

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NOKTA KONUM DOĞRULUĞUNUN İKİ VE ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT
DÖNÜŞÜMÜNE ETKİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yiğit Sertaç SUBAŞI

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Anabilim Dalı

Geomatik Mühendisliği Programı

Mayıs 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NOKTA KONUM DOĞRULUĞUNUN İKİ VE ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT
DÖNÜŞÜMÜNE ETKİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yiğit Sertaç SUBAŞI

(501071647)

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Anabilim Dalı

Geomatik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Orhan AKYILMAZ

Mayıs 2014

ÖNSÖZ

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliğini tecrübeyi bilgiden ayırmadan, akademik düşünce yetisini kaybetmeden en iyi şekilde mesleğimi icra etmenin farkında olarak;

Eğitim süresi boyunca ve tez aşaması sırasında desteğini, bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen hoşgörü ve sabrından dolayı Sayın Prof. Dr. Orhan AKYILMAZ'a ,

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan sevgili dostlarıma ve ebedi öğretmenlerim sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2014

Yiğit Sertaç Subaşı
(Jeodezi ve Fotogrametri
Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. JEODEZİK UYGULAMALARDA DÖNÜŞÜMLER.....	3
2.1. İki Boyutlu Koordinat Dönüşümü	3
2.1.1. Benzerlik dönüşümü.....	3
2.1.1.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın benzerlik dönüşümü.....	3
2.1.1.2. Konum doğrulukları göz önüne alınarak benzerlik dönüşümü	7
2.1.1.3. Toplam en küçük kareler yaklaşımı	7
2.1.1.4. İteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yaklaşımı	9
2.1.2. İki boyutlu afin dönüşümü.....	14
2.1.2.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın afin dönüşümü	14
2.1.2.2. Konum doğrulukları göz önüne alınarak afin dönüşümü	16
2.2. Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümleri.....	17
2.2.1. Üç boyutlu benzerlik dönüşümü.....	17
2.2.1.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın benzerlik dönüşümü... ..	17
2.2.1.2. Konum doğrulukları göz önüne alınarak benzerlik dönüşümü	22
2.2.2. Üç boyutlu afin dönüşümü	24
2.2.2.1. Konum doğrulukları göz önüne alınarak ve alınmaksızın afin dönüşümü	24
2.3. Uyuşumsuz Ölçüler Testi.....	27
2.4. Sayısal Uygulama	29
3. SONUÇ.....	46
KAYNAKLAR.....	48

KISALTMALAR

EKK	: En Küçük Kareler
LS	: Least Square - En Küçük Kareler
TLS	: Total Least Square - Toplam En Küçük Kareler
IWTLS	: Iterative Weighted Total Least Square - İteratif Ağırlıklı Toplam En Kareler

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 : Birinci sistem koordinatları ve konum doğrulukları.	29
Çizelge 2.2 : İkinci sistem koordinatları konum doğrulukları.	30
Çizelge 2.3 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü bilinmeyenleri.	31
Çizelge 2.4 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü hatalar.	32
Çizelge 2.5 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü iteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemi hatalar.	33
Çizelge 2.6 : İki boyutlu afin dönüşümü bilinmeyenleri.	35
Çizelge 2.7 : İki boyutlu afin dönüşümü hatalar.	36
Çizelge 2.8 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları. ...	37
Çizelge 2.9 : İki boyutlu afin dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları.	38
Çizelge 2.10 : Simülasyon verileri iki boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları.	39
Çizelge 2.12 : TLS yöntemle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.	40
Çizelge 2.13 : Tüm noktalar kullanılarak klasik yöntemiyle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.	41
Çizelge 2.14 : Tüm noktalar kullanılarak TLS yöntemiyle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.	41
Çizelge 2.15 : Her iki parametreye ve yonteme göre elde edilen sonuçların gerçek koordinatlar arası farklarının karşılaştırılması.	42
Çizelge 2.16 : Üç boyutlu sistem koordinatları.	42
Çizelge 2.17 : Üç boyutlu benzerlik dönüşümü bilinmeyenleri.	43
Çizelge 2.18 : Üç boyutlu benzerlik dönüşümü hataları.	43
Çizelge 2.19 : Üç boyutlu afin dönüşümü hataları.	43

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 : Benzerlik dönüşümü sonucunda oluşan şekil.....	3
Şekil 2.2 : Dönüşüm yapılacak iki dik koordinat sistemi.....	4
Şekil 2.3 : Afin dönüşümü sonucunda oluşan şekil.....	15
Şekil 2.4 : Üç boyutta benzerlik dönüşümü.....	18
Şekil 2.5 : X eksenini etrafında dönüklük.....	19
Şekil 2.6 : Y eksenini etrafında dönüklük.....	19
Şekil 2.7 : Z eksenini etrafında dönüklük.....	20

NOKTA KONUM DOĞRULUĞUNUN İKİ VE ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜNE ETKİSİ

ÖZET

Geçmişten günümüze süregelen insan-toprak ilişkisi ve bu ilişkinin sürdürülebilir ve toplumsal bir seviyede oluşturulabilmesi ayrıca insan yaşamını kolaylaştırmak, düzenlemek, sosyal bir çevrede yaşamasını sağlamak için yapılan çok sayıda mühendislik projelerinin amacına uygun olması, kullanılması, diğer projeler ile bağlantılı olması için temelde yeryüzündeki konumunun belirlenmesi gereklidir. Bu nedenle yapılan ve yaşadığımız dünyanın her bölgesinde yapılan çalışmalarda kullanılmak üzere tek anlamlı farklı koordinat sistemleri tanımlanmıştır. Bu tanımlanan koordinat sistemleri ile farklı koordinat sistemlerine dayalı oluşturulan, insan-toprak ilişkisine bağlı bir bilgi sistemi olsun ya da mühendislik projesi olsun birbirleri ile ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Bu gereklilik çalışmanın amacına göre farklı koordinat sistemlerine geçişte farklı doğruluk derecesinde bir yaklaşım içerebilir. Koordinat sistemleri tanımlanırken bir başka koordinat sistemi ile arasındaki dönüşüm parametreleri belirlenmelidir. Farklı jeodezik sistemlerin kullanılması, bir sistemden diğerine geçişte koordinat dönüşümleri jeodezide en çok kullanılan işlemlerden birisidir. Dönüşüm için gerekli olan dönüşüm parametreleri olarak adlandırılan bilinmeyenlerin çözümü için her iki koordinat sisteminde de ortak olan jeodezik noktalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bilinmeyenlerin çözümü için genel olarak en küçük kareler (Least Squares, LS) dengelemesi yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntem ile çözüme ulaşımında her iki sistemdeki koordinatların doğru olarak kabul edildiği düşünülür. Ancak biliyoruz ki her ölçü kendi içerisinde rastlantısal nitelikte bir takım hatalar barındırmaktadır. Başlangıç koordinat sisteminde olsun veya hedef koordinat sisteminde olsun nokta koordinatları hatalar içermektedir. LS yaklaşımında koordinat doğruluklarını içeren veriler kullanılamamaktadır. Bu yöntemin yerine dizayn matrisleri oluşturulurken nokta konum doğruluklarını kullanabilmek için toplam en küçük kareler (total least squares, TLS) yaklaşımı kullanılmaktadır. Böylece bilinmeyenlerin kestiriminde daha gerçekçi değerler elde edilebilir. Bu çalışmada klasik yaklaşım LS ile TLS, ayrıca bu yöntem için iki farklı yaklaşım üzerinde durulacak ve her üç yöntemle elde edilen parametreler ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Koordinat Dönüşümü, Benzerlik, Afin, Total Least Squares, Least Squares, Adjustment, Weighted Total Least Square

EFFECTS OF ACCURACY OF COORDINATES ON TWO DIMENSIONAL AND THREE DIMENSIONAL COORDINATE TRANSFORMATION

SUMMARY

From past to this day ongoing human-earth relationship to ensure properly and in a realistic way this relationship sustainable social level can be created, also in order to facilitate human life, to organize a social environment to be lived, large number of engineering projects to be linked with other projects as intended use to be made that it is necessary to first determine its position on earth. Every region of the world we live in different coordinate systems to be used are defined univocally. Either geographic information systems or engineering projects based on produce to be defined different coordinate systems, it is necessary to get associated with each other. According to these requirements, the feasibility in the transition between two different coordinate systems may have differences in sensitivity.

In recent years, the least squares method of adjusting spatial data has been rapidly gaining popularity as the method used for analyzing and adjusting surveying data. This should not be surprising, because the method is the most rigorous adjustment procedure available. It is soundly based on the mathematical theory of probability; it allows for appropriate weighting of all observations in accordance with their expected precisions; and it enables complete statistical analyses to be made following adjustments so that the expected precisions of adjusted quantities can be determined.

The method of least squares is a standard approach to the approximate solution of overdetermined systems, sets of equations in which there are more equations than unknowns. "Least squares" means that the overall solution minimizes the sum of the squares of the errors made in the results of every single equation.

The most important application is in data fitting. The best fit in the least-squares sense minimizes the sum of squared residuals, a residual being the difference between an observed value and the fitted value provided by a model. When the problem has substantial uncertainties in the independent variable (the 'x' variable), then simple regression and least squares methods have problems; in such cases, the methodology required for fitting errors-in-variables models may be considered instead of that for least squares.

The most compelling of all reasons for the recent increased interest in least squares adjustment is that new accuracy standards for surveys are being developed that are

based on quantities obtained from least squares adjustments. Thus, surveyors of the future will not be able to test their observations for compliance with these standards unless they adjust their data using least squares. Clearly modern surveyors must be able to apply the method of least squares to adjust their observed data, and they must also be able to perform a statistical evaluation of the results after making the adjustments.

In geodesy measuring and calculating horizontal and vertical control networks are different and those two control networks are independently. Counting geodetic measurements technology and developing methods, depending on the GPS technique used by a conventional method results compared products differ in raises. Three-dimensional coordinates obtained by GPS while the horizontal and vertical systems by conventional methods are discussed separately. GPS technique in the direction of the axis corresponds to the spatial scale is not the same horizontal and vertical trials leads to differences in the scale.

In our country, the measurement methods were used as well as specific horizontal and vertical control network except using the locally produced and used systems also are often used. Given the reasons mentioned above geodetic coordinate transformations has an important place in studies. Transformation parameters in the mathematical model of the system is known, unless the transition from one system to another system is possible with these parameters. Generally known parameters in both systems because of commonalities with known coordinates transformation parameters is performed by calculating the coordinate transformation between the systems.

Transformation parameters between two different coordinate systems must be determined. The use of different geodetic systems, the transition from one system to another coordinate system is one of the most widely used process in geodetic science. Transformation parameters are calculated from the identical points' coordinates of which are known in both coordinate system. General idea of solution of transformation parameters is the least squares (LS) estimation.

LS estimation is the classical approach in adjustment calculations. This method considers that the source coordinates are error-free.. However, we know that every measurement in itself contains a number of random errors. Either source coordinates or the target coordinates contains errors. LS approach take this into account during the solution of the transformation problem where both system coordinates are assumed to be stochastic.

Total least squares estimation allows for us to use these errors for adjustment calculation. Thus, a more realistic estimation of transformation parameters' values can be obtained. This study will focus on the use of classical approach LS and TLS, also same technique different approach and the parameters obtained from these methods will be compared.

The results are compared to the classical LS solution. TLS is able to handle the uncertainty and the results are more realistic than the classical approach.

Keywords: Coordinate Transformation, Similarity Transformation, Affine Transformation, Total Least Squares, Least Squares, Adjustment, Weighted Total Least Square

1. GİRİŞ

Farklı jeodezik sistemlerin kullanılması ve bir sistemden diğerine geçişte koordinat dönüşümleri jeodezi biliminde en çok kullanılan işlemlerden birisidir. Dönüşüm için gerekli olan dönüşüm parametreleri olarak adlandırılan bilinmeyenlerin çözümü için her iki koordinat sisteminde de ortak olan jeodezik noktalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bilinmeyenlerin çözümü için genel olarak en küçük kareler (Least Squares, LS) dengelemesi yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntem ile çözüme ulaşımında sadece gözlem ölçülerinin rastlantısal hata içerdiği düşünülmektedir. Halbuki dizayn matrisini oluşturan başlangıç sistemi koordinatları da hata içermektedir. Bu durum genellikle dönüşüm işlemlerine dahil edilmez (Akyılmaz 2007). Ancak biliyoruz ki her ölçüm kendi içerisinde bir takım hatalar barındırmaktadır. Başlangıç koordinat sistemi olsun veya hedef koordinat sistemi olsun hatalar içermektedir. LS yaklaşımı ile koordinat doğruluklarını içeren veriler kullanılamamaktadır. Bu yöntemin yerine dizayn matrisleri oluşturulurken nokta konum doğruluklarını kullanabilmek için toplam en küçük kareler (total least squares TLS) yaklaşımı kullanılmaktadır. TLS yaklaşımının akademik çevrede kullanılmasının sıklık kazanması, farklı TLS yöntemlerinin kullanılması ve parametre hesaplarında elde edilen sonuçların daha gerçekçi değerler verdiği iddia edilmesi üzerine bu çalışmada klasik yaklaşım TL ile TLS yaklaşımları üzerinde durulacak ve her iki yöntemle elde edilen parametreler karşılaştırılacaktır.

Jeodezide kullanılan yatay ve düşey kontrol ağlarının ölçümünün, hesabının farklı olması, buna bağlı olarak iki kontrol ağının birbirinden bağımsız sayılması, jeodezik ölçümlerde teknolojiye ve gelişen yöntemlere bağlı olarak GPS tekniğinin kullanılması alışlagelmiş yöntemlerle karşılaştırıldığında sonuç ürünlerde farklılıklar doğurmaktadır. GPS tekniği ile üç boyutlu koordinatlar elde edilirken klasik yöntemlerle yatay ve düşey sistem ayrı olarak ele alınmaktadır. GPS tekniğinde eksenler yönündeki ölçek aynı olmasına karşılık yersel çalışmalarda yatayda ve düşeyde ölçek farklılığına yol açmaktadır. (Şanlıoğlu 1998)

Ülkemizde, kullanılan ölçüm yöntemlerin farklı olmasının yanı sıra belirli bir datuma bağlı yatay ve düşey kontrol ağlarının kullanılmasının yanında lokal olarak üretilmiş ve kullanılmakta olan sistemler de sıklıkla kullanılmaktadır.

Yukarıda bahsedilen sebepler göz önüne alındığında koordinat dönüşümleri jeodezik çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Dönüşüm sisteminin matematiksel modelindeki parametreler bilindiği sürece bir sistemden diğer sisteme geçiş bu parametrelerle mümkündür. Genellikle parametreler bilinmediği için her iki sistemde koordinatları bilinen ortak noktalar ile dönüşüm parametreleri hesaplanarak sistemler arası koordinat dönüşümü yapılır.

Bu çalışmada iki ve üç boyutlu dönüşümlerin (benzerlik, afin) incelemesi yapılacaktır.

2. JEODEZİK UYGULAMALARDA DÖNÜŞÜMLER

2.1. İki Boyutlu Koordinat Dönüşümü

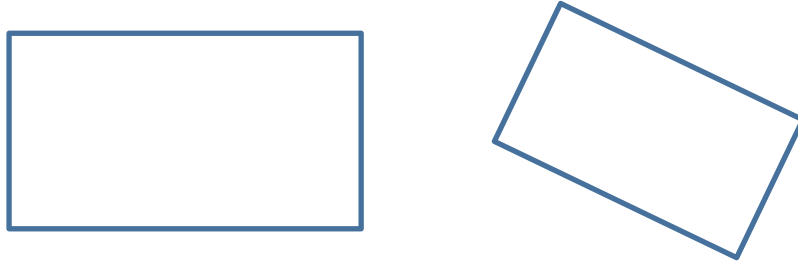
2.1.1. Benzerlik dönüşümü

2.1.1.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın benzerlik dönüşümü

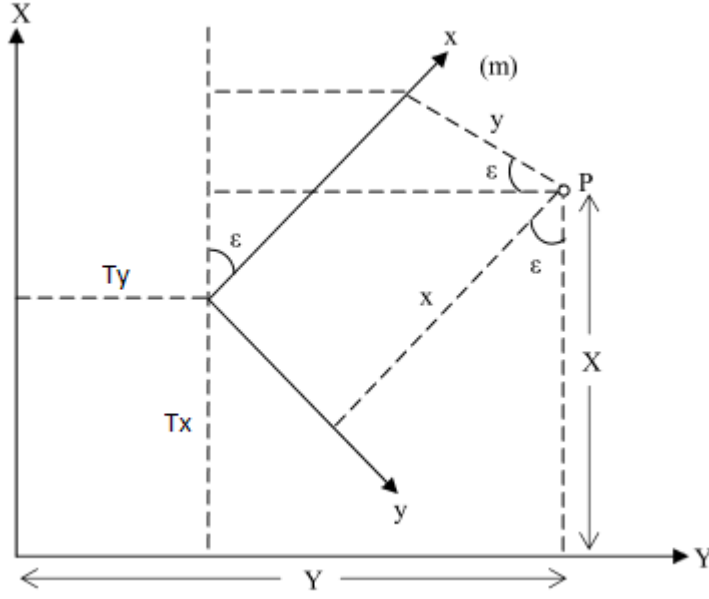
Dönüşümden sonra oluşan geometrik şekiller benzerliğini koruyorsa buna benzerlik dönüşümü denir. Benzerlik dönüşümünde;

- 1) Düzgün geometrik şekillerin alanları aynı oranda küçülür veya büyür.
- 2) Şekiller dönüşümden sonra esas şekle benzer.
- 3) Açıların mutlak değerleri değişmez kalır (Pektekin 1989)

Yapılan dönüşüm sonunda geometrik şekil korunur fakat elde edilen yeni sistem koordinatları ile yapılan hesaplamalar arasında farklılıklar vardır. Geometrik şekil dönüşüm öncesi geometriye benzerdir. Sonuç olarak yeni sistem eski sistemin başlangıcına göre her iki eksende ötelenmiş, eksenler döndürülmüş ve sabit bir ölçek katsayısı ile çarpılarak oluşmuştur.



Şekil 2.1 : Benzerlik dönüşümü sonucunda oluşan şekil.



Şekil 2.2 : Dönüşüm yapılacak iki dik koordinat sistemi.

Burada;

x, y : 1. Sistemin koordinatları

X, Y : 2. Sistemin koordinatları

ε : İki koordinat sistemi arasındaki dönüklük açısı

T_x, T_y : Öteleme elemanları

m : Ölçek faktörü

Şekil 1.2' de iki dik koordinat sistemi tanımlanmıştır. P noktasına ait her iki sistemde koordinatları gösterilmiştir. Bu noktanın her iki sistemdeki koordinatları arasında,

$$X = x m \cos\varepsilon - y m \sin\varepsilon + T_x$$

$$Y = x m \sin\varepsilon + y m \cos\varepsilon + T_y \quad (1.1)$$

eşitlikleri yazılabilir.

$$a = m \cos \varepsilon , \quad b = m \sin \varepsilon \quad (2.2)$$

olarak yazılırsa, benzerlik dönüşümü eşitlikleri

$$X = ax - by + T_x$$

$$Y = ay + bx + T_y \quad (2.3)$$

olur. Eşitlikteki a , b , T_x , T_y katsayıları dönüşüm parametreleri olarak isimlendirilir. Bu dönüşümde m ölçek katsayısı ve iki dik koordinat sistemi arasındaki ε dönüklüğü, parametreler cinsinden;

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

olur (Tanık 2003).

Benzerlik dönüşümünde 1 ölçek, 1 dönüklük ve 2 öteleme olmak üzere toplam dört parametre vardır. Dört parametrenin çözümü için her iki sistemde koordinatları bilinen en az iki ortak noktaya ihtiyaç vardır. Ortak nokta sayısının ikiden fazla olması durumunda dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemine göre hesaplanır. Nokta sayısının üç ya da daha fazla olması durumunda (2.3) eşitlikleri kullanılarak nokta sayısının iki katı kadar düzeltme denklemi yazılabilir (Yaşayan 1978);

$$ax_1 - by_1 + T_x = X_1 + V_{X_1}$$

$$ay_1 + bx_1 + T_y = Y_1 + V_{Y_1} \quad (2.5)$$

.....

.....

$$ax_n - by_n + T_x = X_n + V_{X_n}$$

$$ay_n + bx_n + T_y = Y_n + V_{Y_n}$$

Dengeleme hesaplarında kullanılan katsayılar matrisi (A) dönüşüm eşitliklerinin bilinmeyenlere göre kısmi türevleri alınarak elde edilirler. Yeni sistem koordinatları ölçü olarak değerlendirilerek (l) vektörü elde edilir. Buna göre;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & x_n & -y_n \\ 0 & 1 & y_n & x_n \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ \vdots \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Bilinmeyenler vektörü $X = Q_x n$ olmak üzere;

$$Q_x = (A^T A)^{-1} \quad n = (A^T l) \quad (2.7)$$

Q_x ve n yerine karşılıkları yazılırsa bilinmeyenler vektörü;

$$X = (A^T A)^{-1} A^T l \text{ ile hesaplanır.} \quad (2.8)$$

Bilinmeyenlerin hesabından sonra her bir koordinat çiftine getirilecek düzeltmeleri içeren hata vektörü V ;

$$V = Ax - l \quad (2.9)$$

ile hesaplanır.

Birim ölçünün veya ortak nokta her bir noktanın konum hatası n ortak nokta sayısı olmak üzere,

$$m_0 = m_x = m_y = \sqrt{\frac{[V_x^2 + V_y^2]}{2n-4}} \quad (2.10)$$

ve P noktasının konum hatası;

$$m_p = m_0 \sqrt{2} = \sqrt{\frac{[V_x^2 + V_y^2]}{n-2}} \quad (2.11)$$

ile hesaplanır.

2.1.1.2. Konum doğrulukları göz önüne alınarak benzerlik dönüşümü

Burada iki farklı yöntem konum doğrulukları kullanılarak dengeleme işlemleri yapılmış ve parametreler elde edilmiştir.

2.1.1.3. Toplam en küçük kareler yaklaşımı

Jeodezik açıdan olsun veya olmasın yapılan her ölçü belli bir payı içerir. Dönüşümde kullanılan her iki sistem koordinatları, elde edildikleri yöntem ne olursa olsun belli hataları barındırırlar. Her ne kadar jeodezik çalışmalarda işlem yükünün artmasına neden olup koordinat doğrulukları kullanılmasa da bu tezin konusu olarak her iki sistem koordinatlarının hata içerdikleri düşünülüp klasik yöntem ve toplam en küçük kareler (TLS) yöntemleri arasında karşılaştırma yapılacaktır. Dönüşüm sisteminde kullanılan noktaların koordinatlarının standart sapmalarının kareleri (varyans) TLS yönteminde doğruluk değerleri olarak kullanılacaktır. Dönüşüm için kullanılan matematiksel model, konum doğrulukları dikkate alındığında,

$$F(x, y, X, Y) = X_0 - b(y + v_y) + a(x + v_x) - (X_p + v_x) = 0 \quad (2.12)$$

$$G(x, y, X, Y) = Y_0 + b(x + v_x) + a(y + v_y) - (Y_p + v_y) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Dönüşüme giren her nokta için (12) eşitliği bilinmeyenler ve x, y, X, Y ' e göre kısmi türevleri alınarak;

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dX} &= -1 & \frac{dF}{dY} &= 0 & \frac{dF}{dx} &= a & \frac{dF}{dy} &= -b & \frac{dF}{dX_0} &= 1 \\ \frac{dF}{dY_0} &= 0 & \frac{dF}{da} &= x & \frac{dF}{db} &= -y & & & & \\ & & & & & & & & & (2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dX} &= 0 & \frac{dG}{dY} &= -1 & \frac{dG}{dx} &= b & \frac{dG}{dy} &= a & \frac{dG}{dX_0} &= 0 \\ \frac{dG}{dY_0} &= 1 & \frac{dG}{da} &= y & \frac{dG}{db} &= x & & & & \end{aligned}$$

ve matris biçiminde gösterilirse;

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & a & -b \\ 0 & -1 & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x_0} \\ d_{y_0} \\ d_a \\ d_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p - (X_0 - by + ax) \\ Y_p - (Y_0 + bx + ay) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$\underline{B} \qquad \underline{V} \qquad \underline{A} \qquad \underline{X} \qquad \underline{K}$

şeklinde ifade edilebilir. Açıklanan yöntemde kullanılacak olan matrisler aşağıdaki gibidir.

$$W = (BQB^T)^{-1} \qquad X = (A^TWA)^{-1}A^TWK \qquad V = AX - K \quad (2.15)$$

Q matrisi dönüşüm ortak noktalarının her iki sistemdeki doğruluklarını içeren köşegen matristir. W ağırlık matrisi yukarıda gösterildiği şekilde hesaplanmaktadır. Çözüm için öncelikle konum doğrulukları dikkate alınmadan benzerlik dönüşümü yapılır. Bilinmeyenler T_x , T_y , a , b elde edildikten sonra B , W ve K matrisleri düzenlenir. B , W ve K matrislerini daha açık yazmak gerekirse;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & -b & \dots & 0 \\ 0 & -1 & b & a & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \dots & -1 & 0 & a & -b \\ & & & & & 0 & -1 & b & a \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \sigma_{y_1}^2 & & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_{x_1}^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \sigma_{y_1}^2 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklini alır. Birinci iterasyon için B , W ve K hesaplandıktan sonra x matrisi hesaplanır. Hesap sonucu elde edilen değerler bir önceki hesaplanan bilinmeyenlere düzeltme olarak eklenir ve B , W , K matrisleri tekrar hesaplanır. İterasyon, X matrisi bilinmeyenler düzeltme değerleri yeterince küçük oluncaya kadar devam eder.

2.1.1.4. İteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yaklaşımı

Bu yaklaşımla izlenen adımlar $y - e = (A - E)x$ hata modeli üzerine kurulmuştur. Tanımlanan modelde e ve E , sırasıyla gözlem ölçülerinin hata vektörü ve katsayılar matrisinin hata matrisini ifade etmektedir.

Klasik LS yaklaşımında problem, $y = Ax$ doğrusal model ile açıklanır. Sadece gözlem ölçülerinin rastlantısal hatalar içerdiği düşünülür ve parametre değerleri \hat{x} kestirimi $e^T Q_e^{-1} e = \min$ önergesi üzerine kurulmuştur. Burada Q_e bu matrisin varyans-kovaryans matrisini ifade etmektedir.

Toplam en küçük kareler yaklaşımının özelleştirilmiş hali olarak ağırlıklı toplam en küçük kareler yaklaşımında dizayn ve gözlem ölçüleri farklı ağırlıklara sahip olduğu düşünülerek problem ele alınır. Çözüm için öngörülen yaklaşım;

$$e^T Q_e^{-1} e + (\text{vec}(E)^T) Q_E^{-1} \text{vec}(E) = \min \quad (2.18)$$

E , Q_E $m \times n$ ve $m \times m$ boyutlarında sırasıyla hata matrisi ve dizayn matrisi elamanlarına karşılık gelen varyans-kovaryans matrisidir. “vec” operatörü bir matrisin vektör formatına getirilmesi için kullanılmıştır (S. Jazaeri , A. R. Amiri-Simkooei , M. A. Sharifi, 2012). Bu yaklaşıma yönelik hazırlanan algoritmada¹ kullanılan (^) sembolü kestirilen değerler için kullanılmaktadır. Yani \hat{A} ve $\hat{y} = \hat{A}\hat{x}$ dizayn ve gözlem ölçülerinin kestirim değerleridir. Bahsedilen yöntem için öngörülen yaklaşım formüle edilirse;

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{A}, \hat{x}) &= \hat{e}^T Q_e^{-1} \hat{e} + \text{vec}(\hat{E})^T Q_E^{-1} \text{vec}(\hat{E}) \\ &= (y - \hat{y})^T Q_e^{-1} (y - \hat{y}) + \text{vec}(A - \hat{A})^T Q_E^{-1} \text{vec}(A - \hat{A}) \\ &= (y - \hat{A}\hat{x})^T Q_e^{-1} (y - \hat{A}\hat{x}) + \text{vec}(A - \hat{A})^T Q_E^{-1} \text{vec}(A - \hat{A}) = \min \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dizayn matrisinin (\hat{A}) ve bilinmeyenler vektörünün (\hat{x}) kestirim değerlerini bulmak için $\partial \hat{x}$ ve $\partial \text{vec}(\hat{A})$ ‘ya göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \text{vec}(\hat{A})} = 0$$

¹ Iterative weighted total least squares algorithm S. Jazaeri , A. R. Amiri-Simkooei , M. A. Sharifi

$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} = 0$ eşitliğine karşılık;

$$\frac{\partial (y - \hat{A}\hat{x})^T Q_e^{-1} (y - \hat{A}\hat{x})}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial y^T Q_e^{-1} y - 2y^T Q_e^{-1} \hat{A}\hat{x} + \hat{x}^T \hat{A}^T Q_e^{-1} \hat{A}\hat{x}}{\partial \hat{x}} = -2y^T Q_e^{-1} \hat{A} + 2\hat{A}^T Q_e^{-1} \hat{A}\hat{x}^T \quad (2.20)$$

Bu denklemde karşılaşılan sorun kestirim değeri (\hat{A})'nın da bilinmeyen olmasıdır. Fonksiyon aşağıdaki gibi düzenlenip tekrar yazılırsa;

$$\Phi(\hat{A}, \hat{x}) = (y - I_m \hat{A}\hat{x})^T Q_e^{-1} (y - I_m \hat{A}\hat{x}) + \text{vec}(A - \hat{A})^T Q_E^{-1} \text{vec}(A - \hat{A}) \quad (2.21)$$

ve “vec” operatörünün özelliği $\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B)$ kullanılırsa ulaşılan fonksiyonel model;

$$\Phi(\hat{A}, \hat{x}) = \left(y - (\hat{x}^T \otimes I_m) \text{vec}(\hat{A}) \right)^T Q_e^{-1} \left(y - (\hat{x}^T \otimes I_m) \text{vec}(\hat{A}) \right) + \left(\text{vec}(A) - \text{vec}(\hat{A}) \right)^T Q_E^{-1} \left(\text{vec}(A) - \text{vec}(\hat{A}) \right) \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. Burada “ \otimes ” sembolü Kronecker çarpım operatörünü, I_m $m \times m$ boyutunda birim matrisi ifade etmektedir.

Kısmi türevlerin ikinci parçası için; $\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \text{vec}(\hat{A})} = 0$ ise;

$$\text{vec}(\hat{A})^T \left(Q_E^{-1} + (\hat{x} \otimes I_m) Q_e^{-1} (\hat{x}^T \otimes I_m) \right) - y^T Q_e^{-1} (\hat{x}^T \otimes I_m) - \text{vec}(A)^T Q_E^{-1} = 0$$

Sadeleştirme amaçlı olarak $\hat{X} = (\hat{x} \otimes I_m)$ and $\hat{X}^T = (\hat{x}^T \otimes I_m)$ değerleri denklemde yerine yazılırsa;

$$\text{vec}(\hat{A}) = \left(Q_E^{-1} + \hat{X} Q_e^{-1} \hat{X}^T \right)^{-1} \left(\hat{X} Q_e^{-1} y + Q_E^{-1} \text{vec}(A) \right) \quad (2.23)$$

ifadesi elde edilir.

Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer husus ise katsayılar matrisi A matrisinde sabit değerlerin ve de negatif ve pozitif tekrar eden değerlerin kullanılmasıdır. Bu durum, Q_E matrisinin oluşturulmasında belli kuralları göz önüne almayı gerektirmektedir. Bu kuralları sıralamak gerekirse;

- Eğer A matrisinde tekrarlanan değerler var ise bu değerler arasında %100 korelasyon vardır demektir ve bu değerler varyans değerlerine eşit kovaryansa sahiplerdir.

- Eğer A matrisinde tekrarlanan değerler var ise bu değerler arasında -%100 korelasyon vardır demektir ve bu değerler varyans değerlerinin negatif işaretli kovaryansa sahiplerdir.
- Eğer A matrisinde sabit değerler var ise bu değerlere karşılık gelen satır ve sütunlara sıfır varyans değeri koyulmalıdır.
- Eğer farklı değerler var ise ve de aralarında korelasyon var ise karşılık gelen kovaryansa değerine bir değilse sıfır değeri koyulmalıdır.
- Eşdeğişkenli durum söz konusu olduğunda yukarıdaki kurallar geçerlidir. Eğer matris elemanı rastgele bir değer ise bir sabit değer ise sıfır kullanılmalıdır (Mahboub, 2011).

Q_E matrisinin oluşturulmasında karşılaşılan bir diğer problem, matrisin iki farklı ranka sahip olmasından kaynaklı tersinin alınamaması olasılığının olması durumudur. Bu durumda şu ana kadar yapılan formüllerde kullanılan Q_E^{-1} matrisi yerine Q_E matrisinin kullanılması, sözü geçen problemi ortadan kaldıracaktır. Matrisin tersini alma işleminin özelliklerinden;

$$(A - UD^{-1}V)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(D - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \quad (2.24)$$

formülasyonu kullanılırsa denklem içeriğinde Q_E^{-1} matrisi yerini Q_E matrisi alacaktır.

Bunun için $A = Q_E^{-1}$, $U = -(\hat{x} \otimes I_m) = -\hat{X}$, $D = Q_e$, $V = (\hat{x}^t \otimes I_m) = \hat{X}^T$,

yerlerine yazılırsa;

$$(Q_E^{-1} + \hat{X}Q_e^{-1}\hat{X}^T)^{-1} = Q_E - Q_E\hat{X}(Q_e + \hat{X}^T Q_E\hat{X})^{-1}\hat{X}^T Q_E \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

$$\text{vec}(\hat{A}) = \text{vec}(A) + Q_E\hat{X} \left(Q_e^{-1}y - (Q_e + \hat{X}^T Q_E\hat{X})^{-1}\hat{X}^T (Q_E\hat{X}Q_e^{-1}y + \text{vec}(A)) \right)$$

denkleme bahsedilen özellik uygulandığında;

$$\text{vec}(\hat{A}) = \text{vec}(A) + Q_E\hat{X}(Q_e + \hat{X}^T Q_E\hat{X})^{-1}(y - A\hat{x}) \quad (2.26)$$

hale gelir. Kestirim değerleri elde edildikten sonra katsayılar matrisine ait hata vektörünü;

$$\text{vec}(\hat{E}) = \text{vec}(A) - \text{vec}(\hat{A})$$

$$\text{vec}(\hat{E}) = -Q_E \hat{X} (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - A\hat{x}) \quad (2.27)$$

şeklinde elde edebiliriz. Gözlem ölçülerine ait hata vektörünü;

$\hat{e} = y - \hat{y} = y - \hat{A}\hat{x} = y - A\hat{x} + \hat{E}\hat{x} = y - A\hat{x} + \hat{X}^T \text{vec}(\hat{E})$ şeklinde yazabilir, sonuç olarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\hat{e} = (I - \hat{X}^T Q_E \hat{X} (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1}) (y - A\hat{x}) \text{ eşitliği;}$$

$$\hat{e} = Q_e (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - A\hat{x}) \quad (2.28)$$

elde edilir. Bilinmeyenler matrisi için klasik yöntemde kullanılan

$\hat{x} = (\hat{A}^T Q_e^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{A}^T Q_e^{-1} y$ eşitliğini ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemi yaklaşımına uyarlırsak ;

$y = \hat{e} + \hat{y} = \hat{e} + \hat{A}\hat{x}$ ifadesinde \hat{e} yerine karşılığı (28) yazılır ve A yerine $(\hat{A} - E)$ kullanılırsa;

$$y = \hat{A}\hat{x} + Q_e (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - A\hat{x})$$

$$\hat{x} = (\hat{A}^T (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{A}^T (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - \hat{E}\hat{x}) \quad (2.29)$$

elde edilmiş olur. Parametre bilinmeyenleri bulunduğu, bu bilinmeyenlere ait kovaryans matrisi ise;

$$C_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\hat{A}^t (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} \hat{A})^{-1} \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir. Varyans değeri klasik yöntemde $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m-n}$ şeklinde elde edilmektedir. Bu yöntem ağırlıklı toplam en küçük kareler düşünüldüğünde ise;

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(y - A\hat{x})^T (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - A\hat{x})}{m - n} \quad (2.31)$$

olarak tanımlanır. İteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemi için izlenecek algoritma aşağıda verilmiştir (S. Jazaeri, A. R. Amiri-Simkooei, M. A. Sharifi ,2012).

Algoritma:

1- \hat{x}_i kestirim değeri en küçük kareler yöntemi veya toplam en küçük kareler yöntemi ile kestirilebilir.

2- while $\|\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i\| > \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-12}$

3- $\hat{X}_i = \hat{x}_i \otimes I_m$

4- $\text{vec}(\hat{A}_i) = \text{vec}(A) + Q_E \hat{X}_i (Q_e + \hat{X}_i^T Q_E \hat{X}_i)^{-1} (y - A \hat{x}_i)$

5- $\hat{A}_i = \text{reshape}(\text{vec}(\hat{A}_i))$

6- $\hat{E}_i = A - \hat{A}_i$

7- $\hat{x}_{i+1} = (\hat{A}_i^T (Q_e + \hat{X}_i^T Q_E \hat{X}_i)^{-1} \hat{A}_i)^{-1} \hat{A}_i^T (Q_e + \hat{X}_i^T Q_E \hat{X}_i)^{-1} (y - \hat{E}_i \hat{x}_i)$

8- $i = i + 1$

9- end while

10- $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(y - A \hat{x})^T (Q_e + \hat{X}^T Q_E \hat{X})^{-1} (y - A \hat{x})}{m-n}$

11- $C_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\hat{A}^T (Q_e + \hat{X}_i^T Q_E \hat{X}_i)^{-1} \hat{A})^{-1}$

Bu kısımda toplam en küçük kareler yöntemine karşılık ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ele alınmış, bu yöntemin çözüm sürecinde tekrarlanan değerlerden oluşan dizayn matrisinin varyans-kovaryans matrisinin tersinin alınamama durumuna karşılık matrisin tersi yerine kendisinin kullanılabileceği şekilde eşitlikler düzenlenmiş ve iteratif şekilde sonuca ulaşılabilecek algoritma verilmiştir. Bu yöntemine ait uygulama sayısal uygulama başlığı altında verilmiş sonuçlar toplam en küçük kareler yöntemi ve klasik yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Afin dönüşümü çözümünde yapılması gereken tek değişiklik Q_E matrisinin hazırlanmasındadır. Eksenler üzerindeki ölçek farklılığı A katsayılar matrisinde

benzerlik dönüşümüne göre farklılıklar içermektedir. Bunun sebebi bilinmeyenler matrisindeki bilinmeyen sayısının artmasıdır. Afin dönüşüm ile ilgili detaylı açıklama bir sonraki bölümde verilecektir. Ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemine göre;

$$E(y) = \begin{bmatrix} u_{t_1} \\ v_{t_1} \\ \vdots \\ u_{t_n} \\ v_{t_n} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} u_{s_1} & v_{s_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{s_1} & v_{s_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s_n} & v_{s_n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{s_n} & v_{s_n} & 1 \end{bmatrix}$$

$$QE = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} * Q_{uv} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}^T$$

$$Q_1 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_5 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_6 = I_k \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

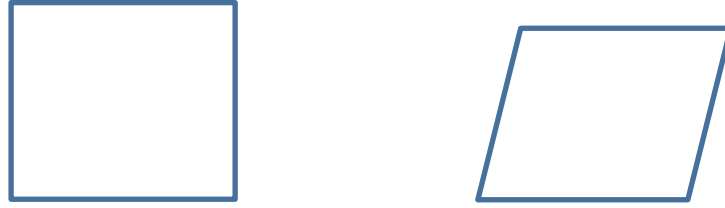
şeklinde ifade edilirler (S. Jazaeri, A. R. Amiri-Simkoei, M. A. Sharifi). Burada k kullanılan nokta sayısını ifade etmektedir.

2.1.2. İki boyutlu afin dönüşümü

2.1.2.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın afin dönüşümü

Jeodezi ve Fotogrametri mühendisliğinde sık sık düzlem koordinatlarının dönüştürülmesi problemi ortaya çıkmaktadır. Afin dönüşümü x ve y eksenleri yönünde farklı ölçek içermesi ve koordinat eksenlerinin dik olmaması bakımından benzerlik dönüşümünden farklıdır (Wolf ve Dewitt 2000). Düzlem koordinatlarının dönüştürülmesinde jeodezide genellikle benzerlik dönüşümü kullanılmasına rağmen fotogrametri ve kartoğrafveya durum aynı değildir, çünkü film, kâğıt veya benzeri maddeler deformasyona uğradıkları zaman her iki eksen boyunca bozulmalar aynı

olmaz. Bu durumda afin dönüşümü tercih edilir (Kılıçoğlu 1995, Turgut ve İnal 2003, Başçiftçi ve ark. 2004). Bu yöntem ile yapılan dönüşümlerde, sistemler arasındaki, X ve Y boyutlarındaki ölçek katsayıları birbirinden farklıdır. Sonuçta elde edilen yeni koordinatlarla yapılan hesaplamalarda semt, kenar ve açı değerleri eski sistemde yapılan değerlere göre farklıdır. Özetlemek gerekirse başlangıcı ötelenmiş, belli miktarda dönüklük oluşmuş X ve Y boyutlarında farklı ölçek katsayıları ile çarpılarak yeni sistemde koordinatlar oluşmuştur (Tanık 2003).



Şekil 2.3 : Afin dönüşümü sonucunda oluşan şekil.

Afin dönüşümünün özellikleri aşağıda sıralanmıştır (Kılıçoğlu 1995, Tanık 2003):

- 1- Doğrudaşlık: Herhangi bir doğru dönüşümden sonra yine bir doğrudur. Bir doğru üzerinde bulunmayan üç nokta dönüşümden sonra da yine bir doğru üzerinde değildir.
- 2- Paralellik: Paralel doğrular dönüşümden sonra da paraleldir. Kesişen doğrular dönüşümden sonra da kesişir.
- 3- Bölme Oranı: Bir doğru üzerindeki iki doğru parçasının oranı dönüşümden sonra da aynı kalır.
- 4- Açılar dönüşümden sonra değişir.
- 5- Uzunluklar yöne bağlı olarak değişir. Belirli bir yönde ölçek değişmez kalır.
- 6- Alanlar, dönüşümden sonra sabit bir miktar değişir. Bu sabit miktar dönüşüm matrisinin determinantına eşittir.
- 7- Bir kare afin dönüşümü sonucu paralel kenara dönüşmektedir.

Afin dönüşümünde x ve y koordinat eksenleri yönünde 2 ölçek faktörü, 2 öteleme ve 2 dönüklük olmak üzere toplam altı parametrenin çözümü için her iki sistemde koordinatları bilinen üç ortak noktaya ihtiyaç vardır. Ortak nokta sayısının üçten fazla olması durumunda dönüşüm parametreleri en küçük kareler yöntemine göre dengeleme ile hesaplanır (İnal ve Turgut 2001). Afin dönüşümünde iki ayrı koordinat sistemi arasındaki ilişki;

$$X = ax - by + T_x \quad (2.32)$$

$Y = cy + dx + T_y$ eşitlikleri ile ifade edilir.

En küçük kareler yöntemine göre yapılacak olan dengelemede nokta sayısının iki katı kadar düzeltme denklemi yazılır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_1 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & x_n & -y_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_n & x_n \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ \vdots \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Birim ölçünün veya ortak nokta her bir noktanın konum hatası n ortak nokta sayısı olmak üzere ;

$$m_0 = m_x = m_y = \sqrt{\frac{[V_x^2 + V_y^2]}{2n-6}} \quad (2.34)$$

Ve P noktasının konum hatası;

$$m_p = m_0 \sqrt{2} = \sqrt{\frac{[V_x^2 + V_y^2]}{n-3}} \quad (2.35)$$

ile hesaplanır.

2.1.2.2.Konum doğrulukları göz önüne alınarak afin dönüşümü

Konum doğruluklarının dönüşüm hesabı için kullanıldığını düşünürsek matematiksel model aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F(x, y, X, Y) = X_0 - b(y + v_y) + a(x + v_x) - (X_p + v_x) = 0 \quad (2.36)$$

$$G(x, y, X, Y) = Y_0 + c(x + v_x) + d(y + v_y) - (Y_p + v_y) = 0$$

$$\begin{matrix}
\begin{bmatrix} -1 & 0 & a & -b \\ 0 & -1 & d & c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & -y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_{x_0} \\ d_{y_0} \\ d_a \\ d_b \\ d_c \\ d_d \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} X_p - (X_0 - by + ax) \\ Y_p - (Y_0 + cx + dy) \end{bmatrix} \\
\underline{B} & \underline{V} & & \underline{A} & \underline{X} & & \underline{K} & (2.37)
\end{matrix}$$

Dönüşüme giren her nokta için yukarıdaki matrisler hazırlanır. Hesap için benzerlik dönüşümünde olduğu gibi öncelikle konum doğrulukları dikkate alınmadan dengeleme yapılır. Bilinmeyenler elde edildikten sonra her iterasyon sonucu elde edilen düzeltmeler bilinmeyenlere eklenerek işleme devam edilir. Düzeltmeler arasındaki fark kalmayınca kadar işleme devam edilir.

2.2. Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümleri

Jeodezik ölçmelere, uydu konum belirleme sistemlerin girmesi ile gelen kolaylıklar sayesinde üç boyutlu konumlamada yüksek doğruluk sağlanması ile ülke jeodezik ağlarının iyileştirilmesi ve jeodezik nokta sıklaştırılmasında büyük kolaylıklar sağlanmıştır (Bayram Turgut, Cevat İnal, 2003). Küresel konumlama sistemlerinden elde edilen verilerle yersel verilerin ortak sistemde toplanması için ihtiyaç duyulan dönüşüm probleminin çözülmesi için bilinmeyen sayısından fazla her iki sistemde de ortak noktalar gerekmektedir. Bir koordinat sisteminden diğerine dönüşümde gereken ölçek, dönüklük ve öteleme parametreleri gerekmektedir. Bu veriler iki boyutlu dönüşüm olsun veya üç boyutlu dönüşüm olsun gerekli olan parametrelerdir. Değişkenlik gösteren unsur olarak, kullanılacak olan yöntemin gerektirdiği eksenler boyunca ölçek farklılığıdır. Bu çalışmada üç boyutlu benzerlik ve afin dönüşümleri ve bu dönüşümlerde konum doğruluklarının etkisi incelenecektir.

2.2.1. Üç boyutlu benzerlik dönüşümü

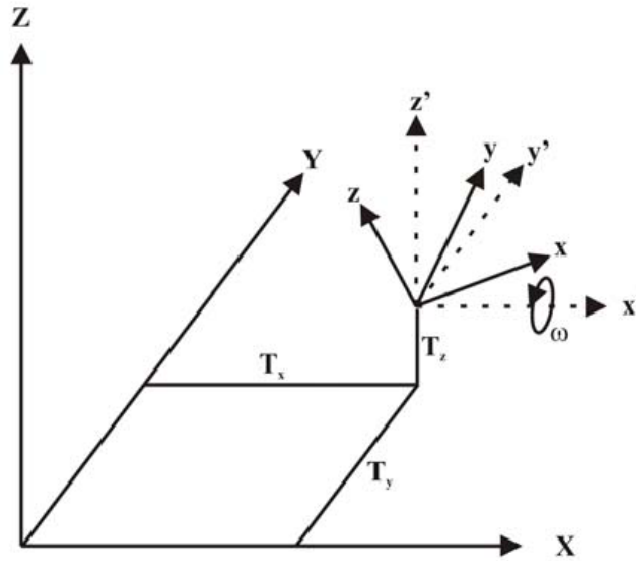
2.2.1.1. Konum doğrulukları göz önüne alınmaksızın benzerlik dönüşümü

Benzerlik dönüşümleri jeodezide en yaygın olarak kullanılan dönüşüm yöntemleridir. Gerek işlem hacminin azlığı gerekse matematiksel modelin kolay uygulanabilirliği yöntemin daha çok kullanılmasının nedenleridir. Üç boyutta 7 parametrelilik benzerlik dönüşümlerinde ölçek faktörü tüm doğrultularda değişmez kabul edilir. Şekil tümüyle korunduğu için açılar değişmez. Diğer bir deyişle benzerlik dönüşümü açı

koruyan bir dönüşümdür. Üç boyutta 7 parametrelilik benzerlik dönüşümü modellerine örnek olarak; Bursa Wolf modeli, Molodensky – Badekas Modeli, Veis modeli, Hotine modeli, Krakiwsky – Thomson modeli ve Vanicek Wells modeli verilebilir (Alkan 1999, Hofmann-Wellenhof 1997). En uygun ağ dönüşüm modeli seçiminde aşağıdaki faktörler etkilidir (Rizos 1999):

- Modelin uygulanacağı alanın büyüklüğü
- Bir ağı veya her iki ağı belirgin bozulmalara (distorsiyon) sahip olması.
- Ağların doğal olarak üç boyutlu olması veya iki boyutlu ya da bir boyutlu olması
- Arzulanan doğruluk derecesi
- Dönüşüm parametrelerinin mevcut olması veya belirlenebilmesi

Bursa - Wolf Modeli



Şekil 2.4 : Üç boyutta benzerlik dönüşümü.

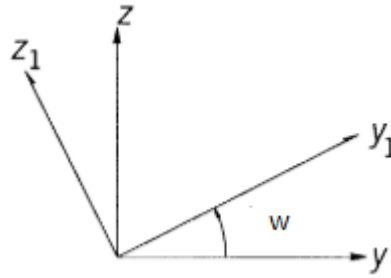
Şekil 4' de görüldüğü gibi uzaydaki bir P noktasının koordinatları, orijinleri ve eksenleri birbirine göre farklı iki koordinat sistemi arasındaki ilişki 7 parametre ile gösterilir. Üç boyutlu benzerlik dönüşümüne bu sebeple 7 parametrelilik benzerlik dönüşümü de denmektedir. GPS ölçümlerinden elde edilen dataların dönüşümünde ve fotogrametride sıklıkla kullanılmaktadır. Benzerlik dönüşümü 7 parametre içermektedir. Bu parametreler;

3 öteleme (T_x, T_y, T_z)

3 dönüklük (ω, ϕ, κ)

1 Ölçek faktörü (S)

Dönüklük matrisi, birbirini izleyen iki boyutlu 3 dönüşümün ürünüdür. X eksenini göz önüne alındığında;



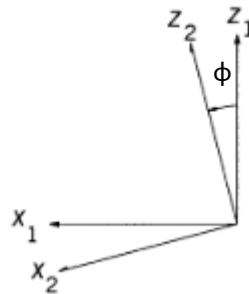
Şekil 2.5 : X eksenini etrafında dönüklük.

matris formunda gösterilecek olunursa $X_1 = R_1 X_0$ olarak tanımlanır (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006). Daha açık yazılacak olursa;

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & -\sin w & \cos w \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

şeklinde gösterilir.

Y eksenini etrafındaki dönüklük için;

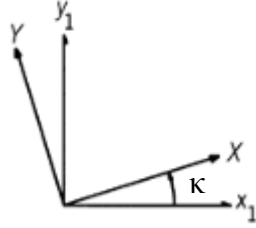


Şekil 2.6 : Y eksenini etrafında dönüklük.

$X_2 = R_2 X_1$ matematiksel formatı daha açık gösterilmek istenirse;

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{şeklini alır.} \quad (2.39)$$

Z eksenini etrafındaki dönüklük için;



Şekil 2.7 : Z eksenini etrafında dönüklük.

$X_3 = R_3 X_2$ matematiksel modeli matris formatında yazacak olursak;

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{şeklindedir.} \quad (2.40)$$

Denklem düzenlendiğinde; $X = R_3 R_2 R_1 X_0 = R X_0$ şeklinde ifade edilebilir (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006). Formülde bahsedilen çarpım gerçekleştirildiğinde matris formunda genel olarak yazılacak olursa;

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad \text{olarak gösterilir (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006). Matris}$$

elemanlarının karşılıkları açık yazılacak olursa;

$$r_{11} = \cos\phi \cos\kappa$$

$$r_{12} = \sin\phi \sin\kappa \cos\omega + \cos\phi \sin\kappa$$

$$r_{13} = -\cos\phi \sin\kappa \sin\omega + \sin\phi \sin\kappa$$

$$r_{21} = -\cos\phi \sin\kappa \quad (2.41)$$

$$r_{22} = -\sin\phi \sin\kappa \sin\omega + \cos\phi \cos\kappa$$

$$r_{23} = \cos\phi \sin\kappa \cos\omega + \sin\phi \cos\kappa$$

$$r_{31} = \sin\phi$$

$$r_{32} = -\sin\omega \cos\phi$$

$$r_{33} = \cos\omega \cos\phi$$

Üç boyutlu benzerlik dönüşümü için matematik model oluşturmak için X matrisinin ölçek faktörü ile çarpımı ve öteleme elemanlarının eklenmesi sonucu elde edilen matematiksel model şu şekildedir (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006);

$$\begin{aligned} X &= S(r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z) + T_x \\ Y &= S(r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z) + T_y \\ Z &= S(r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z) + T_z \end{aligned} \quad (2.42)$$

Matematiksel model 7 adet bilinmeyen içermektedir. Bilinmeyenler $S, \omega, \phi, \kappa, T_x, T_y, T_z$ şeklindedir. Çözüm için 7 adet denklem yazılmalıdır. Çözüm için her iki sistemde x, y koordinatları bilinen en az iki nokta ve z koordinatları bilinen üç noktaya ihtiyaç vardır. Gereğinden fazla ölçümün yapıldığı durumlarda en küçük kareler yöntemine göre dengeleme yapılabilir. Matematiksel model doğrusal hale getirilip matris biçiminde gösterilirse (Wolf P.R., Ghilani C.D. , 2006);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial X}{\partial S} & \frac{\partial X}{\partial \omega} & \frac{\partial X}{\partial \phi} & \frac{\partial X}{\partial \kappa} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial Y}{\partial S} & \frac{\partial Y}{\partial \omega} & \frac{\partial Y}{\partial \phi} & \frac{\partial Y}{\partial \kappa} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial Z}{\partial S} & \frac{\partial Z}{\partial \omega} & \frac{\partial Z}{\partial \phi} & \frac{\partial Z}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dS \\ d\omega \\ d\phi \\ d\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Matris elemanları açık yazılırsa;

$$\frac{\partial X}{\partial S} = [(\cos\phi \cos\kappa)x + (\sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa)y + (-\cos\omega \sin\phi \cos\kappa + \sin\omega \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = S[(\cos\omega \sin\phi \cos\kappa - \sin\omega \sin\kappa)y + (\sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = S[(-\sin\phi \cos\kappa)x + (\sin\omega \cos\phi \cos\kappa)y + (-\cos\omega \cos\phi \cos\kappa)]$$

$$\frac{\partial X}{\partial \kappa} = S[(-\cos\phi \sin\kappa)x + (-\sin\omega \sin\phi \sin\kappa + \cos\omega \cos\kappa)y + (\cos\omega \sin\phi \sin\kappa + \sin\omega \cos\kappa)z]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = (-\cos\phi \sin\kappa)x + (-\sin\omega \sin\phi \sin\kappa + \cos\omega \cos\kappa)y + (\cos\omega \sin\phi \sin\kappa + \sin\omega \cos\kappa)z$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = S[(-\cos w \sin \phi \sin \kappa - \sin w \cos \kappa)y + (-\sin w \sin \phi \sin \kappa + \cos w \cos \kappa)z] \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \phi} = S[(\sin \phi \sin \kappa)x + (-\sin \omega \cos \phi \sin \kappa)y + (\cos \omega \cos \phi \sin \kappa)z]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \kappa} = S[(-\cos \phi \cos \kappa)x + (-\sin \omega \sin \phi \cos \kappa - \cos \omega \sin \kappa)y + (\cos \omega \sin \phi \cos \kappa - \sin \omega \sin \kappa)z]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S} = (\sin \phi)x + (-\sin w \cos \phi)y + (\cos w \cos \phi)z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = S[(-\cos w \cos \phi)y + (-\sin \omega \cos \phi)z]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \phi} = S[(\cos \phi)x + (\sin w \sin \phi)y + (-\cos \omega \sin \phi)z]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \kappa} = 0$$

Dönüşüm hesabı için izlenecek yol iki boyutlu benzerlik dönüşümünde olduğu gibidir. İşlemlere başlamak için X vektörü için başlangıç değerleri $dS=I$, $d\omega=d\phi=d\kappa=dT_x=T_y=T_z=0$ alınarak iterasyon hesabı ile bilinmeyenler elde edilir. İki sistemdeki ortak noktaların konum doğrulukları biliniyorsa sistem yine iki boyutlu dönüşümde olduğu gibi öncelikle konum doğrulukları dikkate alınmadan dengeleme hesabı yapılır. Bilinmeyenler elde edildikten sonra nokta doğrulukları dikkate alınarak iterasyon işlemine devam edilir. Elde edilen bilinmeyenler için düzeltme değerleri arasında fark olmayıncaya kadar devam edilir (Wolf P.R., Ghilani C.D., 2006).

2.2.1.2. Konum doğrulukları göz önüne alınarak benzerlik dönüşümü

$$f(x, y, z, X, Y, Z) = S[(r_{11}(x + V_x) + r_{12}(y + V_y) + r_{13}(z + V_z)] - (X + V_X) = 0$$

$$g(x, y, z, X, Y, Z) = S[(r_{21}(x + V_x) + r_{22}(y + V_y) + r_{23}(z + V_z)] - (Y + V_Y) = 0$$

$$h(x, y, z, X, Y, Z) = S[(r_{31}(x + V_x) + r_{32}(y + V_y) + r_{33}(z + V_z)] - (Z + V_Z) = 0$$

(2.45)

Model bilinmeyenlere göre kısmi türevleri alınarak doğrusallaştırıldığında elde edilen eşitler ve matris formları (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006);

(2.46)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial \phi} & \frac{\partial f}{\partial \kappa} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial \omega} & \frac{\partial g}{\partial \phi} & \frac{\partial g}{\partial \kappa} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial \omega} & \frac{\partial h}{\partial \phi} & \frac{\partial h}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dS \\ d\omega \\ d\phi \\ d\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$BV + AX = K \text{ eşitliği yazılabilir.} \quad (2.47)$$

Kısmi türevleri alınmış matris elemanlarının açık formda yazılışı (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006);

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Sr_{11} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Sr_{12} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Sr_{13} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = Sr_{21} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = Sr_{22} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = Sr_{23}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = Sr_{31} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Sr_{32} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = Sr_{33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = [(\cos\phi \cos\kappa)x + (\sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa)y + (-\cos\omega \sin\phi \cos\kappa + \sin\omega \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = S[(\cos\omega \sin\phi \cos\kappa - \sin\omega \sin\kappa)y + (\sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = S[(-\sin\phi \cos\kappa)x + (\sin\omega \cos\phi \cos\kappa)y + (-\cos\omega \cos\phi \cos\kappa)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = S[(-\cos\phi\sin\kappa)x + (-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa) + (\cos\omega\sin\phi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (-\cos\phi\sin\kappa)x + (-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa)y + (\cos\omega\sin\phi\sin\kappa + \sin\omega\cos\kappa)z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = S[(-\cos\omega\sin\phi\sin\kappa - \sin\omega\cos\kappa)y + (-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa + \cos\omega\cos\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = S[(\sin\phi\sin\kappa)x + (-\sin\omega\cos\phi\sin\kappa)y + (\cos\omega\cos\phi\sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = S[(-\cos\phi\cos\kappa)x + (-\sin\omega\sin\phi\cos\kappa - \cos\omega\sin\kappa)y + (\cos\omega\sin\phi\cos\kappa - \sin\omega\sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\sin\phi)x + (-\sin\omega\cos\phi)y + (\cos\omega\cos\phi)z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = S[(-\cos\omega\cos\phi)y + (-\sin\omega\cos\phi)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = S[(\cos\phi)x + (\sin\omega\sin\phi)y + (-\cos\omega\sin\phi)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = 0$$

2.2.2. Üç boyutlu afin dönüşümü

2.2.2.1. Konum doğrulukları göz önüne alınarak ve alınmaksızın afin dönüşümü

Üç boyutlu afin dönüşümünde iki boyutlu sistemlerde olduğu gibi her eksen boyunca ölçek faktörünün farklı düşünülerek matematiksel model oluşturulur. Bu durumda her ekseninde ölçek farklı olacağından bilinmeyen sayısı dokuz çıkar. Benzerlik dönüşümünde bilinmeyenlere eklenecek eksenlerin ölçek faktörleri eklenince bilinmeyenler $S_x, S_y, S_z, \omega, \phi, \kappa, T_x, T_y, T_z$ şeklinde ifade edilir. Matematiksel model oluşturulduğunda benzerlik dönüşümü ile arasında tek fark X, Y, Z eşitliklerindeki ölçek katsayılarıdır (Wolf P.R., Ghilani C.D. ,2006).

(2.49)

$$X = S_x(r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z) + T_x$$

$$Y = S_y(r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z) + T_y$$

$$Z = S_z(r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z) + T_z$$

Konum doğrulukları da düşünülüğünde model aşağıdaki hali alır.

(2.50)

$$f(x, y, z, X, Y, Z) = S_x[(r_{11}(x + V_x) + r_{12}(y + V_y) + r_{13}(z + V_z)] - (X + V_X) = 0$$

$$g(x, y, z, X, Y, Z) = S_y[(r_{21}(x + V_x) + r_{22}(y + V_y) + r_{23}(z + V_z)] - (Y + V_Y) = 0$$

$$h(x, y, z, X, Y, Z) = S_z[(r_{31}(x + V_x) + r_{32}(y + V_y) + r_{33}(z + V_z)] - (Z + V_Z) = 0$$

Bilinmeyenlere göre kısmi türevler alınıp doğrusallaştırıldığında ve matris formunda yazıldığında;

(2.51)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial S_x} & \frac{\partial f}{\partial S_y} & \frac{\partial f}{\partial S_z} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial \phi} & \frac{\partial f}{\partial \kappa} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial S_y} & \frac{\partial g}{\partial S_z} & \frac{\partial g}{\partial \omega} & \frac{\partial g}{\partial \phi} & \frac{\partial g}{\partial \kappa} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial S_y} & \frac{\partial h}{\partial S_z} & \frac{\partial h}{\partial \omega} & \frac{\partial h}{\partial \phi} & \frac{\partial h}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dS_x \\ dS_y \\ dS_z \\ d\omega \\ d\phi \\ d\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

(2.52)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Sr_{11} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Sr_{12} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Sr_{13}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = Sr_{21} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = Sr_{22} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = Sr_{23}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = Sr_{31} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = Sr_{32} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = Sr_{33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_x} = [(\cos\phi \cos\kappa)x + (\sin w \sin\phi \cos\kappa + \cos w \sin\kappa)y + (-\cos w \sin\phi \cos\kappa + \sin w \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial S_z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = S[(\cos w \sin\phi \cos\kappa - \sin w \sin\kappa)y + (\sin w \sin\phi \cos\kappa + \cos w \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = S[(-\sin\phi \cos\kappa)x + (\sin w \cos\phi \cos\kappa)y + (-\cos w \cos\phi \cos\kappa)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = S[(-\cos\phi \sin\kappa)x + (-\sin w \sin\phi \sin\kappa + \cos w \cos\kappa)y + (\cos w \sin\phi \sin\kappa + \sin w \cos\kappa)z]$$

$$\frac{\partial g}{\partial S_y} = (-\cos\phi \sin\kappa)x + (-\sin w \sin\phi \sin\kappa + \cos w \cos\kappa)y + (\cos w \sin\phi \sin\kappa + \sin w \cos\kappa)z$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial S_z} = 0$$

(2.53)

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} = S[(-\cos w \sin\phi \sin\kappa - \sin w \cos\kappa)y + (-\sin w \sin\phi \sin\kappa + \cos w \cos\kappa)z]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = S[(\sin\phi \sin\kappa)x + (-\sin w \cos\phi \sin\kappa)y + (\cos w \cos\phi \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \kappa} = S[(-\cos\phi \cos\kappa)x + (-\sin w \sin\phi \cos\kappa - \cos w \sin\kappa)y + (\cos w \sin\phi \cos\kappa - \sin w \sin\kappa)z]$$

$$\frac{\partial h}{\partial S_z} = (\sin\phi)x + (-\sin w \cos\phi)y + (\cos w \cos\phi)z$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial S_y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = S[(-\cos w \cos\phi)y + (-\sin w \cos\phi)z]$$

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = S[(\cos\phi)x + (\sin w \sin\phi)y + (-\cos w \sin\phi)z]$$

$$\frac{\partial h}{\partial \kappa} = 0$$

Çözüm için üç boyutlu benzerlik dönüşümündeki sıra izlenir.

2.3. Uyuşumsuz Ölçüler Testi

Jeodezik gözlemler sonucu elde edilen verilerde bir takım hatalar sonucu kaba veya uyuşumsuz ölçülerin ortaya çıkması olası bir durumdur. Kullanıcı kaynaklı olduğu kadar çevre faktörlerinin etkisi de bu hataların ortaya çıkmasında rol oynar. Değişen çevre etkileri, ölçüm zamanı hava şartları, ölçümün yapıldığı zaman gibi bir takım etkenler sonucu gözlem verileri sonucu elde edilen değerler içerisinde diğer verilerden farklılıklar içeren veri setleri oluşabilir. Bu tür hatalar dengeleme sonucunda uygulanan uyuşumsuz ölçüler testi ile belirlenebilir (Başçiftçi 2008). Buna göre uyuşumsuz ölçüleri, çeşitli amaçlarla yapılan ölçüler arasında ölçü kümesinin dağılımına uymayan ölçüler olarak tanımlayabiliriz (Uzun 2003). Jeodezide kullanılan en yaygın uyuşumsuz ölçü belirleme yöntemi en küçük kareler ilkesine dayalı yöntemdir. EKK yönteminin kullanımında sonuç olarak bütün değerler uyuşumsuz ölçü veya ölçüler tarafından etkilenmektedir. Uyuşumsuz ölçünün etkisinin diğer ölçülerin üzerine yayılması gözlem ölçüleri hatasız olsa bile ölçünün içerdiği hatadan fazlasını göstermesine sebep olmakta sonuç olarak ölçümlerin yanlış değerlendirilmesine sebep olabilmektedir. Ülkemizde sıklıkla kullanılan uyuşumsuz ölçüler testi sonucunda tek bir ölçünün durumunu belirlemeye yatkındır. Bunun sonucu olarak veri kümesinden uyuşumsuz ölçünün atılması yerine gözlem işinin tekrarlanması şekil defektinin oluşmaması için gereken bir zorunluluk olarak ortaya çıkmaktadır. Uyuşumsuz ölçülerin tespitinde, alışlagelmiş çözüm yöntemleri olarak; üç farklı yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlar Baarda (Data-snooping), Tau (Poppe) ve t- Student testleridir. Bu yöntemlerin temeli, çeşitli varyans faktörlerinin kullanılarak düzeltmelerin standartlaştırılmasıdır. Baarda'ya göre test yönteminde öncül varyans (σ_0^2) bilinmesi durumunda, Popeye göre test yönteminde soncul varyans (m_0^2) bilinmesi durumunda ve t testinde ise kaba hatalı ya da uyuşumsuz olup olmadığı araştırılan bir ölçünün (l_i) dışında kalan ölçülere dayalı olarak bilinen sonsal varyans (m_0^2) hesaplanması durumunda kullanılır (Berber 1997). Bu çalışmada Tau (Poppe) testi kullanılmıştır. Uyuşumsuz gözlemler için,

$$H_0 : E\{v\} = 0$$

$$H_s : E\{v\} \neq 0$$

şeklinde kurulan bir hipotezde, normlandırılmış dağılım için rasgele değişken değerleri yani test büyüklüğü;

Kullanılan Yöntem	Test Büyüklüğü		Test Dağılımı	Sınır Değer
Tau Testi	$T_i = \frac{ v_i }{m_{v_i}}$	$T_i = \frac{ v_i }{m_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}}$	$\tau_{f,1-\alpha/2}$	$\tau_{f,1-\alpha/2} = \sqrt{\frac{f t_{f-1,1-\alpha/2}^2}{f-1 + t_{f-1,1-\alpha/2}^2}}$

şeklinde ifade edilir. Tau testinde test büyüklüğü;

(2.54)

$$T_i = \sqrt{\frac{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2}{2m_0^2 Q_i}}$$

olarak alınabilir. Sınır değerden büyük olan değere sahip ölçüler uyumsuz olarak kabul edilerek ölçü kümesinden çıkarılarak işlem uyumsuz ölçüler kalmayınca kadar devam eder.

2.4. Sayısal Uygulama

İki boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü ve bu dönüşümlerin nokta konum doğrulukları dikkate alınarak yapılan dönüşümde 32 adet nokta kullanılmıştır.

Çizelge 2.1 : Birinci sistem koordinatları ve konum doğrulukları.

Nokta No	Sağa Değer	I. Sistem		
		my	Yukarı Değer	mx
1	526211.8150	0.0046	4230490.3010	0.0057
2	529660.2150	0.0043	4247462.7710	0.0058
3	535396.3590	0.0057	4243421.9540	0.0043
4	536586.4990	0.0047	4214544.4000	0.0039
5	541351.9200	0.0055	4221785.9860	0.0047
6	543459.4350	0.0036	4251474.6120	0.0061
7	546582.3330	0.0055	4197613.5050	0.0061
8	608587.7360	0.0039	4196035.7730	0.0044
9	612166.3200	0.0040	4206943.3760	0.0065
10	617530.5130	0.0043	4204357.5490	0.0045
11	619269.6120	0.0040	4205286.5230	0.0049
12	626578.2870	0.0052	4213613.7020	0.0055
13	628581.4690	0.0046	4208320.3860	0.0049
14	633385.9410	0.0057	4213520.5340	0.0043
15	636325.2300	0.0052	4195762.9850	0.0036
16	645427.8900	0.0053	4226089.5610	0.0050
17	645857.6220	0.0036	4189491.1500	0.0047
18	652929.7430	0.0062	4226542.4810	0.0061
19	665476.0890	0.0042	4154048.9150	0.0042
20	667630.2410	0.0044	4224729.6110	0.0052
21	668246.7940	0.0059	4156589.4890	0.0053
22	669581.1670	0.0047	4225250.1900	0.0063
23	673533.3720	0.0060	4226771.6500	0.0062
24	677000.7170	0.0064	4156234.4120	0.0042
25	689499.4890	0.0065	4208728.7130	0.0056
26	718670.6730	0.0038	4231339.4440	0.0063
27	725361.1710	0.0059	4231509.4240	0.0045
28	734150.7670	0.0058	4228318.9630	0.0064
29	693213.9150	0.0040	4129869.3060	0.0037
30	706842.9140	0.0053	4120728.8390	0.0048
31	725148.8600	0.0056	4153678.7480	0.0044
32	618175.2170	0.0057	4240494.7660	0.0040

Çizelge 2.2 : İkinci sistem koordinatları konum doğrulukları.

II. Sistem				
Nokta No	Sağa Değer	my	Yukarı Değer	mx
1	526227.4200	0.0050	4230671.3900	0.0037
2	529675.8720	0.0044	4247644.0010	0.0030
3	535412.0020	0.0027	4243603.1350	0.0050
4	536601.9300	0.0049	4214725.5000	0.0028
5	541367.3000	0.0056	4221967.0700	0.0057
6	543475.0400	0.0028	4251655.6900	0.0046
7	546597.7700	0.0040	4197794.6880	0.0053
8	608603.3210	0.0056	4196216.8880	0.0051
9	612181.9650	0.0037	4207124.5300	0.0040
10	617546.1550	0.0040	4204538.6530	0.0048
11	619285.2680	0.0049	4205467.6060	0.0032
12	626594.0020	0.0034	4213794.8140	0.0058
13	628597.1560	0.0030	4208501.4240	0.0037
14	633401.6900	0.0042	4213701.6110	0.0040
15	636340.9290	0.0059	4195943.9140	0.0030
16	645443.8570	0.0031	4226270.6480	0.0056
17	645873.4070	0.0037	4189671.9770	0.0053
18	652945.6460	0.0048	4226723.5660	0.0058
19	665491.8460	0.0029	4154229.6920	0.0051
20	667646.1760	0.0043	4224910.6760	0.0041
21	668262.5550	0.0035	4156770.2080	0.0054
22	669597.1110	0.0047	4225431.2430	0.0054
23	673549.3380	0.0052	4226952.7070	0.0051
24	677016.6460	0.0057	4156415.2660	0.0045
25	689515.2700	0.0050	4208909.6610	0.0046
26	718686.6550	0.0056	4231520.5300	0.0053
27	725377.2520	0.0058	4231690.5490	0.0044
28	734166.9070	0.0038	4228500.1130	0.0036
29	693229.8120	0.0048	4130049.9510	0.0054
30	706858.7740	0.0049	4120909.4140	0.0029
31	725164.8160	0.0046	4153859.5240	0.0036
32	618191.1200	0.0053	4240675.9400	0.0057

Klasik yöntemle ve konum doğrulukları verileri kullanılarak yapılan dengeleme sonucu hesaplanan bilinmeyenlerin karşılaştırılmaları ve hatalar aşağıda verilmiştir.

Çizelge 2.3 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü bilinmeyenleri.

	Klasik Yöntem		TLS Yöntemi		IWTLS	
tx=	169.1565723	(±0.906883)	169.2711504	(±0.910182)	169.404965978	(±0.765634648)
ty=	9.957103237	(±0.906883)	10.17164442	(±0.910182)	9.70864522521	(±0.758296201)
a=	1.000002961	(±0.000000213)	1.000002925	(±0.000000214)	1.00000291124	(±42E-15)
b=	0.000000935	(±0.000000213)	0.000000889	(±0.000000214)	0.00000100215	(±42E-15)

Çizelge 2.4 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü hataları.

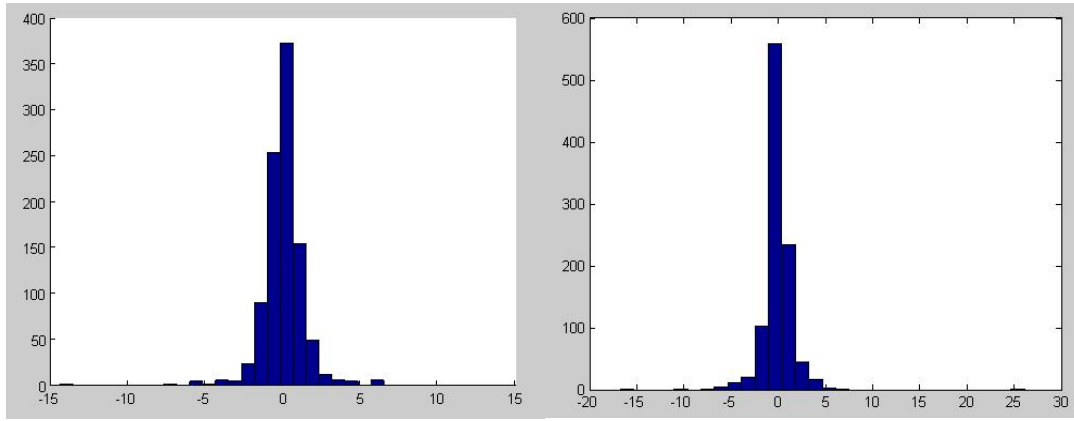
	Klasik Yöntem		Konum Doğruluklu	
	V_x	V_y	V_x	V_y
1	-0.1325	0.1038	-0.1351	0.0906
2	-0.1584	0.0098	-0.1619	-0.0038
3	-0.1312	0.0415	-0.1347	0.0283
4	0.0574	0.0358	0.0551	0.0237
5	0.1292	0.0688	0.1265	0.0567
6	-0.0617	0.1608	-0.066	0.1476
7	0.0651	-0.1067	0.0633	-0.1177
8	0.0993	-0.1013	0.0953	-0.1094
9	0.0601	-0.1114	0.0554	-0.1197
10	0.0765	-0.0741	0.0718	-0.082
11	0.0686	-0.0519	0.0637	-0.0598
12	0.039	-0.0631	0.0335	-0.071
13	0.068	-0.0067	0.0627	-0.0142
14	0.0251	-0.0347	0.0194	-0.0423
15	0.0672	0.0579	0.0622	0.0512
16	-0.1455	-0.0188	-0.1523	-0.0262
17	0.0035	0.1324	-0.0015	0.1263
18	-0.0589	-0.0225	-0.0659	-0.0296
19	0.0565	0.0591	0.0524	0.0552
20	-0.049	-0.0216	-0.0565	-0.0279
21	0.0631	0.122	0.0588	0.1182
22	-0.0518	-0.0099	-0.0593	-0.0161
23	-0.0606	-0.0131	-0.0684	-0.0192
24	-0.0794	-0.0222	-0.084	-0.0256
25	0.1548	0.0276	0.1473	0.0228
26	0.0613	-0.0708	0.0517	-0.0749
27	-0.0177	-0.1155	-0.0276	-0.1194
28	-0.0537	-0.1582	-0.0637	-0.1615
29	-0.024	0.0936	-0.0279	0.0918
30	0.0448	0.1237	0.0408	0.123
31	0.0338	0.0032	0.0276	0.0021
32	-0.1488	-0.0376	-0.1552	-0.0469

İteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemi uygulanarak elde edilen başlangıç sistemi ve hedef sistem hataları verilmiştir.

Çizelge 2.5 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü iteratif ağırlıklı toplam en küçük kareler yöntemi hatalar.

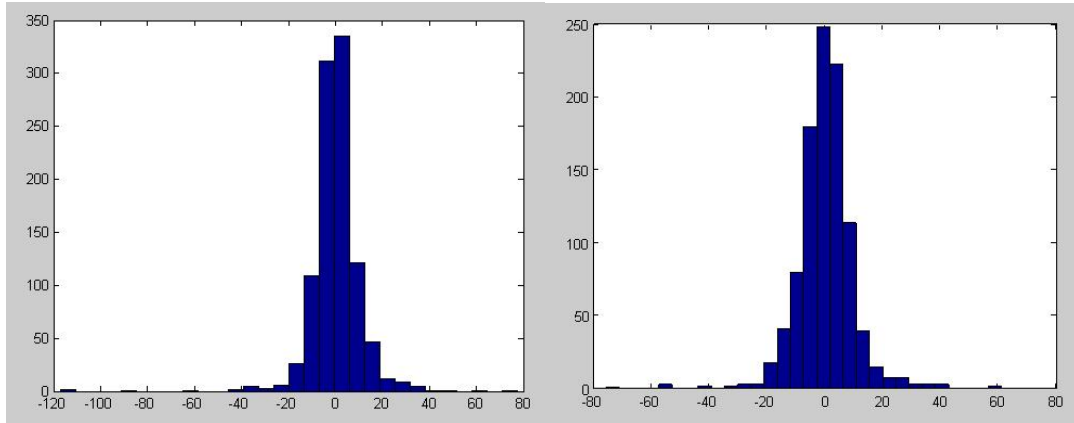
No	E_y	E_x	e_x	e_y
1	-0.05723	0.073596	-0.03101093	0.067611539
2	-0.07317	0.007544	-0.002018599	0.076616362
3	-0.10057	0.017453	-0.023598089	0.022566335
4	0.030372	0.024275	-0.012513038	-0.033012252
5	0.066537	0.027964	-0.04113057	-0.068978189
6	-0.0334	0.101623	-0.05778985	0.020201826
7	0.045468	-0.06013	0.045390444	-0.024049312
8	0.032807	-0.04449	0.059764985	-0.067642039
9	0.033303	-0.08347	0.031610291	-0.028495172
10	0.041721	-0.03648	0.041505603	-0.036102522
11	0.02792	-0.03927	0.016749799	-0.04189748
12	0.028329	-0.03225	0.035859574	-0.012111017
13	0.048387	-0.00734	0.004184435	-0.020580289
14	0.016958	-0.02155	0.018648444	-0.009207184
15	0.029259	0.031372	-0.021786269	-0.03766715
16	-0.10743	-0.01139	0.014286426	0.036752732
17	0.001163	0.05606	-0.071286695	-0.001228991
18	-0.03619	-0.01569	0.014184762	0.021693748
19	0.035204	0.022026	-0.032478359	-0.016783829
20	-0.02502	-0.01843	0.011456349	0.023891796
21	0.043346	0.057467	-0.059656812	-0.015253973
22	-0.02585	-0.01056	0.007760867	0.025853219
23	-0.03465	-0.01304	0.00882025	0.026025927
24	-0.04699	-0.01289	0.014794158	0.037276309
25	0.095949	0.011115	-0.007500448	-0.056774324
26	0.018699	-0.04848	0.034311348	-0.040608571
27	-0.01019	-0.06544	0.062562838	0.009851059
28	-0.03964	-0.12997	0.041124462	0.017014803
29	-0.01291	0.028215	-0.060099531	0.018585322
30	0.019423	0.086479	-0.031566574	-0.016602035
31	0.015727	-0.00322	0.002154664	-0.01061185
32	-0.07781	-0.01433	0.029097725	0.067273194

TLS yöntemi için MATLAB' de başlangıç ve hedef koordinat sistemleri için varyans-kovaryans matrisleri oluşturulmuş, bu matrislere bağlı başlangıç ve hedef koordinatlar üretilmiştir. TLS yöntemi değerlendirmesi için üretilen koordinatlar ile dönüşüm parametreleri elde edilmiş bu işlem 1000 defa tekrar edilmiştir. Elde edilen dönüşüm parametrelerinin dağılımları aşağıda verilmiştir.



t_x

t_y



a

b

Sonuçlar göstermektedir ki rastgele hazırlanan veri kümeleri üzerinde yapılan parametre kestiriminde rastgele oluşturulan doğruluk değerleri baz alındığında önerilen algoritma yüksek bir yakınsama özelliği göstermektedir. Buradan varabileceğimiz sonuç olarak; düşük doğruluklarda TLS yönteminin kullanılması bize daha gerçekçi sonuç vermektedir.

Uygulamaya klasik afin dönüşümü ve TLS afin dönüşümü yöntemi ile devam edilmiş sonuçlar aşağıda listelenmiştir.

Çizelge 2.6 : İki boyutlu afin dönüşümü bilinmeyenleri.

	Klasik Yöntem		Konum Doğruluklu		IWTLS
tx=	163.900009203	(±1.992234)	164.276360696	(±1.999830)	163.192857
ty=	5.704210373	(±1.992234)	5.993553268	(±1.999830)	5.382294
a=	1.000004128	(±0.000000457)	1.000004027	(±0.000000458)	1.0000042751
b=	0.000000383	(±0.000000245)	0.000000314	(±0.000000246)	0.0000020231
c=	0.000001943	(±0.000000457)	0.000001869	(±0.000000458)	-0.000000346
d=	1.000002986	(±0.000000245)	1.000003020	(±0.000000246)	1.00000296

Çizelge 2.7 : İki boyutlu afin dönüşümü hataları.

Klasik Yöntem

Konum Doğruluklu

	V_x	V_y	V_x	V_y
1	-0.1101	0.0726	-0.1177	0.0579
2	-0.1189	0.0003	-0.1276	-0.0158
3	-0.0956	0.0305	-0.1038	0.0151
4	0.0639	-0.0082	0.0578	-0.0205
5	0.1432	0.0359	0.1367	0.0231
6	-0.0179	0.1636	-0.0265	0.148
7	0.0548	-0.1649	0.0503	-0.1748
8	0.0889	-0.1271	0.0866	-0.1326
9	0.0608	-0.1225	0.0578	-0.1288
10	0.0748	-0.0852	0.0722	-0.0909
11	0.0678	-0.061	0.0652	-0.0667
12	0.0468	-0.0585	0.0438	-0.0645
13	0.0705	-0.0071	0.0679	-0.0124
14	0.0329	-0.0265	0.0302	-0.032
15	0.0572	0.0471	0.0559	0.0436
16	-0.1247	0.0108	-0.128	0.0048
17	-0.0125	0.1196	-0.0131	0.1173
18	-0.0374	0.0118	-0.0405	0.0063
19	0.0052	0.0158	0.0079	0.0184
20	-0.029	0.0187	-0.0315	0.0144
21	0.0144	0.0832	0.0171	0.0858
22	-0.0312	0.0321	-0.0336	0.0279
23	-0.0384	0.0329	-0.0408	0.0288
24	-0.1281	-0.0566	-0.1252	-0.0534
25	0.1592	0.0613	0.1586	0.0601
26	0.0892	0.0055	0.088	0.004
27	0.0106	-0.0354	0.0095	-0.0364
28	-0.0284	-0.0769	-0.0289	-0.077
29	-0.0989	0.0373	-0.0935	0.0444
30	-0.039	0.0644	-0.0324	0.0733
31	-0.0163	-0.0076	-0.0116	-0.0008
32	-0.1141	-0.0063	-0.1194	-0.0156

Elde edilen hataların arasında fark olmadığı görülmektedir.

Çizelge 2.8 : İki boyutlu benzerlik dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları.

Nokta	Klasik Benzerlik Dönüşümü			TLS Benzerlik Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
1	1.49036	1.95271	Uyuşumlu	1.43941	1.95271	Uyuşumlu
2	1.17811	1.95271	Uyuşumlu	1.10807	1.95271	Uyuşumlu
3	1.39996	1.95271	Uyuşumlu	1.32131	1.95271	Uyuşumlu
4	1.43636	1.95271	Uyuşumlu	1.35965	1.95271	Uyuşumlu
5	1.20385	1.95271	Uyuşumlu	1.13341	1.95271	Uyuşumlu
6	1.19597	1.95271	Uyuşumlu	1.1279	1.95271	Uyuşumlu
7	0.5895	1.95271	Uyuşumlu	0.63738	1.95271	Uyuşumlu
8	0.76247	1.95271	Uyuşumlu	0.79622	1.95271	Uyuşumlu
9	1.24513	1.95271	Uyuşumlu	1.29059	1.95271	Uyuşumlu
10	1.75287	1.95271	Uyuşumlu	1.77392	1.95271	Uyuşumlu
11	1.46317	1.95271	Uyuşumlu	1.42563	1.95271	Uyuşumlu
12	1.04672	1.95271	Uyuşumlu	1.00288	1.95271	Uyuşumlu
13	1.06106	1.95271	Uyuşumlu	1.07045	1.95271	Uyuşumlu
14	1.02277	1.95271	Uyuşumlu	1.06155	1.95271	Uyuşumlu
15	1.20464	1.95271	Uyuşumlu	1.22661	1.95271	Uyuşumlu
16	1.26876	1.95271	Uyuşumlu	1.29608	1.95271	Uyuşumlu
17	1.07561	1.95271	Uyuşumlu	1.10779	1.95271	Uyuşumlu
18	0.8115	1.95271	Uyuşumlu	0.84491	1.95271	Uyuşumlu
19	0.91493	1.95271	Uyuşumlu	0.94437	1.95271	Uyuşumlu
20	0.78889	1.95271	Uyuşumlu	0.81605	1.95271	Uyuşumlu
21	0.73867	1.95271	Uyuşumlu	0.7671	1.95271	Uyuşumlu
22	0.79515	1.95271	Uyuşumlu	0.83044	1.95271	Uyuşumlu
23	0.63374	1.95271	Uyuşumlu	0.67519	1.95271	Uyuşumlu
24	0.34052	1.95271	Uyuşumlu	0.36118	1.95271	Uyuşumlu
25	0.58554	1.95271	Uyuşumlu	0.59813	1.95271	Uyuşumlu
26	0.66498	1.95271	Uyuşumlu	0.6938	1.95271	Uyuşumlu
27	0.37473	1.95271	Uyuşumlu	0.41858	1.95271	Uyuşumlu
28	0.55487	1.95271	Uyuşumlu	0.51975	1.95271	Uyuşumlu
29	0.77644	1.95271	Uyuşumlu	0.7466	1.95271	Uyuşumlu
30	0.6176	1.95271	Uyuşumlu	0.63339	1.95271	Uyuşumlu
31	1.2923	1.95271	Uyuşumlu	1.28695	1.95271	Uyuşumlu
32	1.67852	1.95271	Uyuşumlu	1.63737	1.95271	Uyuşumlu

Çizelge 2.9 : İki boyutlu afin dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları.

Nokta	Klasik Afin Dönüşümü			TLS Afin Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
1	1.29215	1.95244	Uyuşumlu	1.24732	1.95244	Uyuşumlu
2	1.08172	1.95244	Uyuşumlu	1.03318	1.95244	Uyuşumlu
3	1.15901	1.95244	Uyuşumlu	1.09826	1.95244	Uyuşumlu
4	1.1945	1.95244	Uyuşumlu	1.13901	1.95244	Uyuşumlu
5	0.96944	1.95244	Uyuşumlu	0.92072	1.95244	Uyuşumlu
6	0.936	1.95244	Uyuşumlu	0.88262	1.95244	Uyuşumlu
7	0.62915	1.95244	Uyuşumlu	0.66343	1.95244	Uyuşumlu
8	0.686	1.95244	Uyuşumlu	0.70618	1.95244	Uyuşumlu
9	1.3753	1.95244	Uyuşumlu	1.40438	1.95244	Uyuşumlu
10	2.02447	1.95244	Uyuşumsuz	2.06352	1.95244	Uyuşumsuz
11	1.53189	1.95244	Uyuşumlu	1.54966	1.95244	Uyuşumlu
12	1.54316	1.95244	Uyuşumlu	1.57651	1.95244	Uyuşumlu
13	1.61555	1.95244	Uyuşumlu	1.65676	1.95244	Uyuşumlu
14	1.28827	1.95244	Uyuşumlu	1.31277	1.95244	Uyuşumlu
15	1.44451	1.95244	Uyuşumlu	1.46057	1.95244	Uyuşumlu
16	1.42095	1.95244	Uyuşumlu	1.42494	1.95244	Uyuşumlu
17	1.27596	1.95244	Uyuşumlu	1.28398	1.95244	Uyuşumlu
18	0.98553	1.95244	Uyuşumlu	0.9956	1.95244	Uyuşumlu
19	1.09839	1.95244	Uyuşumlu	1.10651	1.95244	Uyuşumlu
20	0.91326	1.95244	Uyuşumlu	0.91974	1.95244	Uyuşumlu
21	0.87977	1.95244	Uyuşumlu	0.8868	1.95244	Uyuşumlu
22	0.84816	1.95244	Uyuşumlu	0.8466	1.95244	Uyuşumlu
23	0.71229	1.95244	Uyuşumlu	0.71248	1.95244	Uyuşumlu
24	0.45662	1.95244	Uyuşumlu	0.46525	1.95244	Uyuşumlu
25	0.67	1.95244	Uyuşumlu	0.67376	1.95244	Uyuşumlu
26	0.75121	1.95244	Uyuşumlu	0.75186	1.95244	Uyuşumlu
27	0.42537	1.95244	Uyuşumlu	0.42573	1.95244	Uyuşumlu
28	0.58227	1.95244	Uyuşumlu	0.57475	1.95244	Uyuşumlu
29	0.75565	1.95244	Uyuşumlu	0.74012	1.95244	Uyuşumlu
30	0.60973	1.95244	Uyuşumlu	0.60827	1.95244	Uyuşumlu
31	1.22855	1.95244	Uyuşumlu	1.21512	1.95244	Uyuşumlu
32	1.63617	1.95244	Uyuşumlu	1.61139	1.95244	Uyuşumlu

Afin ve benzerlik dönüşümünde verilerin test sonuçları her iki yöntem sonuçlarında da aynı olduğu görülmüştür. Konum doğrulukları az olan noktalar kullanıldığı bu durumun değişebileceği göz ardı edilmemelidir.

Çizelge 2.10 : Simülasyon verileri iki boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları

Nokta	Klasik Benzerlik Dönüşümü			TLS Benzerlik Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
1	1.8672	1.928585	Uyuşumlu	1.3851	1.928585	Uyuşumlu
2	1.6189	1.928585	Uyuşumlu	1.6025	1.928585	Uyuşumlu
3	0.9941	1.928585	Uyuşumlu	1.4037	1.928585	Uyuşumlu
4	0.8628	1.928585	Uyuşumlu	0.9622	1.928585	Uyuşumlu
5	0.7596	1.928585	Uyuşumlu	0.6386	1.928585	Uyuşumlu
6	0.7769	1.928585	Uyuşumlu	0.62	1.928585	Uyuşumlu
7	0.5924	1.928585	Uyuşumlu	0.3149	1.928585	Uyuşumlu
8	0.7007	1.928585	Uyuşumlu	0.7004	1.928585	Uyuşumlu
9	0.913	1.928585	Uyuşumlu	1.0538	1.928585	Uyuşumlu
10	0.4684	1.928585	Uyuşumlu	0.569	1.928585	Uyuşumlu

Nokta	Klasik Afin Dönüşümü			TLS Afin Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
1	2.0069	1.923143	Uyumsuz	1.8354	1.923143	Uyuşumlu
2	1.6051	1.923143	Uyuşumlu	1.4657	1.923143	Uyuşumlu
3	1.0721	1.923143	Uyuşumlu	1.1583	1.923143	Uyuşumlu
4	0.9122	1.923143	Uyuşumlu	0.9524	1.923143	Uyuşumlu
5	0.7659	1.923143	Uyuşumlu	1.1125	1.923143	Uyuşumlu
6	0.691	1.923143	Uyuşumlu	1.0132	1.923143	Uyuşumlu
7	0.6152	1.923143	Uyuşumlu	0.5148	1.923143	Uyuşumlu
8	0.648	1.923143	Uyuşumlu	0.5796	1.923143	Uyuşumlu
9	0.8513	1.923143	Uyuşumlu	0.4948	1.923143	Uyuşumlu
10	0.512	1.923143	Uyuşumlu	0.199	1.923143	Uyuşumlu

Koordinat dönüşümü için kullanılan 32 koordinat çiftinden 5 nokta çıkarılıp geriye kalan noktalar ile benzerlik dönüşümü yöntemi ile parametre oluşturularak 5 noktanın hem klasik yöntemle elde edilmiş parametre, hem de TLS yöntemine göre elde edilmiş parametre ile dönüşümler yapılmış, noktalar gerçek koordinatları ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 2.11 : Klasik yöntemle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.

	Hedef Sistem Koordinatları		Dönüşüm Sonrası Koordinatları		Gerçek Koordinatlar Arası Farklar	
	Y	X	Y	X	ΔY	ΔX
24	677016.646	4156415.266	677016.5699	4156415.2409	0.07609	0.02509
25	689515.27	4208909.661	689515.4338	4208909.6881	-0.16379	-0.02709
5	541367.30	4221967.07	541367.4293	4221967.1531	-0.12929	-0.08309
3	535412.002	4243603.135	535411.8725	4243603.1928	0.12949	-0.05780
13	628597.156	4208501.424	628597.2288	4208501.4225	-0.07280	0.00149

Çizelge 2.12 : TLS yöntemle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.

	Hedef Sistem Koordinatları		Dönüşüm Sonrası Koordinatları		Gerçek Koordinatlar Arası Farklar	
	Y	X	Y	X	ΔY	ΔX
24	677016.646	4156415.266	677016.5641	4156415.2363	0.0818	0.0296
25	689515.27	4208909.661	689515.4234	4208909.6823	-0.1533	-0.0213
5	541367.30	4221967.07	541367.4241	4221967.1352	-0.1240	-0.0652
3	535412.002	4243603.135	535411.8659	4243603.1735	0.1361	-0.0384
13	628597.156	4208501.424	628597.2210	4208501.4120	-0.0650	0.0120

Aynı işlem 32 nokta da kullanılarak yapılmış sonuçlar aşağıda gösterilmiştir. Dönüşümde ve test noktaları resim 1 de gösterilmiştir. Kırmızı ile işaretlenmiş noktalar test noktaları, mavi ile işaretlenmiş noktalar dönüşüm noktalarıdır.

Çizelge 2.13 : Tüm noktalar kullanılarak klasik yöntemiyle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.

	Hedef Sistem Koordinatları		Dönüşüm Sonrası Koordinatları		Gerçek Koordinatlar Arası Farklar	
	Y	X	Y	X	ΔY	ΔX
24	677016.646	4156415.266	677016.5666	4156415.2438	0.0793	0.0222
25	689515.27	4208909.661	689515.4248	4208909.6886	-0.1548	-0.0275
5	541367.30	4221967.07	541367.4292	4221967.1388	-0.1291	-0.0687
3	535412.002	4243603.135	535411.8708	4243603.1765	0.1311	-0.0415
13	628597.156	4208501.424	628597.2240	4208501.4173	-0.0680	0.0066

Çizelge 2.14 : Tüm noktalar kullanılarak TLS yöntemiyle hesaplanmış koordinatlar ve farklar.

	Hedef Sistem Koordinatları		Dönüşüm Sonrası Koordinatları		Gerçek Koordinatlar Arası Farklar	
	Y	X	Y	X	ΔY	ΔX
24	677016.646	4156415.266	677016.5620	4156415.2404	0.0839	0.0255
25	689515.27	4208909.661	689515.4173	4208909.6838	-0.1472	-0.0227
5	541367.30	4221967.07	541367.4265	4221967.1267	-0.1264	-0.0566
3	535412.002	4243603.135	535411.8673	4243603.1633	0.1346	-0.0283
13	628597.156	4208501.424	628597.2187	4208501.4098	-0.0627	0.0142

Çizelge 2.15 : Her iki parametreye ve yöntemine göre elde edilen sonuçların gerçek koordinatlar arası farklarının karşılaştırılması.

	27 Nokta Kullanılarak Hazırlanan Parametreye Göre Klasik yöntem ve TLS Yöntemi Sonuçlarının Karşılaştırılması		32 Nokta Kullanılarak Hazırlanan Parametreye Göre Klasik yöntem ve TLS Yöntemi Sonuçlarının Karşılaştırılması	
	ΔY	ΔX	ΔY	ΔX
24	-0.0058	-0.0046	-0.0045	-0.0033
25	-0.0104	-0.0057	-0.0075	-0.0048
5	-0.0052	-0.0178	-0.0027	-0.0120
3	-0.0066	-0.0193	-0.0034	-0.0131
13	-0.0078	-0.0105	-0.0053	-0.0075

Üç boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü için klasik yöntem ve konum doğruluklarının dengeleme işlemine dahil edilerek yapılan işlemler sonucunda elde edilen sonuçlar.

Çizelge 2.16 : Üç boyutlu sistem koordinatları

I. Sistem

Nokta No	x	mx	y	my	z	mz
11	1094.883	0.007	820.085	0.008	109.821	0.005
12	503.891	0.011	1598.698	0.008	117.685	0.009
13	2349.343	0.006	207.658	0.005	151.387	0.007
14	1395.320	0.005	1348.853	0.008	215.261	0.009

II. Sistem

Nokta No	X	mX	Y	mY	Z	mZ
11	10037.810	0.05	5262.090	0.06	772.040	0.05
12	10956.680	0.04	5128.170	0.06	783.000	0.09
13	8780.080	0.02	4840.290	0.04	782.620	0.02
14	10185.800	0.03	4700.210	0.05	851.320	0.03

Elde edilen dönüşüm parametreleri çizelge 2.17 de verilmiştir.

Çizelge 2.17 : Üç boyutlu benzerlik dönüşümü bilinmeyenleri.

	Klasik Yöntem		Konum Doğruluklu	
tx=	10233.82582	(±0.067209)	10233.8542	(±0.069572)
ty=	6549.96829	(±0.068047)	6549.96412	(±0.070439)
tz=	720.8788064	(±0.228786)	720.8661998	(±0.236829)
S=	0.94995694	(±0.000036)	0.949954935	(±0.000037)
w=	0.021685576	(±0.000119)	0.021667193	(±0.000124)
fi=	-0.034806819	(±0.000095621)	-0.034805985	(±0.000098983)
k=	-3.918342561	(±0.000037850)	-3.918333044	(±0.000039181)

Parametre hesabında hedef koordinat sistemine ait hatalar çizelge 2.22 de gösterilmektedir.

Çizelge 2.18 : Üç boyutlu benzerlik dönüşümü hataları.

	Klasik Yöntem			Konum Doğruluklu		
	V _x	V _y	V _z	V _x	V _y	V _z
11	0.048	0.0252	-0.0011	0.0631	0.0264	0.0014
12	0.008	-0.0561	0.0115	0.0196	-0.0638	0.0271
13	-0.014	-0.0536	0.0088	-0.0006	-0.0386	0.0016
14	-0.042	0.0845	-0.0192	-0.0339	0.0866	-0.0073

Çizelge 2.19 : Üç boyutlu afin dönüşümü hataları.

	Klasik Yöntem			Konum Doğruluklu		
	V _x	V _y	V _z	V _x	V _y	V _z
11	0.0488	0.0506	0.0177	0.0605	0.057	0.0203
12	0.0002	-0.0496	-0.0137	0.0138	-0.0498	-0.055
13	-0.005	-0.0516	-0.0067	0.0008	-0.0347	-0.0011
14	-0.0439	0.0505	0.0028	-0.0326	0.0496	0.0012

Çizelge 2.20 : Üç boyutlu afin dönüşümü bilinmeyenleri.

	Klasik		Konum Doğruluklu	
tx=	10233.83259	(±0.085164)	10233.85152	(±0.092264)
ty=	6550.095948	(±0.273559)	6550.098056	(±0.296364)
tz=	721.0978832	(±0.486466)	721.2176189	(±0.527019)
Sx=	0.949948717	(±0.000044)	0.949951264	(±0.000047)
Sy=	0.949948717	(±0.000044)	0.949951264	(±0.000047)
Sz=	0.949948717	(±0.000044)	0.949951264	(±0.000047)
w=	0.021873817	(±0.000119)	0.02199828	(±0.000124)
fi=	-0.034942565	(±0.000095621)	-0.035009357	(±0.000098983)
k=	-3.918328628	(±0.000043104)	-3.918317478	(±0.000046697)

Çizelge 2.21 : Üç boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü uyumsuz ölçüler testi sonuçları.

Nokta	Klasik Benzerlik Dönüşümü			TLS Benzerlik Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
11	0.73914	1.814316	Uyuşumlu	0.9009	1.814316	Uyuşumlu
12	0.51962	1.814316	Uyuşumlu	0.5268	1.814316	Uyuşumlu
13	0.14965	1.814316	Uyuşumlu	0.3534	1.814316	Uyuşumlu
14	1.50978	1.814316	Uyuşumlu	1.7171	1.814316	Uyuşumlu

Nokta	Klasik Afin Dönüşümü			TLS Afin Dönüşümü		
	T	Sınır Değer	Sonuç	T	Sınır Değer	Sonuç
11	0.8305	1.645434	Uyuşumlu	0.90654	1.645434	Uyuşumlu
12	3.6434	1.645434	Uyuşumsuz	3.79993	1.645434	Uyuşumsuz
13	0.2874	1.645434	Uyuşumlu	0.36893	1.645434	Uyuşumlu
14	1.2765	1.645434	Uyuşumlu	1.22876	1.645434	Uyuşumlu

3. SONUÇ

Koordinat dönüşümü Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliğinde en sık kullanılan işlemlerden biridir. Ülkemizde farklı koordinat sistemlerinin kullanılması, ülkemizin jeolojik yapısından kaynaklı yer hareketlerinin fazlalığı koordinatlar sistemleri arası dönüşümleri daha da önemli kılmaktadır.

Hazırlanan tez çalışmasında nokta konum doğrulukları göz önüne alınarak ve alınmaksızın iki boyutlu benzerlik ve afin dönüşümü, üç boyutlu benzerlik ve afin koordinat dönüşümü yöntemleri incelenmiştir.

İki boyutlu dönüşümlerde, nokta konum doğrulukları dikkate alınmaksızın helmert transformasyonu yöntemi seçilmiş çalışma bu doğrultuda yürütülmüştür. Nokta konum doğrulukları dikkate alındığında klasik yöntemin geçerli olmadığı, bunun yerine toplam en küçük kareler yöntemi (total least squares, TLS) uygulanmıştır. Toplam en küçük kareler yönteminin uygulanmasında farklı metotların varlığı göz önüne alınmış iki farklı yöntem kullanılmıştır. İki boyutlu dönüşümde yapılan çalışmada nokta doğruluklarının koordinat dönüşümüne etkisinin az olduğu belirlenmiş yöntemler matlab programında simülasyon verisi hazırlanarak rastgele değerler üzerindeki sonuçları da incelenmiştir.

Üç boyutlu dönüşümde benzerlik, afin dönüşümleri nokta konum doğrulukları dikkate alınarak ve alınmaksızın sonuçlara ulaşılmış burada da iki boyutlu dönüşümlerde olduğu gibi nokta konum doğruluklarının dönüşümlere etkisinin pek fazla olmadığı gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak nokta konum doğruluklarının dengeleme işlemleri sonrasında hesaplanacak koordinatlara pek etki etmediği görülse de, bu etkinin büyüklüğü noktalarının doğruluklarının derecesine bağlıdır. Düşük doğruluklu noktalar işleme girdiğinde TLS yöntemi ile daha hassas sonuçların elde edilebileceği göz önünde bulundurulmalıdır.

KAYNAKLAR

- Akyılmaz O.** (2007). Total Least Squares Solution of Coordinates Transformation. *Survey Review* 39,303 pp.66-80
- Alkan, S.** (1999). Bir GPS Ağı Örneğinde 3 Boyutlu Dönüşüm Modellerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi
- Başçiftçi F.** (2008). Jeodezide Kullanılan Dönüşüm Yöntemlerinin Programlanması Yüksek Lisans Tezi
- Bayram Turgut, Cevat İnal.** (2003) Nokta Konum Duyarlıklarının İki ve Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümüne Etkisi
- Berber, M.** (1997). Kenar Ağlarında Uyuşumsuz Ölçülerin Klasik Uyuşumsuz Ölçü Testleri ve M-Kestirimi İle Belirlenmesi ve Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Y.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Dilaver, A., Konak, H., Çepni, M. S.** (1998). Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Yerelleştirilmesinde Kullanılan Yöntemlerin Davranışları, *Harita ve Kadastro Mühendisliği*, 84, S.17-33.
- S. Jazaeri , A. R. Amiri-Simkooei , M. A. Sharifi** Iterative Weighted Total Least Squares Algorithm
- Mahboub V.** (2011). On Weighted Total Least Squares For Geodetic Transformations. *J Geod*
- Neitzel F.** (2010) Generalization of Total Least Squares On Example of Unweighted and Weighted 2D Similarity Transformation
- Pektekin, A.** (1989). Dönüşümler ve Seçmeli Noktalara Göre Programlanması, Türkiye II. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, Ankara.
- Rizos, C.** (1999). Principles and Practice of GPS Surveying, version 1.1 The University of New South Wales, Australia.
- Simkooei A.A., Jazaeri S.** (2012). Weighted Total Least Squares Formulated By Standart Least Squares Theory. *Journal of Geodetic Science*
- Şanlıoğlu İ., Ceylan A., İnal C., Çorumluoğlu Ö., Kalaycı İ.** (2002). Konya Bölgesi için GPS ile Elde Edilen Elipsoidal Yüksekliklerden Ortometrik Yüksekliklerin Hesaplanması
- Şimşek M.** (2008). Jeodezik Ağların Dengelenmesinde Hedef Programlama Tekniği Yüksek Lisans Tezi

- Tanık, A.** (2003). Dönüşümler ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Turgut B., İnal C.** (2003). Nokta Konum Duyarlıklarının İki Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümüne Etkisi. *TUJK 2003 Yılı Bilimsel Toplantısı Coğrafi Bilgi Sistemleri ve Jeodezik Ağlar Çalıştayı*
- Wolf P.R., Ghilani C.D.** (2006). Adjustment Computations: Spatial Data Analysis. Fourth Edition
- Wolf, Paul R., DeWitt, Bon A.** (2000) Elements of photogrammetry: With applications in GIS
- Yaşayan, A.** (1978). Hava Fotogrametrisinde İki Boyutlu Doğrusal Dönüşümler ve Uygulamaları, *K.T.Ü. Yayın No:102 YBF Yayın No: 19.*

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Yiğit Sertaç SUBAŞI

Doğum Yeri ve Tarihi: Artvin – 21.09.1981

Adres: Denizköşkler Mah. Zafer Cad. İyibaş Sok. No:20/1
Avcılar/İstanbul

E-Posta: yigit_sertac@hotmail.com

Lisans: Yıldız Teknik Üniversitesi – Jeodezi ve Fotogrametri
Mühendisliği

Mesleki Deneyim ve Ödüller: Epos Gayrimenkul Değerleme,
Sanel Harita İnşaat San. Tic. Ltd. Şti., Spektra Jeotek A.Ş., Emi Grup, Orion Harita
Mühendislik