.}$$



**Sonuç 6.1.2.**  $G$  ve  $H$  grafları regüler iki graf ve  $|V(G)| = n$  ve  $|V(H)| = m$  olsun.

$a \in V(G \diamond H)$  için

$$R(G \diamond H) = \binom{mn}{2} \frac{1}{\text{der}(a)} \quad (6.8)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.**  $G$  regüler olduğundan  $V(G) = A$ ,  $|A| = n$  ve  $H$  regüler olduğundan  $V(H) = B$ ,  $|B| = m$  olacaktır. O halde

$$\begin{aligned} R(G \diamond H) &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \binom{|A \times B|}{2} \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \frac{|A \times B|}{\sqrt{a}} \left( \sum_{\substack{p=1 \\ i \neq p}}^1 \frac{|A_p \times B|}{\sqrt{a}} + \sum_{\substack{q=1 \\ j \neq q}}^1 \frac{|A \times B_q|}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^1 \binom{|A \times B|}{2} \frac{1}{\text{der}(a)} = \binom{mn}{2} \frac{1}{\text{der}(a)} \end{aligned}$$

**Teorem 6.1.7.**  $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere  $G \diamond H$  graf çarpımı mükemmel graftır.

**İspat.**  $G$  ve  $H$  iki graf,  $G \diamond H$  çarpım grafindan  $F$  indirgenmiş alt graflarını alalım.

$F$  indirgenmiş alt grafları  $A_i \times B_j$  kümesindeki köşeleri tarafından üretilen indirgenmiş tam alt graf olsun. O zaman  $F$  tam graf olduğundan  $\chi(F) = w(F)$  ve  $\theta(F) = \alpha(F)$  olduğu açıktır.

Aksine  $F$  indirgenmiş alt grafları  $A_i \times B_j$  kümesindeki köşeleri tarafından üretilen indirgenmiş tam alt graf olmasın. O zaman  $G \diamond H$  çarpım grafi tanımından  $\chi(F) = w(F)$  ve  $\theta(F) = \alpha(F)$  olduğu açıktır.

O halde “ $G$  ve  $H$  iki graf olmak üzere  $G \diamond H$  çarpım grafi mükemmel graftır.”

## 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda tanımladığımız yeni graf çarpımının graf parametreleri arasında eşitlikler bulunmuş ve mükemmel graf olduğu gösterilmiştir.

Tezimiz orijinal bir çalışma olduğundan daha ileriye götürülebilir. Örneğin komşuluk matrislerinden özdeğer üzerine bağıntılar bulunup, sınırlar geliştirilebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Aldous J.M., Wilson R. J., 2000, Graphs and Applications, *The Open University Printed in Great Britain*.
- [2] Bondy J. A., Murty U. S. R., 1981, Graph theory with applications, *Elsevier*, North Holland.
- [3] Borowiecki M., 1972, On chromatic number of products of two graphs, *Colloq. Math.*, 25, 49-52.
- [4] Cizek N., Klavzar S., 1994, On the chromatic number of the lexicographic product and the Cartesian sum of graphs, *Discrete Math.*, 134, 17-24.
- [5] Došlic T., Ghorbani M., Hosseinzadeh M. A., 2011, The Relationships Between Wiener Index, Stability Number and Clique Number of Composite Graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 36(1), 165-172.
- [6] Duffus D., Sands B., Woodrow R.E., 1985, On the chromatic number of the product of graphs, *J. Graph Theory*, 9, 487-495.
- [7] El-Kholy E. M., Lashin S. R., Daoud S. N., 2012, New Operations on Graphs and Graph Foldings, *International Mathematical Forum*, 7(46), 2253 – 2268.
- [8] Geller D., Stahl S., The chromatic number and other parameters of the lexicographic product, *J. Combin. Theory Ser. B*, 19, 87-95.
- [9] Gross J.L., Yellen J., 2004, Handbook of Graph Theory, *CRC Press*.
- [10] Hammack R., Imrich W., Klavzar S., 2011, Handbook of Graph Products Second Edition, *CRC Press*, 307-351. Kitap
- [11] Harary F., Wilcox G. W., 1967, Boolean Operations on Graphs, *Math. Scand.*, 41-51.
- [12] Imrich W., Klavzar S., 1992, Retracts of strong products of graphs, *Discrete Math.*, 109, 147-154.
- [13] Imrich W., Klavzar S., 2000, Product Graphs, Structure and Recognition, *Jon Wiley & Sons, Inc.*, New York, 260-341.
- [14] Kaschek R., Klavzar S., 1994, On the chromatic number of the lexicographic product of graphs, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 25, 1267-1274.
- [15] Klavzar S., 1992, Coloring graph products - A survey, *Elsevier Discrete Mathematics*, 155, 135-145.
- [16] Linial N., Vazirani U., 1989, Graph products and chromatic numbers, *Proc. 30th Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, 124-128.

- [17] Miller D.J., 1968, The categorical product of graphs, *Canad. J. Math.*, 20, 1511-1521.
- [18] Nešetřil J., Rödl V., 1983, Products of graphs and their applications, *Lecture Notes in Math.*, 1018, 151-160.
- [19] Nowakowski R. J., Rall D. F., 1996, Associative Graph Products and Their Independence Domination and Coloring Numbers, *Discuss. Math.*, 16, 53-79.
- [20] Pattabiraman K., Paulraja P., 2012, On some topological indices of the tensor products of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 160(3), 267–279
- [21] Sabidussi G., 1960, Graph Multiplication, *Math. Z.*, 72, 446-457.
- [22] Sabidussi G., 1961, The Lexicographic Product of Graphs, *Duke Math. J.*, 28, 573-578.
- [23] Slutzki G., Jha P. K., 1994, Independence Numbers of Product Graphs, *Applied Mathematics Letters*, 7(4), 91-94.
- [24] Sonnemann E., Krafft O., 1974, Independence numbers of product graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, 17, 133-142.
- [25] Soukup L., 1988, On chromatic number of product of graphs, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 29, 1-12.
- [26] Vesztegombi K., 1978/79, Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs, *Acta Cybernet.*, 207-212.
- [27] West D. B., 1996, Introduction to Graph Theory, *Prentice Hall*, Upper Saddle River.
- [28] Yang K.W., 1968, Chromatic number of cartesian sum of two graphs, *Amer. Math. Soc.*, 19, 617-618.
- [29] Yero I. G., 2011, On the Randić Index of Corona Product Graphs, *ISRN Discrete Mathematics*, 2011(26218), 1-7.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Nurettin Talha DİNÇ  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Konya 09/09/1986  
**Telefon** : 0 555 707 48 29  
**Faks** :  
**e-mail** : nurettin.talha@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Kulu Anadolu Lisesi, Kulu, Konya	2004
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	2011
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, Konya	
Doktora	:	

### YABANCI DİLLER

İngilizce