



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

AĞIRLIKLIL ORLİCZ UZAYLARININ  
SOYUT HARMONİK ANALİZİ

ALEN OSANÇLİOL  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman  
Prof.Dr. Serap ÖZTOP

Haziran, 2013

İSTANBUL

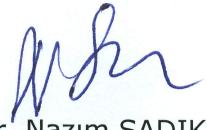
Bu çalışma 11/10/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Prof. Dr. Serap ÖZTOP

Danışman



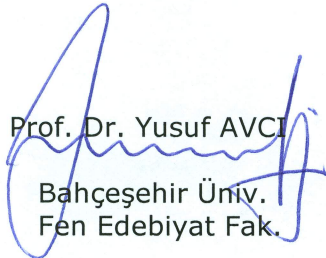
Prof. Dr. Nazım SADIK

İstanbul Üniv.  
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Aydın AYTUNA

Sabancı Üniv. Müh. Ve  
Doğa Bil. Fak



Prof. Dr. Yusuf AVCI  
Bahçeşehir Üniv.  
Fen Edebiyat Fak.



Doç. Dr. Erhan ÇALIŞKAN  
Yıldız Teknik Üniv.  
Fen Edebiyat Fak.

Bu alışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 14671 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

## ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ,yardım ve yönlendirmelerinden dolayı danışmanım Prof. Dr. Serap ÖZTOP'a sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Kendisinin, tez çalışmalarım boyunca hep daha iyisinin olması için verdiği cesaret ve bu tezin hazırlanması sırasında gösterdiği sabır sınırsızdır.

Ayrıca, tez çalışmalarım sırasında bana destek olan oda arkadaşım Araş. Gör. Beyaz Başak KOCA'ya da teşekkür ederim.

**Haziran, 2013**

**Alen OSANÇLIOL**

# İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ . . . . .	i
İÇİNDEKİLER . . . . .	ii
SEMBOL LİSTESİ . . . . .	iii
ÖZET . . . . .	iv
SUMMARY . . . . .	v
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. GENEL KISIMLAR . . . . .	5
3. MALZEME VE YÖNTEM . . . . .	13
4. BULGULAR . . . . .	14
4.1. $L_w^\Phi(G)$ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ . . . . .	14
4.1.1 $\Phi$ Fonsiyonları ve Aralarındaki İlişkiler . . . . .	14
4.1.2 $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Uzayı . . . . .	23
4.1.3 $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Kapsamalar . . . . .	27
4.1.4 $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Dual Uzayı . . . . .	38
4.1.5 $C_c(G)$ , $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Yoğundur . . . . .	43
4.1.6 $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Ötelemeler . . . . .	44
4.2. $L_w^\Phi(G)$ UZAYININ BANACH CEBİRİ YAPISI VE ÖZELLİKLERİ	50
4.2.1 $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Noktasal Çarpım İşlemine Göre Banach Cebiri Yapısı . . . . .	50
4.2.2 Girişim İle İlgili Eşitsizlikler ve Kapsamalar . . . . .	57
4.2.3 $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Girişim İşlemine Göre Banach Cebiri Yapısı	62
4.2.4 $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinde Birim ve Yaklaşık Birim	65
4.2.5 $\Delta(L_w^\Phi(G))$ Maksimal İdealler Uzayının $\widehat{G}_\Psi(w)$ Genelleştirilmiş Karakterler Uzayı Olarak Belirlenmesi . . . . .	73
4.2.6 $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinin Yarıbasitliği . . . . .	80
4.2.7 $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinin İdealleri . . . . .	86
5. TARTIŞMA VE SONUÇ . . . . .	94
KAYNAKLAR . . . . .	95
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	99

## SEMBOL LİSTESİ

$G$	: Yerel kompakt değişmeli grup
$\mu$	: $G$ üzerindeki Haar ölçümü
$\hat{G}$	: $G$ grubunun dual grubu
$C_c(G)$	: $G$ üzerinde tanımlı kompakt desteğe sahip sürekli fonksiyonlar uzayı
$L^p(G)$	: $1 \leq p < +\infty$ olmak üzere $G$ üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli ölçülebilir ve $\int_G  f(x) ^p dx < +\infty$ koşulunu sağlayan $f$ fonksiyonlarının uzayı)
$L^\infty(G)$	: $G$ üzerinde esasen (essentially) sınırlı fonksiyonların uzayı
$w$	: $G$ üzerinde ağırlık fonksiyonu
$L_w^p(G)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı ( $fw \in L^p(G)$ koşulunu sağlayan $f$ fonksiyonlarının uzayı)
$\ f\ _p$	: $L^p(G)$ Lebesgue uzayındaki $f$ fonksiyonunun normu
$\ f\ _{p,w}$	: $L_w^p(G)$ Ağırlıklı Lebesgue uzayındaki $f$ fonksiyonunun normu
$L_x f$	: $f$ fonksiyonunun $x$ kadar ötelenmesi
$f * g$	: $f$ ve $g$ fonksiyonlarının girişimi (convolution)
$\Phi$	: Young fonksiyonu
$\Psi$	: $\Phi$ Young fonksiyonun tamlayan Young fonksiyonu
$L^\Phi(G)$	: Orlicz uzayı (en az bir $\alpha > 0$ için $\int_G \Phi(\alpha f(x) ) d\mu(x) < \infty$ sağlayan ölçülebilir $f$ fonksiyonlarının uzayı )
$L_w^\Phi(G)$	: Ağırlıklı Orlicz uzayı ( $fw \in L^\Phi(G)$ koşulunu sağlayan $f$ fonksiyonlarının uzayı )
$\ f\ _\Phi$	: $L^\Phi(G)$ Orlicz uzayındaki $f$ fonksiyonunun normu
$\ f\ _{\Phi,w}$	: $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz uzayındaki $f$ fonksiyonunun normu
$\widehat{G}_\Psi(w)$	: Genelleştirilmiş karakter uzayı
$X^*$	: $X$ uzayının topolojik dual uzayı
$\Delta(X)$	: $X$ değişmeli Banach cebirinin maksimal idealler uzayı

## ÖZET

### AĞIRLIKLI ORLICZ UZAYLARININ SOYUT HARMONİK ANALİZİ

Ağırlıklı Orlicz uzaylarının soyut harmonik analizinin incelendiği bu tez çalışması temel olarak Giriş, Genel Kısımlar ve Bulgular olarak düzenlenmiştir. İlk iki bölüm hazırlık aşaması niteliğinde olup, çalışmanın esas kısmını üçüncü bölüm oluşturmaktadır.

Birinci bölümde, tez çalışmasının amacı ve içeriği açıklanmıştır. İkinci bölümde ise tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Tez çalışmasının esas kısmını oluşturan üçüncü bölüm ise iki kısma ayrılmaktadır.

Birinci kısımda, ilk olarak Orlicz uzaylarının tanımında önemli rol oynayan  $\Phi$  Young fonksiyonları üzerinde durulmuştur ve literatürdeki farklı isimlerle anılan bu fonksiyonların aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. İkinci olarak  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayı tanıtılarak bu uzayın Banach uzayı olduğu gösterilmiş ve  $\Phi$  Young fonksiyonuna ve  $w$  ağırlık fonksiyonuna göre kapsamlar incelenmiştir. Daha sonra ise  $L_w^\Phi(G)$  uzayının soyut harmonik analizine ilişkin kompakt destekli fonksiyonların yoğunluğu, ötelemeler altında değişmezliği ve ötelemelerin sürekliliği gibi temel özellikleri incelenmiştir.

Tez çalışmasının esas amacını oluşturan ikinci kısımda  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının noktasal çarpım ve girişim (convolution) işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmış ve bu Banach cebirlerinin özellikleri incelenmiştir. Öte yandan, bu Banach cebiri ağırlıklı Orlicz cebiri olarak adlandırılmıştır. Özellikle girişim işlemine göre Banach cebiri yapısı bizim için ayrıca önemlidir. Çünkü, bu tez çalışması Banach cebiri yapısından gelen yarıbasitlik, maksimal idealler uzayı, sınırlı yaklaşık birimin varlığı ve kapalı ideallerinin belirlenmesi gibi temel özelliklerinin incelenmesi üzerinde yoğunlaşmıştır. Buna bağlı olarak Banach cebiri yapısı ile yerel kompakt topolojik grup arasındaki ilişki de belirlenmiştir.

## SUMMARY

### ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS OF WEIGHTED ORLICZ SPACES

This thesis is about the abstract harmonic analysis of weighted Orlicz spaces and consists of three part; Introduction, General Sections and Results. The first two parts are related to preliminary process and the third part is the main part of the thesis.

In the first part, it is explained the aim and content of the thesis. In the second part, we recall main definitions and theorems which are used through the thesis.

The third part is the main part and it splits into two sections.

In the first section, firstly we give the different definitions of the functions  $\Phi$  which are used to define the Orlicz space in the literature and investigate the relationships between these functions. Secondly, given a locally compact Abelian group  $G$ , a weight function  $w$  and a Young function  $\Phi$ , then the weighted Orlicz space, denoted by  $L_w^\Phi(G)$ , is introduced and it is shown that  $L_w^\Phi(G)$  is a Banach space and it is investigated the inclusions with respect to weight function  $w$  and Young function  $\Phi$ . Also, we studied abstract harmonic analysis properties of the space  $L_w^\Phi(G)$  such as, density of continuous compactly supported functions space, translation invariance and continuity of the translations.

The second section is the main goal of this thesis and in this section it is studied to find a necessary and sufficient conditions for the Banach algebra structure of the weighted Orlicz space and it is investigated properties of these Banach algebras. On the other hand, these Banach algebras are called weighted Orlicz algebras. Especially, the Banach algebra structure with respect to convolution is important. Because, in this thesis it is concentrated on the properties such as, existence of the identity and bounded approximate identity, characterization of the maximal ideals space, semisimplicity and determining the closed ideals of the weighted Orlicz algebra which comes from the Banach algebra structure of the algebra  $L_w^\Phi(G)$ . In connection with this, we investigate the relationship between the Banach algebra and the locally compact topological group.

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada  $G$  yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere,  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $G$  üzerindeki  $w$  ağırlık fonksiyonu tarafından belirlenen  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzaylarının soyut harmonik analizi üzerine çalışılmıştır.

Genel olarak (ağırlıklı) Orlicz uzayları klasik (ağırlıklı) Lebesgue uzaylarının genelleştirmesidir. Lebesgue uzaylarının soyut harmonik analizine ilişkin özellikleri incelenmiş fakat Orlicz uzaylarının harmonik analizi ile ilgili çalışmalar kapsamlı olarak ele alınmamıştır. Bu tez çalışmasının amacı bu alandaki boşluğu doldurmaktır.

$G$  yerel kompakt grup ve  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L^p(G)$  Lebesgue uzaylarının girişim (convolution) işlemine göre Banach cebiri yapısı ve buradan gelen özelliklerin incelenmesi harmonik analizin temel konularından biridir. Bu kapsamda  $p = 1$  olmak üzere  $L^1(G)$  uzayının ve ağırlıklı  $L_w^1(G)$  uzayının Banach cebiri yapısı ve bu cebir yapısından gelen ideal teorisi, genelleştirilmiş spektral sentez, çarpanlara ayrılabilme özelliği gibi pek çok ilginç problemler ortaya çıkmaktadır.

Diğer taraftan,  $1 < p < \infty$  ve  $G$  yerel kompakt grup olmak üzere  $L^p(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_G |f(x)|^p dx < \infty\}$  Lebesgue uzayı ve  $w$  ağırlık fonksiyonu için  $L_w^p(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid fw \in L^p(G)\}$  ağırlıklı Lebesgue uzaylarının fonksiyonel analizdeki önemi çok iyi bilinmektedir. Genel olarak Banach cebirlerinde yansımalık ortak bir özellik olmamasına rağmen  $L_w^1(G)$  uzayındaki girişim cebiri teorisini  $1 < p < \infty$  için yansımali oldukları da bilinen  $L^p(G)$  ve  $L_w^p(G)$  Lebesgue uzaylarına genişletmek çok daha ilgi çekicidir. Ne yazık ki,  $p > 1$  ve  $G$  kompakt değil iken  $L^p(G)$  girişim işlemine göre Banach cebiri değildir. Ancak,  $G$  yerel kompakt grup olmak üzere  $L^p(G)$  uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin kompakt olmasıdır, Saeki ([35]).

Öte yandan,  $w$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için yeterli koşullar verilmiş ve  $L_w^p(G)$  Banach cebirinin özellikleri araştırılmıştır. ( Kerman [17], Kuznetsova [21, 22] )

Orlicz uzaylarının, Lebesgue uzaylarının genelleştirmesi olduğu düşünülürse, ağırlıklı

Lebesgue uzaylarının girişim işlemine göre Banach cebiri yapısını ve bu cebir yapısına bağlı olarak elde edilen harmonik analizi ile ilgili özelliklerini ağırlıklı Orlicz uzaylarına genelleştirmek önemlidir. Bu tez çalışmasında da Kerman [17], Kuznetsova [21, 22] çalışmalarından esinlenerek ağırlıklı Orlicz uzaylarının soyut harmonik analizine ilişkin yukarıda bahsedilen özellikleri incelenmiştir.

Orlicz uzayları ilk olarak W.Orlicz tarafından 1932 yılında tanıtılmıştır ([27]). Orlicz uzaylarının yapısı ile ilgili çalışmalar ise ilk olarak 1950 yılında Morse ve Transue, [26], tarafından yapılmış, Luxemburg ise 1955 yılında  $\sigma$ -sonlu ölçüler için çalışmıştır [25]. Daha sonra ise 1961 yılında Krasnosel'skii ve Rutickii, Orlicz uzayları teorisini  $\mathbb{R}^n$  üzerinde, Lebesgue ölçüsü ve N-fonksiyonlar için kurmuş ve Orlicz uzaylarının pek çok özelliğini incelemiştir. Orlicz uzaylarının daha genel teorisi ise Rao ve Ren ([30], [31]) çalışmalarında  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $(X, S, \mu)$  ölçü uzayı üzerinde incelenmiştir.

Böylece, bu son çalışma temel alınarak  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $\mu$ ,  $G$  üzerinde Haar ölçümü ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L^\Phi(G)$  ile gösterilen Orlicz uzayı

$$L^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha|f(x)|)d\mu(x) < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Yine  $\Psi$  fonksiyonu,  $\Phi$  Young fonksiyonunun tamlayanını göstermek üzere her  $f \in L^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_\Phi := \sup \left\{ \int_G |f(x)g(x)|d\mu(x) : \int_G \Psi(|g(x)|)d\mu(x) \leq 1 \right\}$$

normu ile  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayı Banach uzayı olmaktadır. [30]

Hudzik, Kamińska ve Musielak [15] çalışmasında  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu olmak üzere  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşulları belirlemiştir.

Bu tez çalışmasında ise  $w$ ,  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ile gösterilen ve

$$L_w^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha.|f(x)w(x)|)d\mu(x) < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan ağırlıklı Orlicz uzayları tanıtıldı ve her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi,w} = \|fw\|_\Phi$$

normu ile birlikte ağırlıklı Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için yeter koşul verilmiştir.

Burada, girişim işlemine göre Banach cebiri olan  $L_w^\Phi(G)$  uzayının  $L_w^1(G)$  Banach cebirine benzer şekilde soyut harmonik analize ilişkin özellikleri incelenmiştir. İlk olarak,  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $w$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $C_c(G)$  kompakt destekli fonksiyonlar uzayının  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğun olduğu ve  $f \in L_w^\Phi(G)$  olmak üzere  $G$  grubundan  $L_w^\Phi(G)$  uzayına giden  $x \rightarrow L_x f$  öteleme fonksiyonunun sürekli olduğu gösterilmiştir.

Sonra,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin yaklaşık birime sahip olduğu, yani en az bir  $(e_V)$  ağırlığının

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), \|f * e_V - f\|_{\Phi,w} \rightarrow 0$$

olacak şekilde var olduğu gösterilmiştir. Ayrıca  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin biriminin ve  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  normuna göre sınırlı yaklaşık biriminin varlığı araştırılmıştır.

Daha sonra,  $G$  yerel kompakt değişmeli grubuna bağlı olarak  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Psi$  tamlayan fonksiyonu tarafından belirlenen genelleştirilmiş karakter uzayı tanımlanmış ve bu genelleştirilmiş karakter uzayı ile  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin maksimal idealler uzayının aynı olduğu Banach cebiri yapısından gelen klasik teknikler kullanılarak belirlenmiştir. Yine  $L_w^\Phi(G)$  değişmeli Banach cebirinin radikal cebir yapısı ve yarıbasitliği araştırılmıştır. Son olarak,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin kapalı idealleri ile ötelemeler altında değişmez kapalı alt uzayları arasındaki ilişkiler ve genel ideal teorisi  $L_w^1(G)$  uzayındakine benzer olarak çalışılmıştır.

Böylece,  $w = 1$  özel durumunda  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirlerinin biriminin ve sınırlı yaklaşık biriminin varlığı, maksimal idealler uzayının  $\Psi$  tamlayan fonksiyonu tarafından belirlenen genelleştirilmiş karakterler aracılığıyla belirlenmesi, yarıbasitliği ve kapalı ideallerinin belirlenmesi gibi yeni sonuçlar da elde edilir. Öte yandan,  $\Phi$   $N$ -fonksiyon olmak üzere  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin yarıbasitliğinin ve sınırlı yaklaşık biriminin

varlığının bu tez çalışmasından bağımsız olarak ve farklı tekniklerle Akbarboglu ve Machsoudi [1] tarafından da çalışıldığı gözlemlenmiştir. 2009 yılında başlanan ve Haziran 2013'de tamamlanan bu tez çalışmasına konu olan problemin  $w = 1$  özel durumunun bağımsız olarak çalışılmış olması ise çalışılan konunun güncelliği ve geleceği açısından memnuniyet vericidir.

Yine,  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  özel durumunda  $L_w^\Phi(G) = L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayları elde edilmektedir ve  $L_w^p(G)$  uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri yapısı ve bu Banach cebirinin sınırlı yaklaşık biriminin varlığı, maksimal idealler uzayının belirlenmesi Kuznetsova [21, 22] çalışmalarında incelenmiştir. Bu tez çalışmasında ise  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  özel durumunda  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin benzer özelliklere sahip olduğu farklı teknikler kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca,  $L_w^p(G)$  Banach cebirinin idealleri ile ilgili yeni sonuçlar da elde edilmiştir.

## 2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Öncelikle Hahn- Banach teoreminin aşağıdaki sonuçlarını verelim.

**Teorem 2.0.0.1.**  $X$  normlu uzay ve  $x \in X$  olsun. Bu durumda  $X^*$  dual uzayı olmak üzere

$$\|x\| = \sup_{0 \neq f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

geçerlidir.

**Teorem 2.0.0.2.**  $X$  normlu uzay ve  $Y \subseteq X$  alt vektör uzayı olsun. Bu durumda  $x \in X$  olmak üzere  $x \notin \bar{Y}$  ise en az bir  $f \in X^*$  sürekli lineer fonksiyoneli  $f|_Y = \{0\}$  ve  $f(x) \neq 0$  olacak şekilde vardır.

**Tanım 2.0.0.3.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $X, K$  cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer her  $x, y \in X$  için

$$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$$

eşitsizliği sağlanırsa  $X$  cebirine  $K$  cismi üzerinde bir normlu cebir denir. Bundan başka, her  $x, y \in X$  için  $x.y = y.x$  koşulu da sağlanırsa  $X$ 'e değişmeli normlu cebir denir. Eğer bir  $e \in X$  elemanı, her  $x \in X$  için  $e.x = x.e = x$  olacak şekilde varsa  $X$ 'e birimli normlu cebir,  $e$  elemanına da  $X$ 'in birimi denir.  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayının Banach uzayı olması durumunda ise  $X$  cebirine Banach cebiri denir.

**Tanım 2.0.0.4.**  $(B, \|\cdot\|_B)$  normlu uzay ve  $(A, \|\cdot\|_A)$  bir Banach cebiri olmak üzere

- i)  $(B, \|\cdot\|_B)$  Banach cebiridir.
- ii)  $B \subseteq A$  idealdir ve  $\overline{B}^{\|\cdot\|_A} = A$  dir.
- iii)  $\exists M > 0, \forall f \in B, \|f\|_A \leq M.\|f\|_B$
- iv)  $\exists C > 0, \forall f, g \in B, \|f.g\|_B \leq C.\|f\|_A.\|g\|_B$

koşulları sağlanırsa  $(B, \|\cdot\|_B), (A, \|\cdot\|_A)$  Banach cebirine göre bir Soyut Segal cebiridir denir.(Burnham,[6] )

**Tanım 2.0.0.5.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu cebirinde bir  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ağı verilsin. Eğer her  $x \in X$  için  $\lim_{\alpha \in I} e_\alpha \cdot x = x$  oluyorsa  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ağı,  $X$  normlu cebiri için sol yaklaşık birim; her  $x \in X$  için  $\lim_{\alpha \in I} x \cdot e_\alpha = x$  oluyorsa  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$  ağı,  $X$  normlu cebiri için sağ yaklaşık birimdir denir. Yine eğer her iki özellik birden sağlanıyorsa  $X$  normlu cebirinin yaklaşık birimi vardır denir. (Hewitt and Ross [11])

**Tanım 2.0.0.6.**  $X$  değişmeli Banach cebiri olsun.  $X$  üzerinde tanımlı kompleks değerli ve sıfırdan farklı tüm  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli lineer homomorfilerin uzayı  $\Delta(X)$  ile gösterilir ve

$$\Delta(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \rightarrow \varphi(x), x \in X$$

fonksiyonlarını sürekli yapan en zayıf topoloji ile birlikte  $\Delta(X)$  uzayı yerel kompakt topolojik uzaydır ve  $\Delta(X)$  uzayı üzerindeki bu topoloji Gelfand topoloji olarak adlandırılır.

$\Delta(X)$  uzayındaki sıfırdan farklı, sürekli ve lineer  $\varphi$  homomorfilerine,  $X$  cebirinin maksimal idealleri karşı geldiğinden  $\Delta(X)$  uzayına maksimal idealler uzayı da denir. ( Kaniuth [16])

**Tanım 2.0.0.7.**  $X$  değişmeli Banach cebiri olmak üzere  $X$  cebirinin radikali  $rad(X)$  ile gösterilir ve

$$rad(X) = \bigcap \{ker\varphi | \varphi \in \Delta(X)\}$$

olarak tanımlanır.  $\Delta(X) = \emptyset$  olması durumunda  $rad(X) = X$  olarak tanımlıdır ve bu durumda  $X$  cebirine radikal cebir denir. Eğer  $rad(X) = \{0\}$  ise de  $X$  cebirine yarı-basit cebir denir. ( Kaniuth [16] )

**Teorem 2.0.0.8.**  $X$  değişmeli Banach cebiri ve  $x \in X$  olmak üzere  $x \in rad(X)$  olması için gerek ve yeter koşul  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$  olmasıdır. (Loomis, [24])

**Tanım 2.0.0.9.**  $(A, \|\cdot\|_A)$  bir değişmeli Banach cebiri,  $(X, \|\cdot\|)$  Banach uzayı ve  $X$  uzayı  $A$  üzerinde bir cebirsel modül olsun. Eğer her  $a \in A$  ve  $x \in X$  için

$$\|a \cdot x\| \leq \|a\|_A \cdot \|x\|$$

koşulu sağlanıyorsa,  $X$  modülüne  $A$  üzerinde bir sol Banach modülü veya bir sol Banach  $A$ -modülü denir. Benzer şekilde sağ Banach  $A$ -modülü de tanımlanır.

**Tanım 2.0.0.10.**  $G$  yerel kompakt grup olmak üzere  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu için

$$\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına  $f$  fonksiyonunun desteği denir ve bu kapanış kümesi  $\text{supp}(f)$  ile gösterilir.

$G$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli ve kompakt destekli tüm fonksiyonların vektör uzayı  $C_c(G)$  ile ve yine  $G$  üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli ve sonsuzda sıfır olan tüm fonksiyonların vektör uzayı da  $C_0(G)$  ile gösterilmiştir. (Rudin [34]), (Treves [37])

**Tanım 2.0.0.11.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $G$  yerel kompakt değişmeli grup olsun. Her  $f \in X$  ve her  $x, y \in G$  için

$$L_x f(y) = f(y - x)$$

şeklinde tanımlanan  $L_x$  fonksiyonuna öteleme fonksiyonu denir. Eğer, her  $f \in X$  ve her  $x, y \in G$  için  $L_x f \in X$  ise  $X$  uzayına ötelemeler altında değişmezdir (invarianttır) denir. (Reiter ve Stegeman [32])

**Teorem 2.0.0.12.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere her  $f \in C_c(G)$  fonksiyonu aşağıdaki anlamda düzgün süreklidir: Her  $\varepsilon > 0$  için en az bir birimin  $U$  komşuluğu vardır ki,

$$y - x \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sağlanır. (Deitmar ve Echterhoff, [9])

**Tanım 2.0.0.13.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere  $G$  üzerinde tanımlı, sıfırdan farklı, pozitif, her  $x \in G$  ve  $G'$ 'deki her  $E$  Borel kümesi için  $\mu(x + E) = \mu(E)$  koşulunu sağlayan regüler Borel ölçümü  $\mu$  Haar ölçümü olarak adlandırılır ve pozitif skaler ile çarpıma göre tek türlü belirlidir. (Folland, [10])

Ayrıca, Orlicz uzaylarının dual uzayı belirlenirken  $G$  yerel kompakt grubu üzerindeki  $\mu$  Haar ölçümünün lokalize edilebilir olduğu kullanılmıştır. (Segal [36])

**Önerme 2.0.0.14.**  $G$  yerel kompakt grup ve  $e$ ,  $G$  grubunun birim elemanı olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir:

- i) En az bir  $x \in G$  için  $\{x\}$  tek nokta kümesinin ölçüsü sıfırdan farklıdır.
- ii)  $\{e\}$  kümesinin ölçüsü sıfırdan farklıdır.
- iii) Haar ölçüsü sayma ölçüsünün bir katıdır.
- iv)  $G$  diskret gruptur.

( Deitmar ve Echterhoff [9] )

$G$  grubunun diskret olması durumunda ise  $\mu$  sayma ölçüsü olarak alınabilir.

**Tanım 2.0.0.15.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $\alpha$  da  $G$  üzerinde karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer, her  $x, y \in G$  için  $|\alpha(x)| = 1$  ve  $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$  koşulları sağlanıyorsa  $\alpha$  ya  $G$  grubunun karakteri denir.  $G$  grubunun tüm sürekli karakterlerinin kümesi  $\hat{G}$  ile gösterilir. Bu  $\hat{G}$  kümesi  $x \in G$  ve  $\alpha_1, \alpha_2 \in \hat{G}$  olmak üzere  $(\alpha_1 + \alpha_2)(x) = \alpha_1(x)\alpha_2(x)$  işlemine göre bir grup oluşturur. bu gruba  $G$  nin karakter grubu (veya dual grubu) denir. (Rudin [33])

**Tanım 2.0.0.16.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$   $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli fonksiyon olmak üzere her  $x, y \in G$  için  $\gamma(x) \neq 0$ ,  $|\gamma(x)| \leq w(x)$  ve  $\gamma(x + y) = \gamma(x) + \gamma(y)$  koşullarını sağlıyorsa  $\gamma$  ya  $G$  üzerinde  $w$ -sınırlı genelleştirilmiş karakteri denir.  $G$  üzerindeki tüm  $w$ -sınırlı genelleştirilmiş karakterlerin kümesi  $\hat{G}(w)$  ile gösterilir. ( Kaniuth, [16] ).

Buradan,  $w$  ağırlık fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlamak üzere  $G$  grubunun her sürekli karakterinin  $G$  üzerinde bir  $w$ -sınırlı genelleştirilmiş karakter olduğu açıktır. Ayrıca  $L_w^1(G)$  Banach cebirinin maksimal idealler uzayının  $w$  sınırlı genelleştirilmiş karakter uzayı ile aynı olduğu biliniyor. ( Kaniuth, [16] )

Şimdi Orlicz uzaylarının temel yapısı ile ilgili bazı tanım ve teoremleri verelim.

**Tanım 2.0.0.17.** ( Young Fonksiyonu )

$\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  olmak üzere

- i) Konveks
- ii)  $\Phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$

koşullarını sağlayan  $\Phi$  fonksiyonuna Young fonksiyonu denir. [30], [31]

**Örnek 2.0.0.18.** Aşağıdaki  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  Young fonksiyonudur.

1)  $\Phi_1(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, (\alpha \geq 1), x \geq 0$

2)  $0 < a < b < \infty$  olmak üzere

$$\Phi(x) = \begin{cases} (x - a)^p & , a \leq x < b \\ \infty & , x \geq b \end{cases}$$

**Tanım 2.0.0.19.**  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  ile gösterilen Orlicz sınıfı

$$\widetilde{L}^\Phi(\mu) := \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ölçülebilir, } \int_X \Phi(|f(x)|) d\mu(x) < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı genelliği bozmamak adına  $\mu$  ölçüsünün,  $E \in \Sigma, \mu(E) > 0 \Rightarrow \exists F \in \Sigma, F \subseteq E, 0 < \mu(F) < +\infty$  koşulunu sağladığı varsayılmıştır.

Şimdi,  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfının yapısı ile ilgili bazı temel özellikleri incelemek için gerekli olan aşağıdaki tanımları verelim.

**Tanım 2.0.0.20.**  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\mu(X) < \infty$  ise en az bir  $K > 0$  sayısı ve en az bir  $x_0 > 0$  sayısı

$$\text{her } x \geq x_0 \text{ için } \Phi(2x) \leq K \cdot \Phi(x)$$

olacak şekilde varsa ya da  $\mu(X) = \infty$  ise en az bir  $K > 0$  sayısı

$$\text{her } x \geq 0 \text{ için } \Phi(2x) \leq K \cdot \Phi(x)$$

olacak şekilde varsa  $\Phi$  Young fonksiyonuna  $\Delta_2$  koşulunu sağlar denir ve bu durum  $\Phi \in \Delta_2$  ile gösterilir.

Böylece,  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\Phi \in \Delta_2$  ise  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  bir vektör uzayı olur.

**Uyarı 2.0.0.21.**  $\Phi \notin \Delta_2$  ise  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfı vektör uzayı olmak zorunda değildir.

**Örnek 2.0.0.22.** Her  $x \geq 0$  için  $\Phi(x) = e^x - 1$  Young fonksiyonu alınsın. Burada,

$$\text{her } x \geq 0 \text{ için } \Phi(2x) \leq K \cdot \Phi(x)$$

olacak şekilde bir  $K > 0$  sayısı yoktur. Dolayısıyla  $\Phi \notin \Delta_2$  dir. Öte yandan,  $X = (0, 1)$  olmak üzere  $(0, 1)$  aralığındaki açık alt kümeler tarafından oluşturulan Borel sigma cebiri  $\Sigma$  ve  $\mu$  Lebesgue ölçüsü için  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfı gözönüne alınsın. Burada  $f : (0, 1) \rightarrow K$ ,  $f(x) = \frac{-1}{2} \ln(x)$  fonksiyonu için

$$\int_0^1 \Phi(|f(x)|) d\mu(x) < \infty$$

olduğundan  $f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu)$  olur. Fakat

$$\int_0^1 \Phi(2|f(x)|) d\mu(x) = \infty$$

olduğundan ise  $2f \notin \widetilde{L}^\Phi(\mu)$  elde edilir. Böylece  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  vektör uzayı değildir.

Öte yandan,  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  sınıfının vektör uzayı yapısı  $\Phi \in \Delta_2$  koşulundan bağımsız olarak aşağıdaki gibidir.

Yine,  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfı  $f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu)$  için

i)  $\alpha$  skaler ve  $|\alpha| = 1$  ise  $\alpha f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu)$

ii)  $|g| \leq |f|$  ve  $g$  ölçülebilir ise  $g \in \widetilde{L}^\Phi(\mu)$

koşullarını sağlar. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.0.0.23.**  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfının vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  sınıfının pozitif skalerler ile çarpım işlemine göre kapalı olmasıdır. Yani,

$$\widetilde{L}^\Phi(\mu) \text{ vektör uzayıdır} \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, \forall f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu), \alpha f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu).$$

Buradan,  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfının tanımı gözönüne alınırsa da  $\int_X \Phi(|f(x)|) d\mu(x) < \infty$  ise her  $\alpha > 0$  için

$$\int_X \Phi(\alpha|f(x)|)d\mu(x) < \infty$$

olması Orlicz sınıfının bir vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşuldur.  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  sınıfının vektör uzayı olması için verilen bu koşul  $\Phi$  Young fonksiyonunun konveksliğinden elde edilmiştir.

Buradan yola çıkarak ise aşağıdaki tanım verilir.

**Tanım 2.0.0.24.**  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı olmak üzere  $\widetilde{L}^\Phi(\mu)$  Orlicz sınıfı olsun. Bu durumda  $L^\phi(\mu)$  ile gösterilen ve en az bir  $\alpha > 0$  için  $\alpha f \in \widetilde{L}^\Phi(\mu)$  koşulunu sağlayan tüm  $f : X \rightarrow K$  ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzay Orlicz uzayı olarak adlandırılır. Yani,

$$L^\Phi(\mu) := \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ ölçülebilir}, \exists \alpha > 0, \int_X \Phi(\alpha|f(x)|)d\mu(x) < \infty\}$$

olarak tanımlanır. Burada  $L^\Phi(\mu)$  Orlicz uzayı bir vektör uzayıdır. Ayrıca,  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\Delta_2$  koşulunu sağlarsa

$$L^\Phi(\mu) = \widetilde{L}^\Phi(\mu)$$

geçerli olur.

Ayrıca, Orlicz uzayı da Lebesgue uzaylarında olduğu gibi hemen hemen her yerde eşitlik bağıntısına göre belirlenen fonksiyonların denklik sınıflarından oluşmaktadır. Öte yandan, her  $f \in L^\Phi(\mu)$  için

$$\|f\|_\Phi^\circ := \inf\{k > 0 \mid \int_X \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right)d\mu(x) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlı  $\|\cdot\|_\Phi^\circ$  fonksiyonu  $L^\Phi(\mu)$  Orlicz uzayı üzerinde bir normdur ve bu norm (gauge) Luxemburg normu olarak adlandırılır ve  $(L^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi^\circ)$  bir Banach uzayıdır.

Ayrıca,  $f \in L^\Phi(\mu)$  olmak üzere

$$\|f\|_\Phi^\circ \leq 1 \Leftrightarrow \int_X \Phi(|f(x)|)d\mu(x) \leq 1$$

geçerlidir. (Rao ve Ren ,1991)

Yine Orlicz uzayı üzerinde bir diğer norm da aşağıdaki gibi tanımlanır. Bu normu tanımlamak için gerekli olan tamlayan Young fonksiyonu tanımını verelim.

**Tanım 2.0.0.25.**  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere her  $y \geq 0$  için

$$\Psi(y) := \sup\{x.y - \Phi(x) | x \geq 0\}$$

olarak tanımlı  $\Psi$  fonksiyonuna  $\Phi$  Young fonksiyonunun tamlayanı denir ve  $\Psi$  de bir Young fonksiyondur. Bu durumda,  $(\Phi, \Psi)$  ikilisine de tamlayan Young fonksiyon çifti denir. Ayrıca,  $(\Phi, \Psi)$  tamlayan Young fonksiyon çifti için Young eşitsizliği geçerlidir :

$$x.y \leq \Phi(x) + \Psi(y), \quad x, y \geq 0.$$

**Tanım 2.0.0.26.**  $(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı ve  $(\Phi, \Psi)$  tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere  $L^\Phi(\mu)$  Orlicz uzayı üzerinde her  $f \in L^\Phi(\mu)$  için

$$\|f\|_\Phi := \sup\left\{\int_X |f(x)v(x)|d\mu(x) \mid v \in L^\Psi(X), \int_X \Psi(|v(x)|)d\mu(x) \leq 1\right\}$$

bir normdur ve bu norm Orlicz normu olarak adlandırılır. Ayrıca,  $L^\Phi(\mu)$  Orlicz uzayı üzerindeki Orlicz ve Luxemburg normları için

$$\|\cdot\|_\Phi^\circ \leq \|\cdot\|_\Phi \leq 2.\|\cdot\|_\Phi^\circ$$

denkliği geçerlidir. ( Rao ve Ren, [30] )

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında genel olarak çeşitli Fonksiyonel Analiz ve Harmonik Analiz'deki temel teoremler ve metodlar kullanılmıştır. Ayrıca, değişmeli Banach cebirleri için Gelfand Teorisi yöntemleri kullanılmıştır.

## 4. BULGULAR

### 4.1. $L_w^\Phi(G)$ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$   $G$  üzerindeki ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayları tanıtıldı. Daha sonra  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayları arasındaki kapsamalar incelendi ve  $L_w^\Phi(G)$  uzayının dual uzayı belirlendi. Sonra,  $C_c(G)$  kompakt destekli ve sürekli fonksiyonlar uzayının  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğunluğu,  $L_w^\Phi(G)$  uzayının ötelemeler altında değişmez olduğu ve öteleme fonksiyonunun sürekli olduğu gösterildi.

Orlicz uzayları  $\Phi$  fonksiyonu aracılığıyla tanımlanmaktadır ve  $\Phi$  fonksiyonları da literatürde farklı isimlerle adlandırılmaktadır. Bu bölümde, öncelikle  $\Phi$  fonksiyonlarının tanımları ve aralarındaki ilişkiler verildi.

#### 4.1.1. $\Phi$ Fonsiyonları ve Aralarındaki İlişkiler

Orlicz uzayları ilk olarak W.Orlicz tarafından 1932 yılında,  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) Lebesgue uzaylarının genelleşmesi olarak verilmiştir. Bu genelleşmede  $L^p$  uzayları tanımındaki  $x^p$  fonksiyonu yerine N-fonksiyonu diye adlandırılan daha genel bir konveks  $\Phi$  fonksiyonu alınmış ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmıştır. Orlicz uzaylarına ilişkin ayrıntılı ilk çalışma ise 1961 yılında Krasnosel'skii ve Rutickii tarafından "Convex Functions and Orlicz Spaces" isimli kitapta yapılmış ve bu kitapta da  $\Phi$  fonksiyonu N-fonksiyon olarak alınmıştır. Bununla birlikte bazı kaynaklarda N-fonksiyonu Young fonksiyon olarak adlandırılmaktadır [20].

Öte yandan, Orlicz uzaylarına ilişkin uygulamaları da kapsayan daha geniş çalışmalar 1991 ve 2002 yıllarında Rao ve Ren tarafından verilmiştir [30], [31]. Bu çalışmalarda ise  $\Phi$  fonksiyonu N-fonksiyondan farklı olarak Young fonksiyonu diye alınmıştır.

Ayrıca, Orlicz uzaylarında son yıllarda, özellikle bileşke operatörleri üzerine yapılan bazı çalışmalarda ( [19], [2], [29] )  $\Phi$  fonksiyonu Rao ve Ren çalışmasındaki Young fonksiyonundan farklı olarak tanımlanmış fakat yine Young fonksiyonu olarak adlandırılmıştır. Öte yandan bu şekilde tanımlanan  $\Phi$  fonksiyonu Young fonksiyonundan daha güçlü koşullara sahiptir ve özellikle  $p = +\infty$  limit durumu için  $L^\infty$  uzayı

Orlicz uzayından elde edilememektedir. Bu nedenle, bu çalışma boyunca bu  $\Phi$  fonksiyonu, Young fonksiyonu yerine Zayıf Young fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

Yine çeşitli kaynaklarda (örneğin, bkz. [8] )  $\Phi$  fonksiyonu bu tanımlardan farklı olarak verilmiş ve Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılmıştır.

Şimdi, yukarıda bahsedilen  $\Phi$  fonksiyonlarının tanımını verip aralarındaki ilişkileri inceleyelim. Öte yandan, N-fonksiyonu ve Young fonksiyonu  $\mathbb{R}$  üzerinde ve  $\Phi$  fonksiyonu çift fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada ise diğer tanımlarla uyumlu olması bakımından  $\Phi$  fonksiyonunun tanım kümesi  $[0, +\infty)$  olarak alınmıştır.

**Tanım 4.1.1.1.** ( N-fonksiyon )

$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu

- (i)  $\varphi(0) = 0$
- (ii)  $t > 0$  için  $\varphi(s)$  artan fonksiyon
- (iii)  $t \geq 0$  için  $\varphi$  sağdan sürekli
- (iv)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$

koşullarını sağlamak üzere

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt \quad , \quad x \geq 0$$

şeklinde tanımlı  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonuna N-Fonksiyon denir. [18]

Öte yandan N-fonksiyonunun denk tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir. Biz de  $\Phi$  için bu tanımı kullanacağız.

**Tanım 4.1.1.2.** ( N-fonksiyon )

$\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu

- i) Konveks
- ii) Sürekli
- iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$
- iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$

koşullarını sağlarsa  $\Phi$  N-fonksiyonu olarak adlandırılır. [18]

**Örnek 4.1.1.3.** 1)  $\Phi_1(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, (\alpha > 1), x \geq 0$

2)  $\Phi_2(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$

fonksiyonları birer N-fonksiyondur.

**Tanım 4.1.1.4.** ( Young Fonksiyonu )

$\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  olmak üzere

i) Konveks

ii)  $\Phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0$

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$

koşullarını sağlayan  $\Phi$  fonksiyonuna Young fonksiyonu denir. [30], [31]

**Örnek 4.1.1.5.** Aşağıdaki  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  Young fonksiyonudur.

1)  $\Phi_1(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, (\alpha \geq 1), x \geq 0$

2)  $0 < a < b < \infty, 1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} (x - a)^p & , a \leq x < b \\ \infty & , x \geq b \end{cases}$$

**Tanım 4.1.1.6.** (Zayıf Young Fonksiyon)

$\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu için

i) konveks

ii)  $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$

iv) sürekli

sağlanırsa  $\Phi$  fonksiyonuna Zayıf Young fonksiyonu denir.

**Örnek 4.1.1.7.** 1)  $\Phi_1(x) = e^x - 1, x \geq 0$

2)  $\Phi(x) = \cosh(x) - 1, x \geq 0$  birer Zayıf Young fonksiyonudur.

**Tanım 4.1.1.8.** (Orlicz Fonksiyonu)

$\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  fonksiyonu

- i) konveks
- ii)  $\Phi(0) = 0$
- iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$
- iv)  $\Phi$  fonksiyonu özdeş olarak 0 veya  $+\infty$  değil

$$(\exists x, y \in (0, +\infty), \Phi(x) \neq 0 \text{ ve } \Phi(y) \neq +\infty)$$

- v)  $\Phi$  fonksiyonu  $b_\Phi = \sup\{x > 0 \mid \Phi(x) < +\infty\}$  noktasında soldan sürekli

koşullarını sağlarsa  $\Phi$  fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir. Ayrıca,  $b_\Phi$  sayısına benzer şekilde  $a_\Phi$  sayısı da

$$a_\Phi = \inf\{x > 0 \mid \Phi(x) > 0\}$$

olarak tanımlanır.

Böylece  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu artan bir fonksiyon olup,  $a_\Phi$  ve  $b_\Phi$  sayıları için  $0 \leq a_\Phi \leq b_\Phi \leq +\infty$  geçerlidir. Ayrıca aşağıdaki önerme de verilir.

**Önerme 4.1.1.9.**  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$  Orlicz fonksiyonu olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- (i)  $a_\Phi = 0 \Leftrightarrow (\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- (ii)  $b_\Phi = +\infty \Leftrightarrow \forall x > 0, \Phi(x) < +\infty$

**İspat :** (i)  $\Rightarrow$ :  $a_\Phi = \inf\{x > 0 \mid \Phi(x) > 0\} = 0$  olduğu kabul edilsin. Eğer  $x = 0$  ise  $\Phi(x) = 0$  olduğu açıktır. Tersine  $\Phi(x) = 0$  iken  $x = 0$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $x > 0$  olsun.  $A = \{x > 0 \mid \Phi(x) > 0\}$  denirse  $\inf A = 0$  olmasından

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A, x' < \varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda  $\varepsilon = x > 0$  almırsa  $x' < \varepsilon = x$  olacak şekilde en az bir  $x' \in A$  bulunur. Böylece  $\Phi(x') > 0$  olur. Burada  $0 < x' < x$  olduğundan en az

bir  $\alpha \in [0, 1]$  vardır ki  $x' = \alpha.x$  yazılır. Ayrıca  $\Phi(x) = 0$  ve  $\Phi$  fonksiyonu konveks olduğundan

$$0 \leq \Phi(x') = \Phi(\alpha.x) \leq \alpha.\Phi(x) = \alpha.0$$

elde edilir. Böylece  $\Phi(x') = 0$  olup  $\Phi(x') > 0$  olması ile çelişir.

$\Leftarrow$ : Tersine  $\Phi$  fonksiyonu için  $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  olduğunu kabul edelim. Böylece Orlicz fonksiyonu tanımından  $\Phi(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  geçerlidir. Bu durumda her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\Phi(\frac{1}{n}) > 0$  olur. Burada  $A = \{x > 0 | \Phi(x) > 0\}$  denirse her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\frac{1}{n} \in A$  olduğundan infimum tanımı gereği

$$\inf A \leq \frac{1}{n}$$

ve böylece  $a_\Phi = \inf A = 0$  bulunur.

(ii)  $\Rightarrow$ : Kabul edelim ki  $b_\Phi = \sup\{x > 0 | \Phi(x) < +\infty\} = +\infty$  olsun. Burada  $B = \{x > 0 | \Phi(x) < +\infty\}$  denirse  $B$  üstten sınırlı küme olmadığından

$$\forall x > 0, \exists x' \in B, x' > x$$

geçerlidir. Burada  $x' \in B$  olduğundan  $\Phi(x') < \infty$  dir. Yine en az bir  $\alpha \in [0, 1]$  sayısı  $x = \alpha.x'$  olacak şekilde vardır. Ayrıca  $\Phi$  fonksiyonunun konveksliği de kullanılırsa,

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha.x') \leq \alpha.\Phi(x') < +\infty$$

bulunur. Böylece istenen elde edilir.

$\Leftarrow$ : Her  $x > 0$  için  $\Phi(x) < +\infty$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $B = \{x > 0 | \Phi(x) < +\infty\}$  denirse  $(0, +\infty) \subseteq B$  olur. Buradan ise  $b_\Phi = \sup B = +\infty$  elde edilir. Bu ise istenendir.

Şimdi, N-fonksiyonu, Young fonksiyonu, Zayıf Young fonksiyonu ve Orlicz fonksiyonları arasındaki ilişkileri inceleyelim.

**Teorem 4.1.1.10.**  $\Phi$  N-fonksiyon ise Zayıf Young fonksiyondur.

**İspat :**  $\Phi$  N-fonksiyon olsun. Buradan  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  konveks, sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$$

koşullarını sağlar. Öncelikle  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$  olması tanımından

$$\forall M > 0, \exists x_M > 0, x > x_M \Rightarrow \frac{\Phi(x)}{x} > M$$

yazılır. Burada  $x_M > 1$  olarak kabul edilebilir. Böylece her  $x > x_M > 1$  için

$$\Phi(x) > M.x > M.x_M > M$$

elde edilir. Yani  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$  olur.

Diğer taraftan ise  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$  olması tanımından

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, 0 < x < \delta_\varepsilon \Rightarrow \frac{\Phi(x)}{x} < \varepsilon$$

olur. Burada  $\delta_\varepsilon < 1$  kabul edilebilir. Bu nedenle  $0 < x < \delta_\varepsilon < 1$  sağlayan her  $x$  için

$$\Phi(x) < \frac{\Phi(x)}{\delta_\varepsilon} < \frac{\Phi(x)}{x} < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0$  olmasıdır.  $\Phi$  N-fonksiyonunun özel olarak  $x = 0$  noktasında sürekli olduğu kullanılırsa da  $\Phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0$  bulunur. Ayrıca  $\Phi$  N-fonksiyonu kesin artan olduğundan her  $x > 0$  için  $\Phi(x) > 0$  veya başka bir deyişle  $x = 0$  için  $\Phi(x) = 0$  elde edilir.  $\Phi$  N-fonksiyonu sürekli de olduğundan bir Zayıf Young fonksiyonu olarak bulunur.

**Teorem 4.1.1.11.**  $\Phi$  Zayıf Young fonksiyonu ise Orlicz fonksiyonudur.

**İspat :**  $\Phi$  zayıf Young fonksiyonu olsun. Buradan  $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  konveks, sürekli, sadece sıfırda sıfır olan ve  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \infty$  sağlayan bir fonksiyon olur. Burada  $\Phi$  fonksiyonunun identikal olarak ne sıfır ne de sonsuz olmadığı görülür. Ayrıca  $\Phi$  fonksiyonu sadece sıfırda sıfır olduğundan  $a_\Phi = 0$  ve her  $x \in [0, +\infty)$  için  $\Phi(x) < +\infty$  olduğundan ise  $b_\Phi = +\infty$  elde edilir. Üstelik  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \infty$  olması bize  $\Phi$  fonksiyonunun  $b_\Phi = +\infty$  da soldan sürekli olmasını verir. Bu nedenle  $\Phi$  bir Orlicz fonksiyonu olarak bulunur.

**Teorem 4.1.1.12.**  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu ise Young fonksiyonudur.

**İspat :**  $\Phi$  bir Orlicz fonksiyonu olsun. Orlicz fonksiyonu tanımından  $\Phi$  konveks ve  $\Phi(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$  koşulları sağlanır.  $\Phi$ 'nin Young fonksiyonu olduğunu göstermek için  $\Phi$  Orlicz fonksiyonununun 0 da sağdan sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Yani

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, 0 < x < \delta_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq \Phi(x) < \varepsilon$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için herhangi bir  $\varepsilon > 0$  alınsın. Bu durumda

$$a_\Phi = \inf\{x > 0 | \Phi(x) > 0\}$$

sayısı için iki durum sözkonusudur.

Birinci durum:  $a_\Phi > 0$  olsun. İnfimum tanımından her  $x \in (0, a_\Phi)$  için  $\Phi(x) = 0$  bulunur. Buradan ise  $\delta_\varepsilon = a_\Phi > 0$  olmak üzere her  $0 < x < \delta_\varepsilon$  sayısı için  $\Phi(x) = 0 < \varepsilon$  olduğu görülür. Böylece  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu 0 da sürekli olur.

İkinci durum:  $a_\Phi = 0$  olsun. Bu durumda ise Özellik 4.1.1.9'den  $x > 0$  için  $\Phi(x) > 0$  olduğu biliniyor.  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu özdeş olarak sonsuz olmadığından  $b_\Phi > 0$  olur. Buradan en az bir  $x_0 \in (0, +\infty)$  için  $0 < \Phi(x_0) < +\infty$  olur. Buradan ise  $\varepsilon > 0$  sayısı için

$$\exists x_\varepsilon \in (0, +\infty), 0 < \Phi(x_\varepsilon) < +\infty$$

elde edilir. Gerçekten, eğer  $\Phi(x_0) < \varepsilon$  ise  $x_\varepsilon = x_0$  alınırsa yukarıdaki ifade doğru olur. Eğer  $\Phi(x_0) \geq \varepsilon$  ise  $0 \leq \alpha = \frac{\varepsilon}{2\Phi(x_0)} \leq 1$  için  $x_\varepsilon = \alpha.x_0$  olmak üzere  $\Phi$  fonksiyonunu konveksliğinden yine

$$\Phi(x_\varepsilon) = \Phi(\alpha.x_0) \leq \alpha.\Phi(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bulunur. O halde  $\Phi$  fonksiyonunun artan olduğu da düşünülürse  $\delta_\varepsilon = x_\varepsilon > 0$  için

$$0 < x < \delta_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq \Phi(x) \leq \Phi(\delta_\varepsilon) = \Phi(x_\varepsilon) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise  $\Phi$  fonksiyonunun 0 noktasında sağdan sürekli olmasıdır.

Öte yandan, yukarıda verilen teoremlerin terslerinin doğru olmadığını karşıt örneklerle gösterelim.

$\Phi$  Zayıf Young fonksiyonu ise N-fonksiyon olmayabilir. (bkz. Örnek 4.1.1.13)

**Örnek 4.1.1.13.** Her  $x \geq 0$  için  $\Phi(x) = e^x - 1$  olarak tanımlanan  $\Phi$  'nin bir Zayıf Young fonksiyonu olduğunu görmek kolaydır. Fakat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \neq 0$$

olduğundan  $\Phi(x) = e^x - 1$  bir N-fonksiyon değildir.

$\Phi$  Orlicz fonksiyonu ise Zayıf Young fonksiyonu olmayabilir. (bkz. Örnek 4.1.1.14)

**Örnek 4.1.1.14.**  $a > 0$  sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq a \\ x - a & , x \geq a \end{cases}$$

şeklinde tanımlı  $\Phi$  fonksiyonu bir Orlicz fonksiyonudur. Hatta  $\Phi$  fonksiyonu sürekli olmasına rağmen sıfırdan farklı  $x$  noktasında sıfır olduğundan (örneğin  $x = a > 0$  için  $\Phi(a) = 0$ )  $\Phi$  fonksiyonu zayıf Young fonksiyonu değildir.

$\Phi$  Young fonksiyonu ise Orlicz fonksiyonu olmayabilir. (bkz. Örnek 4.1.1.15)

**Örnek 4.1.1.15.**

$$\Phi(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ +\infty & , 1 \leq x \end{cases}$$

fonksiyonu konveks,  $\Phi(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x)$  ve  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = +\infty$  koşullarını sağladığından bir Young fonksiyonudur. Fakat bu  $\Phi$  fonksiyonu identikal olarak 0 veya  $+\infty$  dan farklı olmasına rağmen

$$b_\Phi = \sup\{x > 0 \mid \Phi(x) < +\infty\} = 1$$

noktası için  $\lim_{x \rightarrow b_\Phi^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = 1 \neq +\infty = \Phi(1)$  olduğundan  $\Phi$  fonksiyonu  $b_\Phi = 1$  noktasında soldan sürekli değildir. Bu nedenle  $\Phi$  Orlicz fonksiyonu olamaz.

Böylece adı geçen  $\Phi$  fonksiyonları için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.1.16.**  $\Phi$  fonksiyonu için aşağıdakiler geçerlidir.

i) N-fonksiyon  $\Rightarrow$  Zayıf Young fonksiyon  $\Rightarrow$  Orlicz fonksiyon  $\Rightarrow$  Young fonksiyon

ii) N-fonksiyon  $\not\Rightarrow$  Zayıf Young fonksiyon  $\not\Rightarrow$  Orlicz fonksiyon  $\not\Rightarrow$  Young fonksiyon

Daha önce  $L^\Phi$  Orlicz uzaylarının,  $1 \leq p \leq \infty$  olmak üzere  $L^p$  Lebesgue uzaylarının genelleşmesi olduğundan bahsedilmişti. Şimdi ise  $\Phi$  fonksiyonlarının yukarıda belirtilen farklı tanımları göz önüne alındığında, Orlicz uzaylarından elde edilen  $L^p$  Lebesgue uzaylarının neler olacağını verelim.

Eğer  $\Phi$  N-fonksiyon olarak alınırsa  $1 < p < +\infty$  için  $L^p$  uzayları elde edilir. Fakat Banach fonksiyon uzayları hatta Banach cebirleri  $L^1$  ve  $L^\infty$  uzayları Orlicz uzaylarının özel durumu olarak elde edilemez. Bu nedenle N-fonksiyon tanımlaması oldukça kısıtlayıcıdır.

Eğer  $\Phi$  Zayıf Young fonksiyonu alınırsa bu durumda  $1 \leq p < +\infty$  için  $L^p$  uzayları elde edilmesine rağmen  $p = +\infty$  limit durumu için  $L^\infty$  uzayı elde edilemez.

Öte yandan  $\Phi$  fonksiyonu Young veya Orlicz fonksiyonu alınırsa  $1 \leq p \leq +\infty$  için  $L^p$  uzaylarının tümü elde edilir. Bu nedenle biz de bu çalışma boyunca ağırlıklı Orlicz uzaylarını tanımlarken  $\Phi$  fonksiyonunu Young fonksiyonu olarak alacağız.

Ayrıca Orlicz uzayları tanımında  $\Phi$  Young fonksiyonu ile birlikte  $\Psi$  tamlayan Young fonksiyonu ( Tanım 2.0.0.25 ) da kullanılır. Şimdi  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $\Psi$  tamlayan Young fonksiyonu olmak üzere örnekler verelim.

**Örnek 4.1.1.17.**  $1 < p < +\infty$  olmak üzere her  $x \geq 0$  için  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  Young fonksiyonunun tamlayanı

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere her  $x \geq 0$  için  $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$  Young fonksiyonudur.

Burada  $p = 1$  olması durumunda ise  $\Phi(x) = x$  Young fonksiyonunun tamlayanı

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur.

**Örnek 4.1.1.18.**  $\Phi(x) = e^x - x - 1$  için ise  $\Psi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$  dir.

#### 4.1.2. $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Uzayı

Bu bölümde,  $\Phi$  Young fonksiyonu,  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayları tanıtıldı. Öncelikle, bu tez çalışması  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayları ve özellikleri üzerine olduğundan çalışmanın bundan sonraki kısımlarında da kullanılacak olan bazı temel tanımlamaları verelim. Bu çalışma boyunca  $G$  yerel kompakt değişmeli grubu,  $\mu$   $G$  üzerinde Haar ölçümünü,  $w$  ise  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonunu gösterecektir. Burada  $w$  ağırlık fonksiyonundan,  $G$  üzerinde tanımlı, pozitif değerli, Borel ölçülebilir ve her  $x, y \in G$  için

$$w(x+y) \leq w(x)w(y)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyon anlaşılacaktır. Ayrıca,  $w$  ağırlık fonksiyonu genelliği bozmamak için sürekli olarak kabul edilebilir. ( [16], [32] )

**Tanım 4.1.2.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $\mu$   $G$  üzerinde Haar ölçümü olsun.  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Orlicz uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L_w^\Phi(G) := \left\{ f : G \rightarrow K \mid f \text{ ölçülebilir, } \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha |f(x)w(x)|)d\mu(x) < +\infty \right\}$$

Burada  $K$ , reel sayılar ( $\mathbb{R}$ ) veya karmaşık sayılar ( $\mathbb{C}$ ) cismini,  $\alpha > 0$  sayısı ise  $f$  fonksiyonuna bağlı bir sabiti göstermektedir. Aslında burada ağırlıklı Orlicz uzayı  $L_w^\Phi(G)$ , en az bir  $\alpha > 0$  için  $\int_G \Phi(\alpha w(x)|f(x)|)d\mu(x) < +\infty$  koşulunu sağlayan  $f$  fonksiyonunun, Lebesgue uzaylarında olduğ gibi hemen hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre belirlediği denklik sınıflarından oluşmaktadır. Ayrıca,  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayı ve  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı tanımları gözönüne alınırsa

$$f \in L_w^\Phi(G) \Leftrightarrow fw \in L^\Phi(G)$$

olduğu elde edilir. Böylece ağırlıklı Orlicz uzayının bir vektör uzayı olduğ kolayca görülür. Öte yandan, aşağıdaki önerme geçerlidir.

**Önerme 4.1.2.2.** Her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi,w} := \sup \left\{ \int_G |f(x)w(x)v(x)|d\mu(x) : v \in L^\Psi(G), \int_G \Psi(|v(x)|)d\mu(x) \leq 1 \right\} < +\infty$$

şeklinde tanımlı  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  fonksiyonu  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı üzerinde bir normdur.

**İspat :**  $L_w^\Phi(G)$  bir vektör uzayıdır ve  $f \in L_w^\Phi(G) \Leftrightarrow w.f \in L^\Phi(G)$  geçerlidir. Ayrıca,  $\|\cdot\|_\Phi$  ve  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  tanımlarından  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi,w} = \|fw\|_\Phi$$

olur. Böylece  $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$  Orlicz uzayının normlu uzay olduğu kullanılırsa, her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $\alpha \in K$  için

- $\|f\|_{\Phi,w} = \|fw\|_\Phi \geq 0$ ,
- $\|\alpha f\|_{\Phi,w} = \|(\alpha f)w\|_\Phi = |\alpha| \cdot \|fw\|_\Phi = |\alpha| \cdot \|f\|_{\Phi,w}$
- $\|f+g\|_{\Phi,w} = \|(f+g)w\|_\Phi = \|fw+gw\|_\Phi \leq \|fw\|_\Phi + \|gw\|_\Phi = \|f\|_{\Phi,w} + \|g\|_{\Phi,w}$

sağlandığı kolayca görülür. Son olarak ise  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $\|f\|_{\Phi,w} = 0 \Leftrightarrow f = 0$  olduğunu göstereyim. Eğer  $f = 0$  ise  $\|f\|_{\Phi,w} = 0$  olduğu açıktır. Tersine,  $\|f\|_{\Phi,w} = 0$  olduğunu kabul edelim. Buradan  $\|fw\|_\Phi = 0$  elde edilir. Burada  $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$  normlu uzay olduğundan  $fw = 0$  (*h.h.*) veya diğer bir deyişle  $\mu(\{x \in G \mid f(x)w(x) \neq 0\}) = 0$  bulunur.  $w$  ağırlık fonksiyonu tanımından her  $x \in G$  için  $w(x) > 0$  dir. Böylece her  $x \in G$  için

$$\{x \in G \mid f(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in G \mid w(x) = 0\} \cup \{x \in G \mid f(x).w(x) \neq 0\}$$

olduğuna da dikkat edilirse

$$\mu(\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}) \leq \mu(\{x \in G \mid w(x) = 0\}) + \mu(\{x \in G \mid f(x).w(x) \neq 0\}) = 0$$

olarak bulunur. Buradan  $f = 0$  (*h.h.*) elde edilir. Böylece  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  normlu uzay olur.

Öte yandan  $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$  Orlicz uzayının Banach uzayı olması ve her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $\|f\|_{\Phi,w} = \|fw\|_\Phi$  olduğu kullanılırsa  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  ağırlıklı Orlicz uzayının

Banach uzayı olduğu elde edilir. Ayrıca  $f \mapsto fw$  dönüşümü ile de  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayına Banach uzayı olarak izomorftur. Yine  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  uzayı tanımında

$$f \in L_w^\Phi(G) \Leftrightarrow \|f\|_{\Phi,w} < +\infty$$

olduğu görülür.

**Not 4.1.2.3.** Daha önceden belirtildiği gibi Orlicz uzayları Lebesgue uzaylarının genelleştirmesidir. Benzer şekilde ağırlıklı Orlicz uzaylarının da ağırlıklı Lebesgue uzaylarının genelleştirmesi olduğunu gösterelim.

$G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$  ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda  $1 \leq p < +\infty$  olmak üzere  $L_w^p(G)$  ile gösterilen ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L_w^p(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_{p,w} = \left( \int_G |f(x)w(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca  $p = +\infty$  ise

$$L_w^\infty(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_{\infty,w} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} |f(x)w(x)| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır ve esasen sınırlı fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır. Burada,  $1 < p < \infty$  için  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $p = 1$  ise  $q = \infty$ ) olmak üzere  $L_w^p(G)$  uzayının dual uzayının  $L_{w^{-1}}^q(G)$  olduğu biliniyor. Yine, Hanh-Banach teoreminden her  $f \in L_w^p(G)$  için

$$\|f\|_{p,w} = \|fw\|_p = \left( \int_G |f(x)w(x)|^p dx \right)^{1/p} = \sup \left\{ \int_G |f(x)w(x)v(x)| dx : \|v\|_q \leq 1 \right\}$$

biliniyor.

Şimdi ise  $w$ ,  $G$  yerel kompakt değişmeli grubu üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayında  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, x \geq 0, (1 < p < \infty)$  Young fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda,  $L_w^\Phi(G)$  uzayı tanımından

$$f \in L_w^\Phi(G) \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \int_G \frac{|\alpha f(x)w(x)|^p}{p} d\mu(x) < +\infty$$

geçerlidir. Bu ise  $\int_G |f(x)w(x)|^p d\mu(x) < +\infty$  olmasına denktir. Böylece,  $fw \in L^p(G)$  yada  $f \in L_w^p(G)$  olur. Buradan  $L_w^\Phi(G) = L_w^p(G)$  olduğu elde edilir.

Dikkat edilecek olursa,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayında  $f$  fonksiyonuna bağlı olarak bulunan  $\alpha > 0$  sayısı  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  aracılığı ile  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzaylarına geçildiğinde önemini yitirmektedir ( $\alpha = 1$  olmaktadır). Bu durum  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  Young fonksiyonunun  $\Delta_2$  koşulunu sağlamasından kaynaklanmaktadır. Aşağıdaki not ile bu durumu görebiliriz.

**Not 4.1.2.4.** Rao ve Ren [30, sf.46]'daki Teorem 2 ve [30, sf.48]'deki Sonuç 3 gözönüne alınırsa  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\Delta_2$  koşulunu sağlamak üzere

$$\int_G \Phi(|f(x)w(x)|) d\mu(x) < \infty \Leftrightarrow \exists \alpha > 0, \int_G \Phi(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) < \infty$$

eşdeğerliği elde edilir.

Ayrıca  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $x \geq 0$  Young fonksiyonunun tamlayanı  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için  $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$  fonksiyonudur. Böylece,  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  tanımından her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Phi,w} &= \|w.f\|_\Phi = \sup \left\{ \int_G |w(x).f(x).v(x)| dx : \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |w(x).f(x).v(x)| dx : \int_G \frac{|v(x)|^q}{q} dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ q^{1/q} \int_G \left| w(x).f(x). \frac{v(x)}{q^{1/q}} \right| dx : \left\| \frac{v}{q^{1/q}} \right\|_q \leq 1 \right\} \\ &= q^{1/q} \|w.f\|_p = q^{1/q} \|f\|_{p,w} \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse burada  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  ve  $\|\cdot\|_{p,w}$  ağırlıklı normları eşit değildir. Fakat bu iki norm eşdeğerdir.

Özel olarak  $p = 1$  durumunda ise  $\Phi(x) = x$  Young fonksiyonu için  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı  $L_w^1(G)$  Lebesgue uzayıdır ve bu durumda her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $\|f\|_{\Phi,w} = \|f\|_{1,w}$  olur.

Yine  $p = +\infty$  ise

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

Young fonksiyonu için  $L_w^\Phi(G) = L_w^\infty(G)$  esasen sınırlı fonksiyonlar uzayı elde edilir ve yine burada  $\|\cdot\|_{\infty,w} = \|\cdot\|_{\Phi,w}$  eşitliği geçerli olur.

**Uyarı 4.1.2.5.** Öte yandan  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayında

- i)  $w$  ağırlık fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) = 1$  olarak seçilirse  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayı
- ii)  $w = 1$  iken  $1 \leq p \leq +\infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, x \geq 0$  Young fonksiyonu için de  $L^p(G)$  Lebesgue uzayları

elde edilir.

**Not 4.1.2.6.** Orlicz uzayı  $L^\Phi(G)$  üzerinde  $\|\cdot\|_\Phi$  Orlicz normundan başka  $\|\cdot\|_\Phi^\circ$  Luxemburg normunun var olduğu biliniyor. Benzer şekilde, ağırlıklı Orlicz uzayı  $L_w^\Phi(G)$  üzerinde de yukarıda tanımlanan  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  normundan başka, Orlicz uzayındaki Luxemburg normuna benzer şekilde her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi,w}^\circ = \inf \left\{ b > 0 : \int_G \Phi\left(\frac{|f(x)w(x)|}{b}\right) d\mu(x) \leq 1 \right\} < +\infty$$

normu da tanımlanır ve bu iki norm arasında her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi,w}^\circ \leq \|f\|_{\Phi,w} \leq 2\|f\|_{\Phi,w}^\circ$$

denkliği mevcuttur. Dolayısıyla  $(L_w^\Phi(G), \|f\|_{\Phi,w}^\circ)$  uzayı da Banach uzayı olarak elde edilir.

### 4.1.3. $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Kapsamalar

Bu bölümde  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w_1$  ve  $w_2$   $G$  üzerinde iki ağırlık fonksiyonu,  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  de iki Young fonksiyonu olmak üzere  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  ve  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  uzayları arasındaki kapsamalar incelendi. Bunun için gerekli tanımları verelim.

**Tanım 4.1.3.1.**  $w_1$  ve  $w_2$   $G$  üzerinde iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere en az bir  $c > 0$  sayısı her  $x \in G$  için

$$w_1(x) \leq c.w_2(x)$$

olacak şekilde varsa  $w_1 \preceq w_2$  ile gösterilir. Eğer  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları için hem  $w_1 \preceq w_2$  hem de  $w_2 \preceq w_1$  ise  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlıkları eşdeğerdir denir ve bu durum  $w_1 \approx w_2$  ile gösterilir.

**Örnek 4.1.3.2.**  $\mathbb{R}$  üzerindeki  $w_1(x) = (1 + |x|)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ve  $w_2(x) = e^{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ağırlık fonksiyonları için  $c = 1$  olmak üzere  $w_1 \preceq w_2$  olduğu kolayca görülür.

**Tanım 4.1.3.3.**  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  iki Young fonksiyonu olmak üzere

i) Eğer bir  $c > 0$  sayısı

$$\forall x \geq 0 \text{ için } \Phi_1(x) \leq \Phi_2(cx)$$

olacak şekilde varsa  $\Phi_1$  fonksiyonu  $\Phi_2$  fonksiyonununundan önde gelmektedir denir ve bu durum  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  ile gösterilir.

ii) Eğer bir  $c > 0$  sayısı ve en az bir  $T > 0$  sayısı ( $T = T(c)$ )

$$\forall x \geq T \text{ için } \Phi_1(x) \leq \Phi_2(cx)$$

olacak şekilde varsa  $\Phi_1$  fonksiyonu  $\Phi_2$  fonksiyonununundan  $T > 0$  için önde gelmektedir denir ve bu durum  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  ile gösterilir.

Burada eğer  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  ve  $\Phi_2 \prec \Phi_1$  geçerli ise  $\Phi_1 \simeq \Phi_2$  yazılır.

Aşağıda bu durumlar için örnekler verilmiştir.

**Örnek 4.1.3.4.**  $\Phi_1(x) = e^x - x - 1$ ,  $x \geq 0$  ve  $\Phi_2(x) = \cosh(x) - 1$ ,  $x \geq 0$  Young fonksiyonları olmak üzere

$$\forall x \geq 0 \text{ için } \Phi_1(x) = e^x - x - 1 \leq \cosh(2x) - 1 = \Phi_2(2x)$$

olduğundan  $c = 2 > 0$  için  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olur.

**Örnek 4.1.3.5.**  $\Phi_1(x) = x$ ,  $x \geq 0$  ve  $k > 1$  olmak üzere  $\Phi_2(x) = e^{kx} - 1$ ,  $x \geq 0$  Young fonksiyonları için

$$\forall x \geq 0 \text{ için } \Phi_1(x) \leq \Phi_2\left(\frac{1}{k}x\right)$$

olduğundan  $c = \frac{1}{k} > 0$  için  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olur.

**Not 4.1.3.6.** Yukarıdaki iki örnekten de görülmektedir ki  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  tanımındaki  $c > 0$  sayısı için  $c > 1$  veya  $c < 1$  olabilir.

**Örnek 4.1.3.7.** Yine  $\Phi_1(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$  ve  $\Phi_2(x) = \cosh(x) - 1, x \geq 0$  Young fonksiyonları alınırsa

$$\forall x \geq 0 \text{ için } \cosh(x) - 1 \leq e^x - x - 1$$

olduğundan  $c = 1$  için  $\Phi_2 \prec \Phi_1$  olur. Örnek 4.1.3.4'den ise  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olduğu biliniyor. Böylece  $\Phi_1 \simeq \Phi_2$  elde edilir.

**Örnek 4.1.3.8.**  $\Phi$  young fonksiyonu olmak üzere her  $k > 0$  için  $\Phi_1(x) = k.x, x \geq 0$  şeklinde tanımlı  $\Phi_1$  young fonksiyonu için  $\Phi \simeq \Phi_1$  dir.

**Uyarı 4.1.3.9.**  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  Young fonksiyonları olmak üzere

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$$

olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir.

**Örnek 4.1.3.10.**  $1 < p < +\infty$  olmak üzere  $\Phi_1(x) = x^p \cdot \ln(1+x), x \geq 0$  Young fonksiyonu olsun. Bu durumda  $c > 0$  olmak üzere en az bir  $T = T(c) = \frac{e^{\frac{1}{c^p}}}{c} > 0$  vardır ki

$$\forall x \geq T \text{ için } \Phi_1(x) \leq \Phi_2(c.x)$$

olur. Böylece  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  elde edilir.

Öte yandan, her  $c > 0$  sayısı için en az bir  $x > 0$  sayısı

$$\Phi_1(x) > \Phi_2(c.x)$$

olacak biçimde bulunur. (örneğin  $x = \frac{e^{\frac{1}{c^p}}}{2c}$  için) Dolayısıyla  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  değildir.

**Örnek 4.1.3.11.**  $1 < p_1 < p_2 < +\infty$  olmak üzere  $\Phi_1(x) = x^{p_1}$  ve  $\Phi_2(x) = x^{p_2}$  Young fonksiyonları düşünülürse  $c > 0$  alındığında  $T = T(c) = \left(\frac{1}{c^{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_2-p_1}} > 0$  olmak üzere

$$\forall x \geq T(c) \text{ için } x^{p_1} \leq (c.x)^{p_2}$$

gerçeklenir. Böylece  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  elde edilir. Yine bu fonksiyonlar için  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  geçerli değildir.

**Teorem 4.1.3.12.**  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  Young fonksiyonları,  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \text{ ve } w_1 \preceq w_2 \Rightarrow L_{w_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$$

olur.

**İspat :** Herhangi bir  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  alınsın. Ağırlıklı Orlicz uzayı tanımından en az bir  $\alpha > 0$

$$\int_G \Phi_2(\alpha.w_2(x).|f(x)|)d\mu(x) < +\infty$$

olacak şekilde vardır. Ayrıca,  $w_1 \preceq w_2$  ise en az bir  $c' > 0$  sayısı her  $x \in G$  için

$$w_1(x) \leq c'.w_2(x) \quad (4.1)$$

olacak şekilde bulunur. Yine  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olduğundan en az bir  $c > 0$  sayısı vardır ki her  $y \geq 0$  için

$$\Phi_1(y) \leq \Phi_2(c.y) \quad (4.2)$$

gerçeklenir. Buradan,  $\beta = \frac{\alpha}{c.c'} > 0$  denirse (4.1) eşitsizliği ve  $\Phi_1$  Young fonksiyonunun artan olduğu kullanılırsa her  $x \in G$

$$\Phi_1(\beta.w_1(x).|f(x)|) \leq \Phi_1(\beta.c'.w_1(x).|f(x)|) = \Phi_1\left(\frac{\alpha}{c}.w_2(x).|f(x)|\right)$$

elde edilir. (4.2) den dolayı ise her  $x \in G$  için

$$\Phi_1\left(\frac{\alpha}{c}.w_2(x).|f(x)|\right) \leq \Phi_2\left(c.\frac{\alpha}{c}.w_2(x).|f(x)|\right) = \Phi_2(\alpha.w_2(x).|f(x)|)$$

bulunur.  $G$  üzerinden integral alınır da  $\beta > 0$  sayısı için

$$\int_G \Phi_1(\beta.w_1(x).|f(x)|)dx \leq \int_G \Phi_2(\alpha.w_2(x).|f(x)|)dx < +\infty$$

elde edilir. Bu ise  $f \in L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  olmasıdır.

**Uyarı 4.1.3.13.** Teorem 4.1.3.12'in tersi doğru değildir. Yani

$$L_{w_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi_1}(G) \not\Rightarrow \Phi_1 \prec \Phi_2 \text{ ve } w_1 \preceq w_2$$

**Örnek 4.1.3.14.**  $G$  kompakt yerel kompakt değişmeli grup olsun.  $w_1$  ve  $w_2$ ,  $G$  üzerinde sürekli ağırlık fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\Phi_1(x) = \frac{x^{p_1}}{p_1}, \quad \Phi_2(x) = \frac{x^{p_2}}{p_2}, \quad , x \in \geq 0, (1 < p_1 < p_2 < +\infty)$$

Young fonksiyonları için  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G) = L^{p_1}(G)$  ve  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G) = L^{p_2}(G)$  olduğu biliniyor. Burada  $\mu(G) < +\infty$  olduğundan  $L^{p_2}(G) \subseteq L^{p_1}(G)$  olur.

Diğer taraftan,  $w_1 \preccurlyeq w_2$  olmasına rağmen  $\Phi_1, \Phi_2$  fonksiyonları için  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  koşulu sağlanmaz. Gerçekten, eğer  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olduğu kabul edilirse

$$\exists c > 0, \forall x \geq 0, \Phi_1(x) \leq \Phi_2(cx)$$

olur. Buradan ise

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x^{p_1}}{p_1} \leq \frac{(cx)^{p_2}}{p_2} \Rightarrow \forall x \geq 0, \quad \frac{1}{x^{p_2-p_1}} \leq \frac{p_1 \cdot c^{p_2}}{p_2}$$

elde edilir.  $p_2 - p_1 > 0$  olduğundan son eşıtsizlikte  $x \rightarrow \infty$  için limit alınırsa

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{p_2-p_1}} \leq \frac{p_1 \cdot c^{p_2}}{p_2} < +\infty$$

çelişkisi bulunur.

**Uyarı 4.1.3.15.** Teorem 4.1.3.12'de  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  yerine  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  alınırsa Teorem doğru olmaz. Yani

$$\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0) \text{ ve } w_1 \preccurlyeq w_2 \not\Rightarrow L_{w_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$$

dir.

**Örnek 4.1.3.16.**  $G = \mathbb{R}$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  sabit olmak üzere her  $x \in \mathbb{R}$  için  $w_1(x) = a$  ve  $w_2(x) = b$  olsun.  $\Phi_1(x) = \frac{x^{p_1}}{p_1}, \Phi_2(x) = \frac{x^{p_2}}{p_2}$  ( $1 < p_1 < p_2 < +\infty$ ) Young fonksiyonları için Örnek 4.1.2.3'den  $L_w^{\Phi_1}(\mathbb{R}) = L^{p_1}(\mathbb{R})$  ve  $L_w^{\Phi_2}(\mathbb{R}) = L^{p_2}(\mathbb{R})$  elde edilir. Ayrıca,  $c = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/p_2}$  olmak üzere her  $t \geq 1$  için

$$\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(ct)} = \frac{t^{p_1}}{p_1} \cdot \frac{p_2}{(ct)^{p_2}} = \frac{1}{t^{p_2-p_1}} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{c^{p_2}} \leq 1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/p_2}\right)^{p_2}} = 1$$

yani  $T = 1$  için  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  olur.

Öte yandan,  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2p_1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d\mu(x) \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} d\mu(x) = +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p_2} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^{p_2/p_1}} d\mu(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^{p_2/p_1}} d\mu(x) < +\infty, \frac{p_2}{p_1} > 1$$

olduğundan  $f \in L^{p_2}(\mathbb{R})$  ve  $f \notin L^{p_1}(\mathbb{R})$  dir. Yani  $L^{p_2}(\mathbb{R}) \not\subseteq L^{p_1}(\mathbb{R})$  olur.

### *Kapsamalar ve Normlar Arasındaki İlişki*

Bu kısımda  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  ile  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  uzayları arasındaki kapsamalar, bu uzaylar üzerindeki  $\|\cdot\|_{\Phi_1, w_1}$  ve  $\|\cdot\|_{\Phi_2, w_2}$  normları aracılığı ile incelendi.

**Önerme 4.1.3.17.**  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  iki Young fonksiyonu,  $w_1$  ve  $w_2$  de iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$L_{w_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi_1}(G) \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \|f\|_{\Phi_1, w_1} \leq c \cdot \|f\|_{\Phi_2, w_2}$$

dir.

**İspat:**  $\Leftarrow$ : Yeterlik koşulu sağlansın. Bu durumda en az bir  $c > 0$  sayısı her  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi_1, w_1} \leq c \cdot \|f\|_{\Phi_2, w_2} < +\infty$$

olacak şekilde vardır. Böylece  $f \in L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  elde edilir.

$\Rightarrow$ :  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  kapsaması geçerli olsun. Bu durumda her  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için  $f \in L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  olacağından  $\|f\|_{\Phi_1, w_1} < +\infty$  olur. Böylece her  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için

$$\| \|f\| \| = \|f\|_{\Phi_1, w_1} + \|f\|_{\Phi_2, w_2}$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $(L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \| \cdot \|)$  normlu uzaydır. Bu uzayın bir Banach uzayı olduğunu göstermek için  $(f_n)$ ,  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$ 'de Cauchy dizisi alındığında, Cauchy dizisi tanımından

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon \rightarrow \|f_n - f_m\|_{\Phi_1, w_1} + \|f_n - f_m\|_{\Phi_2, w_2} < \varepsilon$$

sağlanır. Buradan  $(f_n)$ ,  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  ve  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  uzaylarında Cauchy dizisi olur.  $(L_{w_1}^{\Phi_1}(G), \|\cdot\|_{\Phi_1, w_1})$  ve  $(L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \|\cdot\|_{\Phi_2, w_2})$  Banach uzayı olduğundan

$$\exists f \in L_{w_1}^{\Phi_1}(G), \quad \|w_1 f_n - w_1 f\|_{\Phi_1} = \|f_n - f\|_{\Phi_1, w_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

ve

$$\exists \tilde{f} \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \quad \|w_2 f_n - w_2 \tilde{f}\|_{\Phi_2} = \|f_n - \tilde{f}\|_{\Phi_2, w_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.  $\|w_1 f_n - w_1 f\|_{\Phi_1} \rightarrow 0$  olduğundan  $(f_n)$  dizisinin en az bir  $(f_{n_k})$  alt dizisi

$$w_1(x) f_{n_k}(x) \rightarrow w_1(x) f(x), \quad n \rightarrow +\infty \text{ h.h.h. } x \in G$$

ve aslında buradan da

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow +\infty \text{ h.h.h. } x \in G$$

hemen hemen her yerde yakınsaması gerçekleşecek şekilde bulunur. (Rao ve Ren  $L^\Phi$  Uzayının tam olduğu gösterilirken yapıldı.)

Diğer taraftan  $\|w_2 f_n - w_2 \tilde{f}\|_{\Phi_2} \rightarrow 0$  olmasından dolayı  $(f_{n_k})$  alt dizisi için de

$$\|w_2 f_{n_k} - w_2 \tilde{f}\|_{\Phi_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

geçerli olur. Yine buradan bir  $(f_{n_{k_t}})$  alt dizisi

$$f_{n_{k_t}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x), \quad \text{h.h.h. } x \in G$$

olacak şekilde bulunur. Böylece  $(f_{n_{k_t}})$  alt dizisi hem  $f$  fonksiyonuna hem de  $\tilde{f}$  fonksiyonuna  $G$  üzerinde hemen hemen her yerde yakınsar. Bu ise  $f = \tilde{f}$  olmasını gerektirir. Buradan ise  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için

$$\| \|f_n - f\| \| = \|f_n - f\|_{\Phi_1, w_1} + \|f_n - f\|_{\Phi_2, w_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

elde edilir. Yani  $(f_n)$  Cauchy dizisi  $(L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \| \cdot \|)$  normlu uzayında  $f$  fonksiyonuna yakınsar. Böylece  $(L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \| \cdot \|)$  Banach uzayı olur.

Şimdi ise  $T : (L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \| \cdot \|) \rightarrow (L_{w_2}^{\Phi_2}(G), \| \cdot \|_{\Phi_2, w_2})$ ,  $Tf = f$ ,  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  dönüşümü gözönüne alalım.  $T$  dönüşümünün lineer, birebir ve örten olduğu kolayca görülür. Ayrıca her  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için

$$\|T(f)\|_{\Phi_2, w_2} = \|f\|_{\Phi, w_2} \leq \|f\|$$

olduğundan ise  $T$  sürekli olur. Hem tanım uzayı hem de görüntü uzayı Banach uzayı olduğundan açık dönüşüm teoremi gereği  $T^{-1}$  dönüşümü var ve sürekli olur.  $T^{-1}$  dönüşümünün sürekliliğinden ise en az bir  $c > 0$  vardır ki her  $f \in L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi, w_1} \leq \|f\| \leq c \cdot \|f\|_{\Phi, w_2}$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Aşağıda ilerde kullanacağımız bir sonucu verelim.

**Sonuç 4.1.3.18.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olsun. Eğer  $L_w^{\Phi}(G) \subseteq L_w^1(G)$  ise en az bir  $c > 0$  sayısı her  $f \in L_w^{\Phi}(G)$  için

$$\|f\|_{1, w} \leq c \cdot \|f\|_{\Phi, w}$$

olacak şekilde vardır.

#### *w Ağırlık Fonksiyonuna Göre Kapsamalar*

Bu kısımda  $\Phi$  Young fonksiyonu,  $w_1$  ve  $w_2$  de ağırlık fonksiyonları olmak üzere  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  ile  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  uzayları arasındaki kapsamalar  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$  için incelendi.

**Teorem 4.1.3.19.**  $\Phi$  Young fonksiyonu,  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$w_1 \preccurlyeq w_2 \Rightarrow L_{w_2}^{\Phi}(G) \subseteq L_{w_1}^{\Phi}(G)$$

geçerli olur.

**İspat :**  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları için  $w_1 \preccurlyeq w_2$  kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.1.3.12'de  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$  alınrsa istenen elde edilir.

**Sonuç 4.1.3.20.**  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $w_1, w_2$  de  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$w_1 \approx w_2 \Rightarrow L_{w_1}^{\Phi}(G) = L_{w_2}^{\Phi}(G)$$

geçerlidir.

**Not 4.1.3.21.** Bölüm 4.1.6'da bazı koşullar altında Sonuç 4.1.3.20'in tersinin de doğru olduğu gösterilecektir. (Sonuç 4.1.6.4)

**Uyarı 4.1.3.22.**  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $G$  kompakt grup olmak üzere  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları sürekli olduğundan

$$L_{w_1}^{\Phi}(G) = L_{w_2}^{\Phi}(G) = L^{\Phi}(G)$$

elde edilir.

#### *$\Phi$ Young Fonksiyonuna Göre Kapsamalar*

Bu kısımda  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  iki Young fonksiyonu ve  $w$   $G$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_{w_1}^{\Phi_1}(G)$  ile  $L_{w_2}^{\Phi_2}(G)$  uzayı arasındaki kapsama ilişkileri  $w_1 = w_2 = w$  için incelendi.

**Önerme 4.1.3.23.**  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  iki Young fonksiyonu,  $w$  da ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\Phi_1 \prec \Phi_2 \Rightarrow L_w^{\Phi_2}(G) \subseteq L_w^{\Phi_1}(G)$$

geçerlidir.

**İspat :** Kabul edelim ki  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  olsun. Teorem 4.1.3.12'de  $w_1 = w_2 = w$  alınırsa istenen elde edilir.

**Uyarı 4.1.3.24.** Önerme 4.1.3.23 in tersi doğru değildir. Yani

$$L_w^{\Phi_2}(G) \subseteq L_w^{\Phi_1}(G) \not\Rightarrow \Phi_1 \prec \Phi_2$$

( bkz. Örnek4.1.3.14 )

**Uyarı 4.1.3.25.** Önerme4.1.3.23 de  $\Phi_1 \prec \Phi_2$  yerine  $\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0)$  alınırsa önerme doğru olmaz. Yani

$$\Phi_1 \prec \Phi_2(T > 0) \not\Rightarrow L_w^{\Phi_2}(G) \subseteq L_w^{\Phi_1}(G)$$

( bkz. Örnek 4.1.3.16 )

**Teorem 4.1.3.26.**  $G$  kompakt grup ve  $\Phi_1, \Phi_2$  iki Young fonksiyonu olmak üzere  $\Phi_1 \prec \Phi_2 (T > 0)$  ise  $L_w^{\Phi_2}(G) \subseteq L_w^{\Phi_1}(G)$  olur.

**İspat :**  $\Phi_1 \prec \Phi_2 (T > 0)$  olmasından en az bir  $c > 0$  ve en az bir  $T = T_c > 0$  sayısı her  $x \geq T$  için

$$\Phi_1(x) \leq c \cdot \Phi_2(x)$$

olacak şekilde vardır. Şimdi  $f \in L_w^{\Phi_2}(G)$  alınsın. Buradan en az bir  $\alpha > 0$  sayısı

$$\int_G \Phi_2(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) < \infty$$

olacak şekilde bulunur. Eğer  $A = \{x \in G | \alpha w(x) |f(x)| < T\}$

denirse  $\Phi_1$  fonksiyonu artan olduğundan her  $x \in A$  için

$$\Phi_1(\alpha w(x) |f(x)|) \leq \Phi_1(T)$$

olur. Buradan ise

$$\begin{aligned} \int_G \Phi_1(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) &= \int_A \Phi_1(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) + \int_{G \setminus A} \Phi_1(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) \\ &\leq \int_A \Phi_1(T) d\mu(x) + \int_{G \setminus A} c \cdot \Phi_2(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) \quad (4.3) \\ &< \Phi_1(T) \mu(G) + c \cdot \int_G \Phi_2(\alpha |f(x)w(x)|) d\mu(x) < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $f \in L_w^{\Phi_1}(G)$  elde edilir.

**Lemma 4.1.3.27.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $x_0 > 0$  için  $\Phi(x_0) > 0$  olsun. Bu durumda, en az bir  $c > 0$  sayısı

$$\text{her } x \geq x_0 \text{ için } \Phi(x) \geq c \cdot x$$

olacak şekilde bulunur.

**İspat :**  $\Phi$  Young fonksiyonu konveks ve  $\Phi(0) = 0$  olduğundan her  $\alpha \in [0, 1]$  ve her  $x \geq 0$  için

$$\Phi(\alpha \cdot x) \leq \alpha \cdot \Phi(x) \quad (4.4)$$

olur. Bu durumda her  $x \geq x_0$  için  $\alpha = \frac{x_0}{x} \leq 1$  denirse (4.4) eşitsizliğinden

$$\Phi(x_0) \leq \frac{x_0}{x} \Phi(x)$$

bulunur. Buradan ise  $c = \frac{\Phi(x_0)}{x_0} > 0$  olmak üzere her  $x \geq x_0$  için

$$c.x \leq \Phi(x)$$

olur.

**Sonuç 4.1.3.28.**  $G$  kompakt grup ve  $\Phi$  Young fonksiyonu ise  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  geçerlidir.

**İspat :**  $G$  kompakt ve  $w$  ağırlığı sürekli olduğundan  $L_w^\Phi(G) = L^\Phi(G)$  ve  $L_w^1(G) = L^1(G)$  olur. Ayrıca  $\Phi$  Young fonksiyonu olduğundan en az bir  $x_0 > 0$  için  $\Phi(x_0) > 0$  olur. Lemma 4.1.3.27'den ise en az bir  $c > 0$  sayısı her  $x \geq x_0$  için

$$\Phi(x) \geq c.x$$

olacak şekilde vardır. Bu ise  $\Phi_1(x) = x, x \geq 0$  olmak üzere

$$\Phi_1 \prec \Phi (T > 0)$$

olmasıdır. Böylece, Teorem 4.1.3.26'den

$$L^\Phi(G) \subseteq L^{\Phi_1}(G) = L^1(G)$$

elde edilir.

Ayrıca,  $G$  keyfi yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$  koşulunu sağlarsa da  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamı geçerli olur. Aşağıdaki teorem bunu göstermektedir.

**Teorem 4.1.3.29.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$  olsun. Bu durumda  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  olur.

**İspat :**  $\Phi$  Young fonksiyonu için  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$  olduğundan en az bir  $c_1 > 0$  sayısı ve en az bir  $x_0 > 0$  sayısı

$$0 < x \leq x_0 \Rightarrow \Phi(x) > c_1.x \quad (4.5)$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan  $x_0 > 0$  için  $\Phi(x_0) > 0$  dir. Böylece Lemma 4.1.3.27'den en az bir  $c_2 > 0$  sayısı

$$x \geq x_0 \Rightarrow \Phi(x) \geq c_2 \cdot x \quad (4.6)$$

olacak şekilde vardır. Eğer  $c = \min\{c_1, c_2\} > 0$  denirse 4.5 ve 4.6 den

$$x \geq 0 \Rightarrow \Phi(x) \geq c \cdot x$$

bulunur. Bu ise  $\Phi_1(x) = x, x \geq 0$  olmak üzere

$$\Phi_1 \prec \Phi$$

olmasıdır. Böylece  $L_w^{\Phi_1}(G) = L_w^1(G)$  olduğu da kullanılırsa Teorem 4.1.3.23'den

$$L_w^{\Phi_2}(G) \subseteq L_w^{\Phi_1}(G) = L_w^1(G)$$

kapsaması elde edilir.

#### 4.1.4. $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Dual Uzayı

Bu bölümde  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının dual uzayı belirlendi. Öncelikle  $L_w^\Phi(G)$  uzayının dual uzayını incelerken gerekli olan  $\Delta_2$  koşulu tanımını ( Tanım 2.0.0.20 )  $G$  yerel kompakt değişmeli grubu için aşağıdaki gibi verilebileceğini belirtelim.

$\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $G$  kompakt iken en az bir  $K > 0$  ve en az bir  $x_0 > 0$  sayıları her  $x \geq x_0$  için

$$\Phi(2x) \leq K \cdot \Phi(x) \quad (4.7)$$

olacak şekilde varsa ve  $G$  kompakt değil iken ise her  $x \geq 0$  için (4.7) eşsizliği sağlanıyorsa  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\Delta_2$  koşulunu sağlar denir ve bu durumda  $\Phi \in \Delta_2$  yazılır.

**Örnek 4.1.4.1.** 1)  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, x \geq 0$  Young fonksiyonu için  $\Phi \in \Delta_2$  dir.

2)  $\Phi(x) = e^x - 1, x \geq 0$  Young fonksiyonu için ise  $\Phi \notin \Delta_2$  dir.

Burada,  $\Psi$  Young fonksiyonu  $\Phi$  Young fonksiyonunun tamlayanı olmak üzere  $\Phi \in \Delta_2$  ise  $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)^*$  dual uzayının  $(L^\Psi(G), \|\cdot\|_\Psi^\circ)$  Orlicz uzayı olduğu biliniyor. (bkz. Rao ve Ren [30])

Benzer şekilde,  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  ağırlıklı Orlicz uzayının dual uzayı da  $L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  ile gösterilen ve  $\frac{g}{w} \in L^\Psi(G)$  koşulunu sağlayan  $g : G \rightarrow K$  ölçülebilir fonksiyonlarından oluşan uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm

$$\|g\|_{\Psi,w^{-1}} := \left\| \frac{g}{w} \right\|_\Psi$$

şeklinde tanımlıdır.

Bunu göstermeden önce Hölder eşitsizliği olarak adlandırılan aşağıdaki eşitsizliği verelim.

**Teorem 4.1.4.2.**  $\Phi, \Psi$  tamlayan Young fonksiyonları ve  $w, G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere her  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için  $f.g \in L^1(G)$  olur ve

$$\int_G |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{\Phi,w} \|g\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ$$

geçerlidir.

**İspat :**  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  alınsın. Bu durumda  $w.f \in L^\Phi(G)$  and  $w^{-1}.g \in L^\Psi(G)$  olur.  $L^\Phi(G)$  ve  $L^\Psi(G)$  Orlicz uzayları için Hölder eşitsizliğinden ( Rao ve Ren [30] )  $(wf).(w^{-1}g) \in L^1(G)$  ve

$$\int_G |f(x).g(x)|d\mu(x) = \int_G |f(x)w(x)\frac{g(x)}{w(x)}|d\mu(x) \leq \|w.f\|_\Phi \|w^{-1}.g\|_\Psi^\circ$$

bulunur. Böylece,  $\|w.f\|_\Phi = \|f\|_{\Phi,w}$  ve  $\|w^{-1}.g\|_\Psi^\circ = \|g\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ$  olduğundan istenen elde edilir.

Şimdi,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının dual uzayının elde edildiği aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 4.1.4.3.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$ ,  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olsun.  $\Phi$  ve  $\Psi$  tamlayan Young fonksiyonları olmak üzere  $\Phi \in \Delta_2$  ise  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^* \cong (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ)$  geçerlidir.

**İspat :** Teoremin ispatı için

$$T : (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ) \rightarrow (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$$

$$g \mapsto T(g)(f) := \int_G f(x)g(x)d\mu(x), f \in L_w^\Phi(G)$$

dönüşümünü tanımlayalım.  $T$  dönüşümünün iyi tanımlı, yani her  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için  $T(g) \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$  olduğu Hölder eşitsizliğinden kolayca görülür.

Şimdi bu  $T$  dönüşümünün bir izometrik izomorfi olduğunu gösterelim.  $T$  dönüşümünün lineer olduğu açıktır.  $T$  nin örtenliği için ise

$$\forall F \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*, \exists g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G), T(g) = F$$

olduğu gösterilmelidir. Bunu göstermek için herhangi bir  $F \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$  sürekli lineer fonksiyoneli alınsın.  $F$  sürekli olduğundan en az bir  $M > 0$  sayısı

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), |F(f)| \leq M.\|f\|_{\Phi,w} \quad (4.8)$$

olacak şekilde vardır. Öte yandan  $f \in L_w^\Phi(G) \Leftrightarrow \tilde{f} = w.f \in L^\Phi(G)$  olduğu kullanılırsa

$$\tilde{F} : (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi) \rightarrow K$$

$$\tilde{f} \mapsto \tilde{F}(\tilde{f}) = F(f)$$

lineer fonksiyoneli tanımlanır. Bu tanım gözönüne alınırsa, her  $\tilde{f} \in L^\Phi(G)$  için  $f = \frac{\tilde{f}}{w}$  olmak üzere (4.8) eşitsizliğinden

$$|\tilde{F}(\tilde{f})| = |F(f)| \leq M.\|f\|_{\Phi,w} = M.\|w.f\|_\Phi = M.\|\tilde{f}\|_\Phi$$

elde edilir. Bu ise  $\tilde{F}$  lineer fonksiyonelinin sürekli (sınırlı) olmasıdır. Böylece  $\tilde{F} \in (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)^*$  olur. Öte yandan,  $(L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)^* \cong (L^\Psi(G), \|\cdot\|_\Psi^\circ)$  ( Rao ve Ren [30] ) olduğu kullanılırsa  $\tilde{F} \in (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)^*$  sürekli lineer fonksiyoneli için bir tek  $\tilde{g} \in (L^\Psi(G), \|\cdot\|_\Psi^\circ)$  fonksiyonu

$$\tilde{F}(\tilde{f}) = \int_G \tilde{f} \tilde{g} dx, \tilde{f} \in (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi) \quad (4.9)$$

ve

$$\|\tilde{F}\| = \|\tilde{g}\|_\Psi^\circ$$

olacak şekilde vardır. Eğer  $g = w.\tilde{g}$  denirse  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olur ve her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için (4.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} F(f) &= \tilde{F}(\tilde{f}) = \int_G \tilde{f}(x).\tilde{g}(x)d\mu(x) \\ &= \int_G f(x)w(x)\frac{g(x)}{w(x)}d\mu(x) = \int_G f(x).g(x)d\mu(x) \\ &= T(g)(f) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $T(g) = F$  olur. Ayrıca,  $\|\tilde{F}\|$  ve  $\|F\|$  norm tanımından  $\|F\| = \|\tilde{F}\| = \|\tilde{g}\|_\Psi^\circ$  olur.  $g = w.\tilde{g}$  olduğu kullanılırsa da  $\|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ$  norm tanımından

$$\|F\| = \|\tilde{g}\|_\Psi^\circ = \left\| \frac{g}{w} \right\|_\Psi^\circ = \|g\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ$$

bulunur. Böylece  $T$  dönüşümü bir izometri olur.

Teorem 4.1.4.3'den ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.4.4.**  $(\Phi, \Psi)$  tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere  $\Phi \in \Delta_2$  ve  $\Psi \in \Delta_2$  ise  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı yansımali (refleksif) dir.

**İspat :**  $\Phi \in \Delta_2$  ve  $\Psi \in \Delta_2$  olduğunu kabul edelim.  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  uzayının yansımali (refleksif) olması demek,  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^{**} := ((L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*)^*$  ikinci dual uzayını göstermek üzere

$$\begin{aligned} j : (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w}) &\rightarrow (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^{**} \\ f &\mapsto j(f)(F) = F(f), \forall F \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^* \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlı  $j$  dönüşümünün lineer, örten ve normu koruyan bir dönüşüm olmasıdır.

Yukarıdaki gibi tanımlı  $j$  dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca, Hanh- Banach teoreminden her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|j(f)\| = \|f\|_{\Phi,w}$$

geçerli olur. Son olarak  $j$  dönüşümünün örten olduğunu, yani

$$\forall H \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^{**}, \exists f \in L_w^\Phi(G), j(f) = H$$

sağlandığını gösterelim. Bunun için herhangi bir  $H \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^{**}$  alalım. Buradan  $H : (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^* \rightarrow K$  sürekli ve lineer fonksiyonel olur. Teorem 4.1.4.3'den  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^* \cong (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ)$  olduğu veya diğer bir deyişle  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$  dual uzayındaki her  $F$  sürekli lineer fonksiyoneli bir tek  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  tarafından

$$\begin{aligned} (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ) &\rightarrow (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^* & (4.11) \\ g &\mapsto F(f) = F_g(f) = \int_G f(x)g(x)d\mu(x), \forall f \in L_w^\Phi(G) \end{aligned}$$

şeklinde belirlendiği ve  $\|F\| = \|F_g\| = \|g\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ$  geçerli olduğu biliniyor.

Eğer,

$$\begin{aligned} S : (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ) &\rightarrow K & (4.12) \\ g &\mapsto S(g) = H(F_g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa,  $H$  nin sürekli ve lineer olmasından her  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için

$$|S(g)| = |H(F_g)| \leq \|H\| \cdot \|F_g\| = \|H\| \cdot \|g\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ < +\infty$$

gerçeklenir. Böylece  $S$  lineer dönüşümü sürekli ,yani  $S \in (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ)^*$  olur.

Yine Teorem 4.1.4.3'in ispatına benzer şekilde,  $\tilde{g} = w.g \in L^\Psi(G)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{S} : (L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi,w^{-1}}^\circ) &\rightarrow K & (4.13) \\ \tilde{g} &\mapsto \tilde{S}(\tilde{g}) = S(g) \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın.  $S$ 'nin sürekli ve lineer olmasından  $\tilde{S} \in (L^\Psi(G), \|\cdot\|_{\circ\Psi})^*$  elde edilir.  $(L^\Psi(G), \|\cdot\|_{\circ\Psi})^* \cong (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$  ( Rao ve Ren [30] ) olduğundan ise  $\tilde{S} \in (L^\Psi(G), \|\cdot\|_{\circ\Psi})^*$  sürekli lineer fonksiyoneli için bir tek  $\tilde{f} \in (L^\Phi(G), \|\cdot\|_\Phi)$  fonksiyonu

$$\tilde{S}(\tilde{g}) = \int_G \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) d\mu(x), \forall \tilde{g} \in (L^\Psi(G), \|\cdot\|_{\circ\Psi})$$

ve  $\|\tilde{S}\| = \|\tilde{f}\|_\Phi$  olacak şekilde vardır. Böylece,  $f = \frac{\tilde{f}}{w} \in L_w^\Phi(G)$  denirse her  $F \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$  için

$$S(g) = \tilde{S}(\tilde{g}) = \int_G \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) d\mu(x) = \int_G f(x) \cdot g(x) d\mu(x) = F_g(f) = F(f)$$

olur. Burada  $H$  ve  $j$  dönüşümünün tanımları gözöüne alınırsa her  $F \in (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})^*$  için

$$H(F) = H(F_g) = S(g) = F_g(f) = F(f) = j(f)(F)$$

bulunur. Böylece  $j$  dönüşümünün örten olduğu elde edilir.

#### 4.1.5. $C_c(G)$ , $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Yoğundur

Bu bölümde,  $L_w^\Phi(G)$  uzayının soyut harmonik analizine ilişkin temel özelliklerinden kompakt destekli fonksiyonlar uzayının  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğunluğu gösterildi.

**Teorem 4.1.5.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$ ,  $\Delta_2$  koşulunu sağlayan bir Young fonksiyonu olmak üzere  $C_c(G)$  kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğundur. Yani  $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_{\Phi,w}} = L_w^\Phi(G)$  geçerlidir.

**İspat:** Kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayının  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğun olduğunu göstermek için herhangi bir  $f \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Gösterilecek olan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in C_c(G), \|f - k\|_{\Phi,w} < \varepsilon$$

dir.  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $wf \in L^\Phi(G) = \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_\Phi}$  olduğundan (Rao ve Ren, [30] )

$$\forall \varepsilon < 0, \exists k_1 \in C_c(G), \|wf - k_1\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.14)$$

sağlanır.  $\text{supp}(f) = K$  denirse  $w$  ağırlık fonksiyonu sürekli olduğundan  $K$  kompakt kümesi üzerinde sınırlı olur. Yani

$$\exists B > 0, \forall x \in K, w(x) \leq B$$

gerçeklenir.

Eğer  $g(x) = \frac{k_1(x)}{w(x)}, x \in G$  denirse  $\text{supp}(g) \subseteq K$  ve  $w$  nın sürekli olmasından  $g \in C_c(G) \subseteq L^\Phi(G)$  olduğu kolayca görülür. Ayrıca  $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_\Phi} = L^\Phi(G)$  olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in C_c(G), \text{supp}(k) \subseteq K, \|g - k\|_\Phi < \frac{\varepsilon}{2B} \quad (4.15)$$

olur.

$k_1, k, g \in C_c(G)$  yukarıdaki fonksiyonlar olmak üzere  $\text{supp}(g - k) \subseteq K$  ve her  $x \in K$  için de  $w(x) \leq B$  olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|k_1 - wk\|_\Phi &= \sup \left\{ \int_G |k_1(x) - w(x).k(x)|.|v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |k_1(x) - w(x).k(x)|.|v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_K w(x)|g(x) - k(x)|.|v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &\leq B. \sup \left\{ \int_K |g(x) - k(x)|.|v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &= B. \|g - k\|_\Phi \stackrel{(4.15)}{<} B. \frac{\varepsilon}{2.B} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten ve (4.14) ifadesinden ise her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için,

$$\|f - k\|_{\Phi, w} = \|w(f - k)\|_\Phi = \|wf - wk\|_\Phi \leq \|wf - k_1\|_\Phi + \|k_1 - wk\|_\Phi \stackrel{(4.14)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

#### 4.1.6. $L_w^\Phi(G)$ Uzayında Ötelemeler

$1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayının ötelemeler altında değişmez olduğu ve ötelemenin sürekliliği biliniyor [22]. Bu bölümde,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

ölçülebilir fonksiyonunun  $L_x$  ötelemesi her  $x, y \in G$  için  $L_x f(y) = f(y - x)$  şeklinde olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının ötelemeler altında değişmez olduğu ve  $f \in L_w^\Phi(G)$  olmak üzere  $G$  grubundan  $L_w^\Phi(G)$  uzayına giden  $x \mapsto L_x f$  ötelemesinin sürekli olduğu gösterildi.

her  $x, y \in G$  için  $L_x f(y) = f(y - x)$  şeklinde tanımlı  $L_x$  ötelemeleri altında değişmez

**Teorem 4.1.6.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $f \in L_w^\Phi(G)$  olsun. Bu durumda

- i) Her  $x \in G$  için  $L_x f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\|L_x f\|_{\Phi, w} \leq w(x) \cdot \|f\|_{\Phi, w}$  olur.
- ii) Eğer  $\Phi \in \Delta_2$  ise  $G$  grubundan  $L_w^\Phi(G)$  uzayına giden  $x \mapsto L_x f$  fonksiyonu sürekli olur.

**İspat :** *i)*  $w$  ağırlık fonksiyonu için

$$w(x + y) \leq w(x)w(y), x, y \in G$$

sağlandığından, her  $x \in G$  için

$$\begin{aligned} \|L_x f\|_{\Phi, w} &= \|w \cdot L_x f\|_{\Phi} = \sup \left\{ \int_G |w(y) \cdot f(y - x) \cdot v(y)| dy : \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |w(y + x) \cdot f(y) \cdot v(y + x)| dy : \int_G \Psi(|v(y + x)|) dy \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G |w(y) \cdot w(x) \cdot f(y) \cdot v(y + x)| dy : \int_G \Psi(|v(y + x)|) dy \leq 1 \right\} \\ &= w(x) \cdot \sup \left\{ \int_G |w(y) \cdot f(y) \cdot v(y + x)| dy : \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &= w(x) \cdot \|w \cdot f\|_{\Phi} = w(x) \cdot \|f\|_{\Phi, w} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikten *i)* şıkkı elde edilir.

*ii)* Bu şıkkın ispatı için  $x \mapsto L_x f$  fonksiyonunun  $e \in G$  birim elemanında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle  $g \in C_c(G)$  için  $x \mapsto L_x g$  fonksiyonunun  $e \in G$  de sürekli olduğunu, yani

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(e), \forall x \in V, \|L_x g - g\|_{\Phi, w} < \varepsilon$$

olduğunu gösterelim.  $\varepsilon > 0$  alınsın.  $G$  yerel kompakt bir grup olduğundan birimin bir  $K_1 \in \mathcal{V}(e)$  kompakt komşuluğu vardır.

Öte yandan,  $g \in C_c(G)$  fonksiyonu için  $K_2 = \text{supp}(g) \subseteq G$  kompakt olduğundan her  $x \in G$  için  $\text{supp}(L_x g) = x + K_2$  kümesi de kompakt olur.

Eğer  $K = K_1 \cup K_2 \cup (K_1 + K_2)$  denirse  $K \subseteq G$  kompakt kümesi için  $\mu(K) < \infty$  olur. Böylece, Teorem 4.1.3.28'den  $L^\Psi(K) \subseteq L^1(K)$  olur. Sonuç 4.1.3.18'den en az bir  $c > 0$  sayısı her  $f \in L^\Psi(K)$  için  $\|f\|_1 \leq c \cdot \|f\|_\Psi$  olacak şekilde bulunur. Buradan,  $\int_G \Psi(|v(y)|) d\mu(y) \leq 1$  sağlayan her  $v \in L^\Psi(G)$  fonksiyonu için

$$\|v \cdot \chi_K\|_1 \leq c \cdot \|v \cdot \chi_K\|_\Psi \leq 2 \cdot c \cdot \|v \cdot \chi_K\|_\Psi^{\circ} \leq 2 \cdot c \cdot \|v\|_\Psi^{\circ} \leq 2c \quad (4.16)$$

olur. Diğer taraftan,  $w$  ağırlık fonksiyonu  $K$  kompakt kümesi üzerinde sınırlı (yani,  $\exists B > 0, \forall y \in K, w(y) \leq B$ ) ve her  $x \in K_1$  için  $\text{supp}(L_x g - g) = (x + K_2) \cup K_2 \subseteq (K_1 + K_2) \cup K_2 \subseteq K$  olduğundan her  $x \in K_1$  için (4.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_G |w(y) \cdot (L_x g(y) - g(y)) \cdot v(y)| d\mu(y) &= \int_K |w(y) \cdot (L_x g(y) - g(y)) \cdot v(y)| d\mu(y) \\ &= \int_K B \cdot \|L_x g - g\|_\infty \cdot |v(y)| d\mu(y) \\ &\leq B \cdot \|L_x g - g\|_\infty \cdot \int_K |v(y)| d\mu(y) \\ &= B \cdot \|L_x g - g\|_\infty \cdot \|v \cdot \chi_K\|_1 \\ &\leq 2 \cdot c \cdot B \cdot \|L_x g - g\|_\infty \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $\int_G \Psi(|v(y)|) d\mu(y) \leq 1$  sağlayan  $v \in L^\Psi(G)$  fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned} \|L_x g - g\|_{\Phi, w} &= \sup \left\{ \int_G |w(y) \cdot (L_x g(y) - g(y)) \cdot v(y)| d\mu(y) : \int_G \Psi(|v(y)|) d\mu(y) \leq 1 \right\} \\ &\leq 2 \cdot c \cdot B \cdot \|L_x g - g\|_\infty \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. Teorem 2.0.0.12'den en az bir  $V \in \mathcal{V}(e)$  komşuluğu  $V \subseteq K_1$  ve her  $x \in V$  için

$$\|L_x g - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2.c.B}$$

olacak şekilde bulunur. Böylece, (4.17)'den her  $x \in V$  için

$$\|L_x g - g\|_{\Phi, w} < 2.c.B. \|L_x g - g\|_\infty < 2.c.B. \frac{\varepsilon}{2.c.B} = \varepsilon \quad (4.19)$$

elde edilir. Böylece  $g \in C_c(G)$  olmak üzere  $x \mapsto L_x g$  fonksiyonu  $e \in G$  de sürekli olur.

Şimdi  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varepsilon > 0$  alınsın. Öte yandan  $w$  ağırlık fonksiyonu yerel sınırlı olduğundan  $K' \subseteq G$  birimin kompakt komşuluğu için en az bir  $A > 0$  sayısı her  $x \in K'$  için  $w(x) \leq A$  olacak şekilde vardır. Böylece,  $\varepsilon > 0$  sayısı için Önerme 4.1.5.1'den en az bir  $g \in C_c(G)$  fonksiyonu

$$\|f - g\|_{\Phi, w} < \frac{\varepsilon}{2.(A+1)} \quad (4.20)$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan, ispatın kompakt destekli fonksiyonlar için yapılan kısmından  $g \in C_c(G)$  için en az bir  $V \subseteq K'$  birimim komşuluğu

$$\|L_x g - g\|_{\Phi, w} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.21)$$

olacak şekilde vardır. (4.20) ve (4.21) eşitsizlikleri kullanılırsa da her  $x \in V$  için

$$\begin{aligned} \|L_x f - f\|_{\Phi, w} &= \|L_x f - L_x g + L_x g - g + g - f\|_{\Phi, w} \\ &\leq \|L_x f - L_x g\|_{\Phi, w} + \|L_x g - g\|_{\Phi, w} + \|g - f\|_{\Phi, w} \\ &= (w(x) + 1) \cdot \|f - g\|_{\Phi, w} + \|L_x g - g\|_{\Phi, w} \\ &< (A + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(A+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca,  $L_w^\Phi(G)$  uzayında  $L_x$  ötelemesi için aşağıdaki önerme de geçerlidir.

**Önerme 4.1.6.2.**  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $f \neq 0$  için  $G$  den  $\mathbb{R}^+$  ya giden  $x \mapsto \|L_x f\|_{\Phi, w}$  fonksiyonu için en az bir  $c > 0$  sayısı her  $x \in G$  için

$$\frac{1}{c} \cdot w(x) \leq \|L_x f\|_{\Phi, w} \leq c \cdot w(x)$$

olacak şekilde vardır.

**İspat :** Herhangi bir  $f \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Önerme 4.1.6.1'den her  $x \in G$  için

$$\|L_x f\|_{\Phi, w} \leq w(x) \cdot \|f\|_{\Phi, w}$$

geçerlidir.

Öte yandan,  $\mu$  Haar ölçümü regüler olduğundan  $0 \neq f \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonu için en az bir  $K \subseteq G$  kompakt kümesi  $\|f \cdot \chi_K\|_{\Phi, w} > 0$  olacak şekilde vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \|L_x f\|_{\Phi, w} &= \sup \left\{ \int_G |w(y) \cdot L_x f(y) \cdot v(y)| dy : \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \int_{x+K} |w(y) \cdot f(y-x) \cdot v(y)| dy : \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \int_K |w(x+u) \cdot f(u) \cdot v(x+u)| du : \int_G \Psi(|v(u)|) du \leq 1 \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \int_K \frac{w(x)}{w(-u)} \cdot |f(u) \cdot v(x+u)| du : \int_G \Psi(|v(u)|) du \leq 1 \right\} \\ &\geq \frac{w(x)}{\sup_{u \in K} w(-u)} \cdot \sup \left\{ \int_K |f(u) \cdot v(x+u)| du : \int_G \Psi(|v(u)|) du \leq 1 \right\} \\ &\geq \frac{w(x)}{\sup_{u \in K} w(-u)} \cdot \|f \cdot \chi_K\|_{\Phi} = w(x) \frac{\|f \cdot \chi_K\|_{\Phi}}{\sup_{u \in K} w(-u)} \end{aligned}$$

elde edilir.  $w$  ağırlık fonksiyonu kompakt kümede sınırlı olduğundan en az bir  $A > 0$  sayısı  $\|f \cdot \chi_K\|_{\Phi} \geq A \cdot \|f \cdot \chi_K\|_{\Phi, w} > 0$  olacak şekilde vardır. Eğer

$$c := \max \left\{ \|f\|_{\Phi, w}, \frac{\|f \cdot \chi_K\|_{\Phi}}{\sup_{u \in K} w(-u)} \right\}$$

seçilirse istenen elde edilir.

Böylece,  $w_1, w_2$  ağırlık fonksiyonları ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_{w_1}^\Phi(G)$  ile  $L_{w_2}^\Phi(G)$  uzayları arasındaki kapsama ilişkisi için aşağıdakiler elde edilir.

**Teorem 4.1.6.3.**  $\Phi$  Young fonksiyonu,  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$w_1 \preceq w_2 \Leftrightarrow L_{w_2}^\Phi(G) \subseteq L_{w_1}^\Phi(G)$$

geçerli olur.

**İspat :**  $\Rightarrow$ :  $w_1$  ve  $w_2$  ağırlık fonksiyonları için  $w_1 \preceq w_2$  kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.1.3.12'de  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$  alınırsa istenen elde edilir.

$\Leftarrow$ :  $L_{w_2}^\Phi(G) \subseteq L_{w_1}^\Phi(G)$  kapsamasının geçerli olduğunu kabul edelim. Bu durumda Önerme 4.1.3.17'den en az bir  $d > 0$  sayısı her  $f \in L_{w_2}^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_{\Phi, w_1} \leq d \cdot \|f\|_{\Phi, w_2} \quad (4.22)$$

olacak şekilde vardır. Eğer  $f \in L_{w_2}^\Phi(G)$  fonksiyonu sabitlenirse Önerme 4.1.6.2'den en az bir  $c_2 > 0$  sayısı her  $x \in G$  için

$$\frac{1}{c_2} \cdot w_2(x) \leq \|L_x f\|_{\Phi, w_2} \leq c_2 \cdot w_2(x) \quad (4.23)$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan  $f \in L_{w_2}^\Phi(G) \subseteq L_{w_1}^\Phi(G)$  olduğundan  $f \in L_{w_1}^\Phi(G)$  olur. Yine Önerme 4.1.6.2'den  $f \in L_{w_1}^\Phi(G)$  için en az bir  $c_1 > 0$  sayısı her  $x \in G$  için

$$\frac{1}{c_1} \cdot w_1(x) \leq \|L_x f\|_{\Phi, w_1} \leq c_1 \cdot w_1(x) \quad (4.24)$$

olacak şekilde vardır. Böylece (4.22), (4.23) ve (4.24) den her  $x \in G$  için

$$\frac{1}{c_1} \cdot w_1(x) \leq \|L_x f\|_{\Phi, w_1} \leq d \cdot \|f\|_{\Phi, w_2} \leq c_2 \cdot d \cdot w_2(x)$$

olur. Bu ise her  $x \in G$  için

$$w_1(x) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot d \cdot w_2(x)$$

olmasıdır. Eğer  $c = c_1 \cdot c_2 \cdot d > 0$  seçilirse  $w_1 \preceq w_2$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.6.4.**  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $w_1, w_2$  de  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$w_1 \approx w_2 \Leftrightarrow L_{w_1}^\Phi(G) = L_{w_2}^\Phi(G)$$

geçerlidir.

## 4.2. $L_w^\Phi(G)$ UZAYININ BANACH CEBİRİ YAPISI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde de  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının öncelikle noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri yapısı ve özellikleri incelendi. Daha sonra,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri yapısı araştırıldı. Girişim işlemine göre Banach cebiri yapısını incelemeyen önce,  $L_w^\Phi(G)$  uzayının cebir yapısından bağımsız olarak girişim işlemi ile ilgili bazı eşitsizlik ve kapsamalar verildi. Sonra bazı koşullar altında  $L_w^\Phi(G)$  uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu gösterildi ve biriminin, sınırlı yaklaşık biriminin varlığı araştırıldı. Yine  $L_w^\Phi(G)$  Banach cebirinin maksimal idealler uzayı belirlendi, radikal cebir olmadığı ispatlandı ve bundan faydalanarak  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin yarıbasit olduğu gösterildi. Son olarak da  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin kapalı idealleri ile ötelemeler altında değişmez alt uzayları arasındaki ilişki verildi. Bu çalışmada, noktasal çarpım işlemi ve girişim işlemine göre Banach cebiri olarak elde edilen  $L_w^\Phi(G)$  cebiri, ağırlıklı Orlicz cebiri diye adlandırılır.

### 4.2.1. $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Noktasal Çarpım İşlemine Göre Banach Cebiri Yapısı

$(X, \Sigma, \mu)$  ölçü uzayı için Orlicz uzaylarının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri yapısı Hudzik tarafından, [14] çalışmasında incelenmiş ve bu çalışmalarda Orlicz uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir.

Bu bölümde de  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının  $\|\cdot\|_{\Phi, w}$  normu ile birlikte noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri yapısı Hudzik ([14]) çalışmasındaki yöntemlerden faydalanılarak incelendi ve  $L_w^\Phi(G)$  uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul belirlendi.

Öncelikle,  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $G$ 'nin diskret olması durumunda  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının  $L_w^1(G)$ ,  $L_w^\infty(G)$  ve  $C_{0,w}(G)$  uzayları ile kapsama ilişkisi verildi. Sonra da  $w$  ağırlık fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlamak üzere ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının noktasal çarpım

işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul araştırıldı. Hudzik [14] çalışmasından uyarlanan bu metodun bu çalışmadan bağımsız olarak  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayları için [1] çalışmasında da kullanıldığı gözlemlenmiştir.

**Lemma 4.2.1.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

- i)  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^\infty(G)$
- ii)  $G$  diskrettir
- iii)  $L_w^1(G) \subseteq L_w^\Phi(G)$

olmak üzere  $i) \Leftrightarrow ii) \Rightarrow iii)$  geçerlidir. Ayrıca,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$  ise  $iii) \Rightarrow ii)$  geçerli olur.

**İspat :**  $i) \Rightarrow ii)$  : Kabul edelim ki  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^\infty(G)$  kapsamı geçerli olsun fakat  $G$  diskret olmasın. Buradan en az bir  $K \subseteq G$  kapanışlı kompakt kümesi ve en az bir  $(U_n) \subseteq K$  açık alt küme dizisi ikişerli ayrık ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$0 < \mu(U_n) < \frac{\mu(K) \cdot \Phi(1)}{2^n \cdot \Phi(2^n)} \quad (4.25)$$

olacak şekilde bulunur. Eğer

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \chi_{U_n}$$

denirse  $f \in L_w^\Phi(G)$  olur. Gerçekten,  $f$  fonksiyonu için  $\text{supp}(f) \subseteq \overline{K}$  ve  $\overline{K}$  kompakt olduğundan,  $w$  ağırlık fonksiyonu  $K$  kümesinde sınırlı, yani

$$\exists A > 0, \exists B > 0, \forall x \in K, A \leq w(x) \leq B$$

olur. Böylece,  $\alpha = \frac{1}{B} > 0$  sayısı için 4.25'den

$$\begin{aligned} \int_G \Phi(\alpha \cdot |f(x)w(x)|) d\mu(x) &\leq \int_G \Phi(\alpha \cdot B \cdot |f(x)|) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} \Phi\left(\frac{1}{B} \cdot B \cdot |f(x)|\right) d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} \Phi(2^n) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2^n) \mu(U_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(K) \cdot \Phi(1)}{2^n \cdot \Phi(2^n)} = \Phi(1) \cdot \mu(K) < +\infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Öte yandan, bu  $f \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonu için

$$x \in U_n \Rightarrow |f(x)w(x)| = |w(x)\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \chi_{U_n}(x)| = |w(x) \cdot 2^n| \geq A \cdot 2^n$$

geçerlidir. Buradan ise herhangi bir  $M > 0$  sayısı alındığında  $n_0 \in \mathbb{N}$  doğal sayısı  $A \cdot 2^{n_0} > M$  olmak üzere

$$U_{n_0} \subseteq \{x \in G : |w(x) \cdot f(x)| > M\}$$

olur. Burada, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $U_n \subseteq G$  açık küme olduğundan  $\mu(U_{n_0}) > 0$  dır. Böylece

$$0 < \mu(U_{n_0}) \leq \mu(\{x \in G : |f(x)w(x)| > M\})$$

bulunur. Buradan  $w \cdot f \notin L^\infty(G)$  yada  $f \notin L_w^\infty(G)$  olur. Bu ise  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^\infty(G)$  olması ile çelişir. Böylece  $i) \Rightarrow ii)$  kısmı ispatlanmış olur.

$ii) \Rightarrow i)$  : Kabul edelim ki  $G$  diskret olsun. Bu durumda  $f \in L_w^\Phi(G)$  alındığında en az bir  $\alpha > 0$  sayısı

$$\int_G \Phi(\alpha \cdot |f(x)w(x)|) d\mu(x) \leq 1$$

olacak şekilde vardır. Burada,  $\mu$   $G$  üzerindeki sayma ölçüsü olduğundan

$$\sum_{x \in G} \Phi(\alpha |f(x)w(x)|) \leq 1$$

olur. Böylece, her  $x \in G$  için  $\Phi(\alpha |f(x)w(x)|) \leq 1$  bulunur.  $\Phi^{-1}$ ,  $\Phi$  Young fonksiyonunun tersi olmak üzere her  $x \in G$  için

$$|f(x)w(x)| \leq \frac{\Phi^{-1}(1)}{\alpha}$$

elde edilir. Bu ise  $f \in L_w^\infty(G)$  olmasıdır.

$ii) \Rightarrow iii)$  : Herhangi bir  $f \in L_w^1(G)$   $f \neq 0$  olacak şekilde alınsın. Bu durumda

$$\|f\|_{1,w} = \sum_{x \in G} |f(x)w(x)| < +\infty$$

olur. Ayrıca  $\Phi$  Young fonksiyonunun konveksliğinden her  $\lambda \in [0, 1]$  için  $\Phi(\lambda.x) \leq \lambda.\Phi(x)$  geçerlidir. Bu eşitsizlik  $\lambda = \frac{|w(x).f(x)|}{\|f\|_{1,w}} \leq 1$  için kullanılırsa da  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$\sum_{x \in G} \Phi\left(\frac{\alpha.|f(x)w(x)|}{\|f\|_{1,w}}\right) \leq \sum_{x \in G} \frac{|f(x)w(x)|}{\|f\|_{1,w}} \Phi(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha)}{\|f\|_{1,w}} \cdot \sum_{x \in G} |f(x)w(x)| \leq \Phi(\alpha) < +\infty$$

bulunur. Böylece  $f \in L_w^\infty(G)$  elde edilir.

Son olarak ise  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$  koşulunu sağlasın.

*iii)  $\Rightarrow$  ii)* : Bu durumda  $L_w^1(G) \subseteq L_w^\Phi(G)$  olduğunu fakat  $G$  nin diskret olmadığını kabul edelim. Böylece, [11], Teorem 11.44 ve [20], Teorem 3.17.1  $\Phi_1 = x$  ve  $\Phi_2 = \Phi$  için kullanılırsa

$$\Phi \prec \Phi_1 (T > 0)$$

olur. Yani, en az bir  $c > 0$  ve en az bir  $T > 0$  sayısı

$$x \geq T \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi_1(c.x) = c.x$$

olacak şekilde vardır. Bu ise  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$  olması ile çelişir.

**Not 4.2.1.2.**  $\Phi$  Young fonksiyonu sürekli olmak üzere  $\Phi$  fonksiyonunun kesin artan olması ile  $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  koşulunu sağlaması denktir. (Rao ve Ren [31]) Buradan, Lemma 4.2.1.1'de  $\Phi$  Young fonksiyonu için sürekli ve kesin artan olması yerine sürekli ve  $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  koşulunu sağlaması da alınabilir.

**Sonuç 4.2.1.3.**  $G = \mathbb{Z}$  ve  $\mu, \mathbb{Z}$  üzerinde sayma ölçüsü olmak üzere  $w, \mathbb{Z}$  üzerinde ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu sürekli, kesin artan olmak üzere  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$  olsun. Bu durumda  $L_w^\Phi(\mathbb{Z}) = l_w^\Phi$  ağırlıklı Orlicz dizi uzaylarını göstermek üzere

$$l_w^1 \subseteq l_w^\Phi \subseteq l_w^\infty$$

kapsaması geçerli olur.

Burada özel olarak,  $\Phi$  Young fonksiyonu yerine  $1 \leq p < +\infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınır da ağırlıklı Lebesgue dizi uzayları  $l_w^p$  için de bilinen

$$l_w^1 \subseteq l_w^p \subseteq l_w^\infty$$

kapsaması elde edilir.

Yine daha sonra kullanacağımız aşağıdaki sonuç da elde edilir.

**Sonuç 4.2.1.4.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlayan bir ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olsun. Bu durumda  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^\infty(G)$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$ 'nin diskret olmasıdır.

**İspat :** İspat  $w \geq 1$  olması kullanılarak Lemma 4.2.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Ayrıca  $G$  yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere  $w$  ağırlık fonksiyonu için  $C_{0,w}(G) := \{f : G \rightarrow K \mid w.f \in C_0(G)\}$  ve her  $f \in C_{0,w}(G)$  için

$$\|f\|_{\infty,w} = \sup\{|f(x)w(x)| : x \in G\}$$

şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

**Önerme 4.2.1.5.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olsun. Bu durumda  $L_w^\Phi(G) \subseteq C_{0,w}(G)$  olması için gerek ve yeter koşul  $G$ 'nin diskret olmasıdır.

**İspat :**  $\Rightarrow$ : Kabul edelim ki  $L_w^\Phi(G) \subseteq C_{0,w}(G)$  olsun.  $C_0(G) \subseteq L^\infty(G)$  ve  $f \in C_{0,w}(G) \Leftrightarrow fw \in C_0(G)$  olduğu kullanılırsa  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^\infty(G)$  elde edilir. Lemma 4.2.1.1'den ise  $G$  diskret olur.

$\Leftarrow$ :  $G$  diskret olsun.  $L_w^\Phi(G) \subseteq C_{0,w}(G)$  kapsamasını göstermek için  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $f \neq 0$  alınsın.  $f \in L_w^\Phi(G)$  olduğundan en az bir  $\alpha > 0$

$$\sum_{x \in G} \Phi(\alpha |f(x)w(x)|) < +\infty$$

olur. Öte yandan  $f \neq 0$  ve  $G$  diskret olduğundan en az bir  $(x_n) \subseteq G$  dizisi

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \neq 0$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan  $w$  ağırlık fonksiyonu için  $w(x) > 0, x \in G$  olduğu kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha |w(x_n) \cdot f(x_n)|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\alpha |w(x) \cdot f(x)|) < +\infty$$

olur. Böylece, her  $\varepsilon > 0$  için en az bir  $K_\varepsilon \subseteq (x_n)$  sonlu kümesi

$$\forall x \in G - K \text{ için } \Phi(\alpha |w(x) \cdot f(x)|) < \Phi(\alpha \cdot \varepsilon)$$

olacak şekilde bulunur. ( Gerçekten, eğer en az bir  $\varepsilon_0 > 0$  sayısı her  $K \subseteq (x_n)$  sonlu kümesi için

$$\exists x_{n_K} \in G - K, |w(x_{n_K}) \cdot f(x_{n_K})| > \varepsilon_0$$

olacak şekilde var olduğu kabul edilirse

$$+\infty = \sum_{x_{n_K} \in G} \Phi(\varepsilon_0) \leq \sum_{x_{n_K} \in G} \Phi(|w(x_{n_K}) \cdot f(x_{n_K})|) < +\infty$$

çelişkisi elde edilirdi. ) Dolayısıyla,  $\Phi$  Young fonksiyonu  $\Phi(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  sağladığından

$$\forall x \in G - K_\varepsilon, |w(x) \cdot f(x)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise  $w \cdot f \in C_0(G)$  ya da  $f \in C_{0,w}(G)$  olmasıdır.

$L_w^\Phi(G)$  uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olduğunu göstermeden önce gerekli olan aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

**Lemma 4.2.1.6.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olsun.  $g : G \rightarrow K$  ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), f \cdot g \in L_w^\Phi(G) \Rightarrow g \in L^\infty(G)$$

**İspat :** Kabul edelim ki her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $f \cdot g \in L_w^\Phi(G)$  fakat  $g \notin L^\infty(G)$  olsun. Buradan

$$\forall M > 0, \mu(x \in G : |g(x)| > M) \neq 0$$

olur. Böylece, Hewitt and Stromberg [13] çalışmasındaki Teorem 20.15'den en az bir  $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}^+$  pozitif kesin artan reel sayı dizisi ve en az bir  $(A_n) \subseteq G$  ikişerli ayrık küme dizisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \mu(A_n) < +\infty$$

ve

$$\forall x \in A_n, \alpha_n^2 < |g(x)|$$

olacak şekilde bulunur. Eğer

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{\Phi, w}}$$

olarak alınırsa kolayca görülür ki,

$$\|f\|_{\Phi, w} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} \cdot \left\| \frac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|_{\Phi, w}} \right\|_{\Phi, w} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} < +\infty$$

ve buradan  $f \in L_w^\Phi(G)$  olur. Hipotezden ise bu  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $f \cdot g \in L_w^\Phi(G)$  yani  $\|f \cdot g\|_{\Phi, w} < +\infty$  elde edilir.

Diğer taraftan her  $x \in A_n$  için  $\alpha_n^2 < |g(x)|$  olduğu kullanılırsa her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\alpha_n \leq \left\| \frac{g \cdot \chi_{A_n}}{\alpha_n \cdot \|\chi_{A_n}\|_{\Phi, w}} \right\|_{\Phi, w} \leq \|f \cdot g\|_{\Phi, w} < +\infty$$

bulunur. Buradan ise

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq \|f \cdot g\|_{\Phi, w} < +\infty$$

olur. Bu ise  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n}$  serisinin yakınsak olması ile çelişir.

**Sonuç 4.2.1.7.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyonu olsun.  $w$  ağırlık fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlamak üzere  $L_w^\Phi(G)$  uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin diskret olmasıdır.

**İspat :**  $\Rightarrow$ : Kabul edelim ki  $G$  diskret olsun.  $L_w^\Phi(G)$  uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olduğunu göstermek için herhangi iki  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Bu durumda,  $w \geq 1$  olduğundan Sonuç 4.2.1.4'den  $g \in L_w^\Phi(G) \subseteq L^\infty(G)$  ve

Teorem 4.1.3.17’de  $\Phi_1(x) = 0, 0 \leq x < 1$  ve  $= +\infty, x \geq 1$  ve  $\Phi_2 = \Phi$  alınırsa en az bir  $c > 0$  sayısı her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|g\|_\infty \leq c \cdot \|g\|_{\Phi,w}$$

olacak şekilde vardır. Buradan  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L^\infty(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{\Phi,w} &= \sup \left\{ \int_G |(f \cdot g)(x) \cdot w(x) \cdot v(x)| dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G \int_G |f(x) \cdot \|g\|_\infty \cdot w(x) \cdot v(x)| dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \sup \left\{ \int_G \int_G |f(x) \cdot w(x) \cdot v(x)| dx \mid \int_G \Psi_3(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &= \|g\|_\infty \cdot \|f\|_{\Phi,w} \leq c \cdot \|g\|_{\Phi,w} \cdot \|f\|_{\Phi,w} < \infty \end{aligned}$$

bulunur ve böylece

$$\|f \cdot g\|_{\Phi,w} \leq c \cdot \|g\|_{\Phi,w} \cdot \|f\|_{\Phi,w}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ : Tersine,  $L_w^\Phi(G)$  noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olsun. Buradan her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\|f \cdot g\|_{\Phi,w} \leq \|f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{\Phi,w} < +\infty$  olur. Sabit bir  $g \in L_w^\Phi(G)$  alındığında

$$\forall f \in L_w^\Phi(G) \text{ için } f \cdot g \in L_w^\Phi(G)$$

geçerli olur. Lemma 4.2.1.6’den ise  $g \in L^\infty(G)$  bulunur. Böylece  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^\infty(G)$  elde edilir. Lemma 4.2.1.4’den ise  $G$  diskret olur.

**Not 4.2.1.8.** Yukarıdaki sonuç göz önüne alınırsa, Lemma 4.2.1.1’e göre  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $\Phi$  sürekli, kesin artan Young fonksiyon ve  $w$  ağırlık fonksiyonu her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlamak üzere  $L_w^\Phi(G)$  uzayının noktasal çarpım işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşul  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^\infty(G)$  olmasıdır elde edilir.

#### 4.2.2. Girişim İle İlgili Eşitsizlikler ve Kapsamalar

$G$  yerel kompakt değişmeli grup olmak üzere  $f, g : G \rightarrow K$  ölçülebilir fonksiyonları için “\* girişim (convolution) işlemi

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-y).g(y)dm(y), x \in G$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer integral sonlu ise  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için girişim işlemi iyi tanımlıdır. Bu bölümde,  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere Banach cebiri yapısından bağımsız olarak  $L_w^\Phi(G)$  uzaylarında girişim işlemi ile ilgili bazı eşitsizlikler ve kapsamalar verildi. Böylece Lebesgue uzaylarındaki girişim ile ilgili eşitsizlikler, [28], de genelleştirilmiş oldu.

**Teorem 4.2.2.1.**  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  Young fonksiyonları ve  $w$   $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olmak üzere her  $x \geq 0$  için

$$\Phi_1^{-1}(x) \cdot \Phi_2^{-1}(x) \leq x \cdot \Phi_3^{-1}(x) \quad (4.26)$$

sağlansın.(Burada  $\Phi_1^{-1}(x) = \inf\{y > 0 | \Phi_1(y) > x\}$  dir.) Bu durumda

$$f \in L_w^{\Phi_1}(G) \text{ ve } g \in L_w^{\Phi_2}(G) \Rightarrow f * g \in L_w^{\Phi_3}(G)$$

ve

$$\|f * g\|_{\Phi_3, w} \leq \|f\|_{\Phi_1, w} \cdot \|g\|_{\Phi_2, w}$$

olur.

**İspat :**  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  Young fonksiyonları için (4.26) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Eğer  $f \in L_w^{\Phi_1}(G)$  ve  $g \in L_w^{\Phi_2}(G)$  alınırsa  $wf \in L^{\Phi_1}(G)$  ve  $w.g \in L^{\Phi_2}(G)$  olur. Rao ve Ren [30]'den ise  $wf * wg \in L^{\Phi_3}(G)$  ve

$$\|wf * wg\|_{\Phi_3} \leq \|wf\|_{\Phi_1} \cdot \|wg\|_{\Phi_2} = \|f\|_{\Phi_1, w} \cdot \|g\|_{\Phi_2, w} \quad (4.27)$$

olduğu biliniyor.

Öte yandan,  $f \in L_w^{\Phi_1}(G)$  ve  $g \in L_w^{\Phi_2}(G)$  için

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\Phi_3, w} &= \sup \left\{ \int_G |(f * g)(x).w(x).h(x)|dx \mid \int_G \Psi_3(|h(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G \int_G |f(x-y).g(y).w(x).h(x)|dy.d x \mid \int_G \Psi_3(|h(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G \int_G |f(x-y).w(x-y).g(y).w(y)|dy.d x \mid \int_G \Psi_3(|h(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &= \| |w.f| * |wg| \|_{\Phi_3} \end{aligned}$$

geçerlidir. Burada, (4.27) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\Phi_3, w} &\leq \| |w \cdot f| * |wg| \|_{\Phi_3} = \|wf * wg\|_{\Phi_3} \\ &\leq \|wf\|_{\Phi_1} \cdot \|wg\|_{\Phi_2} = \|f\|_{\Phi_1, w} \cdot \|g\|_{\Phi_2, w} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $f * g \in L_w^{\Phi_3}(G)$  olur ve ispat tamamlanır.

**Not 4.2.2.2.**  $1 < p, q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$  olmak üzere Teorem 4.2.2.1'de  $\Phi_1(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $\Phi_2(x) = \frac{x^q}{q}$  ve  $\Phi_3(x) = \frac{x^r}{r}$  alınırsa Lebesgue uzayları için bilinen aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

**Sonuç 4.2.2.3.** [28]  $w, G$  üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

- $f \in L_w^p(G)$  ve  $g \in L_w^q(G)$  ise  $f * g \in L_w^r(G)$  ve

$$\|f * g\|_{r, w} \leq \|f\|_{p, w} \cdot \|g\|_{q, w}$$

olur.

- Özel olarak  $w = 1$  olması durumunda ise  $f \in L^p(G)$  ve  $g \in L^q(G)$  ise  $f * g \in L^r(G)$  ve

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.2.4.**  $\Phi \in \Delta_2$  ve  $\Psi \in \Delta_2$  tamlayan Young fonksiyonları ve  $w$  ağırlık fonksiyonu simetrik (her  $x \in G$  için  $w(-x) = w(x)$ ) olmak üzere

$$f \in L_w^\Phi(G) \text{ ve } g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G) \Rightarrow f * g \in C_{0, w^{-1}}(G)$$

ve

$$\|f * g\|_{\infty, w^{-1}} \leq 2 \cdot \|f\|_{\Phi, w} \cdot \|g\|_{\Psi, w^{-1}}$$

olur.

**İspat :**  $\Phi, \Psi$  tamlayan Young fonksiyonları hipotezdeki koşulları sağlamak üzere  $w$  simetrik ağırlık fonksiyonu olsun.  $w$  simetrik olduğundan her  $x, y \in G$  için

$$w^{-1}(x) \leq w(x - y)w^{-1}(y)$$

geçerlidir. Buradan ise her  $x \in G$  için

$$\begin{aligned} |w^{-1}(f * g)(x)| &\leq \int_G \left| \frac{1}{w(x)} f(x - y)g(y) dy \right| \\ &\leq \int_G \left| w(w - y) f(x - y) \frac{g(y)}{w(y)} \right| dy \\ &= (|wf| * |w^{-1}g|)(x) \end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir.

Şimdi  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  alınsın. Buradan  $fw \in L^\Phi(G)$  ve  $\frac{g}{w} \in L^\Psi(G)$  olur. Hölder eşitsizliği kullanılırsa, her  $x \in G$  için

$$\begin{aligned}
|(|fw| * |gw^{-1}|)(x)| &= \left| \int_G f(x-y)w(x-y).g(y)w^{-1}(y).dy \right| \\
&\leq \int_G |f(y)w(y)g(x+y)w^{-1}(x+y)|dy \\
&= \int_G |(fw)(y).L_{-x}(gw^{-1})(y)|dy \\
&\leq 2. \|fw\|_\Phi. \|L_{-x}(gw^{-1})\|_\Psi \\
&= 2. \|f\|_{\Phi,w}. \|g\|_{\Psi,w^{-1}} < +\infty
\end{aligned} \tag{4.29}$$

olur. Böylece, (4.28) ve (4.29) 'den her  $x \in G$  için

$$|w^{-1}(f * g)(x)| \leq (|fw| * |w^{-1}g|)(x) \leq 2. \|f\|_{\Phi,w}. \|g\|_{\Psi,w^{-1}}$$

elde edilir. Buradan  $w^{-1}(f * g) \in L^\infty(G)$  bulunur.

Yine  $w$  ağırlık fonksiyonunun simetrik olduğu kullanılırsa, Hölder eşitsizliğinden her  $x, t \in G$  için

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x) - (f * g)(t)| &= \left| \int_G f(x-y)g(y)dy - \int_G f(t-y)g(y)dy \right| \\
&= \left| \int_G (f(x-y) - f(t-y))g(y)dy \right| \\
&= \int_G |(L_{-x}f(-y) - L_{-t}f(-y))w(-y)g(y)w^{-1}(y)|dy \\
&\leq \|(L_{-x}f - L_{-t}f)w\|_\Phi. \|gw^{-1}\|_\Psi \\
&= \|(L_{-x}f - L_{-t}f)\|_{\Phi,w}. \|g\|_{\Psi,w^{-1}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. Burada  $G$  grubundan  $L_w^\Phi(G)$  uzayına giden  $x \rightarrow L_x f$  fonksiyonu Teorem 4.1.6.1'deki anlamda düzgün sürekli olduğundan

$$\|(L_{-x}f - L_{-t}f)\|_{\Phi,w} < \frac{\varepsilon}{\|g\|_{\Psi,w^{-1}}}$$

bulunur. Böylece  $f * g$  fonksiyonunun  $G$  üzerinde sürekli olur. Öte yandan  $G$  üzerindeki  $w$  ağırlık fonksiyonu da sürekli olduğundan  $\frac{f * g}{w}$  fonksiyonu sürekli bulunur.

Son olarak  $f * g$  fonksiyonunun  $C_{0,w^{-1}}(G)$  uzayına ait olduğunu göstermek için  $\frac{f*g}{w}$  fonksiyonunun sonsuzda sıfır olduğunu gösterelim. Bunu aşağıdaki iki durumu inceleyerek göstereceğiz. Birinci durumda  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  fonksiyonları için  $f, g \in C_c(G)$  olsun. Bu durumda  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$$

olduğundan  $f * g$  fonksiyonu da kompakt destekli yani  $f * g \in C_c(G)$  olur. Böylece,  $w$  ağırlık fonksiyonunun kompakt kümede sınırlı olduğu da kullanılırsa  $f * g \in C_c(G) \subseteq C_{0,w^{-1}}(G)$  elde edilir.

İkinci durumda  $f$  ve  $g$  fonksiyonları kompakt destekli olmasın. Bu durumda,  $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_\Phi} = L^\Phi(G)$  ve  $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_\Psi} = L^\Psi(G)$  olmasından

$$\exists (f_n) \subseteq C_c(G), \|f_n - f\|_{\Phi,w} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

ve

$$\exists (g_n) \subseteq C_c(G), \|g_n - g\|_{\Psi,w^{-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

olur. Burada  $(|f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right|) \subseteq C_c(G)$  dizisi gözönüne alınır, Hölder eşitsizliğinden her  $x \in G$  için

$$\begin{aligned} \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right| \right) (x) - \left( |f w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| &\leq \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right| \right) (x) - \left( |f_n w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| \\ &\quad + \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) - \left( |f w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| \\ &= \left| (f_n w * \left( \left|\frac{g_n}{w}\right| - \left|\frac{g}{w}\right| \right))(x) \right| + \left| ((|f_n w| - |f w|) * \left|\frac{g}{w}\right|)(x) \right| \\ &\leq 2 \cdot \left( \|f_n w\|_\Phi \cdot \left\| \left|\frac{g_n}{w}\right| - \left|\frac{g}{w}\right| \right\|_\Psi + \|f_n w - f w\|_\Phi \cdot \left\| \left|\frac{g}{w}\right| \right\|_\Psi \right) \\ &= 2 \cdot \|f_n\|_{\Phi,w} \cdot \|g_n - g\|_{\Psi,w^{-1}} + 2 \cdot \|f_n - f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{\Psi,w^{-1}} \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\sup_{x \in G} \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right| \right) (x) - \left( |f w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| \leq 2 \cdot \|f_n\|_{\Phi,w} \cdot \|g_n - g\|_{\Psi,w^{-1}} + 2 \cdot \|f_n - f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{\Psi,w^{-1}}$$

olur. Burada  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\Phi,w} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_{\Psi,w^{-1}} = 0$  olduğundan

$$\sup_{x \in G} \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right| \right) (x) - \left( |f w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

elde edilir. Bu ise

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in G} \left| \left( |f_n w| * \left|\frac{g_n}{w}\right| \right) (x) - \left( |f w| * \left|\frac{g}{w}\right| \right) (x) \right| < \varepsilon$$

olmasıdır. Böylece  $\varepsilon > 0$  sayısı alındığında  $K_\varepsilon = \text{supp}(f_{N_\varepsilon} w * \frac{g_{N_\varepsilon}}{w}) \subseteq G$  kompakt kümeleri için

$$x \notin K_\varepsilon \Rightarrow \left| \left( |fw| * \left| \frac{g}{w} \right| \right) (x) \right| < \varepsilon$$

olur. Bu ise  $|fw| * \left| \frac{g}{w} \right|$  fonksiyonunun sonuzda sıfır olmasıdır. Böylece  $|fw| * \left| \frac{g}{w} \right| \in C_0(G)$  elde edilir. Eşitsizlik (4.28) den ise  $\frac{f * g}{w} \in C_0(G)$  elde edilir.

**Not 4.2.2.5.** Teorem 4.2.2.4'de,  $1 < p < \infty$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  ve  $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$  alınırsa ağırlıklı Lebesgue uzayları için bilinen aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.2.6.** [28]  $w, G$  üzerinde tanımlı simetrik bir ağırlık fonksiyonu ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere

- $f \in L_w^p(G)$  ve  $g \in L_w^q(G)$  ise  $f * g \in C_{0,w^{-1}}(G)$  ve

$$\|f * g\|_{\infty, w^{-1}} \leq \|f\|_{p, w} \cdot \|g\|_{q, w}$$

olur.

- Özel olarak  $w = 1$  olması durumunda ise  $f \in L^p(G)$  ve  $g \in L^q(G)$  ise  $f * g \in C_0(G)$  ve

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

elde edilir.

### 4.2.3. $L_w^\Phi(G)$ Uzayının Girişim İşlemine Göre Banach Cebiri Yapısı

$G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere Hudzik, Kamińska ve Musielak, [15] çalışmasında  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olması için gerek ve yeter koşulun  $L^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  olduğunu göstermiştir. Buradan yola çıkarak biz de  $w$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri yapısını inceleyeceğiz.

$G$  kompakt grup olduğunda  $L_w^\Phi(G) = L^\Phi(G)$  Orlicz uzayı elde edilir ve bu durumda  $L^\Phi(G)$  Orlicz uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri yapısı [15] çalışmasında incelenmiştir.

$G$  keyfi yerel kompakt değişmeli grup olduğunda ise  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri yapısı ise aşağıda incelenecektir.

**Teorem 4.2.3.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olsun. Eğer  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  ise  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  uzayı girişim işlemine göre değişmeli Banach cebiri olur.

**İspat:**  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamasının geçerli olduğunu kabul edelim. Sonuç 4.1.3.18'den en az bir  $c > 0$  sayısı her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|g\|_{1,w} \leq c \cdot \|g\|_{\Phi,w} \quad (4.31)$$

olacak şekilde vardır. Herhangi iki  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonu için Fubini teoremi,  $w(x+y) \leq w(x) \cdot w(y)$ ,  $x, y \in G$  olduğu ve (4.31) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\Phi,w} &= \|w \cdot (f * g)\|_{\Phi} = \sup \left\{ \int_G |w(x)(f * g)(x)v(x)| dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |w(x) \left( \int_G f(x-y)g(y) dy \right) v(x)| dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G \int_G |w(x)f(x-y)g(y)v(x)| dy \cdot dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G \int_G |w(x-y)w(y)f(x-y)g(y)v(x)| dy \cdot dx \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G |g(y)w(y)| \left( \int_G |w(x-y)f(x-y)v(x)| dx \right) \cdot dy \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_G |g(y)w(y)| \cdot \|wf\|_{\Phi} \cdot dy \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &= \|wf\|_{\Phi} \cdot \sup \left\{ \|wg\|_1 \mid \int_G \Psi(|v(x)|) dx \leq 1 \right\} \\ &\leq \|wf\|_{\Phi} \cdot \|wg\|_1 = \|f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{1,w} \leq c \cdot \|f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{\Phi,w} < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için  $f * g \in L_w^\Phi(G)$  olur ve

$$\|f * g\|_{\Phi,w} \leq c \cdot \|f\|_{\Phi,w} \cdot \|g\|_{\Phi,w}$$

elde edilir. Yani  $(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi,w})$  uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri olur. Ayrıca  $G$  grubu değişmeli olduğundan  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için  $f * g = g * f$  olacağından  $L_w^\Phi(G)$  değişmeli Banach cebiri olur.

Bu  $L_w^\Phi(G)$  Banach cebiri ağırlıklı Orlicz cebiri olarak adlandırılacaktır.

**Uyarı 4.2.3.2.** Teorem 4.2.3.1'in tersi genel olarak doğru değildir. Yani, öyle  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $w$  ağırlık fonksiyonu vardır ki  $L_w^\Phi(G)$  uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri olmasına rağmen  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamı geçerli olmaz.

**Örnek 4.2.3.3.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$ ,  $G$  üzerinde ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $1 < p < \infty$  Young fonksiyonu için  $L_w^\Phi(G) = L_w^p(G)$  olur. Burada  $w$  ağırlık fonksiyonunun  $G$  üzerinde hemen hemen her yerde  $w^{-q} * w^{-q} \leq w^{-q}$  eşitsizliğini sağlaması durumunda  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu biliniyor. ( Kuznetsova, [21] ) Öte yandan  $G$  kompakt olmayan yerel kompakt değişmeli grup ( örneğin  $G = \mathbb{R}$  ) olmak üzere Lebesgue uzaylarındaki kapsama özelliklerinden  $L_w^p(G) \not\subseteq L_w^1(G)$  olur. ( Örneğin,  $G = \mathbb{R}$  ve  $p \geq 2$  olmak üzere  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{p}}}$  fonksiyonu için  $f \in L^p(\mathbb{R})$  dir fakat  $f \notin L^1(\mathbb{R})$  olur. Buradan ise  $L_w^p(\mathbb{R}) \not\subseteq L_w^1(\mathbb{R})$  olmalıdır.

**Not 4.2.3.4.** Ayrıca, [15] çalışmasından faydalanarak  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $G$  kompakt olmayan yerel kompakt değişmeli grup ise ağırlıklı uzaylar için  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamının geçerli olması için gerek ve yeter koşulun  $\Phi'_+(0) > 0$  olması olduğu bulunur. (Burada  $\Phi'_+$  sağ türev fonksiyonunu göstermektedir.) Böylece, aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.3.5.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olsun. Eğer  $\Phi'_+(0) > 0$  ise  $L_w^\Phi(G)$  uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri olur.

**Uyarı 4.2.3.6.** Öte yandan,  $\Phi$  sürekli Young fonksiyonu için Rao ve Ren [31] çalışmasında gösterilmiştir ki,  $\Phi'_+(0) > 0$  koşulu sağlanıyorsa  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamı geçerlidir. Gerçekten de  $\Phi$  Young fonksiyonu sürekli ve  $\Phi'_+(0) > 0$  koşulunu sağlandığından  $\Phi(x) = \int_0^x \Phi'_+(t).dt$  şeklinde yazılır. Ayrıca  $\Phi'_+$  sağ türev fonksiyonunun artan olmasından dolayı her  $x \geq 0$  için

$$x.\Phi'_+(0) = \int_0^x \Phi'_+(0).dt \leq \int_0^x \Phi'_+(t).dt = \Phi(x)$$

olur. Bu eşitsizlikte  $x$  yerine  $|f(x)w(x)|$  yazılırsa da

$$\Phi'_+(0). \int_G |f(x)w(x)|d\mu(x) \leq \int_G \Phi(|f(x)w(x)|)d\mu(x)$$

bulunur. Buradan  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  ve yine  $L_w^\Phi(G)$  uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri olur. Burada  $\Phi$  fonksiyonunun süreklilik koşulu kaldırılabilir olduğu Sonuç

4.2.3.5'den elde edilir.

**Uyarı 4.2.3.7.** Rao ve Ren [31] çalışmasında  $\Phi$  sürekli Young fonksiyonu ve  $\Phi'_+(0) > 0$  ise  $L_w^\Phi(G)$  uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğunu göstermiştir. Fakat  $L_w^\Phi(G)$  uzayının Rao ve Ren çalışmasındaki tanımı ile bu tez çalışmasındaki tanımı farklıdır.

**Uyarı 4.2.3.8.** Eğer  $\Phi$  Young fonksiyonu için Sonuç 4.2.3.5'deki  $\Phi$  sürekli ve  $\Phi'_+(0) > 0$  koşulları kaldırılırsa Teorem 4.2.3.1'deki ispat tekniği kullanılarak  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının Banach  $L_w^1(G)$ -modül olduğu bulunur. Yani  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L_w^1(G)$  için

$$\|f * g\|_{\Phi,w} \leq \|f\|_{\Phi,w} \|g\|_{1,w}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  kapsamasının geçerli olması gerekmez.

#### 4.2.4. $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinde Birim ve Yaklaşık Birim

Ağırlıklı Lebesgue cebiri  $L_w^p(G)$  nin girişim işlemine göre sınırlı yaklaşık biriminin varlığı Kuznetsova [22] çalışmasında incelenmiştir. Bu bölümde,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin sınırlı yaklaşık biriminin ve biriminin varlığı araştırıldı ve gösterildi ki  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  sürekli Young fonksiyonu  $\Phi \in \Delta_2$  koşulunu sağlamak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin yaklaşık birimi vardır. Ayrıca,  $G$  grubu diskret değil iken  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  normuna göre sınırlı yaklaşık birime sahip olmadığı ve  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin birimli olması için gerek ve yeter koşulun  $G$ 'nin diskret olması olduğu ispatlandı.

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece  $\Phi$  Young fonksiyonu sürekli ve  $\Phi \in \Delta_2$  olduğu kabul edilecektir.

**Teorem 4.2.4.1.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan yaklaşık birimi vardır. Yani, en az bir  $(u_\alpha)$  ağı

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), \|f * u_\alpha - f\|_{\Phi,w} \rightarrow 0$$

olacak şekilde vardır. Ayrıca bu yaklaşık birim  $\|\cdot\|_{1,w}$  normuna göre sınırlıdır.

**İspat:**  $G$  yerel kompakt grup olduğundan  $e \in G$ 'nin  $K \subseteq G$  kompakt bir komşuluğu vardır. Eğer

$$\mathcal{V} = \{V \mid V \in \mathcal{V}(e), V \subseteq K\}$$

denir ve  $\mathcal{V}$  kümesi üzerinde  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$  için  $V_1 \geq V_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$  şeklinde bir bağıntı tanımlanırsa,  $(\mathcal{V}, \geq)$  yönlendirilmiş küme olur. Bu durumda her  $V \in \mathcal{V}$  için

$$e_V = \frac{\chi_V}{\mu(V)}$$

alınırsa,  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}}$ ,  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin yaklaşık birimi olur. Gerçekten, herhangi bir  $f \in L_w^\Phi(G)$  alındığında  $x \mapsto L_x f$  fonksiyonu  $e \in G$ 'de sürekli olduğundan

$$\forall \varepsilon, \exists W \in \mathcal{V}, \forall x \in W, \|L_x f - f\|_{\Phi,w} < \varepsilon$$

olur. Burada  $V \geq W$  ve  $V \in \mathcal{V}$  olmak üzere Fubini teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|f * e_V - f\|_{\Phi,w} &= \|w \cdot (f * e_V - f)\|_{\Phi} \\ &= \sup \left\{ \int_G w(y) |(f * e_V)(y) - f(y)| \cdot |v(y)| dy \mid \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G w(y) \left| \int_G f(y-x) \frac{\chi_V(x)}{\mu(V)} dx - \frac{1}{\mu(V)} \int_V f(y) dx \right| \cdot |v(y)| dy \right. \\ &\quad \left. \mid \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G w(y) \left| \frac{1}{\mu(V)} \int_V (f(y-x) - f(y)) dx \right| \cdot |v(y)| dy \mid \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \frac{1}{\mu(V)} \left\{ \int_V \left( \int_G w(y) |f(y-x) - f(y)| |v(y)| dy \right) dx \mid \int_G \Psi(|v(y)|) dy \leq 1 \right\} \\ &\leq \frac{1}{\mu(V)} \int_V \|w \cdot (L_x f - f)\|_{\Phi} dx = \frac{1}{\mu(V)} \int_V \|L_x f - f\|_{\Phi,w} dx \\ &< \frac{1}{\mu(V)} \int_V \varepsilon dx = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $e_V = \frac{\chi_V}{\mu(V)}$  ağı  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin yaklaşık birimi olur.

Ayrıca yukarıda varlığı gösterilen  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}}$  yaklaşık birimi  $\|\cdot\|_{1,w}$  normuna göre sınırlıdır. Gerçekten  $w$  ağırlık fonksiyonu sürekli olduğundan kompakt kümede

sınırlıdır. Buradan  $K \subseteq G$  kompakt kümesi için de en az bir  $B > 0$  sayısı her  $x \in K$  için  $w(x) \leq B$  olacak şekilde bulunur. Böylece her  $V \in \mathcal{V}$  için

$$\|e_V\|_{1,w} = \int_G |w(x)e_V(x)| \cdot d\mu(x) = \frac{1}{\mu(V)} \int_V w(x) \cdot d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(V)} \int_V B \cdot d\mu(x) = B$$

elde edilir.

**Not 4.2.4.2.**  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}}$  yaklaşık birimi  $\|\cdot\|_{1,w}$  normuna göre sınırlı olmasına rağmen  $G$  diskret değil ise  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  normuna göre sınırlı yaklaşık birime sahip değildir.  $G$  grubu diskret olması için gerek ve yeter koşul ise  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin birimli olmasıdır. Şimdi bunları göstermek için gerekli olan aşağıdaki önermeleri verelim.

**Önerme 4.2.4.3.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun.  $\Psi$  tamlayan Young fonksiyonu için  $\Psi \in \Delta_2$  olmak üzere  $L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  dual uzayı aşağıdaki şekilde tanımlı “ $\circ$ ” işlemine göre bir  $L_w^\Phi(G)$ -modül olur. Her  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $h \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için  $h \circ f \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  çarpımı her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\langle g, h \circ f \rangle = \langle f * g, h \rangle$  olarak tanımlanır ve açık olarak girişim ile ifade edilirse de

$$h \circ f = \check{f} * h$$

şeklindedir. Burada her  $x \in G$  için  $\check{f}(x) = f(-x)$  ile tanımlıdır.

**İspat :**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_{w^{-1}}^\Psi(G) \times L_w^\Phi(G) &\rightarrow L_{w^{-1}}^\Psi(G) \\ (h, f) &\mapsto h \circ f \end{aligned}$$

işlemini gözönüne alalım.

Ayrıca,  $L_w^\Phi(G)$  uzayının yansımali olduğu ve Teorem 2.0.0.1 kullanılırsa, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|h \circ f\|_{\Psi, w^{-1}}^\circ &= \sup_{g \neq 0} \frac{|\langle h \circ f, g \rangle|}{\|g\|_{\Phi, w}} \\ &= \sup_{g \neq 0} \frac{|\langle h, f * g \rangle|}{\|g\|_{\Phi, w}} \\ &\leq \sup_{g \neq 0} \frac{2\|h\|_{\Psi, w^{-1}} \cdot \|f * g\|_{\Phi, w}}{\|g\|_{\Phi, w}} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan,  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\|f * g\|_{\Phi, w} \leq \|f\|_{\Phi, w} \cdot \|g\|_{\Phi, w}$  olduğu kullanılırsa da

$$\|h \circ f\|_{\Psi, w^{-1}}^\circ \leq 2 \cdot \|h\|_{\Psi, w^{-1}} \cdot \|f\|_{\Phi, w}$$

bulunur. Son olarak da  $\|\cdot\|_{\Psi, w^{-1}} \leq 2\|\cdot\|_{\Psi, w^{-1}}^{\circ}$  olduğundan

$$\|h \circ f\|_{\Psi, w^{-1}} \leq 2\|h \circ f\|_{\Psi, w^{-1}}^{\circ} \leq 4\|h\|_{\Psi, w^{-1}} \cdot \|f\|_{\Phi, w}$$

ve böylece  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  uzayının  $L_w^{\Phi}(G)$ -modül olduğu elde edilir.

**Uyarı 4.2.4.4.**  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  ve  $L_w^{\Psi}(G)$  uzayları için

$$L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \subseteq L_{w^{-1}}^{\infty}(G) \Rightarrow L_w^{\Psi}(G) \subseteq L_w^{\infty}(G)$$

geçerlidir. Gerçekten ilk kapsamının doğru olduğu kabul edilsin. Her  $f \in L_w^{\Psi}(G)$  için  $fw \in L^{\Psi}(G)$  olduğundan

$$\left(\frac{f \cdot w}{w}\right) \cdot w \in L^{\Psi}(G)$$

olur. Buradan ise  $(fw)w \in L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \subseteq L_{w^{-1}}^{\infty}(G)$  ve böylece  $(fw)w \in L_{w^{-1}}^{\infty}(G)$  olur. Bu ise  $fw \in L^{\infty}(G)$  ya da eşdeğer olarak  $f \in L_w^{\infty}(G)$  olmasıdır.

**Teorem 4.2.4.5.**  $G$  diskret değil ve  $\Psi$  tamlayan fonksiyonu için  $\Psi \in \Delta_2$  ise  $L_w^{\Phi}(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri  $\|\cdot\|_{\Phi, w}$  normuna göre sınırlı yaklaşık birime sahip değildir.

**İspat :**  $L_w^{\Phi}(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Önerme 4.2.4.3'den  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  uzayının  $L_w^{\Phi}(G)$  Banach cebiri üzerinde

$$h \circ f = \check{f} * h, \check{f}(x) = f(-x), f \in L_w^{\Phi}(G), h \in L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$$

işlemine göre Banach  $L_w^{\Phi}(G)$ -modül olduğu biliniyor. Kabul edelim ki  $L_w^{\Phi}(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin  $L_w^{\Phi}(G)$  uzayında sınırlı yaklaşık birimi var olsun. Bu durumda Hewitt ([12] , Teorem 32.22)'den  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G)$  kümesi  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  uzayının kapalı alt uzayı olur. Yani

$$\overline{L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G)}^{\|\cdot\|_{\Psi, w^{-1}}} = L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G) \quad (4.32)$$

geçerli olur.

Öte yandan,  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G)$  uzayı  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  uzayında yoğundur. Bunu göstermek için ise  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G)$  alt uzayının  $K \subseteq G$  kompakt küme olmak üzere tüm  $\chi_K$  karakteristik fonksiyonlarının oluşturduğu  $\{\chi_K | K \subseteq G \text{ kompakt}\}$  kümesinde yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü,  $\Psi \in \Delta_2$  olduğundan  $\{\chi_K | K \subseteq G \text{ kompakt}\}$  kümesi de  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  uzayında yoğundur.

Bunun için  $K \subseteq G$  kompakt kümesi alınsın. Böylece  $e \in G$  birim elemanının kapanışı kompakt ve simetrik ( $V = -V$ ) bir  $V$  komşuluğu için

$$\check{\chi}_V = \chi_{-V} \in L_w^\Phi(G) \text{ ve } \chi_{K+V} \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$$

alınırsa ve

$$f_V = \frac{1}{\mu(V)}(\chi_{K+V} * \chi_V) = \frac{1}{\mu(V)}(\check{\chi}_V \circ \chi_{K+V})$$

olarak tanımlanırsa  $\check{\chi}_V \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  ve  $\chi_{K+V} \in L_w^\Phi(G)$  olduğundan

$$f_V \in L_{w^{-1}}^\Psi(G) \circ L_w^\Phi(G)$$

olur. Ayrıca  $f_V$  fonksiyonunun tanımından kolayca görülür ki

$$\chi_K \leq f_V \leq \chi_{K+V+V}$$

geçerlidir. Buradan ise  $0 \leq f_V - \chi_K \leq \chi_{K+V+V} - \chi_K$  ve böylece

$$\|\chi_K - f_V\|_{\Psi, w^{-1}} \leq \|\chi_K - \chi_{K+V+V}\|_{\Psi, w^{-1}} \quad (4.33)$$

sağlanır. Burada  $w$  ağırlık fonksiyonu  $K' = K + \bar{V} + \bar{V} \setminus K$  kompakt kümesinde alttan sıfır ile sınırlı olduğundan en az bir  $A > 0$  sayısı her  $x \in K + V + V \setminus K \subseteq K'$  için  $A \leq w(x)$  olacak şekilde bulunur. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \|\chi_K - \chi_{K+V+V}\|_{\Psi, w^{-1}} &= \sup \left\{ \int_G \frac{1}{w(x)} \cdot |\chi_K(x) - \chi_{K+V+V}(x)| \cdot |v(x)| d\mu \right. \\ &\quad \left. : \int_G \Phi(|v(x)|) d\mu \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{K+V+V \setminus K} \frac{1}{w(x)} \cdot |v(x)| d\mu : \int_G \Phi(|v(x)|) d\mu \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{K+V+V \setminus K} \frac{1}{A} \cdot |v(x)| d\mu : \int_G \Phi(|v(x)|) d\mu \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Diğer taraftan,  $K' \subseteq G$  kompakt olduğundan Sonuç 4.1.3.28'den  $L^\Phi(K') \subseteq L^1(K')$  geçerlidir. Böylece,  $\int_G \Phi(|v(x)|) d\mu \leq 1$  sağlayan  $v \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonları için

$$\|\chi_K - \chi_{K+V+V}\|_{\Psi, w^{-1}} \leq \frac{1}{A} \cdot \int_{K+V+V \setminus K} |v(x)| d\mu < +\infty$$

olur. (4.33) eşitsizliğinden ise

$$\|\chi_K - f_V\|_{\Psi, w^{-1}} \leq \|\chi_K - \chi_{K+V+V}\|_{\Psi, w^{-1}} \leq \frac{1}{A} \cdot \int_{K+V+V \setminus K} |v(x)| d\mu$$

bulunur.  $f_V = \frac{1}{\mu(V)}(\chi_{K+V} * \chi_V)$  olduğundan  $\mu(V) \rightarrow 0$  için limite geçilirse de

$$\|\chi_K - (\chi_{K+V} * \frac{\chi_V}{\mu(V)})\|_{\Psi, w^{-1}} \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu ise  $L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \circ L_w^{\Phi}(G) \subseteq L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  alt kümesinin  $\{\chi_K | K \subseteq G \text{ kompakt}\}$  kümesinde yoğun olmasıdır. Karakteristik fonksiyonlar kümesi ise  $L_{w^{-1}}^{\Psi}$  uzayında yoğun olduğundan

$$\overline{L_{w^{-1}}^{\Psi} \circ L_w^{\Phi}(G)}^{\|\cdot\|_{\Psi, w^{-1}}} = L_{w^{-1}}^{\Psi}$$

olur. (4.32) eşitliğinden ise

$$L_{w^{-1}}^{\Psi} \circ L_w^{\Phi}(G) = L_{w^{-1}}^{\Psi}$$

elde edilir.

Buradan, herhangi bir  $h \in L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  alınırsa en az bir  $f \in L_w^{\Phi}(G)$  ve en az bir  $g \in L_{w^{-1}}^{\Psi}(G)$  fonksiyonu

$$h = g \circ f = \check{f} * g$$

olacak şekilde bulunur. Böylece, her  $x \in G$  için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |(\check{f} * g)(x)| = \left| \int \check{f}(x-y)g(y)d\mu(y) \right| \\ &= \left| \int f(y-x)g(y)d\mu(y) \right| \leq \int |L_x f(y)g(y)|d\mu(y) \\ &\leq 2 \cdot \|L_x f\|_{\Phi, w} \|g\|_{\Psi, w^{-1}} \leq 2 \cdot w(x) \cdot \|f\|_{\Phi, w} \|g\|_{\Psi, w^{-1}} \end{aligned}$$

olur. Buradan ise her  $x \in G$  için

$$\frac{|h(x)|}{w(x)} \leq 2 \cdot \|f\|_{\Phi, w} \|g\|_{\Psi, w^{-1}} < \infty$$

ve böylece  $\frac{h}{w} \in L^{\infty}(G)$  elde edilir. Buradan

$$L_{w^{-1}}^{\Psi}(G) \subseteq L_{w^{-1}}^{\infty}(G)$$

kapsaması geçerli olur. Uyarı 4.2.4.4'den ise

$$L_w^{\Psi}(G) \subseteq L_w^{\infty}(G)$$

bulunur. Lemma 4.2.1.1'den ise  $G$  diskret olur. Bu ise hipotez ile çelişir.

**Sonuç 4.2.4.6.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin birimli olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin diskret olmasıdır.

**İspat :**  $\Leftarrow$ : Kabul edelim ki  $G$  diskret olsun. Bu durumda  $\mu$ ,  $G$  üzerinde sayma ölçüsüdür.  $e$ ,  $G$  grubunun birim elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} \chi_e : G &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \chi_e(x) = \begin{cases} 1 & , x = e \\ 0 & , x \neq e \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı  $\chi_e$  karakteristik fonksiyonu alınsın.  $\chi_e \in L_w^\Phi(G)$  olmak üzere her  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $x \in G$  için

$$(\chi_e * f)(x) = \int_G \chi_e(x-y) \cdot f(y) \cdot d\mu(y) = \sum_{y \in G} \chi_e(x-y) \cdot f(y) = f(x)$$

olur. Böylece  $\chi_e$ ,  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin birimi olur.

$\Rightarrow$ :  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri birimli ve birimi de  $g \in L_w^\Phi(G)$  olsun. Yani, her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için  $f * g = g * f = f$  olsun. Bu durumda  $U$ ,  $e \in G$  birim elemanının bir komşuluğu ve keyfi  $\varepsilon > 0$  alınsın. Teorem 4.2.4.1'den en az bir  $f \in C_c(G)$  fonksiyonu  $\text{supp}(f) \subseteq U$  ve

$$\|f * g - g\|_{\Phi, w} < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunur. Burada  $f * g = f$  olduğundan

$$\|f - g\|_{\Phi, w} < \varepsilon$$

olur.  $\|\cdot\|_{\Phi, w}$  norm tanımından  $\int_G \Psi(|v(x)|) d\mu(x) \leq 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|f - g\|_{\Phi, w} &\geq \int_U w(x) |f(x) - g(x)| \cdot |v(x)| \cdot d\mu(x) + \int_{G \setminus U} w(x) |f(x) - g(x)| \cdot |v(x)| \cdot d\mu(x) \\ &\geq \int_{G \setminus U} w(x) |g(x)| \cdot |v(x)| \cdot d\mu(x) \end{aligned}$$

geçerlidir. Buradan,  $x \in G \setminus U$  olmak üzere  $w(x) |g(x)| \cdot |v(x)| = 0$  olur. Fakat her  $x \in G$  için  $w(x) > 0$  dir. Öte yandan  $v \in L^\Psi(G)$  fonksiyonu  $v(x) \neq 0$  olarak seçilirse her  $x \in G \setminus U$  için  $g(x) = 0$  elde edilir. Yani,

$$x \in G \setminus U \Rightarrow g(x) = 0$$

dır. Burada,  $e \in G$  birim elemanın  $U$  komşuluğu da keyfi olduğundan

$$\text{supp}(g) \subseteq \{e\}$$

olur. Böylece  $\mu(\{e\}) > 0$  elde edilir. Aksi halde  $G$  üzerinde hemen hemen her yerde  $g = 0$  olur ki bu  $g$  fonksiyonunun  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin birimi olması ile çelişir. Önerme 2.0.0.14'den ise  $G$  grubu diskret olarak bulunur.

Yukarıda verilenlerinden özel halde  $w = 1$  ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.4.7.** Özel halde  $w = 1$  için  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebiri olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

- (i)  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan ve  $\|\cdot\|_1$  normuna göre sınırlı yaklaşık birimi vardır.
- (ii)  $G$  diskret değil ve  $\Psi$  tamlayan fonksiyonu  $\Psi \in \Delta_2$  sağlıyorsa  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebiri  $\|\cdot\|_\Phi$  normuna göre sınırlı yaklaşık birime sahip değildir.
- (iii)  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin birimli olması için gerek ve yeter koşul  $G$  nin diskret olmasıdır.

Öte yandan,  $\Phi$   $N$ - fonksiyon olmak üzere [1] çalışmasında  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin sınırlı yaklaşık birime sahip olması için gerek ve yeter koşul  $G$  diskrettir olarak elde edilmiştir.

Yine  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin sahip olduğu yukarıdaki özellikler, özel halde  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $1 < p < \infty$ , alınırsa  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirleri için de geçerli olur.

**Sonuç 4.2.4.8.** [21, 22]  $1 < p < \infty$  için  $L_w^p(G)$  Banach cebiri olsun. Bu durumda yukarıdaki Teoremlerde  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınırsa,

- (i)  $L_w^p(G)$  Banach cebirinin de kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan yaklaşık birimi vardır.
- (ii) Eğer  $G$  diskret değil ise de  $\Psi(x) = \frac{x^q}{q} \in \Delta_2$  olduğundan  $L_w^p(G)$ 'nin yaklaşık birimi  $\|\cdot\|_{p,w}$  normuna göre sınırlı değildir.

(iii)  $L_w^p(G)$  nin birimli olması için gerek ve yeter koşul  $G$  diskretdir.

elde edilir.

#### 4.2.5. $\Delta(L_w^\Phi(G))$ Maksimal İdealler Uzayının $\widehat{G}_\Psi(w)$ Genelleştirilmiş Karakterler Uzayı Olarak Belirlenmesi

Bu bölümde  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin,  $\Delta(L_w^\Phi(G))$  ile gösterilen, maksimal idealler uzayı belirlenecektir. Özel olarak belirtilmedikçe, bu bölümde  $\Phi$  sürekli ve  $\Phi \in \Delta_2$  koşulunu sağlayan fonksiyon olarak alınacaktır.

Şimdi,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin maksimal idealler uzayını belirlemek için gerekli olan aşağıdaki tanım ve teoremleri verelim.

**Tanım 4.2.5.1.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $(\Phi, \Psi)$  de  $\Delta_2$  koşulunu sağlayan tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere  $\gamma : G \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu

- 1)  $\gamma$  sürekli
- 2)  $\forall x, y \in G, \quad \gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$
- 3)  $\forall x \in G, \quad \gamma(x) \neq 0$
- 4)  $\frac{\gamma}{w} \in L^\Psi(G)$

koşullarını sağlarsa  $\gamma$  fonksiyonuna  $G$  grubunun  $\Psi$  ve  $w$  tarafından belirlenen genelleştirilmiş karakteri denir ve  $G$  grubunun  $\Psi$  ve  $w$  tarafından belirlenen tüm genelleştirilmiş karakterlerinin kümesi  $\widehat{G}_\Psi(w)$  olarak gösterilir ve  $G$  nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsamanın belirlediği topolojiye sahiptir.

**Teorem 4.2.5.2.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda,  $\widehat{G}$ ,  $G$  grubunun karakter grubunu göstermek üzere bir  $\gamma_0 \in \widehat{G}_\Psi(w)$  için

$$\begin{aligned} \widehat{G} &\rightarrow \widehat{G}_\Psi(w) \\ \alpha &\rightarrow \alpha \cdot \gamma_0 \end{aligned}$$

dönüşümü birebir ve içine olur.

**İspat:**  $\widehat{G}$  tanımından  $\alpha \in \widehat{G}$  için  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli, her  $x, y \in G$  için  $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$  ve  $|\alpha(x)| = 1$  geçerlidir. Yine  $\widehat{G_\Psi}(w)$  tanımından  $\gamma_0 \in \widehat{G_\Psi}(w)$  için  $\gamma_0 : G \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli, her  $x, y \in G$  için  $\gamma_0(xy) = \gamma_0(x)\gamma_0(y)$  ve her  $x \in G$  ve  $\gamma_0(x) \neq 0$  ve  $\frac{\gamma_0}{w} \in L^\Psi(G)$  geçerli olur.

Böylece, her  $x \in G$  için

$$|(\alpha \cdot \gamma_0)(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\gamma_0(x)| = |\gamma_0(x)|$$

olur.  $(L_{w^{-1}}^\Psi(G), \|\cdot\|_{\Psi, w^{-1}})$  normlu uzay olduğundan ise

$$\|\alpha \cdot \gamma_0\|_{\Psi, w^{-1}} = \|\alpha \cdot \gamma_0\|_{\Psi, w^{-1}} = \|\gamma_0\|_{\Psi, w^{-1}} = \|\gamma_0\|_{\Psi, w^{-1}} < +\infty$$

bulunur. Buradan  $\alpha \cdot \gamma_0 \in \widehat{G_\Psi}(w)$  elde edilir. Bu ise  $\alpha \rightarrow \alpha \cdot \gamma_0$  dönüşümünün iyi tanımlı olmasıdır. Bu dönüşümün birebir olduğu ise her  $x \in G$  için  $\alpha(x) \neq 0$  olmasından kolayca görülür.

**Teorem 4.2.5.3.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olmak üzere her  $\gamma \in \widehat{G_\Psi}(w)$  genelleştirilmiş karakteri için  $\varphi_\gamma : L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C}$  lineer fonksiyoneli

$$\varphi_\gamma(f) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx, \quad f \in L_w^\Phi(G)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $\varphi_\gamma \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  ve  $\gamma \rightarrow \varphi_\gamma$  dönüşümü  $\widehat{G_\Psi}(w)$ 'den  $\Delta(L_w^\Phi(G))$  uzayına birebir örten olur.

**İspat:**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun.

$$\begin{aligned} T : \widehat{G_\Psi}(w) &\rightarrow \Delta(L_w^\Phi(G)) \\ \gamma &\mapsto T(\gamma) = \varphi_\gamma, \quad \varphi_\gamma(f) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx, \forall f \in L_w^\Phi(G) \end{aligned}$$

dönüşümünün birebir, örten olduğu gösterelim.

Öncelikle,  $T$  dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu yani, her  $\gamma \in \widehat{G_\Psi}(w)$  için  $\varphi_\gamma \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  olduğunu gösterelim.  $\gamma \in \widehat{G_\Psi}(w)$  için  $\gamma/w \in L^\Psi(G)$  olduğundan her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\varphi_\gamma(f) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx$$

$\varphi_\gamma$  lineer fonksiyoneli için Hölder eşitsizliğinden

$$|\varphi_\gamma(f)| \leq \int_G \left| f(x) w(x) \frac{\overline{\gamma(x)}}{w(x)} \right| dx \leq 2 \cdot \|wf\|_\Phi \|\frac{\gamma}{w}\|_\Psi = 2 \cdot \|f\|_{\Phi, w} \|\gamma\|_{\Psi, w^{-1}} < +\infty$$

elde edilir. Böylece  $\varphi_\gamma$  lineer fonksiyoneli sürekli olur. Yani  $\frac{\gamma}{w} \in \widehat{G}_\Psi(w)$  için  $\varphi_\gamma \in (L_w^\Phi(G))^*$  olur.

Şimdi  $\varphi_\gamma$  lineer fonksiyonelinin her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\varphi_\gamma(f * g) = \varphi_\gamma(f) \cdot \varphi_\gamma(g)$  koşulunu sağladığını gösterelim. Gerçekten de  $\frac{\gamma}{w} \in \widehat{G}_\Psi(w)$  olmak üzere her  $x, y \in G$  için  $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$  olduğu ve Fubini teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(f * g) &= \int_G (f * g)(x) \cdot \overline{\gamma(x)} dx \\ &= \int_G \left( \int_G f(x - y) g(y) dy \right) \overline{\gamma(x)} dx \\ &= \int_G \left( \int_G f(x - y) \overline{\gamma(x)} g(y) dx \right) dy \\ &= \int_G f(x - y) \overline{\gamma(x)} \left( \int_G g(y) dy \right) dx, \quad (x \rightarrow x + y) \\ &= \int_G f(x) \overline{\gamma(x + y)} \left( \int_G g(y) dy \right) dx, \quad (\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)) \\ &= \int_G f(x) \overline{\gamma(x)\gamma(y)} \left( \int_G g(y) dy \right) dx \\ &= \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} dx \int_G g(y) \overline{\gamma(y)} dy \\ &= \varphi_\gamma(f) \cdot \varphi_\gamma(g) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Son olarak,  $\varphi_\gamma$  sürekli lineer fonksiyonelinin sıfırdan farklı olduğunu gösterelim. Bunun için  $f \in C_c(G)$  ve  $f > 0$  olsun. Bu durumda  $K = \text{supp}(f)$  denirse, bir  $\gamma \in \widehat{G}_\Psi(w)$  için  $\text{supp}(\frac{\gamma}{|\gamma|} \cdot f) = K$  olur. Buradan  $\frac{\gamma}{|\gamma|} \cdot f \in C_c(G)$  için

$$\varphi_\gamma\left(\frac{\gamma}{|\gamma|} \cdot f\right) = \int_G \frac{\gamma(x)}{|\gamma(x)|} \cdot f(x) \cdot \overline{\gamma(x)} dx = \int_G f(x) \cdot |\gamma(x)| dx > 0$$

bulunur. Böylece,  $\varphi_\gamma \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  elde edilir.

Şimdi  $T : \widehat{G}_\Psi(w) \rightarrow \Delta(L_w^\Phi(G))$  dönüşümünün örten olduğunu, yani

$$\forall \varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G)), \quad \exists \gamma \in \widehat{G}_\Psi(w), \quad \varphi_\gamma = \varphi$$

olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir  $\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  alınsın. Bu durumda  $\varphi : L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C}$  sıfırdan farklı, sürekli lineer bir homomorfi olur. Buradan  $\varphi \in (L_w^\Phi(G))^* \simeq (L_{w^{-1}}^\Psi(G))$  için en az bir  $\eta \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  vardır ki

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), \quad \varphi(f) = \int_G f(x)\eta(x)dx$$

olur. O halde, her  $x \in G$  için  $\gamma(x) = \overline{\eta(x)}$  denirse,  $\gamma \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  ve her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\varphi(f) = \int_G f(x)\eta(x)dx = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}dx = \varphi_\gamma(f)$$

elde edilir. Burada  $\gamma \in \widehat{G}_\Psi(w)$  olduğu, yani  $\gamma : L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonunun Tanım 4.2.5.1'deki 1), 2), 3) ve 4) koşullarını sağladığı gösterilmelidir. Öncelikle,  $\eta \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olduğundan  $\gamma \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olur. Böylece 4) koşulu sağlanır.

$\gamma$  fonksiyonunun diğer üç koşulu sağladığını göstermeden önce her  $y \in G$  için  $\gamma(y)$  fonksiyonunu  $\varphi$  cinsinden belirleyelim. Bunun için  $\varphi$  fonksiyonunun homomorfi olduğu kullanılırsa, her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(f)g(y)\overline{\gamma(y)}dy &= \varphi(f) \int_G g(y)\overline{\gamma(y)}dy = \varphi(f) \cdot \varphi(g) = \varphi(f * g) = \int_G (f * g)(x)\overline{\gamma(x)}dx \\ &= \int_G \left( \int_G f(x-y)\overline{\gamma(x)}dx \right) g(y)dy = \int_G \left( \int_G f(x-y)g(y)dy \right) \overline{\gamma(x)}dx \\ &= \int_G \varphi(L_y f)g(y)dy \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede,  $f \in L_w^\Phi(G)$ ,  $f \neq 0$  olacak şekilde sabitlenirse her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\int_G \left( \varphi(f)\overline{\gamma(y)} - \varphi(L_y f) \right) g(y)dy = 0$$

bulunur. Böylece, her  $y \in G$  için  $\varphi(L_y f) = \varphi(f) \cdot \overline{\gamma(y)}$  elde edilir. Ayrıca,  $f \neq 0$  için  $\varphi(f) \neq 0$  olduğundan

$$\gamma(y) = \frac{\overline{\varphi(L_y f)}}{\varphi(f)}, \quad \forall y \in G$$

olarak yazılır. Burada  $\gamma(y)$  nin tanımı  $f \neq 0$  olmak üzere  $f \in L_w^\Phi(G)$  den bağımsızdır. Gerçekten,  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  ve  $x \in G$  için

$$\begin{aligned} (L_y f * g)(x) &= \int_G L_y f(x-t)g(t)dt = \int_G f(x-t-y)g(t)dt = \int_G f(x-t)g(t-y)dt \\ &= \int_G f(x-t)L_y g(t)dt = (f * L_y g)(x) \end{aligned}$$

geçerlidir. Buradan, her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$L_y f * g = f * L_y g$$

elde edilir. Ayrıca,  $\varphi$  fonksiyonunu homomorfi olduğu kullanılırsa her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $y \in G$  için

$$L_y f * g = f * L_y g \Rightarrow \varphi(L_y f * g) = \varphi(f * L_y g) \Rightarrow \varphi(L_y f)\varphi(g) = \varphi(f)\varphi(L_y g)$$

olur. Böylece  $f \neq 0$  ve  $g \neq 0$  olmak üzere

$$\frac{\varphi(L_y f)}{\varphi(f)} = \frac{\varphi(L_y g)}{\varphi(g)}$$

elde edilir. Buradan

$$\gamma(y) = \frac{\overline{\varphi(L_y f)}}{\varphi(f)}, \quad y \in G \quad (4.34)$$

fonksiyonu iyi tanımlı olur.

Şimdi ise (4.34) eşitliği ile tanımlanan  $\gamma$  fonksiyonunun her  $x, y \in G$  için  $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$  sağladığını gösterelim. Bunun için  $f \neq 0$  ve  $f \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Burada her  $y \in G$  için  $L_y f \in L_w^\Phi(G)$  geçerli olduğu ve  $\gamma$  fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, her  $x \in G$  için

$$\overline{\gamma(x)} = \frac{\varphi(L_x(L_y f))}{\varphi(L_y f)}$$

gerçeklenir. Ayrıca, her  $x, y \in G$  için  $L_x(L_y f) = L_{x+y}f$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma(x+y)} &= \frac{\varphi(L_{x+y}(f))}{\varphi(f)} \\
&= \frac{\varphi(L_x(L_y f))}{\varphi(f)} \cdot \frac{\varphi(L_y f)}{\varphi(L_y f)} \\
&= \frac{\varphi(L_x(L_y f))}{\varphi(L_y f)} \cdot \frac{\varphi(L_y f)}{\varphi(f)} \\
&= \gamma(x)\gamma(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 2) koşulu sağlanır.

Şimdi  $f \neq 0, f \in L_w^\Phi(G)$  olsun. Buradan her  $x \in G$  için  $L_x f \neq 0$  olur.  $\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  olduğundan ise her  $x \in G$  için  $\varphi(L_x f) \neq 0$  olur. Böylece her  $x \in G$  için

$$\gamma(x) = \frac{\overline{\varphi(L_x f)}}{\varphi(f)} \neq 0$$

elde edilir. Bu ise  $\gamma$  fonksiyonunun 3) koşulunu sağlaması demektir.

Son olarak  $\gamma : L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir  $f \neq 0, f \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Teorem 4.1.6.1'den

$$\begin{aligned}
G &\longrightarrow L_w^\Phi(G) \\
x &\longmapsto L_x f
\end{aligned}$$

öteleme fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyor. Diğer taraftan  $\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  olduğundan

$\varphi : L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C}$  süreklidir. Böylece, bu iki fonksiyonun bileşkesi olan

$$\begin{aligned}
G &\rightarrow L_w^\Phi(G) \rightarrow \mathbb{C} \\
x &\mapsto L_x f \mapsto \varphi(L_x f)
\end{aligned}$$

fonksiyonu da sürekli olur. Buradan, her  $x \in G$  için

$$\gamma(x) = \frac{\overline{\varphi(L_x f)}}{\varphi(f)}$$

fonksiyonunu sürekli olur. O halde  $\gamma$  fonksiyonu 1), 2) 3) 4) koşullarını sağladığından  $\gamma \in \widehat{G}_\Psi(w)$  elde edilir ki bu da

$$\begin{aligned} T : \widehat{G}_\Psi(w) &\rightarrow \Delta(L_w^\Phi(G)) \\ \gamma &\mapsto T(\gamma) = \varphi_\gamma \end{aligned}$$

dönüşümünün örten olması demektir.

Şimdi,  $T$  dönüşümünün bire bir olduğunu göstereyim. Bunun için  $\gamma, \eta \in \widehat{G}_\Psi(w)$  için  $T(\gamma) = T(\eta)$  olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma = \varphi_\eta &\Rightarrow \forall f \in L_w^\Phi(G), \quad \varphi_\gamma(f) - \varphi_\eta(f) = 0 \\ &\Rightarrow \int_G \left( f(x)\overline{\gamma(x)} - f(x)\overline{\eta(x)} \right) dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_G f(x) \left( \overline{\gamma(x)} - \overline{\eta(x)} \right) dx = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $0 = \varphi_\gamma - \varphi_\eta = \varphi_{\gamma-\eta} \in (L_w^\Phi(G))^* \simeq L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olur. Buradan hemen hemen her  $x \in G$  için

$$\overline{\gamma(x)} - \overline{\eta(x)} = 0 \Rightarrow \gamma(x) = \eta(x)$$

elde edilir.  $\gamma$  sürekli fonksiyon olduğundan ise her  $x \in G$  için  $\gamma(x) = \eta(x)$  yani  $\gamma = \eta$  elde edilir. Böylece  $T$  dönüşümü birebir olur.

Teorem 4.2.5.3'den aşağıdaki yeni sonuçlar da elde edilir.

**Sonuç 4.2.5.4.** Eğer  $w = 1$  ise  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin maksimal idealler uzayı ile  $\Psi$  ve  $w = 1$  tarafından belirlenen genelleştirilmiş karakter uzayı aynı olur. Diğer bir deyişle  $\Delta(L^\Phi(G)) \cong \widehat{G}_\Psi$  elde edilir.

**Sonuç 4.2.5.5.**  $L_w^\Phi(G)$  ve  $L^\Phi(G)$  Banach cebirleri ve her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  olmak üzere  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^\Phi(G)$  olur. Böylece genelleştirilmiş karakter uzayları için de  $\widehat{G}_\Psi \subseteq \widehat{G}_\Psi(w)$  elde edilir.

Teorem 4.2.5.3'in bir diğer sonucu ise  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ ,  $1 < p < \infty$ , alındığında  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin maksimal idealler uzayının belirlenmesidir ki aynı sonuç Kuznetsova [21] çalışmasında verilmiştir. Fakat kullanılan teknikler aynı değildir.

**Sonuç 4.2.5.6.** [21]  $1 < p < \infty$  için  $L_w^p(G)$  Banach cebiri olsun. Bu durumda,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  olmak üzere Teorem 4.2.5.3'de  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınırsa  $L_{p_w}(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin maksimal idealler uzayı için  $\Delta(L_w^p(G)) \cong \widehat{G}_q(w)$  bulunur.

#### 4.2.6. $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinin Yarıbasitliği

Ağırlıklı Lebesgue cebirleri  $L_w^p(G)$ 'nin radikal cebir olmadığı ve yarıbasit cebir olduğu biliniyor [21]. Bu bölümde  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin radikal cebir olmadığı ve bir yarıbasit cebir olduğu Banach cebir yapısından gelen klasik teknikler kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca, bu bölümün sonunda  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin  $L^1(G)$  Banach cebirinin bir alt cebiri olarak düşünülebileceği gösterilmiştir. Böylece [21] çalışmasında  $L_w^p(G)$  için kullanılan tekniklerin  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirleri için de geçerli olduğu gözlemlenmiştir.

*$L_w^\Phi(G)$  Ağırlıklı Orlicz Cebiri Radikal Cebir Değildir*

**Teorem 4.2.6.1.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri ise  $L_w^\Phi(G)$  radikal cebir değildir.

**İspat:**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun.  $rad(L_w^\Phi(G)) \neq L_w^\Phi(G)$  olduğunu gösterelim. Bunun için ise bir  $f \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonunun  $n \in \mathbb{N}$  için

$$f^n = \underbrace{f * f * \dots * f}_n$$

olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|_{\Phi, w}^{1/n} > 0$$

olacak şekilde var olduğunu göstermek yeterlidir (Teorem [24]). Şimdi  $e$ ,  $G$  grubunun birim elemanını göstermek üzere  $U \in \mathcal{V}(e)$  komşuluğu simetrik ( $x \in U \Rightarrow -x \in U$ ),  $\overline{U}$  kompakt, olacak şekilde seçilsin.

$w$  ağırlığı kompakt kümede sınırlı olduğundan

$$0 < M = \sup\{w(x) | x \in U\} < +\infty$$

olur. Ayrıca  $n \in \mathbb{N}$  için  $nU = \underbrace{U + U + \dots + U}_{n \text{ tane}}$  denirse, her  $x \in nU$  için  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$   $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$  şeklinde yazılır. Buradan, her  $x \in nU$  için

$$\begin{aligned} w(x) = w(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &\leq w(x_1).w(x_2).\dots.w(x_n) \\ &\leq w(x_1).w(x_2).\dots.w(x_n) \\ &\leq M.M.\dots.M = M^n \end{aligned}$$

ve böylece her  $x \in nU$  için

$$w(x) \leq M^n \quad (4.35)$$

geçerli olur. Diğer taraftan her  $x \in G$  için

$$w(x) \geq \frac{w(e)}{w(x^{-1})} \quad (4.36)$$

olduğu da ağırlık fonksiyonu tanımından kolayca görülür.

Eğer  $f = \chi_U$  olarak alınırsa her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1$  koşulunu sağlayan her  $v \in L^\Psi(G)$  için (4.35) ve (4.36) 'den

$$\begin{aligned} \|f^n\|_{\Phi, w} &= \sup \left\{ \int_G |w(x).f^n(x).v(x)|dx : \int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} \\ &\geq \int_G |w(x).f^n(x).v(x)|dx \geq \int_G \frac{w(e)}{w(x^{-1})}.|f^n(x).v(x)|dx \\ &= w(e). \int_G \left| \frac{(\chi_U)^n(x)}{w(x^{-1})}.v(x) \right| dx, \quad \text{supp}(f^n) = \text{supp}((\chi_U)^n) \subseteq nU \\ &= w(e). \int_{nU} \left| \frac{(\chi_U)^n(x).v(x)}{w(x^{-1})} \right| dx \geq w(e). \int_{nU} \left| \frac{(\chi_U)^n(x).v(x)}{M^n} \right| dx \\ &= \frac{w(e)}{M^n}. \int_{nU} (\chi_U)^n(x).|v(x)|dx \end{aligned}$$

olur. Burada  $\int_G \Psi(|v(x)|)dx \leq 1$  koşulunu sağlayan her  $v \in L^\Psi(G)$  fonksiyonları üzerinden supremum alınırsa Orlicz normu tanımından

$$\|f^n\|_{\Phi, w} \geq \frac{w(e)}{M^n}. \|(\chi_U)^n\|_{\Phi}$$

elde edilir. Ayrıca, Sonuç 4.1.3.18'den en az bir  $c > 0$  için  $\|(\chi_U)^n\|_{\Phi} \geq c. \|(\chi_U)^n\|_1$  olduğu biliniyor. Böylece

$$\|f^n\|_{\Phi, w} \leq \frac{w(e)}{M^n} c. \|(\chi_U)^n\|_1 \quad (4.37)$$

bulunur. Buradan ise

$$\|f^n\|_{\Phi, w}^{1/n} \geq \frac{w(e)^{1/n}}{M^n}. \|(\chi_U)^n\|_1^{1/n}$$

ve  $n \rightarrow \infty$  için limite geçildiğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|_{\Phi, w}^{1/n} \geq \frac{1}{M} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_U^n\|_1^{1/n} > 0$$

olur. Böylece  $f \notin \text{rad}(L_w^\Phi(G))$  olur.

*$L_w^\Phi(G)$  Ağırlıklı Orlicz Cebiri Yaribasittir*

**Teorem 4.2.6.2.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri yaribasit cebirdir.

**İspat:**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Teorem 4.2.6.1'den  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin radikal cebir olmadığı biliniyor. Böylece en az bir sıfırdan farklı  $\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  vardır. Teorem 4.2.5.3'den ise en az bir  $\gamma \in \widehat{G_\Psi}(w)$  sürekli fonksiyonu vardır ki her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\varphi(f) = \varphi_\gamma(f) = \int_G f(x) \cdot \overline{\gamma(x)} d\mu(x)$$

sağlanır. Eğer, her  $\alpha \in \widehat{G}$  için  $\varphi_\alpha$  sürekli lineer fonksiyoneli

$$\varphi_\alpha(f) = \int_G f(x) \cdot \overline{\alpha(x) \cdot \gamma(x)} d\mu(x), f \in L_w^\Phi(G)$$

şeklinde tanımlanırsa,  $\alpha \cdot \gamma \in \widehat{G_\Psi}(w)$  olduğundan  $\varphi_\alpha \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  olur.

Şimdi, herhangi bir  $f \in \text{rad}(L_w^\Phi(G)) \subseteq L_w^\Phi(G)$  alınsın. Buradan  $\overline{\gamma} \in \widehat{G_\Psi}(w) \subseteq L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olmak üzere Hölder eşitsizliğinden  $f \cdot \overline{\gamma} \in L^1(G)$  olur. Böylece,  $\text{rad}(L_w^\Phi(G)) = \bigcap_{\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))} \ker(\varphi)$  olduğu da kullanılırsa,  $\widehat{f \cdot \overline{\gamma}}, f \cdot \overline{\gamma}$  fonksiyonuna karşı gelen Fourier dönüşümünü göstermek üzere her  $\alpha \in \widehat{G}$  için

$$\widehat{f \cdot \overline{\gamma}}(\alpha) = \int_G \left( f(x) \cdot \overline{\gamma(x)} \right) \overline{\alpha(x)} d\mu(x) = \varphi_\alpha(f) = 0$$

elde edilir.  $\Delta(L^1(G)) \cong \widehat{G}$  olması ve  $L^1(G)$  de Fourier dönüşümünün tekliği teoreminden hemen hemen her yerde  $f \cdot \gamma = 0$  olur. Fakat her  $x \in G$  için  $\gamma(x) \neq 0$  olduğundan hemen hemen her yerde  $f = 0$  bulunur. Alınan  $f \in \text{rad}(L_w^\Phi(G))$  keyfi olduğundan ise

$$\text{rad}(L_w^\Phi(G)) \subseteq \{0\}$$

ve böylece  $L_w^\Phi(G)$  yarıbasit cebir olur.

Teorem 4.2.6.1 ve Teorem 4.2.6.2'de özel olarak  $w = 1$  alınırsa aşağıdaki yeni sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.2.6.3.**  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebiri yarıbasit cebirdir.

Öte yandan,  $w = 1$  özel durumunda  $\Phi$   $N$ -fonksiyon olmak üzere  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin yarıbasit olduğu Akbarbaglu ve Maghsoudi [1] çalışmasında da gösterilmiştir. Fakat, Teorem 4.2.6.2'de kullanılan teknik ile [1] çalışmasında kullanılan teknik farklıdır.

Yukarıdaki iki teoremden elde edilen diğer bir sonuç ise aşağıdadır.

**Sonuç 4.2.6.4.** [21] Özel olarak  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  olmak üzere  $L_w^\Phi(G) = L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayının girişim işlemine göre değişmeli Banach cebiri olması durumunda  $L_w^p(G)$  Banach cebiri de bir yarıbasit cebir olur.

**Not 4.2.6.5.** Teorem 4.2.6.1 ve Teorem 4.2.6.2 kullanılan teknikler [21] çalışmasında  $L_w^p(G)$  için kullanılan tekniklerden farklı olmakla beraber aşağıda benzer tekniklerin  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri için de çalıştığı belirtilmiştir.

*$L_w^\Phi(G)$  Ağırlıklı Orlicz Cebiri İçin  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  Alınabilir*

$G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ise her  $x \in G$  için  $w(x) \geq 1$  koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  ise  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G) \subseteq L^1(G)$  olduğu ve  $L_w^\Phi(G)$  uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu biliniyor (Teorem 4.2.3.1). Tersisi ise doğru değildir, yani  $L_w^\Phi(G)$  Banach cebiri ise  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  olması gerekmez (Örnek 4.2.3.3). Fakat  $L_w^\Phi(G)$  Banach cebiri ise Kuznetsova [21] çalışmasındaki teknikler  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirine uygulanarak, Teorem 4.2.6.7'deki anlamda  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  olarak alınabileceği gösterilir ve böylece  $L^1(G)$ 'nin Banach cebiri yapısından gelen özellikleri de kullanılarak  $L_w^\Phi(G)$  Banach cebirinin yarıbasit olduğu Teorem 4.2.6.2'dekinden farklı olarak da elde edilir.

Öncelikle  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  olması için gerek ve yeter koşulu belirten aşağıdaki gözlemi verelim.

**Lemma 4.2.6.6.**  $(\Phi, \Psi)$ ,  $\Delta_2$  koşulunu sağlayan tamlayan Young fonksiyon çifti olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i)  $\frac{1}{w} \in L^\Psi(G)$
- ii)  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$
- iii)  $L^\infty(G) \subseteq L_{w^{-1}}^\Psi(G)$ .

**İspat:**  $i) \Rightarrow ii)$  :  $\frac{1}{w} \in L^\Psi(G)$  olsun.  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  kapsamasını göstermek için herhangi bir  $f \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Buradan  $fw \in L^\Phi(G)$  olur. Hölderr eşitsizliğinden ise

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| d\mu(x) = \int_G \left| f(x)w(x) \cdot \frac{1}{w(x)} \right| d\mu(x) \leq \|fw\|_\Phi \cdot \left\| \frac{1}{w} \right\|_\Psi < +\infty$$

ve böylece  $f \in L^1(G)$  elde edilir.

$ii) \Rightarrow iii)$  : Kabul edelim ki  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  olsun. Buradan dual uzaylara geçilirse

$$(L^1(G), \|\cdot\|_1)^* \subseteq (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_1)^* \quad (4.38)$$

olur. Öte yandan, Sonuç 4.1.3.18'den en az bir  $c > 0$  sayısı her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|f\|_1 \leq c \cdot \|f\|_{\Phi, w}$$

olacak şekilde vardır. Buradan yine dual uzaylara geçildiğinde

$$(L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_1)^* \subseteq (L_w^\Phi(G), \|\cdot\|_{\Phi, w})^* \quad (4.39)$$

bulunur. Böylece  $(L^1(G))^* \cong L^\infty(G)$  ve  $\Phi \in \Delta_2$  için  $(L_w^\Phi(G))^* \cong L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olduğu kullanılırsa (4.38) ve (4.39) den

$$L^\infty(G) \cong (L^1(G))^* \subseteq (L_w^\Phi(G))^* \cong L_{w^{-1}}^\Psi(G)$$

elde edilir.

$iii) \Rightarrow i)$  :  $L^\infty(G) \subseteq L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olduğunu kabul edelim.  $1 \in L^\infty(G)$  olduğundan  $1 \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olur. Buradan ise  $\frac{1}{w} \in L^\Psi(G)$  elde edilir.

**Teorem 4.2.6.7.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri ise az bir  $\tilde{w}$  ağırlığı,  $L_w^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  ve  $L_w^\Phi(G) \cong L_{\tilde{w}}^\Phi(G)$  olacak şekilde vardır.

**İspat:**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri radikal cebir olmadığından  $\Delta(L_w^\Phi(G)) \neq \emptyset$  olur. Buradan sıfırdan farklı bir  $\varphi \in \Delta(L_w^\Phi(G))$  vardır. Diğer taraftan Teorem 4.2.5.3'den en az bir  $\gamma \in \widehat{G}_\Psi(w)$  vardır ki,  $\frac{|\gamma|}{w} \in L^\Psi(G)$  ve

$$\forall f \in L_w^\Phi(G), \varphi(f) = \int_G f(x) \cdot \overline{\gamma(x)} d\mu(x)$$

şeklinde yazılır.

Eğer  $\tilde{w} = \frac{w}{|\gamma|}$  şeklinde alınırsa, her  $x \in G$  için  $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{|\gamma(x)|} > 0$  ve

$$\frac{1}{\tilde{w}} = \frac{|\gamma|}{w} \in L^\Psi(G)$$

olur. Böylece Lemma 4.2.6.6'den  $L_{\tilde{w}}^\Phi(G) \subseteq L^1(G)$  elde edilir.

Öte yandan, her  $x, y \in G$  için  $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$  olduğundan

$$\tilde{w}(x+y) = \frac{w(x+y)}{|\gamma(x+y)|} = \frac{w(x+y)}{|\gamma(x)| \cdot |\gamma(y)|} \leq \frac{w(x) \cdot w(y)}{|\gamma(x)| \cdot |\gamma(y)|} = \frac{w(x)}{|\gamma(x)|} \cdot \frac{w(y)}{|\gamma(y)|} = \tilde{w}(x) \cdot \tilde{w}(y)$$

bulunur. Böylece  $\tilde{w}$  fonksiyonunun  $G$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olur.

Şimdi,  $\tilde{w} = \frac{w}{|\gamma|}$  ağırlık fonksiyonu için  $L_w^\Phi(G)$  ile  $L_{\tilde{w}}^\Phi(G)$  uzayının izometrik izomorf olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} T : L_w^\Phi(G) &\rightarrow L_{\tilde{w}}^\Phi(G) \\ f &\mapsto T(f) = f \cdot |\gamma| \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın.  $T$  dönüşümünün lineer ve örten olduğu açıktır. Ayrıca, her  $f \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\|T(f)\|_{\Phi, \tilde{w}} = \|f \cdot |\gamma|\|_{\Phi, \tilde{w}} = \|\tilde{w} f \cdot |\gamma|\|_{\Phi} = \left\| \frac{w}{|\gamma|} \cdot f \cdot |\gamma| \right\|_{\Phi} = \|w \cdot f\|_{\Phi} = \|f\|_{\Phi, w}$$

olduğundan  $T$  dönüşümü izometri olur.

Son olarak  $T$  dönüşümünün her  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$T(f * g) = T(f) * T(g)$$

sağladığını gösterelim. Bunun için herhangi iki  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  alınsın. Girişim işlemi tanımından ve her  $x, y \in G$  için  $\gamma(x) = \gamma(x - y) \cdot \gamma(y)$  olduğundan

$$\begin{aligned} (T(f * g))(x) &= ((f * g)|\gamma|)(x) = (f * g)(x)|\gamma(x)| = \int_G f(x - y)g(y)|\gamma(x)|d\mu(y) \\ &= \int_G f(x - y) \cdot |\gamma(x - y)| \cdot |\gamma(y)| \cdot g(y) \cdot d\mu(y) \\ &= \int_G (f|\gamma|)(x - y) \cdot (g|\gamma|)(y) d\mu(y) = (f|\gamma| * g|\gamma|)(x) \\ &= (T(f) * T(g))(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan  $T(f * g) = T(f) * T(g)$  elde edilir. Ayrıca,  $T$  dönüşümünün izometrik izomorfi olmasından dolayı  $L_w^\Phi(G)$  uzayı da Banach cebiri olur.

Böylece, Banach cebirlerinde yarıbasitlik özelliğinin cebir izomorfisi altında korunduğu da göz önüne alınarak Teorem 4.2.6.7 ve Lemma 4.2.6.6'in sonucu olarak aşağıdaki Teorem verilir.

**Teorem 4.2.6.8.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri yarıbasit cebirdir.

**Not 4.2.6.9.** Bu bölümde  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri ile ilgili teoremler  $\Phi$  Young fonksiyonu yerine  $N$ - fonksiyon veya zayıf Young fonksiyonu alınır da doğru olur.

#### 4.2.7. $L_w^\Phi(G)$ Ağırlıklı Orlicz Cebirinin İdealleri

Bu bölümde,  $G$  yerel kompakt değişmeli grup ve  $w$  ağırlık fonksiyonu olmak üzere  $L_w^1(G)$  cebirinin idealleri için bilinen bazı sonuçlar,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirine genelleştirildi. Burada,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin kapalı idealleri ve bir alt uzayının ideal olması için gerek ve yeter koşullar araştırıldı.

İlk olarak,  $L_w^1(G)$  Banach cebirinde olduğu gibi  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin kapalı ideallerinin,  $L_w^\Phi(G)$  uzayının ötelemeler altında değişmez kapalı alt uzaylarından başka bir şey olmadığı gösterildi.

**Teorem 4.2.7.1.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Bu durumda  $I$  alt uzayının  $L_w^\Phi(G)$  uzayında kapalı ideal olması için gerek ve yeter koşul  $I$ 'nin ötelemeler altında değişmez kapalı alt uzay olmasıdır.

**İspat :**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun.  $L_w^\Phi(G)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan  $I = L_w^\Phi(G)$  olması durumunda iddianın doğru olduğu görülür. Bu nedenle  $I \neq L_w^\Phi(G)$  için teoremi ispat edelim.

Gereklik ispatı için  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  kapalı alt uzayının bir ideal olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her  $x \in G$  ve her  $f \in I$  için  $L_x f \in I$  olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi bir  $x \in G$  ve  $f \in I$  alınsın.

$L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin yaklaşık biriminin varlığından en az bir  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}(e)} \subseteq L_w^\Phi(G)$  ağı her  $\varepsilon > 0$  için en az bir  $V_0 \in \mathcal{V}(e)$

$$\|e_{V_0} * f - f\|_{\Phi_w} < \frac{\varepsilon}{w(x)} \quad (4.40)$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan,  $L_w^\Phi(G)$  uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan  $L_x e_{V_0} \in L_w^\Phi(G)$  ve ayrıca  $I$  ideal olduğundan da  $(L_x e_{V_0}) * f \in I$  olur. Böylece,

$$(L_x e_{V_0}) * f = L_x(e_{V_0} * f)$$

olduğu da kullanılırsa (4.40)'den

$$\begin{aligned} \|L_x e_{V_0} * f - L_x f\|_{\Phi_w} &= \|L_x(e_{V_0} * f) - L_x f\|_{\Phi_w} \\ &= \|L_x(e_{V_0} * f - f)\|_{\Phi_w} \\ &\leq w(x) \cdot \|e_{V_0} * f - f\|_{\Phi_w} \\ &< w(x) \cdot \frac{\varepsilon}{w(x)} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $L_x f \in \bar{I}$  olur.  $I$  kapalı olduğundan ise  $L_x f \in I$  bulunur. Bu ise gösterilmek istenendir.

Yeterlik ispatı için ise  $I \subsetneq L_w^\Phi(G)$  alt uzayının kapalı ve ötelemeler altında değişmez olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\forall f \in I, \forall x \in G, L_x f \in I$$

olur. Gösterilecek olan ise  $I$  'nın bir ideal olması yani

$$\forall f \in I, \forall g \in L_w^\Phi(G), f * g \in I$$

olduğudur. Bunu göstermek için herhangi iki  $f \in I$  ve  $g \in L_w^\Phi(G)$  fonksiyonu alınsın. Kabul edelim ki  $f * g \notin I$  olsun. Bu durumda  $I$  kapalı olduğundan  $f * g \notin \bar{I}$  olur. Böylece, Teorem 2.0.0.2'den en az bir  $F \in (L_w^\Phi(G))^*$  sürekli lineer fonksiyoneli

$$F|_I = \{0\} \text{ ve } F(f * g) \neq 0$$

olacak şekilde bulunur. Öte yandan,  $\Psi$  Young fonksiyonu,  $\Phi$  Young fonksiyonunun tamlayanı olmak üzere  $(L_w^\Phi(G))^* \cong L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olduğundan ise  $F \in (L_w^\Phi(G))^*$  sürekli lineer fonksiyoneli bir tek  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  fonksiyonu tarafından

$$F(h) = F_\varphi(h) = \int_G h(x)\varphi(x)d\mu(x), \quad h \in L_w^\Phi(G)$$

şeklinde belirlenir. Buradan,  $f * g \in I \subseteq L_w^\Phi(G)$  fonksiyonu için de

$$\begin{aligned} F_\varphi(f * g) &= \int_G (f * g)(x)\varphi(x)d\mu(x) \\ &= \int_G \varphi(x) \cdot \left( \int_G f(x-y) \cdot g(y)d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_G \varphi(x) \cdot \left( \int_G L_y f(x) \cdot g(y)d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_G g(y) \cdot \left( \int_G L_y f(x) \cdot \varphi(x)d\mu(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_G g(y) \cdot F_\varphi(L_y f) \cdot d\mu(y) \end{aligned}$$

ve  $F = F_\varphi$  olduğundan

$$F(f * g) = \int_G g(y) \cdot F(L_y f) \cdot d\mu(y) \quad (4.41)$$

elde edilir. Burada  $I$  alt uzayının ötelemeler altında değişmez olduğu (yani, her  $y \in G$  için  $L_y f \in I$ ) ve  $F|_I = \{0\}$  olduğu kullanılırsa  $F(L_y f) = 0$  olur ve (4.41) eşitliğinden ise

$$F(f * g) = 0$$

bulunur. Bu ise  $F(f * g) \neq 0$  olması ile çelişir. O halde  $f * g \in I$  olmalıdır. Böylece,  $I$  kapalı alt uzayı bir ideal olur.

Bu teoremin yeni sonuçları olarak ise aşağıdakiler verilebilir.

**Sonuç 4.2.7.2.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Bu durumda  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  kapalı alt uzay olmak üzere

$$I \text{ idealdir} \Leftrightarrow \forall x \in G, L_x(I) \subseteq I.$$

**Sonuç 4.2.7.3.** Teorem 4.2.7.1'de özel olarak  $w = 1$  alınırsa  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebirinin kapalı ve ötelemeler altında değişmez alt uzayları ile kapalı ideallerinin çakıştığı elde edilir.

**Sonuç 4.2.7.4.**  $1 < p < \infty$  olmak üzere Teorem 4.2.7.1'de  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınırsa  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin kapalı ideallerinin  $L_w^p(G)$  cebirinin kapalı ve ötelemeler altında değişmez alt uzayları ile aynı olduğu elde edilir.

Şimdi,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin ideallerini  $L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  dual uzayına bağlı olarak inceleyelim. Öncelikle bunun için gerekli olan notasyon ve tanımları verelim.

Genel olarak  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayı ve  $L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  dual uzayı için  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olmak üzere

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_G f(x) \overline{\varphi(x)} \cdot d\mu(x) = \overline{(\tilde{f} * \varphi)(e)}$$

gösterimi kullanılacaktır. Burada,  $\tilde{f}$  fonksiyonu ise her  $x \in G$  için  $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$  olarak tanımlıdır ve Hölder eşitsizliğinden kolayca görülür ki

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{\Phi, w} \cdot \|\varphi\|_{\Psi, w^{-1}}$$

geçerlidir.

Ayrıca, Reiter ve Stegeman ([32]) çalışmasında  $L_w^1(G)$  ve  $L_{w^{-1}}^\infty(G)$  uzayları için verilen tanıma benzer olarak aşağıdaki tanım da verilir.

**Tanım 4.2.7.5.**  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olmak üzere  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  ise  $\varphi$  ile  $f$  diktir denir ve bu durumda  $\varphi \perp f$  yazılır. Eğer,  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  alt vektör uzayı olmak üzere her  $f \in I$  için  $\varphi \perp f$  ise de  $\varphi \perp I$  yazılır.

Öte yandan,  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olmak üzere Teorem 4.2.4.3'de  $L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  dual uzayının Banach  $L_w^\Phi(G)$ - modül olduğu, yani  $g \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için  $\varphi \circ g \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  ve

$$\|\varphi \circ g\|_{\Psi, w^{-1}} \leq \|g\|_{\Phi, w} \|\varphi\|_{\Psi, w^{-1}}$$

olduğu gösterildi. Böylece,  $\varphi \circ g$  çarpımının girişim ile ifadesi  $\varphi \circ g = \tilde{g} * \varphi$  gözönüne alınırsa aşağıdaki önerme elde edilir.

**Önerme 4.2.7.6.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun. Bu durumda,  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için

$$\langle g * f, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle \quad (4.42)$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat :**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olmak üzere  $\circ$  işleminin tanımından  $f, g \in L_w^\Phi(G)$  ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  için

$$\langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle = \langle g * f, \varphi \rangle$$

elde edilir ( Teorem 4.2.4.3 ).

**Teorem 4.2.7.7.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olsun.  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  alt vektör uzayı ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olmak üzere

i)  $\forall g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp I$

ii)  $\forall f \in I$  için  $\tilde{f} * \varphi = 0$

iii)  $\varphi \perp I$

koşulları verilsin. Bu durumda  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$  geçerlidir.

**İspat :**  $i) \Rightarrow ii)$  : Her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp I$  olduğunu kabul edelim.  $ii)$  şıkkının doğru olduğunu göstermek için herhangi bir  $f \in I$  alınsın. Diklik tanımından her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp f$  veya

$$\langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle = 0$$

olur. (4.42) eşitliğinden ise her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\langle g * f, \varphi \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca,  $L_w^\Phi(G)$  cebiri değişmeli olduğundan her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\langle g, \tilde{f} * \varphi \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle = \langle g * f, \varphi \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan ise

$$\tilde{f} * \varphi \perp L_w^\Phi(G)$$

olur. Bu ise  $\tilde{f} * \varphi = 0$  olması durumunda mümkündür. Böylece  $ii)$  doğru olur.

$ii) \Rightarrow iii)$  : Her  $f \in I$  için  $\tilde{f} * \varphi = 0$  olduğunu kabul edelim. Yine (4.42) eşitliği kullanılırsa her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\langle g * f, \varphi \rangle = \langle g, \tilde{f} * \varphi \rangle = 0$$

elde edilir. Burada,  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}(e)}$ ,  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin yaklaşık birimi olmak üzere  $g$  fonksiyonu yerine  $g = e_V \text{ in } L_w^\Phi(G)$  alınırsa her  $f \in I$  ve her  $V \in \mathcal{V}(e)$  için

$$\langle e_V * f, \varphi \rangle = 0$$

olur. Böylece, Hölder eşitsizliği kullanılarak, her  $f \in I$  için

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_G f(x) \cdot \overline{\varphi(x)} \cdot d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_G (f(x) - (e_V * f)(x) + (e_V * f)(x)) \cdot \overline{\varphi(x)} d\mu(x) \right| \\ &= \int_G |f(x) - (e_V * f)(x)| \cdot |\overline{\varphi(x)}| \cdot d\mu(x) + \int_G |(e_V * f)(x)| \cdot |\overline{\varphi(x)}| \cdot d\mu(x) \\ &\leq \|f - e_V * f\|_{\Phi, w} \cdot \|\varphi\|_{\Psi, w^{-1}} + \langle e_V * f, \varphi \rangle \\ &= \|f - e_V * f\|_{\Phi, w} \cdot \|\varphi\|_{\Psi, w^{-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,  $(e_V)_{V \in \mathcal{V}(e)}$  yaklaşık birim olduğundan ise her  $f \in I$  için

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f - e_V * f\|_{\Phi, w} \|\varphi\|_{\Psi, w^{-1}} \rightarrow 0, \quad V \in \mathcal{V}(e)$$

ve böylece  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  bulunur. Bu ise  $\varphi \perp f$  olmasıdır.

**Teorem 4.2.7.8.**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri olmak üzere  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  ideal ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- i)  $\forall g \in L_w^\Phi(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp I$
- ii)  $\forall f \in I$  için  $\tilde{f} * \varphi = 0$
- iii)  $\varphi \perp I$

**İspat :**  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri,  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  herhangi bir ideal ve  $\varphi \in L_{w^{-1}}^\Psi(G)$  olsun. Teorem 4.2.7.7'den  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$  olduğu biliniyor. Dolayısıyla bu üç koşulun eşdeğer olduğunu göstermek için sadece  $iii) \rightarrow i)$ 'nin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için  $iii)$  koşulunun doğru olduğunu yani,  $\varphi \perp I$  olduğunu kabul edelim. Buradan, her  $f \in I$  için

$$\langle f, \varphi \rangle = 0$$

olur. Diğer taraftan,  $I$  ideal olduğundan her  $f \in I$  ve her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için de

$$\langle g * f, \varphi \rangle = 0$$

elde edilir. (4.42) eşitliğinden her  $f \in I$  ve her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle = \langle g * f, \varphi \rangle = 0$$

ve böylece her  $g \in L_w^\Phi(G)$  için

$$\tilde{g} * \varphi \perp I$$

bulunur.

Teorem 4.2.7.8'in yeni sonuçları olarak ise aşağıdakiler elde edilir.

**Sonuç 4.2.7.9.** Teorem 4.2.7.8'de  $w = 1$  alınırsa  $L^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin herhangi bir  $I \subseteq L_w^\Phi(G)$  ideali ve herhangi bir  $\varphi \in L^\Psi(G)$  fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

i)  $\forall g \in L^\Phi(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp I$

ii)  $\forall f \in I$  için  $\tilde{f} * \varphi = 0$

iii)  $\varphi \perp I$

**Sonuç 4.2.7.10.** Teorem 4.2.7.8'de  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınırsa  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin herhangi bir  $I \subseteq L_w^p(G)$  ideali ve herhangi bir  $\varphi \in L_{w^{-1}}^p(G)$  fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

i)  $\forall g \in L_w^p(G)$  için  $\tilde{g} * \varphi \perp I$

ii)  $\forall f \in I$  için  $\tilde{f} * \varphi = 0$

iii)  $\varphi \perp I$

Öte yandan, aşağıdaki önerme göstermektedir ki  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebiri  $L_w^1(G)$  cebirinin bir idealidir.

**Önerme 4.2.7.11.**  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $\Phi'_+(0) > 0$  ise  $L_w^\Phi(G)$ ,  $L_w^1(G)$  'de idealdir.

**İspat :**  $\Phi$  Young fonksiyonu ve  $\Phi'_+(0) > 0$  olmak üzere Teorem 4.2.3.1'den  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  olur. Yine aynı teoremdeki ispat tekniğini kullanılarak  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve  $g \in L_w^1(G)$  için

$$\|f * g\|_{\Phi, w} \leq \|f\|_{\Phi, w} \cdot \|g\|_{1, w} < \infty$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece  $f * g \in L_w^\Phi(G)$ , yani  $L_w^\Phi(G)$  uzayı  $L_w^1(G)$  de ideal olur.

**Sonuç 4.2.7.12.** Önerme 4.2.7.11'de özel olarak  $w = 1$  alınırsa  $L^\Phi(G)$  Orlicz cebiri  $L^1(G)$  cebirinin bir ideali olur.

**Sonuç 4.2.7.13.** Önerme 4.2.7.11'de özel olarak  $1 < p < \infty$  olmak üzere  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$  alınırsa  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue cebirinin de  $L_w^1(G)$ 'nin bir ideali olduğu elde edilir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında,  $G$  yerel kompakt değişmeli grup,  $w$  ağırlık fonksiyonu ve  $\Phi$  Young fonksiyonu olmak üzere  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirleri üzerinde çalışılmış ve  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz cebirinin Banach cebiri yapısından gelen yarıbasitlik, sınırlı yaklaşık biriminin ve biriminin varlığı, maksimal idealler uzayı ve kapalı ideallerin belirlenmesi gibi temel özellikleri incelenmiştir.

Yapılan bu çalışmadan, özel halde  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere  $L_w^p(G)$  ağırlıklı Lebesgue uzayları için de benzer sonuçların geçerli olduğu elde edilmiştir.

İleriye dönük olarak, bu çalışmada elde edilen sonuçlar kullanılarak Banach cebiri teorisinden gelen çarpanlara ayrılabilme, genelleştirilmiş spektral sentez ve regülerlik gibi özellikleri de incelenebilir. Yine,  $L_w^p(G)$  uzayları için yapılan çarpanlar uzayı çalışmaları  $L_w^\Phi(G)$  ağırlıklı Orlicz uzayının çarpanlar uzayına genişletilebilir.

Ayrıca,  $L_w^\Phi(G)$  cebirinin soyut Segal cebiri yapısı da incelenir ve  $L_w^\Phi(G)$ 'nin soyut Segal cebiri olduğu aşağıdaki gibi kolayca gösterilir.

$\Phi$  sürekli Young fonksiyonu ve  $\Phi'_+(0) > 0$  ise Teorem 4.2.7.11'den  $L_w^\Phi(G)$  uzayının  $L_w^1(G)$ 'de ideal olduğu ve her  $f \in L_w^\Phi(G)$  ve her  $g \in L_w^1(G)$  için

$$\|f * g\|_{\Phi,w} \leq \|f\|_{\Phi,w} \|g\|_{1,w}$$

gerçeklendiği biliniyor. Ayrıca, Teorem 4.2.3.1'den  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  uzayı  $\|\cdot\|_{\Phi,w}$  normu ile birlikte girişim işleme göre Banach cebiridir.  $\Phi \in \Delta_2$  olması durumunda ise kompakt destekli fonksiyonların  $L_w^\Phi(G)$  uzayında yoğunluğundan  $\overline{L_w^\Phi(G)} = L_w^1(G)$  elde edilir. Böylece  $\Phi$  sürekli Young fonksiyonu  $\Delta_2$  koşulunu sağlamak üzere  $\Phi'(0) > 0$  ise  $L_w^\Phi(G) \subseteq L_w^1(G)$  Banach cebiri Tanım 2.0.0.4 'deki koşulları sağladığından bir soyut Segal cebiri olur.

Böylece, Soyut Segal cebiri ve Segal cebiri yapısından gelen teoriler de çalışılabilir.

**KAYNAKÇA**

- [1] AKBARBAGLU, I., and MAGHSOUDI, S., 2013, Banach-Orlicz Algebras on a Locally Compact Group, *Mediterranean Journal of Mathematics*, November 2013, Volume 10, Issue 4, pp 1937-1947. (published online February 27, 2013)
- [2] ARORA, S.C., DATT, G., and VERMA, S., 2007, Multiplication and Composition Operators on Orlicz-Lorentz Spaces, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 1, no. 25, 1227 - 1234
- [3] BACHMAN, G., 1964, *Elements of Abstract Harmonic Analysis*, Academic Press
- [4] BEURLING, A., 1938, Sur les intgrales de Fourier absolument convergentes et leur application fonctionnelle, *Neuvime congrs des mathmaticiens scandinaves*,345-366.
- [5] BONSALL, F.F. and DUNCAN, J.,1973, *Complete Normed Algebras*, Springer
- [6] BURNHAM, J.T., 1972, Closed Ideals In Subalgebras Of Banach Algebras I, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 32, No. 2, pp. 551-555.
- [7] COHN, D.L., 1994, *Measure Theory*, Birkhuser Boston; 1 edition
- [8] CUI, Y., HUDZIK, H., KUMAR, R. and MALÍGRANDA, L., 2004, Composition operators in Orlicz spaces, *Journal of the Australian Mathematical Society* , 76 (2), 189-206
- [9] DEITMAR, A. and ECHTERHOFF, S., 2009, *Principles of Harmonic Analysis (Universitext)*, Springer
- [10] FOLLAND, G.B., 1995, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press.
- [11] HEWITT, E. and ROSS, K. A., 1994, *Abstract Harmonic Analysis: Volume 1: Structure of Topological Groups. Integration Theory. Group Representations*, Springer

- [12] HEWITT, E. and ROSS, K. A., 1994, *Abstract Harmonic Analysis: Volume 2: Structure and Analysis for Compact Groups, Analysis on Locally Compact Abelian Groups*, Springer
- [13] HEWITT, E. and STROMBERG, K., 1997, *Real and Abstract Analysis*, Springer
- [14] HUDZIK, H., 1985, Orlicz spaces of essentially bounded functions and Banach-Orlicz algebras, *Arch. Math.*, 44, 535-538.
- [15] HUDZIK, H., KAMINSKA, A. and MUSIELAK, J., 1987, On some Banach algebras given by a modular, *A. Haar Mem. Conf., Budapest/Hung. 1985, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 49, 445-463.
- [16] KANIUTH, E., 2009, *A Course in Commutative Banach Algebras*, Springer
- [17] KERMAN, R., and SAWYER, E., 1994, Convolution algebras with weighted rearrangement-invariant norm, *Studia Mathematica*, Volume: 108, Issue: 2, page 103-126.
- [18] KRASNOSEL'SKII, M.A., and RUTICKII, YZ. B., 1961, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Ltd. ; 1st edition
- [19] KUMAR, R., 1997, Composition operators on Orlicz spaces, *Integral Equations and operators theory*, Vol. 29, 17-22
- [20] KUFNER, A., JOHN, O. and FUCIK, S., 1977, *Function Spaces*, Springer; 1 edition
- [21] KUZNETSOVA, Yu. N., 2006, Weighted Lp-Algebras on Groups, *Functional Analysis and Its Applications*, 40:3, 234-236. (English transl.)
- [22] KUZNETSOVA, Yu. N., 2008, Invariant Weighted Algebras, *Transl. from Mat. Zametki*, 84:4, 567-576.
- [23] LAI, H.C., 1975, Banach Algebras Which Are Ideals In a Banach Algebra, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica*, Vol. 3, No. 2, pp. 227-233.

- [24] LOOMIS, Lynn H. , 1953, *An Introduction To Abstract Harmonic Analysis*, D.Van Nostrand Company Inc.
- [25] LUXEMBURG, W.A.J., 1955, *Banach Function Spaces*, Ph.D. Dissertation, Delft.
- [26] MORSE, M. and TRANSUE, W., 1950, Functionals F bilinear over the product A B of two pseudo-normed vector spaces II *Ann. of Math.*, 51, 576614.
- [27] ORLICZ, W., 1932, Über eine gewisse Klasse von Rumen von Typus B, *Bull. Inst. Acad. Polon. Sci. Ser. A* , pp. 207-220.
- [28] ÖZTOP, S. and GÜRKANLI, A.T., 2000, Multipliers and tensor products of weighted Lp-spaces, *Acta Mathematica Scienta*, 21B(1):41-49.
- [29] RAJ, K. and KHOSLA, V., 2009, Weighted Composition Operators between Spaces of Orlicz-Functions, *International Journal of Algebra*, Vol. 3, no. 7, 315 - 324
- [30] RAO, M.M., and REN., Z.D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, CRC Press; 1 edition
- [31] RAO, M.M., and REN., Z.D., 2002, *Applications Of Orlicz Spaces*, CRC Pres;1 edition
- [32] REITER, H. and STEGEMAN, Jan D., 2001, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Oxford Univ. Press
- [33] RUDIN, W., 1990, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley-Interscience
- [34] RUDIN, W., 1986, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition
- [35] SAEKI, S., 1990, The Lp-conjecture and Youngs inequality, *Illinois J. Math.*, 34, 615627.

- [36] SEGAL, I.E., 1951, Equivalences of Measure Spaces, *American Journal of Mathematics*, Vol. 73, No. 2, pp. 275-313
- [37] TREVES, F., 1967, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels* , Academic Press, New York-London
- [38] WANG, H., 1977, *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker INC., New York and Basel

## ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İstanbul'da doğdum. İlk öğretimimi Yeşilköy İlkokulu'nda, orta ve lise öğretimimi ise Getronagan Lisesi'nde 1999 yılında tamamladım ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 'ne girmeye hak kazandım. 2003 yılında Matematik Bölümü'nden birincilikle mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitime başladım. 2005 yılında İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandım. 2007 yılında Yüksek Lisans eğitimimi tamamladım ve aynı yıl İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Doktora eğitimime başladım. Doktora eğitimim sırasında, 2010 yılında bir ay süreyle İtalya'nın Pisa şehrinde bulunan Ennio De Giorgi Matematik Araştırma Merkezi'nde gerçekleştirilen yoğunlaştırılmış seminer programına katıldım. Halen İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde çalışmalarına devam etmekteyim.