



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SİLİNDİRİK YÜZEYLERDE KLASİK BOHR-
SOMMERFELD KUANTİZASYONUNUN YÜKSEK
MANYETİK ALANLAR ALTINDA İNCELENMESİ**

S. Seyyare AKSU

Fizik Anabilim Dalı

Kathal Fiziği Programı

Danışman

Doç. Dr. Afif SİDDİKİ

Mayıs, 2014

İSTANBUL

Bu çalışma 13/05/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Katıhal Fiziği programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:




İmza

Doç. Dr. Afif SİDDİKİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



İmza

Prof. Dr. Nurten ÖNCAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



İmza

Prof. Dr. Gürkan ÇELEBİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



İmza

Prof. Dr. Kayhan ÜLKER
Mimar Sinan Güzel Sanatlar
Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



İmza

Prof. Dr. Ekrem AYDINER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Bu alışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliđinin 30856 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana her zaman yol gösteren, yardımlarını ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen, cesareti ile bizleri yüreklandiren ve bizlere inanan danışmanın İstanbul Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Afif Sıddıki'ye çok teşekkür ederim. Çalışmam boyunca yardımları ve önerileri ile beni yönlendiren Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fizik bölümü öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Nadir Ghazanfari'ye teşekkür ederim.

Kuantum Teknolojileri Laboratuvarı (KTL) ekibinin bir parçası olmaktan onur ve mutluluk duyduğum ve birlikte çalıştığım arkadaşlarım Dr. Deniz Ekşi, Dr. Özge Kılıçoğlu, Hüseyin Atcı, Oğuzhan Kaşıkçı, Serkan Sırt, Sırrı Batuhan Kalkan, Eren Güvenilir ve Emre İren'e teşekkür ederim.

Prof. Dr. Kayhan Ülker başta olmak üzere Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fizik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca bana her türlü desteği sağlayan aileme çok teşekkür ederim.

Mayıs, 2014

S. Seyyare AKSU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	viii
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. İKİ BOYUTLU ELEKTRON SİSTEMLERİ	4
2.1.1. Si – MOSFET.....	4
2.1.2. GaAs-AlGaAs Heteroyapı.....	6
2.2. KLASİK HALL OLAYI.....	8
2.3. KUANTUM HALL OLAYI	10
2.4. MANYETİK ALAN VE ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA ELEKTRONUN KLASİK HAREKETİ	11
2.5. LANDAU SEVİYELERİ.....	13
2.6. ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA LANDAU SEVİYELERİ	16
2.7. KENAR AKIMLARI.....	18
2.7.1. Landauer - Büttiker ve Halperin Kenar Durumları.....	20
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	23
3.1. SIKIŞTIRILABİLİR VE SIKIŞTIRILAMAZ ŞERİTLER	23
3.2. SİLİNDİR YÜZEY ÜZERİNDE TANIMLI 2BES	27
3.3. YARI KLASİK YAKLAŞIKLIK.....	28
3.3.1. Bohr-Sommerfeld Kuantizasyonu.....	35
3.4. AHARONOV-BOHM FAZİ.....	35
3.4.1. Ayar Simetrisi	35
3.4.2. Elektromanyetik Alanda Schrödinger Denklemi ve Dalga Fonksiyonu	36
3.4.3. Aharonov-Bohm Fazı	38
4. BULGULAR.....	40

4.1. KUANTUM HALL OLAYINDA KENAR DURUM ENERJİLERİNİN YARIKLASİK ANALİZİ	40
4.1.1. Probleme Genel Bakış	40
4.1.2. Yarı Klasik Kuantizasyon.....	42
4.1.2.1. Düşük Enerji Bölgesinden $E \approx x_E^2$ Bölgesine Yaklaşma.....	45
4.1.2.2. Yüksek Enerji Bölgesinden $E \approx x_E^2$ Bölgesine Yaklaşma.....	49
4.1.3. Silindir Bir Yüzey Üzerine Radyal Manyetik Alan Varlığında Spinsiz Parçacık.....	55
4.2. SİLİNDİR YÜZEY ÜZERİNDE SIKIŞTIRILAMAZ ŞERİTLERİN OLUŞUMU	59
4.2.1. Landau Seviyeleri.....	62
4.2.2. Zeeman Yarılması	66
4.2.2.1. Tek Değerli Doldurma Faktörü.....	67
4.2.2.2. Çift Değerli Doldurma Faktörü.....	69
4.3. CHKLOVSKİİ MODELİ.....	72
4.3.1. Çift Değerli Doldurma Faktörü.....	73
4.3.2. Tek Değerli Doldurma Faktörü.....	75
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	80
KAYNAKLAR.....	82
ÖZGEÇMİŞ.....	84

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 2.1:** (a) Si-MOSFET (b) Si-MOSFET şematik band diyagramını gösterir..... 5
- Şekil 2.2:** İki boyutlu elektron sistemin gözlendiği tipik bir kristal yapısı şematik olarak resmedilmiştir. Sistem dengeye geldikten sonra 2BES, GaAs-AlGaAs arayüzeyinde form alan üçgen kuyu içerisinde şekillenir..... 7
- Şekil 2.3:** (a) Klasik Hall olayını tasvir eden geometridir. Hall çubuğu xy düzleminde uzanmıştır, düzleme dik z doğrultusunda manyetik alanın varlığı sıfırdan farklı enine bir potansiyel farka neden olur. V_y Hall potansiyelini, V_x boylamsal potansiyeli karakterize eder. (b) Manyetik alanın bir fonksiyonu olarak klasik Hall direncini gösterir..... 8
- Şekil 2.4:** (a) Kuantum Hall çubuğunun şematik bir resmini tasvir eder. $V_{xy}=R_{xy}/I$, Hall potansiyeli ve $V_{xx}=R_{xx}/I$, boylamsal potansiyeli temsil eder. (b) Tam sayılı kuantum Hall olayını gösterir. R_{xy} Hall direncine karşılık gelen platoları ve R_{xx} boylamsal dirence karşılık gelen osilasyonları belirtir.. 11
- Şekil 2.5:** Siklotron yörüngesi üzerindeki bir elektronun $\vec{r} = (x, y)$ konumunu şematik olarak gösterir. $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$ yörüngenin yarıçapı ve $\vec{R} = (X, Y)$ yörüngenin merkezidir..... 13
- Şekil 2.6:** Landau seviyelerinin şematik gösterimidir. (a) Elektrik alan yokluğunda Landau seviyeleri düzdür. (b) Elektrik alan varlığında yukarıya doğru Landau seviyeleri bükülür.. 18
- Şekil 2.7:** Yörüngelerin şematik gösterimidir. Klasik siklotron hareketi örneğin ortasında resmedilmiştir. Duvara çarpan ve duvardan yansıyan sıçrayan yörüngeler örneğin her iki kenarı boyunca zıt doğrultularda hareket eder. Örneğin sınırlarındaki sıçrayan dairesel yörüngeler sonlu 2BES'nde kenar kanallarına karşılık gelir..... 18
- Şekil 2.8:** Örnek sınırlarının $y = \pm w/2$ olduğu 2BES'nde Landau enerji seviyelerindeki değişimin şematik gösterimidir. Fermi enerjisi E_F iki Landau seviyesi arasında uzanmıştır. 19
- Şekil 2.9:** Dış bir tuzaklama potansiyelinin varlığında ardışık Landau seviyeleri ve Fermi enerjisini gösterir. İçte parabolik tuzaklama potansiyeli ve siyah kalın çizgiler konuma bağlı Landau seviyelerini gösterir. (b) Konuma bağlı doldurma faktörünü temsil eder. 21

- Şekil 3.1:** 2BES'nin oluştuğu düzenek resmedilmiştir. Kalın siyah tabakalar iki metalik iletkeni temsil eder. Uygulanan negatif kapı voltajı V_g solda yer alırken sağ taraf topraklanmıştır. Artılar donör atomlarından kaynaklanan uniform pozitif arka plandır. Gri bölge ise dielektrik sabiti $\epsilon \gg 1$ olan yarıiletken tarafından işgal edilmiştir (Chklovskii ve diğerleri, 1992). 24
- Şekil 3.2:** Tam sayılı kuantum Hall olayında kenar durumlarının yapısını şematik olarak gösterir. (a)-(c) Tek elektron kenar durumları tasviridir. (a) İki boyutlu elektron sisteminin kenar civarında üstten görünüşüdür. Oklar elektronun iki kenar kanalındaki akış doğrultusunu belirtir. (b) Kenar yakınında artan potansiyel enerji boyunca Landau seviyelerinin adyabatik bükülmesini gösterir. Daireler Landau seviyelerinin yerel doldurma faktörünü temsil eder. İçi dolu daireler tamamen dolu olan, içi boş daireler ise boş olan durumlardır. (c) Sınırdaki mesafenin bir fonksiyonu olarak elektron yoğunluğunu gösterir. (d)-(f) Kendinden tutarlı elektrostatik tasviridir. (d) Kenar civarında iki boyutlu elektron sisteminin üstten görünüşüdür. Gölgeledi şeritler doldurma faktörünün tam sayı olmadığı (sıkıştırılamaz şerit) bölgeleri temsil eder. Beyaz şeritler ise doldurma faktörünün tam sayı olduğu (sıkıştırılabilir şerit) bölgeleri temsil eder. Oklar elektronun akış doğrultusunu gösterir. (e) Elektrostatik potansiyel enerji ve Landau seviyelerinin bükülmesini gösterir. Daireler Landau seviyelerinin yerel doldurumunu temsil eder. İçi dolu daireler tamamen dolu olan, içi yarı dolu daireler kısmen olarak işgal edilmiş olan ve içi boş daireler ise boş durumları temsil eder. (f) Boşaltım bölgesinin ortasında mesafeye bağlı olarak elektron yoğunluğunu gösterir (Chklovskii ve diğerleri, 1992). 26
- Şekil 3.3:** Silindirik geometriye sahip 2BES'nin şematik bir temsildir. 28
- Şekil 3.4:** Potansiyel enerjinin şematik gösterimidir. (1) ve (3) bölgeleri klasik olarak yasaklı bölgelerdir. (2) bölgesi klasik olarak izinli bölgedir. x_1 ve x_2 noktaları ise klasik dönme noktalarıdır. 31
- Şekil 3.5:** Aharonov-Bohm olayının şematik gösterimidir. (1) ve (2) elektronun izlediği iki ayrı yolu gösterir. Solenoidin diğer tarafında demetler birleşir. 38
- Şekil 4.1:** Harmonik osilatör potansiyeli ve $x=0$ noktasındaki sonsuz potansiyel duvarının şematik gösterimidir. Üç farklı durum dikkate alınmıştır. $x_E < 0$ ise düşük enerji bölgesi (I) $E < x_E^2$ ve yüksek enerji bölgesi (IIa) $E > x_E^2$ ile temsil edilir. $x_E > 0$ ise sadece yüksek enerji bölgesi (IIb) $E > x_E^2$ söz konusudur. (III) durumu ise arakesit bölgesine karşılık gelir. 44
- Şekil 4.2:** Enerji durumları elektrik alan yokken ve elektrik alan varlığında merkez koordinatın bir fonksiyonu olarak çizilmiştir. 53
- Şekil 4.3:** Taban durumunda farklı merkez koordinatları için parçacığın bulunma olasılığı hesaplanmıştır. 54
- Şekil 4.4:** Birinci uyarılmış durum için farklı merkez koordinatlarında parçacığın bulunma olasılığı hesaplanmıştır. 55

- Şekil 4.5:** İç içe geçmiş R yarıçaplı bir silindir ile a yarıçaplı bir solenoidin gösterimidir ($a \sim R$). Kırmızı oklar silindir yüzeyi üzerinde her bir noktadan geçen radyal manyetik alanı temsil eder (Chryssomalakos, 2004). 56
- Şekil 4.6:** Silindir yüzey üzerinde hareketi sınırlandırılmış olan elektronun ilk üç enerji durumunu gösterir. 59
- Şekil 4.7:** Silindir bir geometriye sahip 2BES'ni tasvir eder. Sol taraftaki figür modelin üstten görünümüdür. Sarı renkteki yükseltiller kuantum nokta kontakları, kırmızı renkteki yükseltiller kontakları, siyah renkteki şeritler ise sıkıştırılmaz şeritleri göstermektedir. 61
- Şekil 4.8:** Farklı manyetik alan değerlerinde silindir yüzey üzerinde form alan sıkıştırılmaz şeritleri belirtir. (a) 1.7T, (b) 1.8T, (c) 1.9T ve (d) 2T..... 63
- Şekil 4.9:**Farklı manyetik alan değerlerinde merkez açının $\theta=0$ da konumlandığı durum için açığa bağlı olarak şerit kalınlığını gösterir. 64
- Şekil 4.10:** Farklı merkez açı değerleri için sabit manyetik alan altında ($B=1.7T$) açığa bağlı olarak şeritlerin oluşumu gösterir. 65
- Şekil 4.11:** Manyetik alana bağlı olarak farklı merkez açı değerlerinde akı hesabını gösterir. 66
- Şekil 4.12:** Farklı manyetik alan değerleri için açının bir fonksiyonu olarak $v=1$ ve $v=3$ doldurma faktörlerine karşılık gelen şerit kalınlıkları hesaplanmıştır. 67
- Şekil 4.13:** $v=1$ değerine karşılık gelen sıkıştırılmaz şeritler sabit manyetik alan değerinde farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır. 68
- Şekil 4.14:** $v=3$ değerine karşılık sıkıştırılmaz şerit kalınlığı sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır. 69
- Şekil 4.15:** $v=2$ değeri için farklı farklı manyetik alan değerlerinde açığa bağlı olarak kalınlık hesabını gösterir. 70
- Şekil 4.16:** $v=2$ değeri için sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerlerinde kalınlık hesabını gösterir. 71
- Şekil 4.17:** Doldurma faktörünün tek ve çift değerlerine karşılık manyetik alana bağlı olarak farklı merkez açı değerleri için kapalı çevrim içinden geçen manyetik akı sayısı hesaplanmıştır. (a) $v=2$ değeri ve (b) $v=1$ değerini gösterir..... 72
- Şekil 4.18:** Silindir bir geometri üzerinde dik bir manyetik alana maruz bırakılan kuantum Hall çubuğu tasvir edilir. Ok akımın akış doğrultusunu belirtir. $\theta=0$ silindir yüzeyin konumlandığı merkez açısını belirtir..... 73
- Şekil 4.19:** Farklı manyetik alan değerlerinde sabit merkez açı değerinde ($\theta=0$) sıkıştırılmaz şerit kalınlık hesabını gösterir..... 74

- Şekil 4.20:** Farklı merkez açı değerlerinde sabit manyetik alan altında kalınlık hesabını belirtir. 75
- Şekil 4.21:** Farklı manyetik alan değerlerinde doldurma faktörünün $v=1$ ve $v=3$ değerleri için kalınlık hesabını gösterir. 76
- Şekil 4.22:** Sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için doldurma faktörünün tek değerleri üst grafik $v=1$ ve alt grafik $v=3$ için kalınlık hesabını gösterir. 77
- Şekil 4.23:** Soldaki grafik $v=1$ platosunun tek başına olduğu $4T$ manyetik alan değerine karşılık gelen kalınlık hesabıdır. Sağdaki grafik ise $v=1$ ve $v=2$ platolarının bir arada olduğu daha düşük manyetik alan ($\sim 2T$) değerlerinde kalınlık hesabını gösterir. Düz çizgi $v=2$ platosuna karşılık gelir, kesikli çizgiler ise $v=1$ platosuna karşılık gelir. 78
- Şekil 4.24:** Düşük manyetik alan değerlerinde ($<2T$) $v=1$ ve $v=2$ platoları için sıkıştırılamaz şerit kalınlıklarını gösterir. Düz çizgi $v=2$ platosuna karşılık gelir, kesikli çizgiler ise $v=1$ platosuna karşılık gelir. 78
- Şekil 4.25:** $v=2$ ve $v=3$ platolarının kalınlık hesabını gösterir. Kesikli çizgiler $v=3$ platosunu temsil eder, düz çizgiler $v=2$ platosunu temsil eder. Kırmızı şeritler sıkıştırılamaz şeritlerin artık olarak form aldığı aralığı belirtir. 79

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
\vec{A}	: Vektör potansiyel
a	: Solenoidin yarıçapı
\vec{a}	: İvme
$A(x)$: Dalga genliği
$Ai(z)$: Airy fonksiyonu
a_B	: Etkin Bohr yarıçapı
a_k	: Sıkıştırılmaz şerit kalınlığı
\vec{B}	: Manyetik alan
C	: Işık hızı
C_i	: Hall kontakları
$d\vec{S}$: Yüzey alan vektörü
e	: Elektronun yükü
E	: Enerji
\vec{E}	: Elektrik alan
E_g	: Enerji band boşluğu
eV	: Elektron volt
E_n	: Kuantize enerji özdeğerleri
E_k	: Tel parçacık enerji band boşluğu
\vec{F}	: Kuvvet
F_0	: Potansiyelin dönme noktasındaki eğimi
g^*	: Etkin Lande g-faktörü
$g(\vec{r})$: Faz terimi
\hat{H}	: Hamiltonyen operatörü
H_n	: n. dereceden Hermit polinomu
i	: İmajiner sayı
I	: Akım
\vec{j}	: Akım yoğunluğu
k	: k. Sıkıştırılmaz şerit
\vec{k}	: Dalga vektörü
K	: Kelvin
k_B	: Boltzman sabiti
L	: Karakteristik uzunluk skalası
l_B	: Manyetik uzunluk
l_d	: Boşaltım şeriti
l_s	: Ortalama serbest yol
\hat{L}	: Lagrange operatörü
m_e	: Elektron kütlesi
n_e	: Elektron yük yoğunluğu

n_{el}	: Elektron sayı yoğunluğu
n_o	: Donor yoğunluğu
$n(x)$: Elektron yoğunluğu uzaysal dağılımı
$n\phi$: Manyetik akı sayı yoğunluğu
\vec{p}	: Momentum
r	: Eğrilik yarıçapı
\vec{R}	: Çember merkezi
R	: Silindirin yarıçapı
R_H	: Hall direnci
R_{xx}	: Boyuna Hall direnci
R_{K-90}	: von Klitzing sabiti
\vec{r}	: Konum vektörü
$S(E, x_E)$: Yarıklasik eylem kuantizasyonu
$S'(x, x')$: Eylem
$S(x)$: Dalga fazı
t	: Zaman
T	: Tesla
V_g	: Kapı voltajı
V_F	: Fermi hızı
V_d	: Sürüklenme hızı
$V(\vec{r})$: Potansiyel enerji
V_x	: Boyuna Hall potansiyeli
V_y	: Hall potansiyeli
\vec{v}	: Hız
V_{tuzak}	: Tuzaklama potansiyeli
W	: Örnek kalınlığı
x_k	: Sıkıştırılmaz şerit merkez koordinat
x_i	: Klasik dönme noktaları
x_E	: Boyutsuz merkez koordinat
μ	: Kimyasal potansiyel
μ_B	: Bohr magnetonu
μ_o	: Boş uzay geçirgenliği
ρ	: Özdirenç
ρ_H	: Hall özdirenci
$\vec{\rho}$: Siklotron çemberinin yarıçapı
σ	: İletkenlik
σ_o	: Drude iletkenliği
ϵ	: Dielektrik sabiti
ω_c	: Siklotron frekansı
τ	: Ardışık iki çarpışma arasında geçen ortalama süre
\hbar	: Planck sabiti
δ	: Delta fonksiyonu
λ	: De-Broglie dalgaboyu
λ_F	: Fermi dalga uzunluğu
$\vec{\nabla}$: Diverjans
∇^2	: Laplasyen operatörü
∇V	: Potansiyel enerjideki değişim

$\nabla\lambda$: Dalgaboyundaki değişim
φ	: Faz faktörü
α	: Faz faktörü
ϕ	: Skaler potansiyel
χ	: Ayar fonksiyonu
Φ_m	: Solenoidin içinden geçen toplam manyetik akı
Φ	: Manyetik akı
Φ_0	: Akı kuantası
v	: Doldurma faktörü
γ	: Maslov indeksi
θ_L	: Gaussian fonksiyonu sol merkezli dalgası
θ_R	: Gaussian fonksiyonu sağ merkezli dalgası
$v(x)$: Potansiyel
Å	: Angström

Kısaltmalar

Açıklama

2BES	: İki boyutlu elektron sistemi
Al	: Aliminyum
AlGaAs	: Aliminyum Galyum Arsenid
CS	: Sıkıştırılmaz şerit
D	: Drain
G	: Gate (kapı)
IS	: Sıkıştırılabilir şerit
MBE	: Molecular Beam Epitaxy
Si	: Silisyum
Si-MOSFET	: Silisyum Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor
SiO₂	: Silisyum di oksit
S	: Source (kaynak)
SdH	: Shubnikov de Haas
WKB	: Wentzel-Kramers-Brillouin

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİLİNDİRİK YÜZEYLERDE KLASİK BOHR-SOMMERFELD KUANTİZASYONUNUN YÜKSEK MANYETİK ALANLAR ALTINDA İNCELENMESİ

S. Seyyare AKSU

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Afif SİDDİKİ

Bu çalışmada, dik bir manyetik alana maruz bırakılan iki boyutlu elektron sisteminin kenar durum enerjileri belli sınır şartları altında yarı klasik yaklaşıklık ile incelenmiştir. Tek boyutlu harmonik osilatör problemine eşdeğer olan sistemin enerji özdeğerleri Maslov indeksi ile ilişkilendirilmiştir. Özdeş problem silindir bir yüzey için yarı analitik ve yarı nümerik olarak hesaplanmıştır. Nümerik modelleme ile silindir bir geometri üzerinde tanımlanan kuantum nokta kontaklar ve kuantum Hall çubuğu yapılarında sıkıştırılamaz şeritlerin oluşum şartları incelenmiştir. Sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıkları ve konumları Landau seviyeleri olarak bilinen spinsiz parçacık durumu ve Zeeman yarılması olarak bilinen spinli parçacık durumu için belirlenmiştir. Şeritlerin kapalı ilmik formunda biçimlendiği manyetik alan değerinde Aharonov-Bohm fazını gözleyebilme şartları öngörülmüştür.

Mayıs 2014, 96 sayfa

Anahtar kelimeler: Sıkıştırılamaz şeritler, Silindir yüzey, Aharonov-Bohm fazı

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTIGATION OF CLASSICAL BOHR-SOMMERFELD QUANTIZATION ON CYLINDRICAL SURFACES UNDER HIGH MAGNETIC FIELDS

S. Seyyare AKSU

İstanbul University

Graduate School of Science and Engineering

Department of Physics

Supervisor: Assos. Prof. Dr. Afif SIDDIKİ

In this work, the edge state energies of the two dimensional electron system ,which is subjected to a high perpendicular magnetic field, is investigated in the presence of the certain boundary conditions within semiclassical approximation. The eigenvalues of the energy of the system which is equivalent to one dimensional harmonic problem is related to Maslov index. Same problem is calculated semi-analytical and semi-numerical for a cylindrical surface. The formation condition of the incompressible strips are investigated for both quantum point concats and quantum Hall bar which is defined on a cylindrical surface by numerical modeling. The width and the location of the incompressible strips are obtained for a spinless particle called Landau levels and a spin particle called Zeeman gap. The observation conditions of Aharonov-Bohm phase are predicted at the value of the magnetic field where the incompressible strips are formed as a closed loop.

May 2014, 96 pages

Keywords: Incompressible strips, Cylindrical surface, Ahronov-Bohm phase

1. GİRİŞ

Kuantum fiziğinin uygulama alanlarından biri olan düşük boyutlu elektron sistemleri, yarı iletkenler fiziğinde çokca ilgi uyandıran ve çeşitli çalışma alanları sağlayan fizik fenomenlerinden biri olmuştur. En iyi bilinen örneklerinden biri yüksek mobiliteli GaAs/AlGaAs gibi farklı band aralığında sahip iki farklı yarıiletken metaryelin Molecular Beam Epitaxy (MBE) tekniği ile seçili tek bir doğrultu boyunca katman katman büyütülmesi sonucu arayüzeyde form alan üçgen kuyunun taban durumuna lokalize edilen iki boyutlu elektron sisteminin (2BES) biçimlendiği heteroyapılardır (Ihn, 2010). İki boyutlu bir sistem üzerinde yüksek manyetik alan ve düşük sıcaklıklarda gerçekleştirilen Hall direnci ölçümleri 3-boyutlu tipik bir metaryelde gözlenen lineer davranıştan farklı olarak, basamak davranışı sergiler. Bu olay tam sayılı kuantum Hall olayı olarak bilinir ve kuantum Hall platoları manyetik alanın bazı değerlerine karşılık gelirken, platolar arasındaki geçiş ise lineerdir. 2BES’nde ölçülen kuantum Hall direncindeki plato davranışı ve boylamsal Hall direncindeki lineer davranış yüksek manyetik alan varlığında Landau kuantizasyonunun bir neticesidir. İki boyutlu elektron sisteminde taşınım, yüksek manyetik alan varlığında oluşan sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritler olarak adlandırılan akım kanallarında gerçekleşir. Birlikte yaşayan bu şeritlerin varlıkları elektronik sistemin içsel özelliklerinden ziyade sıcaklık ve manyetik alan gibi dış parametrelere bağlıdır (Sıddıki ve diğerleri, 2010). Fermi seviyesinin Landau seviyesi ile çakıştığı sıkıştırılabilir şerit bölgesinde sistem metal gibi davranırken, Fermi seviyesinin iki Landau seviyesi arasında uzandığı sıkıştırılamaz şerit bölgesinde ise sistem yalıtkan gibi davranır. Böylece manyetik alanın aldığı değere bağlı olarak sistem metal-yalıtkan fazları arasında geçiş yapar. Hall direncinin plato davranışı sergilediği düzlüklerde sistem sıkıştırılamaz rejimde iken ardışık iki plato arasındaki geçiş bölgesinde ise sistem sıkıştırılabilir rejimdedir.

Manyetik alan varlığında siklotron hareketi yapan iki boyutlu elektron sisteminin kuantum mekaniksel davranışını açıklayan en temel model tek boyutlu harmonik osilatör problemidir. Sistemin enerji özdeğerleri Landau seviyeleri olarak da bilinen

harmonik osilatör enerjilerine denktir ve siklotron yörüngeleri Landau seviyelerine yerleşir. Sonlu örnek boyutları dikkate alındığında örnek ortasında klasik siklotron hareketi yapan elektron, örnek kenarında siklotron hareketinin duvardan ardışık geri yansımalarına sebep olan ve sıçrayan yörüngeler olarak adlandırılan davranışı sergiler (Holcomb, 1999). Klasik mekanikte elektronun siklotron yörüngesi keyfi bir enerji değerinde olabilir iken kuantum mekaniğinde ise Bohr-Sommerfeld kuantizasyonu seçili bir doğrultudaki periyodik bir hareket için eylem integralinin kapalı bir çevrim boyunca kuantize olması gerektiğini ifade eder. Böyle bir sistemin enerji özeğerlerini bazı sınır şartları altında yarı klasik bir yaklaşıklık olan WKB metodu ile belirlemek mümkündür. Bu yaklaşıklığın geçerli olabilmesi veya uygulanabilmesi için ise potansiyelin yeterince yavaş değişiyor olması gerekir, elektronun de Broglie dalgaboyu potansiyeldeki değişime kıyasla birçok kez osilasyon yapabilmelidir. Bu yöntem örnek sınırlarında enerji özgerlerindeki değişimi ve elektronun o noktada kazandığı faz ile ilgili bilgi verir. WKB metodunun geçersiz olduğu bazı noktalar vardır ki bunlar klasik dönme noktaları olarak adlandırılır. Bu noktalarda potansiyeldeki değişimin lineer olduğu kabul edilerek çözüm üretilir. Bohr-Sommerfeld kuantizasyonunda (Fuchs ve diğerleri, 2010) ifade edilen Maslov indeksi (Keller, 1958) klasik dönme noktalarında elektronun kazandığı faz ile ilişkili olan bir parametredir.

Geometrik bir faz olma özelliği ile birlikte Aharonov-Bohm fazını çift yarık deneyinden farklı kılan temel fiziksel nicelik, birbirine eşit uzaklıkta bulunan iki yarığın tam ortasına yerleştirilen ve içinden I akımı geçen sonsuz uzunluktaki bir telin yarattığı manyetik alanın varlığıdır. Koherant elektron demeti yol üzerinde direkt olarak manyetik alanın etkisini görmemektedir ancak vektör potansiyelinin varlığı ekran üzerinde girişim deseninin kaymasına neden olur. Bunun sebebi elektronun izlediği yol üzerinde yoldan bağımsız olarak kuantum doğası gereği kazandığı fazdır ki bu faz Aharonov-Bohm fazıdır (Aharonov ve Bohm, 1959).

İlgi çekici bir diğer alan ise düz 2BES'nin dışında silindir yüzeyler üzerinde üretilebilen silindirik 2BES'leridir. Silindir geometriye sahip yüzeyleri üretebilmek için MBE tekniği ile üretilen heteroyapılar üzerinde özel tekniklerle bazı kimyasal yöntemler uygulanarak yüzeyin bükülmesi sonucu eğrilik kazanması sağlanır (Prinz ve diğerleri, 2000), (Mendach ve diğerleri, 2006). Dik bir manyetik alana maruz bırakılan sistemin

dış yüzeyi üzerinde manyetik alanın dik bileşeninin etkin olmasıyla uzaysal olarak değişen manyetik alan varlığında fiziksel bir nicelik ölçülebilmek için elektronun düşük sıcaklık ortalama serbest yolu eğrilik yarıçapı ile kıyaslanabilir mertebede veya daha büyük olmalıdır. Geometrisinden faydalanılan silindirik 2BES'nin taşınım özellikleri bilinmediği ve ilginç sonuçlar doğurabilir.

Bu çalışmada öncelikle, kuantum Hall rejiminde kenar durum enerjileri yarıklasik yaklaşıklık çerçevesinde özel sınır şartları dikkate alınarak incelenmiştir. Sistemi karakterize eden en ideal durum ise harmonik osilatör problemi ve bu sistemin enerji özdeğerleri konuma bağlı olarak elde edilerek, Maslov indeksi ile ilişkilendirilmiştir. Silindirik bir geometri üzerinde nümerik olarak tanımlanan kuantum nokta kontaklar ve kuantum Hall çubuğu yapıları için dik bir manyetik alan varlığında sıkıştırılamaz şeritlerin konumları ve genişlikleri belirlenerek, oluşum şartları incelenmiştir. Chklovskii modelinin (Chklovskii ve diğerleri, 1992) öngördüğü elektron yoğunluğu, şerit kalınlığı, boşaltım şeriti gibi nicelikler dikkate alınarak hesap gerçekleştirilmiş ve spin ile spinsiz parçacık durumları dikkate alınarak hesaplar sonuçlandırılmıştır. Sıkıştırılamaz şeritlerin kapalı ilmik formunda biçimlendiği bazı manyetik alan değerlerinde geometrik bir faz olan Aharonov-Bohm fazının bazı şartlar altında elde edilebileceği öngörülmüştür.

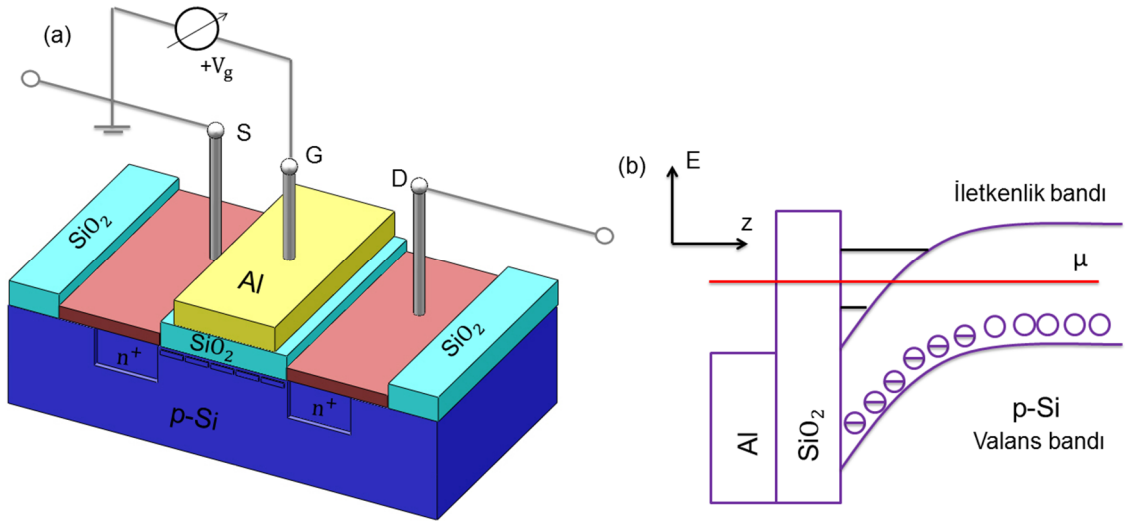
2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde yarıiletken fiziğinin temelini oluşturan 2BES'den bahsedilecektir. Bu sistemler düşük sıcaklık ve yüksek manyetik alan varlığında kuantum Hall olayının da temelini oluşturmaktadır. Öncelikle klasik Hall olayı anlatılacaktır sonrasında kuantum Hall olayının hangi şartlar altında vuku bulduğu, sistemin iletkenlik ve direnç gibi mekanizmaları üzerinde ne gibi teorik ve deneysel sonuçları doğurduğundan bahsedilecektir. Kuantum Hall olayını daha iyi özümseyebilmek için yük taşıyıcısı elektronun, elektromanyetik alan altında klasik ve kuantum mekaniksel hareketi irdelenecektir. Kuantum mekaniksel tasvir Landau seviyeleri olarak karşımıza çıkacaktır. Son olarak kuantum Hall olayının gözleendiği 2BES oluşan akım kanalları anlatılacaktır.

2.1. İKİ BOYUTLU ELEKTRON SİSTEMLERİ

2.1.1. Si – MOSFET

İki boyutlu elektron sisteminin (2BES) gözleendiği yapılardan biri olan Si-MOSFET eklemi; metal plaka, SiO_2 yalıtkanı ve p-tipi katkılı Si yarıiletkeninden oluşan bir kapasitördür. Metal ve yarıiletken metaryeller farklı kimyasal potansiyellere sahip oldukları için bir araya getirildiklerinde sistemin denge durumuna gelme eğilimi, metalden sayıca serbest elektronun az olduğu p-tipi katkılı Si yarıiletken malzemesine elektron transferi ile gerçekleşerek bandların bükülmesiyle neticelenir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: (a) Si-MOSFET (b) Si-MOSFET şematik band diyagramını gösterir.

Metal plaka ile yarıiletken arasında uygulanan potansiyel farkı kapı (gate) voltajı olarak adlandırılır ve V_g ile gösterilir. Metal plaka yarıiletkene kıyasla daha yüksek bir potansiyelde tutulduğu takdirde elektronlar Si-SiO₂ arayüzeyine itilir. Si alt katmanı p-tipi katkılı olduğu için valans bandından elektronlar arkalarında birer boşluk bırakarak akseptör seviyesini beslemeye başlar. Uygulanan potansiyel fark V_g yeteri kadar yüksek ise iletkenlik bandının minimumu Fermi seviyesinin altına doğru kayar ve böylece iletkenlik bandının minimumu elektronlar tarafından işgal edilir. Bu bölge inversiyon (tersilme) tabakası olarak adlandırılır ve genişliği 3-5 nm civarındadır (Jeckelmann ve Jeanneret, 2001). Bu genişlik elektronun de Broglie dalgaboyu ile kıyaslanabilir mertebelerde olduğu takdirde kuantum etkiler ortaya çıkar ve elektronlar “iki boyutlu” olarak adlandırılır. Elektron arayüzey düzlemi boyunca serbest olarak hareket edebiliyorken kuantum mekaniksel etkilerden dolayı düzleme dik olan doğrultu boyunca hareketi kuantizedir. Akseptör seviyesinin tamamen dolu olduğu bölge ise tüketim bölgesi olarak adlandırılır, genişliği 500nm civarındadır (Jeckelmann ve Jeanneret, 2001) ve serbest taşıyıcısı yoktur.

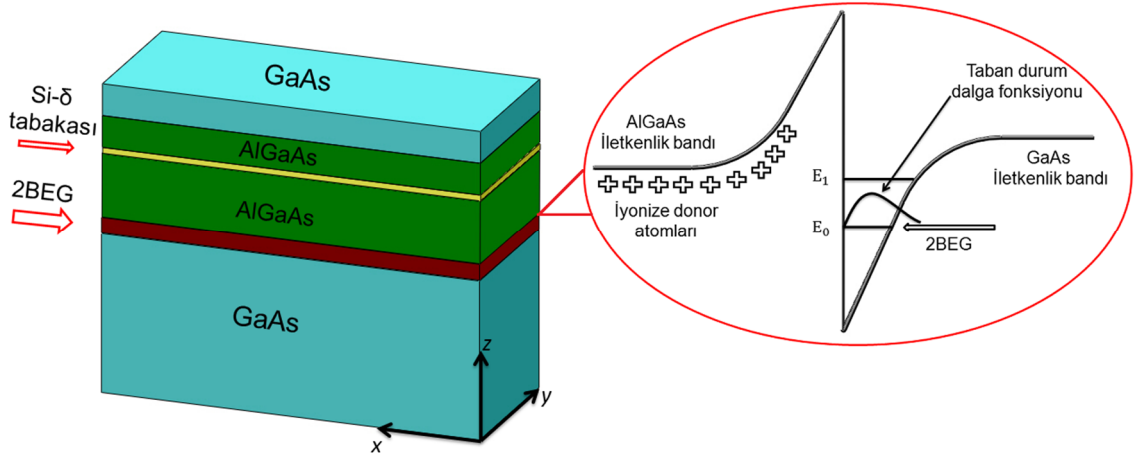
Yeteri kadar düşük yoğunluk ve düşük sıcaklıkta elektronlar iletkenlik bandının en alt durumunu işgal eder, z doğrultusundaki hareketleri sınırlandırılmış iken xy düzlemindeki hareketleri serbesttir. Si-MOSFET yapısında 2BES'nin yoğunluğu uygulanan V_g voltajı ile kontrol edilir. Bu yapılar 2BES'nin uygulanabilirliği açısından ideal olmasına karşın elektronlar safsızlıklardan veya yüzey pürüzlüklerinden saçılmaya

maruz kalabilir (Stomer,1999). Ayrıca elektronlar atomların titreşiminin kollektif bir sonucu olan fononlardan da saçılmaya maruz kalabilir. Yeterince düşük sıcaklıklarda elektronların fononlarla olan etkileşimini ihmal edebiliriz. Bu saçılma mekanizmaları elektronun mobilitesini düşürür. Sonuç olarak sistemin çalışma performansı azalır.

İki boyutlu elektron sistemini oluşturmanın en etkili yollarından bir diğeri de elektronları iki farklı yarıiletken arayüzeyine tuzaklamaktır. Böylece Si-MOSFET yapısına kıyasla çok daha verimli 2BES oluşturmamızı mümkün kılar.

2.1.2. GaAs-AlGaAs Heteroyapı

İki boyutlu elektron sisteminin gözlendiği diğeri bir yapı olan GaAs-AlGaAs heteroyapısı Si-MOSFET ile benzer özelliklere sahiptir. 2BES farklı band aralıklarına sahip olan GaAs ($E_g=1.42\text{eV}$) ve $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ($E_g=1.424+1.274x\text{ eV}$) yarıiletkenlerinin arayüzeyinde şekillendirilir. MBE (Molecular Beam Epitaxy) tekniği (Davies, 1998) ile örgü sabitleri uyumlu olan GaAs ve AlGaAs metaryellerinin atomik katman-katman büyütülmesiyle GaAs-AlGaAs heteroyapısı elde edilir. Bu işlem sürecinde GaAs altkatmanı üzerine birkaç μm kalınlığında GaAs tabakası büyütülür sonrasında GaAs tabakası $\sim 5\mu\text{m}$ kalınlığında AlGaAs tabakası ile kaplanır. AlGaAs metaryeli iletkenlik bandının minimumunu besleyebilmek için n-tipi katkıdır. Bu katkılama arayüzeyden $0.1\mu\text{m}$ mesafede Si safsızlıklarının AlGaAs tabakasına gömülmesiyle gerçekleştirilir (Stomer, 1999). İletkenlik bandına kazandırılan elektronlar kararlı durumda bulunabilmek için daha düşük enerjiye sahip olan GaAs yarıiletkeninin iletkenlik bandına göç ederek GaAs kuyusuna düşeceklerdir. Arayüzeyde birikmeye başlayan elektronlar ile arkalarında bıraktıkları pozitif yüklü donör iyonları arasında oluşan elektrik alan bandların bükülmesine neden olur ve her iki metaryelde kimyasal potansiyel dengeye gelinceye kadar bu geçiş devam eder.



Şekil 2.2: İki boyutlu elektron sisteminin gözlendiği tipik bir kristal yapısı şematik olarak resmedilmiştir. Sistem dengeye geldikten sonra 2BES, GaAs-AlGaAs arayüzeyinde form alan üçgen kuyu içerisinde şekillenir.

İki boyutlu elektron sisteminin oluştuğu inversiyon tabakasındaki elektron yoğunluğu donör yoğunluğu tarafından belirlenir. Bu teknik modülasyon katkılama olarak adlandırılır. GaAs-AlGaAs arayüzeyinde oluşan üçgen kuyuda hapsedilen elektronların z doğrultusu boyunca hareketleri kuantizedir. Düşük sıcaklık ($T < 4$ K) ve düşük taşıyıcı yoğunluğunda sadece en düşük durum elektronlar tarafından işgal edilmiştir ve 2BES için enerji spektrumu (Klitzing, 1985),

$$E = E_z^0 + \frac{\hbar k_{xy}^2}{2m^*} \quad (2.1)$$

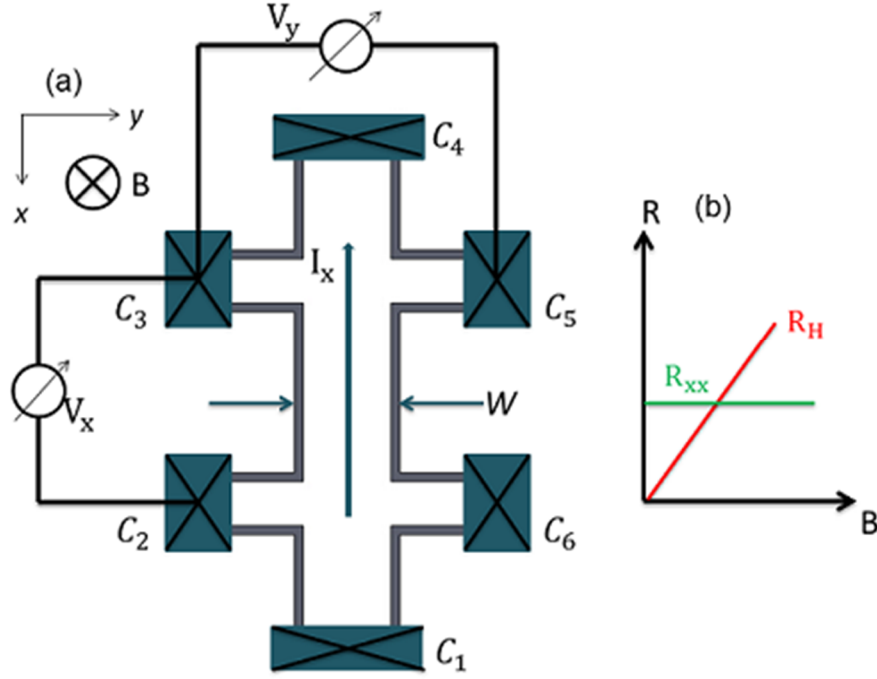
ile tanımlanır. Burada m^* elektronun etkin kütlesi, k_{xy} iki boyutlu düzlemde elektronun dalga vektörü ve E_z^0 ilk elektronik durumun enerjisidir.

Si-MOSFET yapısına göre GaAs-AlGaAs heteroyapısının avantajları:

- Arayüzeye hapsedilen elektronlar pozitif yüklü sabit Si iyonlarından yeterli mesafede ayrıldığından saçılmaya maruz kalmadan mobilitiye katkı sağlarlar.
- GaAs ve AlGaAs yarıiletkenleri arasında yüzey pürüzlülüğünün oldukça yumuşak olmasıdır. Böylece yüzey saçılmaları indirgenmiş olur.

2.2. KLASİK HALL OLAYI

1879 yılında Edwin Hall dik bir manyetik alana maruz bırakılan ince metalik bir plakanın enine direncinin R_H manyetik alanla lineer olarak değiştiğini göstermiştir (Şekil 2.3). Klasik Hall olayında, Hall direncinin manyetik alan ile lineer bağımlılığı düşük manyetik alan değerleri için geçerlidir.



Şekil 2.3: (a) Klasik Hall olayını tasvir eden geometridir. Hall çubuğu xy düzleminde uzanmıştır, düzleme dik z doğrultusunda manyetik alanın varlığı sıfırdan farklı enine bir potansiyel farka neden olur. V_y Hall potansiyelini, V_x boylamsal potansiyeli karakterize eder. (b) Manyetik alanın bir fonksiyonu olarak klasik Hall direncini gösterir.

Tipik bir yük taşımını ölçümünde Şekil 2.3 ile tasvir edilen geometri dikkate alındığında, akım C_1 ve C_4 kontakları arasında akıtılırken, boylamsal direnç C_2 ve C_3 kontakları arasında, Hall direnci ise C_3 ve C_5 kontakları arasında ölçülür. Lineer davranış sergileyen Hall direnci,

$$R_H = -\frac{B}{qn^*} \quad (2.2)$$

ile ifade edilir. Burada q taşıyıcı yükü ve n^* taşıyıcı yük yoğunluğudur. Lorentz kuvvetinin bir sonucu olan Hall olayında, manyetik alan yük taşıyıcılarının yörüngesini bükerek örneğin iki zıt kenarı arasında birikmesine ve bir yoğunluk gradyenti oluşmasına neden olur (Goerbig, 2009). Klasik Hall deneyi iletken metaryelin yük

taşıyıcı tipini ve taşıyıcı yoğunluğu belirlemek için kullanılan standart bir ölçüm tekniğidir.

Klasik Hall olayını daha efektif olarak anlayabilmek Drude modeli (Ashcroft ve Mermin, 1976) ile mümkündür. Bu modelde bağımsız yük taşıyıcılarının hareket denklemi,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{B} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau} \quad (2.3)$$

ile karakteriz edilir. Burada negatif yüklü yük taşıyıcısı elektronların taşınımını dikkate aldık. Denklem (2.3) ile ifade edilen hareket denkleminde \vec{E} ve \vec{B} sırasıyla elektrik alanı ve manyetik alanı gösterir, son terim ise çarpışmalardan kaynaklanan saçılma sürecidir, τ ise saçılma zamanıdır. Burada dikkate alınan durum, xy düzleminde hareket eden iki boyutlu elektronların $\vec{p} = (p_x, p_y)$ iletkenlik ve direnç gibi makroskobik niceliklerini karakterize eden hareket denkleminin statik çözümleridir, $d\vec{p}/dt = 0$. Bu durumda E_x ve E_y sırasıyla,

$$eE_x = -\frac{e}{m} p_y B - \frac{p_x}{\tau} \quad (2.4a)$$

$$eE_y = \frac{e}{m} p_x B - \frac{p_y}{\tau} \quad (2.4b)$$

elde edilir. Manyetik alan altında elektronun siklotron hareketini karakterize eden siklotron frekansı $\omega_c = eB/m$ ile Drude iletkenliği dikkate alındığında $\sigma_0 = n_e e^2 \tau / m$, Denklem (2.4) ve Denklem (2.5) yeniden düzenlenebilir. Ayrıca akım yoğunluğu $\vec{j} = -en_e \vec{v}$ olmak üzere,

$$\sigma_0 E_x = j_x + j_y (\omega_c \tau) \quad (2.5a)$$

$$\sigma_0 E_y = -j_x (\omega_c \tau) + j_y \quad (2.5b)$$

elde edilir. Bu aşamada özdirenç tensörünü yazmak mümkündür $\vec{E} = \rho \vec{j}$.

$$\rho = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Köşegen üzerindeki elemanlar boylamsal özdirenci temsil ederken, köşegen üzerinde olmayan elemanlar ise Hall özdirencini temsil eder. Denklem (2.6) ifadesinden Hall özdirenci,

$$\rho_H = \frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} = \frac{B}{en_e} \quad (2.7)$$

olarak elde edilir. İletkenlik tensörü ise özdirenç matrisinin tersinden $\sigma = \rho^{-1}$ elde edilir.

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

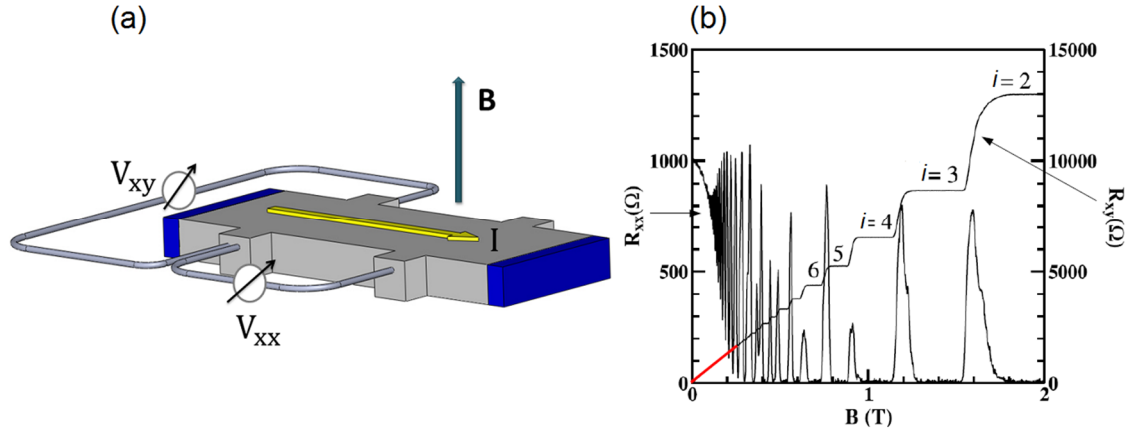
Yukarıdaki ifadeden de açıkça görüleceği üzere Hall özdirenci manyetik alan ve elektron yoğunluğuna bağlıdır.

2.3. KUANTUM HALL OLAYI

Düşük sıcaklık (~4K) ve yüksek manyetik alan altında (~15T) iki boyutlu elektron sistemleri üzerinde yapılan Hall deneylerinde Hall direnci ile manyetik alan arasındaki ilişkinin lineer olmadığı gözlenmiştir. Yük taşıyıcılarının bulunduğu düzleme dik manyetik alanın etki ettiği 2BES'nde Hall direnci, belli manyetik alan aralıklarında sabittir öyle ki plato olarak adlandırılan düzlükler formunda biçimlendiği gözlenmiştir. Bu olay ilk kez 1980 yılında von Klitzing tarafından Si-MOSFET örnekler üzerinde gerçekleştirilen Hall deneyinde ortaya çıkmıştır (Klitzing, 1980).

Platoların değerini karakterize eden Hall direnci, i bir tam sayı olmak üzere $R_{xy} = h/ie^2$ değerlerinde kuantizedir, h Planck sabiti ve e elektronun yüküdür. Klasik Hall olayında sabit olan boylamsal direncin ise güçlü manyetik alan varlığında osilasyonlar yaptığı gözlenmiştir. Bu osilasyonlar Shubnikov de Haas (SdH) osilasyonları olarak bilinir ve osilasyon genliği artan manyetik alan şiddetiyle artar. Hall direncinin plato davranışı sergilediği manyetik alan değerlerinde SdH osilasyonlarının minimumunun R_{xx} sifıra yaklaştığı gözlenmiştir. İlk plato değerine $i=1$ karşılık gelen Hall direnci von Klitzing

sabiti olarak adlandırılır ve 1990 yılından itibaren standard direnç birimi olarak kullanılır $R_{K-90} = 25812.807\Omega$.



Şekil 2.4: (a) Kuantum Hall çubuğunun şematik bir resmini tasvir eder. $V_{xy}=R_{xy}/I$, Hall potansiyeli ve $V_{xx}=R_{xx}/I$, boylamsal potansiyeli temsil eder. (b) Tam sayılı kuantum Hall olayını gösterir. R_{xy} Hall direncine karşılık gelen platoları ve R_{xx} boylamsal dirence karşılık gelen osilasyonları belirtir.

İki boyutlu elektron sistemleri üzerinde gerçekleştirilen Hall deneylerini farklı kılan ise kuantum mekaniği doğasıdır. Klasik olarak, manyetik alan varlığında elektronlar siklotron yörüngeleri çizerek hareket eder. Kuantum mekanişel olarak, yüksek manyetik alan altında elektronlar sadece izinli siklotron yörüngelerinde bulunabilir ve bu yörüngeler Landau manyetik kauntizasyonu olarak bilinir (Aznar, 2007). Kuantum Hall olayının oluşum temelinde iki boyutlu elektron sisteminin durum yoğunluğunun yüksek manyetik alan varlığında δ fonksiyonu şeklinde kuantize olması sonucu enerji band aralığının oluşmasından kaynaklanır. Ayrıca kuantum Hall olayının gözlenebileceği düşük sıcaklık limiti, termal sıcaklığın Landau enerjisinden çok daha düşük $k_B T \ll \hbar\omega_c$ olduğu limittir.

2.4. MANYETİK ALAN VE ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA ELEKTRONUN KLASİK HAREKETİ

Kuantum Hall olayını anlayabilmek için öncelikle elektronun manyetik alan varlığında davranışını klasik olarak incelememiz gerekir. Kütlesi m_e , yükü e ($e < 0$) olan bir elektronun $\vec{B} = B\hat{k}$ şeklinde düzgün ve homojen manyetik alan altında xy düzleminde hareket ettiğini düşünelim. Elektronun hareket denklemi,

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.9)$$

ile verilir. Bu denklemi Lagrange denkleminden de elde etmek mümkündür.

$$\bar{L} = \frac{1}{2} m_e v^2 + e \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (2.10)$$

Burada \vec{A} vektör potansiyelidir ve rotasyoneli manyetik alanı $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ verir. Lagrange denkleminden kanonik momentum ifadesini ve sistemin Hamiltonyenini yazabiliriz.

$$\vec{p} = m_e \vec{v} + e \vec{A} \quad (2.11)$$

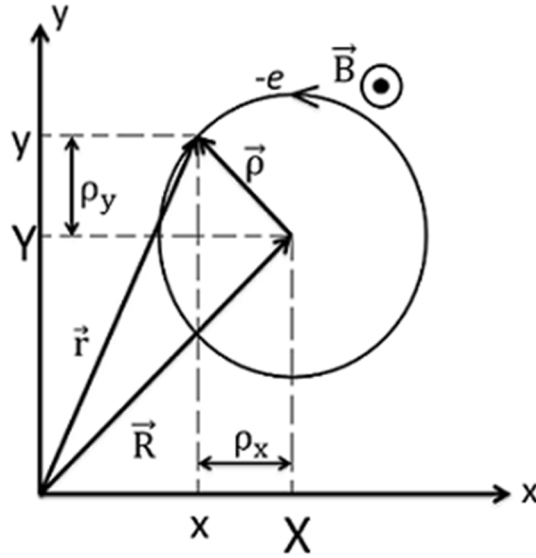
$$\bar{H} = \frac{1}{2m_e} (\vec{p} - e \vec{A})^2 \quad (2.12)$$

Denklem (2.9) ifadesinden de açıkça görüldüğü üzere hareket denkleminin çözümü basittir ve şu şekilde verilir.

$$\vec{r} = \vec{R} + \rho_0 (\cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t)) \quad (2.13)$$

$$\vec{v} = \rho_0 \omega_c (-\sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t)) \quad (2.14)$$

Elektron siklotron hareketi yapar ve xy düzlemindeki izdüşümü yarıçapı ρ olan, merkez koordinatları $\vec{R} = (X, Y)$ konumlanmış bir çemberdir (Yoshioka, 1998).



Şekil 2.5: Siklotron yörüngesi üzerindeki bir elektronun $\vec{r} = (x, y)$ konumunu şematik olarak gösterir. $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y)$ yörüngenin yarıçapı ve $\vec{R} = (X, Y)$ yörüngenin merkezidir.

İki boyutlu elektron sisteminin dik manyetik alan varlığında taşınım özelliklerini incelemek için x doğrultusunda düzgün bir elektrik alan varlığını dikkate almak gerekir. Bu durumda hareket denklemi elektrik alan ifadesini de içermelidir.

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.15)$$

Bu denklemin çözümü elektronun sürüklenme hızı olarak adlandırılan $\vec{v}_d = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ hız terimini içerir.

$$\vec{v} = (-\rho_0 \omega_c \sin(\omega_c t), \rho_0 \omega_c \cos(\omega_c t) + v_d) \quad (2.16)$$

Elektronun hareketi, manyetik alan ve elektrik alana dik olan doğrultu boyunca siklotron ve sürüklenme hareketinin sabit $v_d = -E/B$ sürüklenme hızının bir süperpozisyonudur.

2.5. LANDAU SEVİYELERİ

Bir önceki bölümde klasik olarak incelenen elektronun hareketi bu bölümde kuantum mekaniksel olarak incelenecektir. Düzgün ve homojen manyetik alan altında hareket eden m_e kütleli, $-e$ yüklü spinsiz bir parçacığın hareketi kuantum mekaniksel olarak incelenecektir. Sistemin Hamiltonyen operatörü,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (2.17)$$

ile verilir ve \vec{A} ifadesinin vektör potansiyeli olduğu bilinmektedir. Burada vektör potansiyeli belirlenirken, $\vec{B} = B\hat{k}$ manyetik alan değerini verecek şekilde vektör potansiyelini keyfi bir ayarda seçme özgürlüğü vardır. Uygun seçimlerden biri, seçili tek bir doğrultu boyunca parçacığın momentumunu ($p_i \rightarrow \hbar k_i$, $i=x,y,z$) öteleme değişmez (translation invariance) bırakan ve periyodik sınır şartlarını empoze edebileceğimiz Landau ayarıdır. Landau ayarında vektör potansiyeli,

$$\vec{A} = (-By, 0, 0) \quad (2.18)$$

ile verilir (Dereli, 2009). Vektör potansiyeli x bileşenini içerir ve sadece y doğrultusu boyunca değişim gösterir. Landau ayarında Hamiltonyen operatörü

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{e\hbar}{imc} By \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2mc^2} e^2 B^2 y^2 \quad (2.19)$$

ile verilir. Burada $\omega_c = eB/mc$ siklotron frekansı olmak üzere Hamiltonyen operatörü yeniden düzenlenebilir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\hbar}{i} \omega_c y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 y^2 \quad (2.20)$$

Hamiltonyenden açıkça görüleceği üzere Hamiltonyen operatörü ile momentumun x bileşeni komutatiftir $[H, p_x] = 0$. Bu ilişki bize her iki operatör için de ortak özfonksiyon yazabilme kolaylığı sağlar. Momentum operatörünün özdeğeri $p_x \rightarrow \hbar k_x$ ise sistemin x doğrultusundaki ortak özfonksiyonu serbest dalga olarak tanımlanabilir.

$$\Psi(x, y) = e^{ik_x x} u(y) \quad (2.21)$$

Önerilen çözümü özdeğer denkleminde yerine yazalım.

$$H\Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (2.22)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (y - y_0)^2 \right] u(y) = E u(y) \quad (2.23)$$

Sonuç olarak elde edilen özdeğer denklemi tek boyutlu harmonik osilatör özdeğer denklemi ile özdeştir, sadece Harmonik osilatörün merkezi $y=0$ noktasından $y = y_0$ noktasına kaydırılmıştır. Burada $y_0 = -\hbar k_x / m\omega_c$ şeklinde tanımlıdır. Harmonik osilatörün çözümleri,

$$\alpha^4 = \left(\frac{m\omega_c}{\hbar} \right)^2; N_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2} n! 2^n} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

burada N_n normalizasyon sabiti olmak üzere

$$u_n(y) = N_n e^{-\alpha^2 (y - y_0)^2 / 2} H_n(\alpha(y - y_0)) \quad (2.25)$$

ile verilir (Dereli, 2009). Burada H_n n. dereceden Hermit polinomudur. Sistemin enerji özdeğerleri,

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

ile verilir. Enerji özdeğeri momentumun x bileşeninden $\hbar k_x$ bağımsızdır ve sadece n kuantum sayısı ile ilişkilidir, n kuantum sayısı ile işaretlenmiş enerji seviyeleri Landau seviyeleri olarak adlandırılır. Landau seviyeleri, harmonik osilatör seviyeleri gibi eşit enerji $\hbar\omega_c$ aralıklıdır ancak her bir seviye k_x kadar dejeneredir.

Landau ayarı bu problemi çözerken kolaylık sağlar ve başlangıçta iki boyutlu olan Schrödinger denklemini enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları çok iyi bilinen tek boyutlu harmonik osilatör problemine indirger. Bu aşamada elektronun sonlu bir düzlemde $L_1 \times L_2$ hareket ettiğini dikkate alalım. Elektron x eksenini boyunca $0 \leq x \leq L_1$ aralığında ve y eksenini boyunca $0 \leq y \leq L_2$ aralığında sınırlandırılmış olsun, x ekseninde sınır şartı,

$$\Psi(x, y) = \Psi(x + L_1, y) \quad (2.27)$$

dalga fonksiyonunda yerine yazıldığında aşağıdaki şartı sağlaması gerekir.

$$\frac{m\omega_c}{\hbar} y_0 L_1 = 2\pi n^*, \quad n^* = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Öyle ki merkez koordinat y_0 örneğin boyutlarıyla sınırlandırılmıştır $0 \leq y_0 \leq L_2$,

$$0 \leq n^* \leq \frac{m\omega_c}{2\pi\hbar} L_1 L_2 \quad (2.29)$$

yukarıdaki ifade kolayca elde edilebilir. Burada $l_B^2 = \hbar/m\omega_c$ manyetik uzunluk ve $\Phi_0 = h/e$ akı kuantası olmak üzere her bir Landau seviyesindeki toplam durumları sayısı,

$$n_{\max}^* = \frac{L_1 L_2}{2\pi l_B^2} \quad (2.30)$$

$$n_{\max}^* = \frac{BL_1 L_2}{\Phi_0} \quad (2.31)$$

Denklem (2.31) ifadesiyle bulunur.

$$\nu = \frac{n_e}{\Phi/\Phi_0} \quad (2.32)$$

Burada n_e elektron sayısı olmak üzere ν ifadesi doldurma faktörü olarak bilinir ve Landau seviyelerinin doluluk oranını söyler. Spinsiz parçacık tasviri dikkate alındığında sistemin tamamen dolu olan taban durumu $\nu=2$ ile ifade edilir ve ardışık diğer tüm durumlar ise doldurma faktörünün çift değerlerine sahiptir. Elektronun spin serbestlik derecesi dikkate alındığında ise, Zeeman etkisi seviyelerin yarılmasında neden olur ve tek değerli doldurma faktörü $\nu=1$ olmak üzere seviyeler tek ve çift olarak sırasıyla değer alır (Dereli, 2009).

2.6. ELEKTRİK ALAN VARLIĞINDA LANDAU SEVİYELERİ

Manyetik alan varlığında elektronun hareketi kuantum mekaniksel olarak incelendi ve Landau seviyeleri olarak bilinen enerji özdeğerleri elde edildi. Dış bir elektrik alan

varlığında elektronun kuantum mekaniksel davranışını dikkate alalım. Sisteme y doğrultusu boyunca uniform bir elektrik alan $\vec{E} = (0, E, 0)$ etkidiğinde sistemin enerjisi,

$$V(y) = +eE_y y \quad (2.33)$$

Denklem (2.33) ile verilen potansiyel enerjisi kadar artar. Burada da Landau ayarını seçmek uygundur $\vec{A} = (-By, 0, 0)$. Landau ayarında ve elektrik alan varlığında Hamiltonyen işlemcisi,

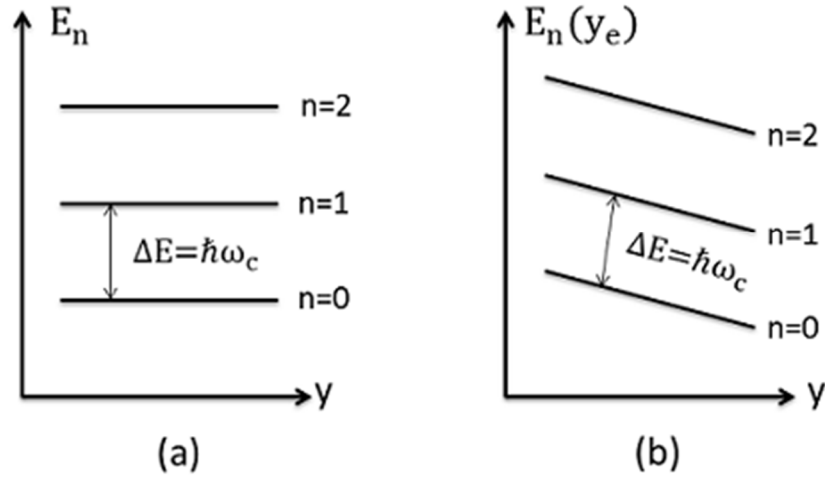
$$H = \frac{1}{2m_e} p_y^2 + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (y - y_0)^2 + eE_y y \quad (2.34)$$

formunu alır. Bu ifade kareye tamamlandığında harmonik osilatör için yeni bir merkez tanımlanır. Sistemin enerji özdeğeri ile yeni merkez arasında artık lineer bağımlılık vardır.

$$y_e = y_0 - \frac{eE_y}{m\omega_c^2} \quad (2.35)$$

$$E(y_e) = E_n + eE_y y_e + \frac{1}{2} m v_d^2 \quad (2.36)$$

Denklem (2.35) ve Denklem (2.36) ifadeleri sırasıyla harmonik osilatörün yeni merkezini ve sistemin enerji özdeğerini ifade eder. Burada E_n ifadesi Landau seviyelerine, $v_d = E/B$ sürüklenme hızına karşılık gelir. Denklem (2.36) ifadesinde eşitliğin sağındaki ikinci terim elektrik alan varlığında elektronun potansiyel enerjisini temsil eder, üçüncü terim ise elektronun elektrik alan varlığında kazandığı kinetik enerji terimidir.



Şekil 2.6: Landau seviyelerinin şematik gösterimidir. (a) Elektrik alan yokluğunda Landau seviyeleri düzdür. (b) Elektrik alan varlığında yukarıya doğru Landau seviyeleri bükülür.

2.7. KENAR AKIMLARI

Gerçek 2BES örnekleri sonlu boyutlara sahiptir. Manyetik alan varlığında siklotron hareketi yapan elektronlar örnek kenarında tam bir tur olarak çevrimlerini tamamlayamadam saçılmaya maruz kalırlar. Elektronların bu hareketi klasik analogide “sıçrayan yörüngeler” (skipping orbits) olarak adlandırılır. Örneğin iç kısmında yörüngesini tamamlayan elektron dairesel siklotron yörüngesini izlerken, örnek kenarından saçılmaya uğrayan elektron sıçrayan yörüngeleri takip eder. Siklotron frekansı ω_c ve ardışık iki çarpışma arasındaki ortalama süre τ olmak üzere örnek kenarında $\omega_c \tau \ll 1$ ve örneğin iç kısmında $\omega_c \tau \gg 1$ ilişkisi geçerlidir. Klasik yörüngeler Şekil 2.7 de gösterilmiştir.

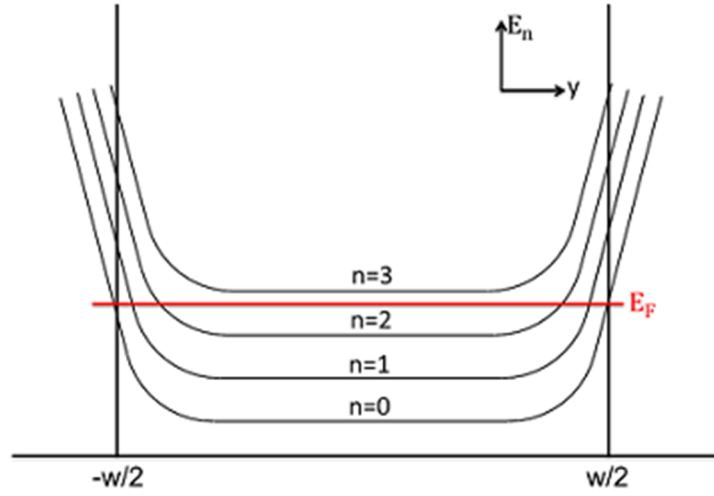


Şekil 2.7: Yörüngelerin şematik gösterimidir. Klasik siklotron hareketi örneğin ortasında resmedilmiştir. Duvara çarpan ve duvardan yansıyan sıçrayan yörüngeler örneğin her iki kenarı

boyunca zıt doğrultularda hareket eder. Örneğin sınırlarındaki sıçrayan dairesel yörüngeler sonlu 2BES'nde kenar kanallarına karşılık gelir.

Örneğin iki duvarı arasındaki izinli bölgede, elektronlar yarıçapı R ve enerjisi $E = m\omega_c^2 R^2 / 2$ olan dairesel siklotron yörüngeleri üzerinde hareket eder. Elektronun duvara çarpması durumunda, elektronun izlediği dairesel yörünge duvardan yansır ve yörüngesi aynı R yarıçapını koruyacak şekilde ancak siklotron merkezi duvara paralel ötelenerek ardışık dairesel yörüngeler üzerinde hareketine devam eder. Yük taşıyıcısının işaretinden dolayı karşılıklı iki kenar boyunca zıt doğrultularda hareket eden ardışık sıçrayan yörüngeler duvara paralel net bir hıza sahiptir ve net bir akım taşırlar. Bu akımların örneğin kenarı civarında siklotron yarıçapına eşit kalınlıktaki bir tabakada akması beklenir ve kenar kanalları olarak adlandırılır (Şekil 2.7).

Bununla birlikte elektron durumlarının örnek sınırlarında nasıl davrandığını belirlemek gerekir. Bunun için Şekil 2.8 de resmedilmiş olan enerji diyagramı dikkate alınabilir.



Şekil 2.8: Örnek sınırlarının $y = \pm w/2$ olduğu 2BES'nde Landau enerji seviyelerindeki değişimin şematik gösterimidir. Fermi enerjisi E_F iki Landau seviyesi arasında uzanmıştır.

Örneğin iki kenarı tuzaklama potansiyeli görevi üstlenmektedir dolayısıyla Landau enerji seviyeleri örneğin içinde düz iken kenara doğru yaklaştıkça yukarıya doğru bükülmektedir. Örneğin iç kısımlarında Fermi seviyesinin altındaki Landau seviyeleri elektronlar tarafından işgal edilmiştir ve tamamen doludur. Ancak örneğin sınırlarında Fermi seviyesinin Landau seviyelerini kestiği noktalarda hala bir miktar girilebilir durum vardır ve iletkenlik şeritleri formunda biçimlenen kenar kanalları oluşur. “Kenar kanalları” terminolojisi akımı taşıyan kenar durumlarının toplam akıma katkısını

belirtmek için kullanılır. Kanal şeklinde biçimlenen her bir kuantum durumunun net akıma olan katkısı ayrı ayrı olarak ele alınabilir. Burada dikkat edilecek nokta, oluşan akım kanallarının Fermi seviyesi civarında uzandığı ve mümkün girilebilir enerji durumlarının mevcut olduğudur. Şekil 2.8 de Fermi seviyesi $n=0$, $n=1$ ve $n=2$ durumlarını kesmektedir. Dolayısıyla örneğin herhangi bir kenarında aynı doğrultuda akan üç akım kanalı oluşur ve sisteme bakıldığında $y = +w/2$ noktasında sayfa düzleminden içeri doğru akan üç kanal mevcut ise $y = -w/2$ noktasında sayfa düzleminden dışarı doğru akan üç kanal mevcut olur.

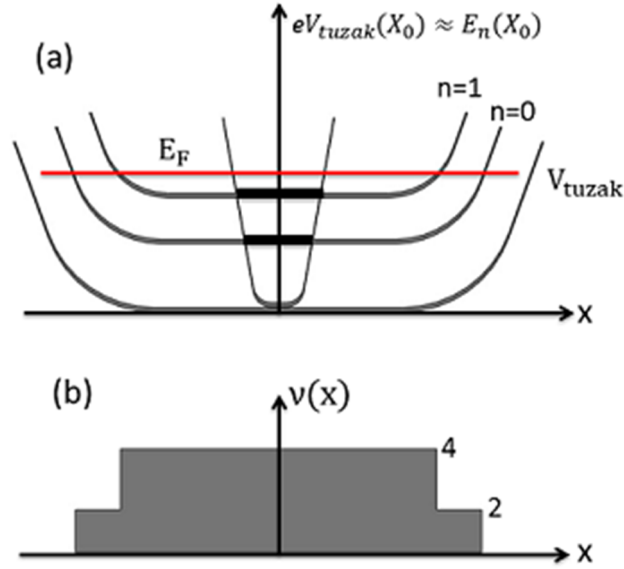
2.7.1. Landauer - Büttiker ve Halperin Kenar Durumları

İki boyutlu elektron sistemlerinde taşınımı açıklayan iki temel tasvir vardır. Bunlar külçe (bulk) tasviri ve kenar (edge) tasviridir. Külçe tasvirinde homojen ve sonsuz 2BES dikkate alınır ve akım külçeden akar. Kenar tasvirinde ise örneğin sonlu boyutları dikkate alınır ve akımın örnek kenarları tarafından sınırlandırılan tek boyutlu balistik kanallardan aktığı farz edilir. Burada kenar durumlarını açıklayan, Landauer-Büttiker kenar durumları ve Halperin kenar durumlarından sırasıyla bahsedilecektir.

Sistemin sonlu boyutlarını dikkate alan ve saçılma mekanizmalarını ihmal eden Landauer-Büttiker kenar durumları, tuzaklama potansiyelinin etkisiyle tek parçacık Landau seviyeleri örnek kenarlarında bükülür (Şekil 2.9). Sistemin tek parçacık Hamiltoniyeni,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} \left(\vec{p}_i(\vec{r}_i) + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right)^2 + V_{\text{tuzak}}(\vec{r}_i) \quad (2.37)$$

ile verilir, $V_{\text{tuzak}}(\vec{r}_i)$ tuzaklama potansiyelidir.



Şekil 2.9: Dış bir tuzaklama potansiyelinin varlığında ardışık Landau seviyeleri ve Fermi enerjisini gösterir. İçte parabolik tuzaklama potansiyeli ve siyah kalın çizgiler konuma bağlı Landau seviyelerini gösterir. (b) Konuma bağlı doldurma faktörünü temsil eder.

Buradaki en önemli yaklaşım tuzaklama potansiyelinin manyetik uzunluk l_B ölçeğinde oldukça yumuşak değişmesidir öyle ki enerji özdeğerlerine bir sabit kadar etki eder.

$$E_n(X_0) = E_n + V(X_0) \quad (2.38)$$

Denklem (2.38) ile verilen ifade de $X_0 = -l_B^2 k_y$ tek boyutlu harmonik osilatörün merkez koordinatı, $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ manyetik uzunluk ve k_y parçacığın y doğrultusundaki momentumudur.

Akım kenar kanalları tarafından taşınır ve denge durumunda pozitif k_y momentumu taşıyan kenar kanallarının sayısı ile negatif $-k_y$ momentumu taşıyan kenar kanallarının sayısı eşittir. Sistemde taşınan net akım ise sıfırdır. Landau-Büttiker kenar durumları açıklayan bir tasvir olmasına karşın bazı eksiklikleri vardır. Deneysel olarak gözlenen kuantize Hall platoları arasındaki geçişi açıklayamaz. Dolayısıyla Landauer-Büttiker modelinin ihmal ettiği safsızlıklardan kaynaklanan saçılma mekanizmalarını dikkate almak gerekir. Bu aşamada ise Halperin tasviri kenar durumlarına empoze ettiği farklı sınır şartları ile 2BES'lerinde taşınım özelliklerini açıklar.

Halperin kenar durumları, sistemin sonlu olan fiziksel kenarlarında sonsuz yükseklikte potansiyel bariyerleri tanımlar. Schrödinger denklemi bu sistem için analitik olarak çözüldüğünde sistem sınırlarında parabolik silindirik fonksiyonları elde edilir, merkez koordinata X_0 bağlı olan Landau seviyeleri ise Halperin'in empoze ettiği sonsuz duvar sınır şartından dolayı sadece örnek kenarlarında bükülür ve artık Landau enerji seviyeleri eşit aralıklı değildir $\Delta E(X_0) = E_{n+1}(X_0) - E_n(X_0) \neq \hbar\omega_c$. Bohr-Sommerfeld kuantizasyonu enerji dispersiyonunu şu şekilde tanımlar (Salman ve diğerleri, 2013), (Avishai ve diğerleri, 2008).

$$\frac{E_n(X_0)}{\hbar\omega_c} \approx (4n + 3) + \frac{4X_0}{\sqrt{\pi}} \prod_{p=0}^n \left(1 + \frac{1}{2p}\right) \quad (2.39)$$

Halperin tasviri ve Landau-Büttiker tasviri, empoze ettikleri farklı sınır şartları ile kenar durumlarını ve 2BES'lerinde taşınımı açıklayan teorik modelleridir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde yüksek manyetik alan ve düşük sıcaklıkta 2BES’de gözlenen kuantum Hall olayının iletkenlik mekanizmasını açıklayan sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin oluşumu Chklovskii tasviri ile ele alınacaktır. Düz bir yüzey üzerinde oluşturulabilen 2BES’nin, MBE tekniği ile silindirik bir geometride nasıl oluşturulduğundan bahsedilecektir. Yavaşça değişen potansiyel varlığında sistemin enerji özdeğerlerini elde etmenin yöntemlerinden biri olan yarı klasik bir yaklaşıklık, WKB metodu anlatılacaktır. Son olarak Aharonov-Bohm fazıyla ilgili teorik bilgi verilecektir.

3.1. SIKIŞTIRILABİLİR VE SIKIŞTIRILAMAZ ŞERİTLER

İki boyutlu elektron sistemlerinin taşınım özellikleri temel iki varsayıma dayanmaktadır. Bunlar külçe (bulk) ve kenar (edge) tasvirleridir. Külçe tasvirinde sonsuz ve homojen iki boyutlu elektron sistemi dikkate alınır ve akımın külçeden aktığı varsayılır. Kenar tasvirinde ise sonlu bir sistem dikkate alınır ve akımın kenara yakın bölgelerde örnek kenarları tarafından hapsedildiği farz edilir. Bu tasvirde, geri saçılma mekanizmasının ağırlıklı olduğu tek boyutlu balistik kanallarda taşınım gerçekleşir. Burada iki boyutlu elektron sistemlerinin taşınım özellikleri kenar tasviri dikkate alınarak açıklanacaktır.

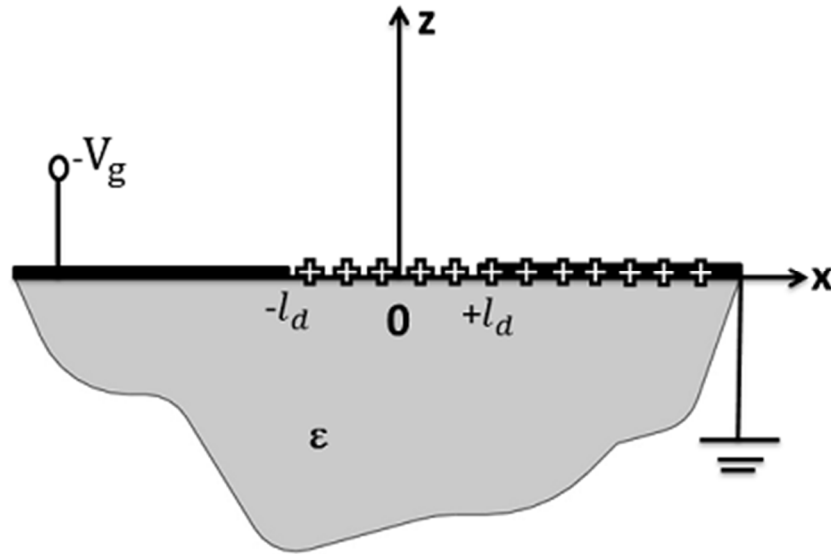
Chklovskii tasviri (Chklovskii ve diğerleri, 1992), dik bir manyetik alana maruz bırakılan iki boyutlu elektron sisteminde oluşan sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıklarını ve uzaysal dağılımını analitik olarak hesaplayan bir modeldir. Fermi seviyesi ardışık iki Landau seviyesi arasında uzanmış ise, girilebilir mümkün durum olmadığından elektronların uygulanan dış bir potansiyele karşı yeniden dağılım gösterememeleri potansiyelin kötü perdelenmesine neden olur. Zayıf perdelemenin olduğu ve malzemenin yalıtkan gibi davrandığı bu bölge sıkıştırılamaz şerit (incompressible strip) olarak adlandırılır. Fermi seviyesinin Landau seviyelerinden biriyle çakışması halinde girilebilir mümkün durumların varlığı elektronların yeniden dağılmasına izin verir ve böylece uygulanan dış bir potansiyel elektronlar tarafından iyi

perdelenir. Perdelemenin mükemmel olduğu ve malzemenin metal gibi davrandığı bu bölge sıkıştırılabilir şerit (compressible strip) olarak adlandırılır. Bu aşamada boyutsuz bir parametre olan doldurma faktörü (filling factor) parametresini tanımlamak uygun olacaktır (Chklovskii ve diğerleri, 1992).

$$v = 2\pi l_B^2 n_e \quad (3.1)$$

Burada l_B manyetik uzunluk ve n_e elektron sayı yoğunluğudur. Sıkıştırılmaz bölgede doldurma faktörü bir tamsayıya eşittir. Sıkıştırılabilir bölgede ise doldurma faktörünün değeri bir tamsayı değildir. Doldurma faktörünün değeri rejime bağlı olarak değişmektedir.

Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şeritleri Chklovskii tasvirinde ele alalım.



Şekil 3.1: 2BES'nin olduğu düzenek resmedilmiştir. Kalın siyah tabakalar iki metalik iletkeni temsil eder. Uygulanan negatif kapı voltajı V_g solda yer alırken sağ taraf topraklanmıştır. Artılar donör atomlarından kaynaklanan uniform pozitif arka plandır. Gri bölge ise dielektrik sabiti $\epsilon \gg 1$ olan yarıiletken tarafından işgal edilmiştir (Chklovskii ve diğerleri, 1992).

Chklovskii çalışmasında kenar durumlarının elektrostatik özellikleri incelemiştir ve sıkıştırılmaz şeritin kalınlık ifadesini doldurma faktörüne bağlı olarak analitik metodlarla elde etmiştir. Elektron yoğunluğunun ara tabakanın (spacer layer) arkasında yerleşen donör atomlarının konstrasyonu tarafından belirlenen 2BES'nin biçimlendiği GaAs/AlGaAs heteroyapı sistemini ele almıştır. Sistem üzerinde konumlandırılmış

metalik yarı-düzlem plakalara negatif gate voltajı $-V_g$ uygulandığında 2BES GaAs-AlGaAs ara yüzeyinde oluşturulur. Burada donör konstrasyonundaki dalgalanmalar ihmal edilmiştir. Ayrıca 2BES olduğu düzlem ile metalik kapılar (gate) arasındaki mesafe ve ara tabaka kalınlığı arasındaki mesafe ihmal edilmiştir. Pozitif yük yoğunluğu (donör tabakası), metalik kapılar ve 2BES aynı düzlemde ($z=0$) yer almaktadır (Şekil 3.1).

Yarı düzlem ($z < 0$) dielektrik sabiti $\epsilon \gg 1$ olan bir yarıiletken tarafından işgal edilmiştir. Boşaltım (tüketim) şeriti (depleted strip) gate potansiyeli V_g tarafından belirlenir. Şekil 3.1de de gösterildiği üzere boşaltım şeridinin $2l_d$ kalınlığı uygulanan negatif kapı voltajı tarafından belirlenir. Burada dikkate alınan sistem klasik bir kapasitöre eşdeğer olan iki metalik plaka arasında $2l_d$ kalınlığındaki yalıtkanın gömüldüğü ve aynı düzlemde yer alan düzenektir. Boşaltım şeriti,

$$l_d = \frac{\epsilon V_g}{4\pi^2 n_0 e} \quad (3.2)$$

ile tanımlanır. Burada n_0 donör yoğunluğudur. Denklem (3.2) ile tanımlanan boşaltım şeriti için elektron yoğunluğu uzaysal dağılımı

$$n(x) = n_0 \left(\frac{x - l_d}{x + l_d} \right)^{1/2}, |x| > l_d \quad (3.3)$$

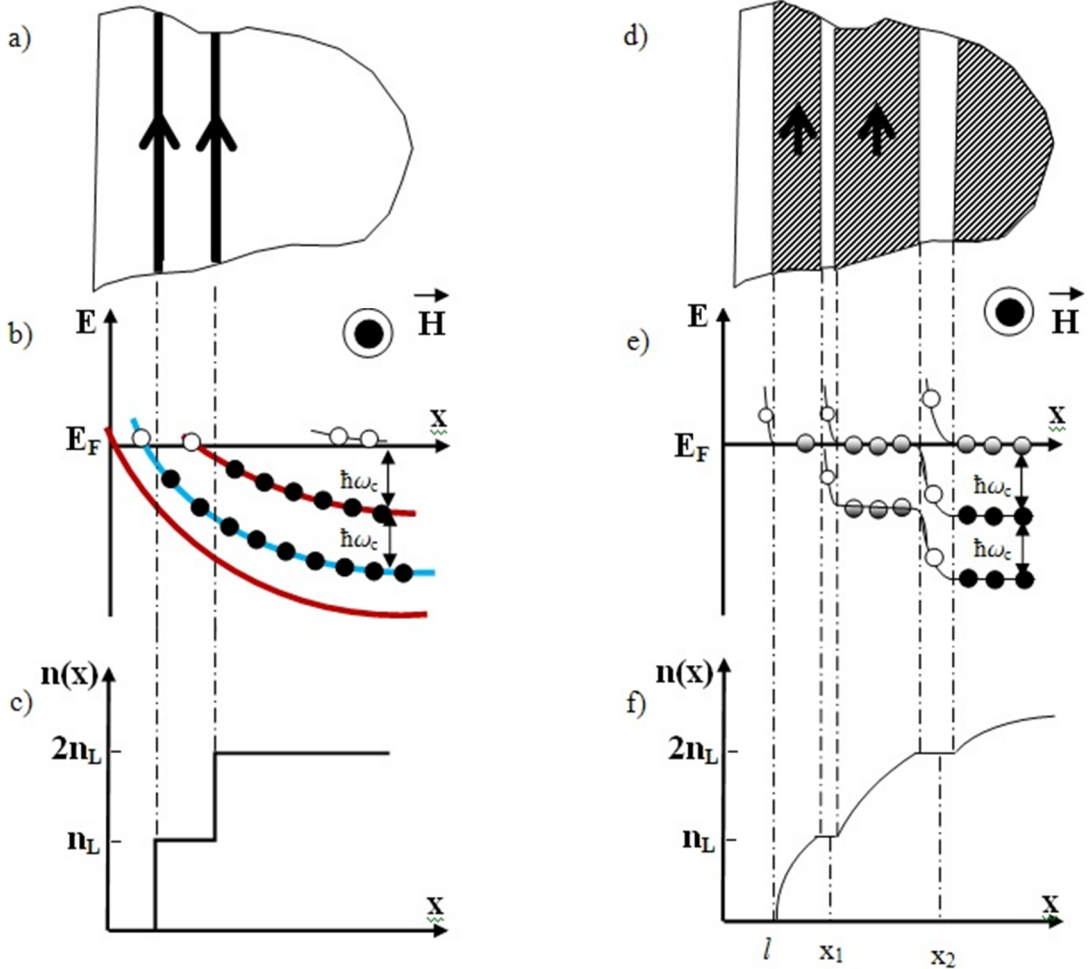
ifadesi ile tanımlıdır. Elektron yoğunluğu ifadesi manyetik alan yokluğunda ve sadece 2BES düzlemi üzerine oturmuş düzlem kapılar dikkate alınarak elde edilmiştir. Manyetik alan varlığında ise sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şeritler oluşur. Mükemmel perdelemenin olduğu ve sistemin metal gibi davrandığı sıkıştırılabilir şeritlerde elektrostatik potansiyel tamamen düzdür. Sıkıştırılmaz şeritlerde ise sistem yalıtkan gibi davranır ve perdeleme çok zayıftır. Analitik olarak elde edilen şerit kalınlığı ifadesi doldurma faktörünün bir tamsayı değeri için ($\nu=k, k=1,2,3\dots$),

$$a_k^2 = \frac{2\epsilon\Delta E}{\pi^2 e^2 \left. \frac{dn(x)}{dx} \right|_{x=x_k}} \quad (3.4)$$

ile verilir. Burada $dn/dx|_{x=x_k}$ ifadesi elektron yoğunluğunun x koordinatına göre şeritin tam orta noktasındaki x_k merkez koordinat değeri için türevini temsil eder. Merkez koordinat aşağıdaki ifade ile verilir,

$$x_k = l_d \frac{v^2 + k^2}{v^2 - k^2} \quad (3.5)$$

k değeri k . sıkıştırılmaz şeriti belirtir. Buradaki en önemli nokta, sıkıştırılabilir şeritin mükemmel bir metal olduğu (doldurma faktörünün tamsayı olmayan değerlerine karşılık gelir) ve sıkıştırılmaz şeritin ise mükemmel bir yalıtkan olduğu (doldurma faktörünün tamsayı olduğu değerlerine karşılık gelir) varsayımı yapılır (Şekil 3.2).



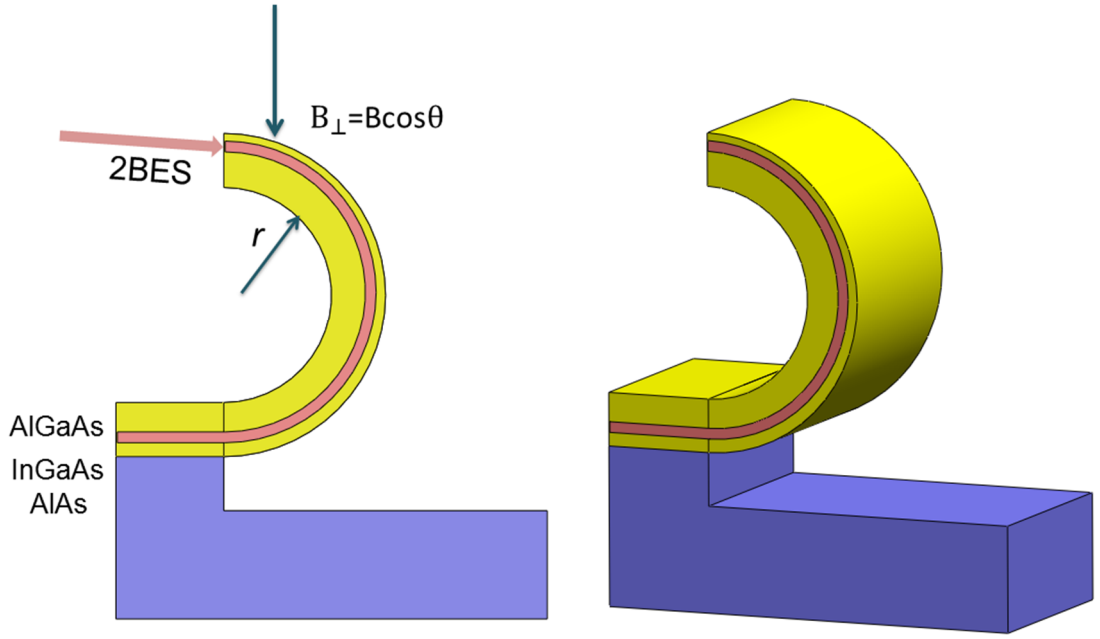
Şekil 3.2: Tam sayılı kuantum Hall olayında kenar durumlarının yapısını şematik olarak gösterir. (a)-(c) Tek elektron kenar durumları tasviridir. (a) İki boyutlu elektron sisteminin kenar civarında üstten görünüşüdür. Oklar elektronun iki kenar kanalındaki akış doğrultusunu belirtir. (b) Kenar yakınında artan potansiyel enerji boyunca Landau seviyelerinin adyabatik

bükülmesini gösterir. Daireler Landau seviyelerinin yerel doldurma faktörünü temsil eder. İçi dolu daireler tamamen dolu olan, içi boş daireler ise boş olan durumlardır. (c) Sınırdaki mesafenin bir fonksiyonu olarak elektron yoğunluğunu gösterir. (d)-(f) Kendinden tutarlı elektrostatik tasvirdir. (d) Kenar civarında iki boyutlu elektron sisteminin üstten görünüşüdür. Gölgeledi şeritler doldurma faktörünün tam sayı olmadığı (sıkıştırılamaz şerit) bölgeleri temsil eder. Beyaz şeritler ise doldurma faktörünün tam sayı olduğu (sıkıştırılabilir şerit) bölgeleri temsil eder. Oklar elektronun akış doğrultusunu gösterir. (e) Elektrostatik potansiyel enerji ve Landau seviyelerinin bükülmesini gösterir. Daireler Landau seviyelerinin yerel doldurumunu temsil eder. İçi dolu daireler tamamen dolu olan, içi yarı dolu daireler kısmen olarak işgal edilmiş olan ve içi boş daireler ise boş durumları temsil eder. (f) Boşaltım bölgesinin ortasında mesafeye bağlı olarak elektron yoğunluğunu gösterir (Chklovskii ve diğerleri, 1992).

3.2. SİLİNDİR YÜZEY ÜZERİNDE TANIMLI 2BES

Bir önceki bölümden 2BES'nin MBE tekniği ile katman katman büyütülen farklı iki yarıiletken metaryelin arayüzeyinde form aldığını biliyoruz. Burada oluşturulan 2BES düz bir yüzey üzerindedir. Günümüzde geliştirilen teknikler ile 2BES'ni silindirik yüzey üzerinde de tanımlamak mümkündür. Bunun bazı örnekleri (Prinz ve diğerleri, 2000), (Friedland ve diğerleri, 2009), (Mendach ve diğerleri, 2006) gibi çalışmalarda yer almaktadır. MBE tekniği ile epitaksiyel heteroyapıların büyütülmesine dayanan bu metod, silindirik yüzeyi şeklinde tüp veya lamel üretilmesine imkan tanımaktadır. Tüp şeklinde form alan silindirik yüzey katmanında 2BES, GaAs/AlGaAs tek kuantum kuyusunda gömülü olarak form alır. Bu işlem seçili bir aşındırma metodu ile çift tabakalı heteroyapının, eğrilik yarıçapı r olan silindirik yüzeyi şeklinde biçimlenen bir tüpe bükülmesiyle sonuçlanır (Şekil 3.3).

Homojen ve statik bir manyetik alanın etkisi altında olan silindirik formuna sahip 2BES'deki en temel modifikasyon, silindirin dış yüzeyi boyunca manyetik alanın yüzey üzerindeki dik bileşenin $B_z = B_0 \cos\theta$ değişime uğramasıdır, bu değişim aynı zamanda doldurma faktöründeki ν değişime de eş değerdir. Bu yapıda etken bir diğer parametre ise elektronun düşük sıcaklık ortalama serbest yolunun $l_s = v_F \tau$ (v_F ; Fermi hızı, τ ; saçılma süresi), eğrilik yarıçapı r ile karşılaştırılabilir olması veya eğrilik yarıçapından daha büyük olması gerekir. Anlaşılması zor olan böyle bir yapıda, sistemin fiziksel özelliklerini araştırmak ve düşük boyutlu taşınım özelliklerini incelemek ilginç sonuçlara neden olmaktadır.



Şekil 3.3: Silindir geometriye sahip 2BES'nin şematik bir temsildir.

3.3. YARI KLASİK YAKLAŞIKLIK

WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) yaklaşıklığı, potansiyelin yavaşça değiştiği sistemlerde zamandan bağımsız Schrödinger denklemini çözmek için kullanılan yarı klasik bir yaklaşıktır. WKB metodunun geçerlilik koşulu, potansiyel enerjideki değişime kıyasla parçacığın de Broglie dalga uzunluğunun çok daha küçük olması halinde sağlanır. Burada L potansiyel değişimindeki karakteristik uzunluk skalası olarak tanımlanırsa ve λ parçacığın de Broglie dalgaboyu ise WKB metodunun geçerliliği $\lambda \ll L$ şartı ile ifade edilir. Parçacığın de Broglie dalgaboyu $\lambda(r) = 2\pi\hbar/p(r)$ ve r noktasındaki momentumunu $p(r) = \sqrt{2m(E - V(r))}$ olmak üzere,

$$|\nabla\lambda| = \frac{\lambda |\nabla V|}{|E - V(r)|} \ll 1 \quad (3.6)$$

ifadesi yazılabilir. Bunun anlamı dalga uzunluğundaki potansiyel enerji değişimi parçacığın kinetik enerjisi ile karşılaştırıldığında çok daha küçüktür. Yukarıdaki ifadeden açıkça görüleceği üzere parçacığın enerjisinin potansiyel enerjiye eşit olduğu $E=V(r)$ klasik dönme noktalarında WKB metodu geçersizdir.

Tek boyutta zamandan bağımsız potansiyel varlığında hareket eden tek bir parçacık dikkate alalım. Parçacığın zamandan bağımsız Schrödinger denklemi,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x) \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p^2(x)}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0 \quad (3.8)$$

ile verilir. Burada $p(x)$ parçacığın x noktasındaki yerel momentumudur. Schrödinger denkleminin çözümü bir düzlem dalga iken $\psi(x) = Ae^{\pm ikx}$, potansiyelin yavaşça değiştiği bir sistemde zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin WKB çözümü,

$$\psi(x) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \quad (3.9)$$

ile tanımlanır. Burada $A(x)$ ve $S(x)$ dalga fonksiyonunun sırasıyla genliği ve fazıdır. WKB çözümü Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa,

$$S(x) = \pm \int p(x) dx \quad (3.10)$$

$$A(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \quad (3.11)$$

faz ve genlik ifadeleri elde edilir. Böylece Denklem (3.9) ifadesinde önerilen WKB çözümünün en genel hali,

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{C_{\pm}}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int \sqrt{2m(E - V(x))} dx \right) \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. Bu aşamada parçacığın enerjisinin potansiyel enerjiden büyük veya küçük olduğu iki durum söz konusudur.

1. $E > V(x)$ ise “klasik olarak izinli” bölge olarak adlandırılır. Bu bölgede parçacığın momentumu reel ve pozitif bir fonksiyondur. En genel çözüm ise $\psi_+(x)$ ve $\psi_-(x)$ 'in birer kombinasyonu şeklinde ifade edilir.

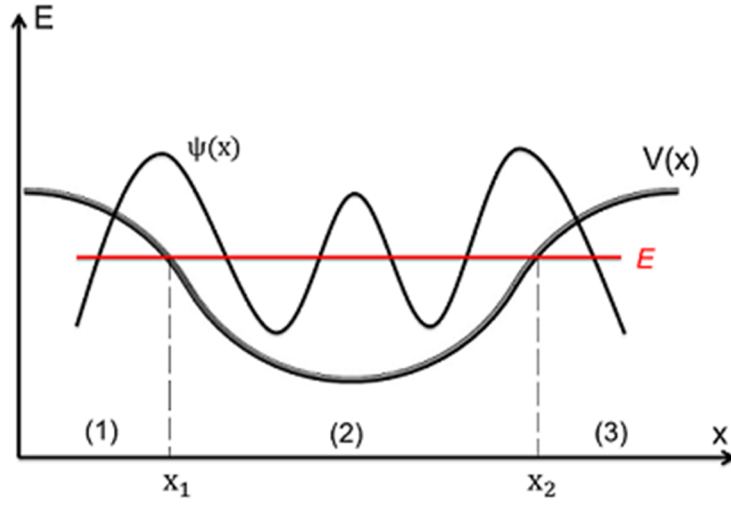
$$\psi(x) = \frac{C_+}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x p(x') dx'\right) + \frac{C_-}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x p(x') dx'\right) \quad (3.13)$$

2. $E < V(x)$ ise “klasik olarak yasaklı” bölge olarak adlandırılır. Bu bölgede parçacığın momentumunun kompleks olması Denklem (3.12) ifadesindeki üstel terimleri reel kılar. En genel WKB çözümü

$$\psi(x) = \frac{C_-'}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x |p(x')| dx'\right) + \frac{C_+'}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x |p(x')| dx'\right) \quad (3.14)$$

ile ifade edilir (Zettili, 2001).

Önemli bir diğer durum ise, parçacığın enerjisinin potansiyele eşit olduğu $E=V(x_i)$ durumdur. Parçacığın momentumunun sıfır olduğu x_i noktaları “klasik dönme noktaları” olarak adlandırılır. Klasik olarak, parçacık klasik dönme noktaları arasında ileri geri hareket eder. Kuantum mekaniğinde ise parçacık potansiyel bariyerinin içine sızabilir. Bu şekilde hareketini sınırlandıran parçacık enerjisini kuantize etmiş olur. Parçacığın momentumu dönme noktaları civarında sıfıra yaklaşırken de Broglie dalga uzunluğu ve WKB dalga fonksiyonu ıraksar. Bu durum WKB yaklaşımının bu noktalar civarında çökmesine neden olur. Sistemin bağlı durum enerjilerini belirleyebilmek için E_n dönme noktaları civarında dalga fonksiyonu inşa edilmelidir. Bu klasik olarak izinli bölgede osilasyonlar yapan dalga fonksiyonu ile klasik olarak yasaklı bölgede üstel olarak artan veya azalan davranış sergileyen dalga fonksiyonu arasındaki ilişkiyi belirlemekle mümkün olur. Parçacığın Şekil 3.3 de verilen bir potansiyel altında hareket ettiğini dikkate alalım.



Şekil 3.4: Potansiyel enerjinin şematik gösterimidir. (1) ve (3) bölgeleri klasik olarak yasaklı bölgelerdir. (2) bölgesi klasik olarak izinli bölgedir. x_1 ve x_2 noktaları ise klasik dönme noktalarıdır.

Şekil 3.3 dikkate alındığında her üç bölge için WKB çözümleri sırasıyla verilir.

$$\psi_{1\text{WKB}}(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} |p(x')| dx'\right), x < x_1 \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2\text{WKB}}(x) &= \frac{C_2'}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x p(x') dx'\right) \\ &+ \frac{C_2''}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x p(x') dx'\right), x_1 < x < x_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\psi_{3\text{WKB}}(x) = \frac{C_3}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'\right), x > x_2 \quad (3.17)$$

Buradaki C_1 , C_2' , C_2'' ve C_3 sabitlerini belirleyebilmek için her üç bölgedeki dalga fonksiyonları arasındaki ilişkiyi belirlemek gerekir. Yarıklasik yaklaşığın geçersiz olduğu klasik dönme noktalarında Schrödinger denkleminin tam çözümlerine ihtiyaç vardır. Bunun için dönme noktaları civarında $x=x_1$ ve $x=x_2$, WKB çözümleri $\psi_1(x)$ ile $\psi_2(x)$ ve $\psi_2(x)$ ile $\psi_3(x)$ arasındaki ilişkiyi kurmak gerekir.

Şekil 3.3 ile verilen potansiyel varlığı WKB metodu için iyi bir örnektir. Bu potansiyel altında hareket eden bir elektronu dikkate alalım. WKB yaklaşığı dönme noktaları

dışında ($E=V(x_1)=V(x_2)$), (1) ile (3) klasik olarak yasaklı bölgelerde ve (2) klasik olarak izinli bölgede geçerlidir. Bu aşamada öncelikle $\psi_2(x)$ ve $\psi_3(x)$ arasındaki ilişki belirlenecektir. Klasik olarak izinli bölgeyi temsil eden (2) bölgesinde WKB yaklaşıklığının önerdiği çözüm Denklem (3.16) ile özdeşir ancak denklem sinüs fonksiyonu ile de ifade edilebilir.

$$\psi_{2\text{WKB}}(x) = \frac{C_2}{\sqrt{p(x)}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \alpha \right), x_1 < x < x_2 \quad (3.18)$$

Burada α faz faktörüdür. WKB yaklaşıklığının geçersiz olduğu $x=x_2$ klasik dönme noktası civarında Schrödinger denkleminin tam çözümlerini elde edebilmek için $|x - x_2|$ 'nin yeterince küçük olduğu kabulünü yapmak ile potansiyelin dönme noktası civarında lineer davranış sergilediği kabulünü yapmak mümkündür. Neticede potansiyeli $x=x_2$ civarında seriye açmak mümkündür (sadece ilk iki terim dikkate alınmıştır).

$$V(x) = V(x_2) + (x - x_2) \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = E + (x - x_2)F_0 \quad (3.19)$$

Burada $F_0 = dV(x)/dx|_{x=x_2}$ potansiyelin $x=x_2$ noktasındaki eğimidir. Denklem (3.19) ile ifade edilen potansiyeli Denklem (3.7) ile ifade edilen Schrödinger denkleminde yerine yazalım,

$$z = \left(\frac{2mF_0}{\hbar^2} \right)^{1/3} (x - x_2) \quad (3.20)$$

dönüşümü yapıldığı takdirde,

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - z\psi(z) = 0 \quad (3.21)$$

çözümlerinin Airy fonksiyonu olduğu ikinci dereceden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Pozitif ve negatif argümanlar için Airy fonksiyonunun asimtotik davranışını kullanmak uygundur.

$$Ai(z) \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), z \ll 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), z \gg 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Denklem (3.21) ifadesinin çözümü,

$$\psi(z) = \beta Ai(z) \quad (3.23)$$

ile verilir, β burada normalizasyon sabitidir. Parçacığın $x < x_2$ bölgesinde pozitif ve $x > x_2$ bölgesinde negatif olan klasik momentumunun $p^2(x) = 2m(E - V(x))$, x_2 noktasındaki integrali,

$$\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x) dx = \frac{2}{3} (-z)^{3/2} \quad (3.24)$$

ile verilir. Denklem (3.24) ifadesinden faydalanıldığı taktirde Schrödinger denkleminin $\psi(z)$ çözümleri,

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\beta'}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}\right), x \ll x_2 \\ \frac{\beta'}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p(x')| dx'\right), x \gg x_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

ile ifade edilir. Burada $\beta' = (2m\hbar F_0)^{1/6} \beta / \sqrt{\pi}$ olarak verilir. Denklem (3.25) ifadesinde sırasıyla klasik olarak izinli bölge Denklem (3.18) ile klasik olarak yasaklı bölge Denklem (3.17) ile temsil edilen dalga fonksiyonları ile karşılaştırıldığında,

$$\beta = 2C_3, C_2 = \beta, \alpha = \frac{\pi}{4} \quad (3.26)$$

katsayıları arasındaki ilişki elde edilir. Dolayısıyla Denklem (3.18) ile ifade edilen WKB çözümü,

$$\Psi_{2\text{WKB}}(x) = \frac{C_2}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx' + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.27)$$

ile verilir, x_2 dönme noktası için uygulanan lineer potansiyel yaklaşımı x_1 dönme noktası için de uygulandığı taktirde (2) bölgesini temsil eden WKB çözümü ile $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ arasındaki ilişkinin sağladığı klasik olarak yasaklı ve klasik olarak izinli bölgedeki WKB çözümleri

$$\Psi_{2\text{WKB}}(x) = \frac{\eta}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \varphi\right) \quad (3.28)$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'\right), & x \ll x_1 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx'\right), & x \gg x_1 \end{cases} \quad (3.29)$$

ile ifade edilir. Denklem (3.29) ifadesi sırasıyla Denklem (3.15) ve Denklem (3.28) ile karşılaştırıldığında,

$$\lambda = 2C_1, \lambda = \eta, \varphi = \frac{\pi}{4} \quad (3.30)$$

katsayıları elde edilir. Denklem (3.28) ile ifade edilen WKB çözümü

$$\Psi_2(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x p(x') dx' + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.31)$$

olarak ifade edilir. Klasik olarak izinli bölge için elde edilen WKB metodunun önerdiği Denklem (3.27) ve Denklem (3.31) çözümleri birbiriyle özdeşdir. Bu iki dalga fonksiyonu arasındaki ilişki “Bohr-Sommerfeld kuantizasyonu” başlığında irdelenecektir.

3.3.1. Bohr-Sommerfeld Kuantizasyonu

Klasik olarak izinli bölgedeki Denklem (3.27) ve Denklem (3.31) ile ifade edilen WKB çözümleri birbirlerine denk olan iki çözümdür ve ortak bir çözümü temsil etmelidir. Aralarında,

$$D_1 \sin \phi_1 = D_2 \sin \phi_2 \quad (3.32)$$

Denklem (3.32) de ifade edildiği gibi bir ilişkinin olması $\phi_1 + \phi_2 = (n+1)\pi$ şartının sağlanmasıyla geçerli olabilir. Bu şart,

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (3.33)$$

Denklem (3.33) ile ifade edilir. Klasik dönme noktaları arasındaki bu integral ifadesi yarıklasik hareket eden parçacığın tam bir periyoduna tekabül eder.

$$\oint p(x) dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = h \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

Burada $n = 0, 1, 2, \dots$ gibi değerler alır. Denklem (3.34) ile ifade edilen ilişki yarıklasik bir sistemin E_n kuantize enerji özdeğerlerini belirler ve Bohr-Sommerfeld kuantizasyonu olarak bilinir. Yavaşça değişen potansiyel altında hareket eden parçacığın bağlı durum enerjisi Bohr-Sommerfeld kuantizasyonu ile elde edilir.

3.4. AHARONOV-BOHM FAZI

3.4.1. Ayar Simetrisi

Newton'un ikinci yasası $\vec{F} = m\vec{a}$, \vec{F} kuvvetinin etkisi altında olan yüklü bir parçacığın uzayda nasıl hareket ettiğini belirtir. Eğer ki bu kuvvet Lorenz kuvveti ise yüklü parçacığın elektrik alan ve manyetik alan ile arasındaki etkileşimini tasvir eder. Elektrik alan ve manyetik alan Maxwell denklemleri ile ifade edilir. Maxwell denklemlerini (Griffiths, 1999) daha basit olarak hesaplayabilmek için elektromanyetik alanları, fiziksel bir nicelik taşımayan ve sadece matematiksel bir obje olarak atfedilen elektromanyetik potansiyeller; ϕ skalar potansiyel ve \vec{A} vektör potansiyel ile ifade etmek mümkündür. Kuantum mekaniğinin gelişimiyle birlikte potansiyellere atfedilen

bu nitelik bir problem doğurmuştur ki kuantum mekaniğinde bir parçacığın hareketini tasvir eden Schrödinger denklemi elektrik alan ve manyetik alanları değil, alanlara karşılık gelen ϕ ve \vec{A} potansiyellerini içerir. Burada elektromanyetik fenomeni ilgilendiren temel soru, elektrik alan ve manyetik alan mı yoksa skalar potansiyel ve vektör potansiyel olup olmadığıdır (Kregar, 2011).

Elektrik alan ve manyetik alan sırasıyla aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}\tag{3.35}$$

Denklem (3.35) ile ifade edilen elektrik alan ve manyetik alan Maxwell denklemlerini sağlar. Elektromanyetik potansiyellerin önemli bir özelliği ise aynı elektrik alan ve aynı manyetik alanı türetmek kaydıyla potansiyeli belirleme serbestliğinin olmasıdır. Skalar potansiyel ve vektör potansiyel,

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\chi\end{aligned}\tag{3.36}$$

yukarıdaki gibi ifade edilen ϕ' ve \vec{A}' potansiyellerine dönüştürüldüğü takdirde aynı elektrik alan ve manyetik alana tekabül eder. Burada χ ayar fonksiyonu olarak adlandırılır ve yukarıda ifade edilen dönüşüm ayar dönüşümü olarak bilinir. Farklı potansiyellerin Maxwell denklemlerini sağlaması denklemleri ayar değişmez kılar. Elektromanyetik potansiyellerin bu özelliği onlara herhangi bir fiziksel nicelik yüklemeyen ve sadece matematiksel bir obje olarak kabul edilmelerine neden olur. Bu bakış açısı ise “Aharonov-Bohm” etkisi olarak bilinen kuantum fenomeninin Yakir Aharonov ve David Bohm tarafından kuramsal olarak açıklanması ile değişir (Aharonov ve Bohm, 1959). Aharonov-Bohm etkisi, uzayda elektrik alan ve manyetik alanın sıfır olduğu bölgede hareket eden bir parçacığın elektromanyetik alanlardan yani onları türeten potansiyellerden etkilenmesi olarak bilinir.

3.4.2. Elektromanyetik Alanda Schrödinger Denklemi ve Dalga Fonksiyonu

Elektromanyetik alanda yüklü bir parçacığın Hamiltonyen operatörü,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - e\hat{\mathbf{A}}(\vec{r}))^2 + e\phi(\vec{r}) \quad (3.37)$$

ile ifade edilir. Momentumu operatörünü $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ yerine yazalım ve Denklem (3.37) ifadesini Schrödinger denkleminde ifade edelim.

$$\left[\frac{1}{2m} (i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))^2 + e\phi(\vec{r}) \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (3.38)$$

Denklem (3.38) yüklü bir parçacığın elektromanyetik alanda hareketini tasvir eder. Schrödinger denkleminde ifade edilen skaler ve vektör potansiyelleri belirleyebilmek için \vec{B} büyüklüğünde manyetik alan taşıyan uzun bir solenoid dikkate alalım. Solenoid yeterince uzun ise manyetik alanın solenoid içinde uniform olduğunu ve solenoidin dışında ise sıfır olduğunu kabul edebiliriz (polar koordinat sistemi kullanılmıştır ve manyetik alan z doğrultusundadır). Schrödinger denklemini çözebilmek için öncelikle bazı şartlar altında potansiyelleri belirlemek gerekir. Solenoid yüksüz olduğu için elektrik alan sıfırdır $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = 0$ ve skaler potansiyel $\phi=0$ olarak seçilebilir. Vektör potansiyel ise solenoidin dışında manyetik alan sıfır $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ olacak şekilde ve aynı zamanda Stokes teoremini sağlayacak şekilde belirlenmelidir.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_m \quad (3.39)$$

Burada Φ_m solenoidin içinden geçen toplam manyetik akıyı ifade eder. Vektör potansiyeli,

$$\vec{A} = \frac{\Phi_m}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (3.40)$$

ile ifade edilebilir. Manyetik alan solenoidin içinde hapsedilmiş olsa dahi solenoidin dışında vektör potansiyeli $\vec{A} \neq 0$ sıfır değildir.

Dikkate alınan sistemde yüklü parçacığı karakterize eden dalga fonksiyonu,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp(i\mathbf{g}(\vec{r}))\Psi'(\vec{r}, t) \quad (3.41)$$

rastgele seçilen kompleks ek bir faz çarpanı ile ifade edilebilir. Burada,

$$g(\vec{r}) \equiv \frac{e}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (3.42)$$

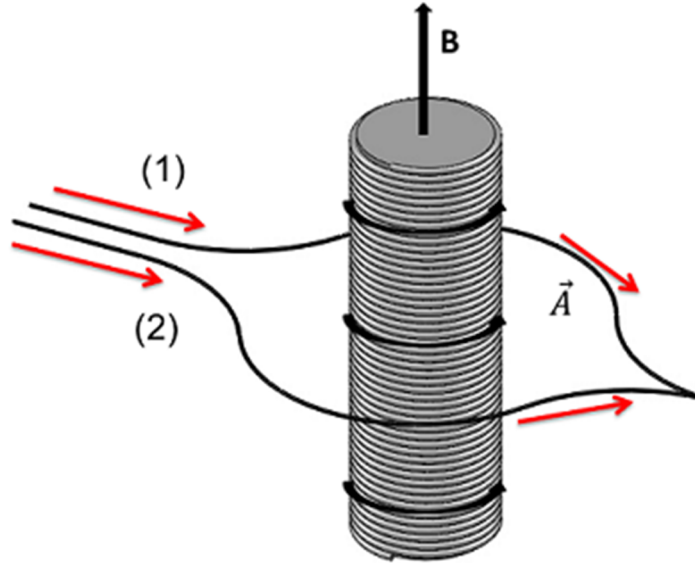
ile tanımlanır. Denklem (3.41) ile ifade edilen dalga fonksiyonu Schrödinger denkleminde yerine yazıldığında,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi' = i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t} \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada Ψ' dalga fonksiyonu Schrödinger denkleminin bir çözümüdür. Vektör potansiyeli varlığında çözüm aynıdır ancak $\exp(ig(\vec{r}))$ gibi bir faz çarpanı gelir ve bu faz çarpanı fiziksel büyüklükleri, nicelikleri $|\Psi|^2 = |\Psi'|^2$ korur.

3.4.3. Aharonov-Bohm Fazı

Bu aşamaya kadar teorik altyapısından bahsedilen Aharonov-Bohm olayının deney düzeneğinin nasıl kurgulandığı ifade edilecektir. Çift yarık deneyine benzer şekilde, koherent elektron demeti ikiye ayrılır ve her bir demet solenoidin iki farklı tarafından gönderilir. Solenoidin diğer tarafında tekrar birleşen koherent elektron demetlerinin bir girişim deseni oluşturmasını bekleriz (Şekil 3.4).



Şekil 3.5: Aharonov-Bohm olayının şematik gösterimidir. (1) ve (2) elektronun izlediği iki ayrı yolu gösterir. Solenoidin diğer tarafında demetler birleşir.

Girişim olayını tasvir edebilmek için (1) ve (2) yollarını izleyen koherent elektron demetlerini düzlem dalga formunda ifade edebiliriz.

$$\Psi_1 = \alpha \exp(ikx_1), \Psi_2 = \alpha \exp(ikx_2) \quad (3.44)$$

Burada k elektron dalga vektörü, x_1 ve x_2 ise her bir demetin katettiği mesafedir. Denklem (3.44) ile ifade edilen çözümler tam çözümlere karşılık gelmese dahi elektron dalgalarının nasıl davranacağını anlamamıza yardımcı olur. Eğer solenoidin manyetik alanı sıfır ise solenoidin dışındaki vektör potansiyeli de sıfıra eşit olacaktır ve neticede girişim deseni elektron dalgalarının katettiği mesafeye bağlı olarak değişecektir.

$$\Delta\Phi_0 = k(x_1 - x_2) \quad (3.45)$$

Manyetik alan varlığında ise solenoidin dışında bir vektör potansiyeli mevcuttur. Dolayısıyla dalga fonksiyonlarına Ψ_1 ile Ψ_2 , Denklem (3.41) de ifade edildiği gibi ek bir faz çarpanı gelir. Girişim deseni artık elektron dalgaları arasındaki mesafeye bağlı değildir, $\Delta\Phi = g_1 - g_2$ fazı kadar girişimde kayma meydana gelir.

$$\Delta\Phi = \frac{e}{\hbar} \left\{ \int_{C_1} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{C_2} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right\} = \frac{e}{\hbar} \oint_C \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \frac{e}{\hbar} \Phi_m \quad (3.46)$$

C_1 ve C_2 solenoidin çevresinden dolanan herbir elektron demetinin izlediği yörüngeleri belirtir. Solenoidin çevresinde kapalı bir C yörüngesi formunda oluşur ve elektron demetleri arasındaki toplam faz farkı solenoidin içinden geçen manyetik akı ile orantılıdır. Manyetik alanın şiddeti değiştikçe demetler arasındaki faz farkı değişir ve girişim deseni kayar.

Burada üzerinde durulacak en önemli nokta ise klasik elektrodinamikte solenoidin etrafında dolanan elektron demetlerinin yörüngeleri üzerinde manyetik alanın sıfır olması halinde elektron ve manyetik alan arasında bir etkileşimin olmamasını bekleriz. Kuantum mekaniksel tasvirde elektron dalgalarının ifade edilmesi halinde ise manyetik alandan izole edilmiş bir bölgede vektör potansiyelinin varlığı elektronun hareketi üzerinde ölçülebilir bir etki doğurur. Sonuçta alan ve parçacık arasındaki etkileşim yerel değildir ve potansiyeller alanlardan daha fazla fiziksel nicelik barındırır.

4. BULGULAR

Bu bölümde düz bir geometriye sahip olan 2BES'nin enerji özdeğerlerinin bazı sınır şartları altında nasıl modifiye olduğu yarı klasik bir yaklaşıklıkla irdelenecektir. Sistemin enerji özdeğerleri Maslov indeksi ile ilişkilendirilecektir ve aynı zamanda sistemin özfonksiyonları nümerik metodla elde edilecektir. Benzer sınır şartları altında silindirik bir geometriye sahip 2BES'nin enerji özdeğerleri yarı analitik ve yarı nümerik metodlarla elde edilecektir. Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şeritler olarak oluşan akım kanalları iki farklı tasvirde dikkate alınarak silindirik bir yüzey üzerinde sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlık hesabı yapılacaktır. İstatistiksel veya kuantum mekaniksel olarak tam tanımlı gerçek veya artık olarak şekillenebilen sıkıştırılmaz şeritlerin hangi etken faktörler altında nasıl oluştuğu irdelenecektir. Ele alınan tasvirler nümerik metodlarla modellenecektir ve deneysel olarak gözlenebilen Aharonov-Bohm fazının nümerik sonuçlarla nasıl ilişkilendirilebileceği hakkında öngörülecektir.

4.1. KUANTUM HALL OLAYINDA KENAR DURUM ENERJİLERİNİN YARIKLASİK ANALİZİ

4.1.1. Probleme Genel Bakış

Kuantum Hall olayında kenar durumları büyük bir öneme sahiptir. Bu bölümde kenar durumlarının enerji seviyeleri yarı klasik yaklaşıklıkla incelenecektir.

Dik bir manyetik alana maruz bırakılan $\vec{B} = B\hat{z}$, kütlesi m , yükü $-e$ olan serbest bir elektronun y doğrultusu boyunca sonsuz bir şeritte hareket ettiği ve x doğrultusunda sınırlandırıldığı iki boyutlu bir sistemi dikkate alalım $-\infty < y < \infty$, $-L_x \leq x \leq 0$. Yeterince güçlü manyetik alan varlığında manyetik uzunluğun örnek sınırından küçük olduğu varsayımını yapmak mümkündür $L_x \gg l_B$. Elektronun yarı düzleme hapsedildiği $-\infty < y < \infty$, $-\infty < x \leq 0$ ve $x=0$ noktasında sonsuz yükseklikteki bir potansiyel duvarın tanımlandığı tek bir kenar sistemi dikkate alınacaktır. Landau ayarında $\vec{A} = (0, -Bx, 0)$ Schrödinger denklemi ve sınır şartları sırasıyla,

$$\frac{1}{2m} \left\{ p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c} Bx \right)^2 \right\} \Psi(x, y) = E \Psi(x, y) \quad (4.1)$$

$$\Psi(0, y) = \Psi(-\infty, y) \quad (4.2)$$

tanımlanır (Avishai ve Montambaux, 2008). Landau ayarı y doğrultusunda öteleme değişmezliğini korurken, tanımlanan $l_B \equiv \sqrt{\hbar/m\omega_c}$ manyetik uzunluk ve $X_c \equiv k_y l_B^2$ merkez koordinat değişkenleri ile birlikte Denklem (4.1), X_c merkezli tek boyutlu harmonik osilatör problemine indirgenir.

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (x - X_c)^2 \right\} \psi(x) = E \psi(x) \quad (4.3)$$

Bu aşamada x doğrultusunda uygulanan elektrik alan varlığı $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, potansiyel enerjinin $V(x) = +exE_x$ kadar artmasına neden olur. Elektrik alanın etkisiyle toplam potansiyel enerji $\tilde{V}(x) = V(x) + exE_x$ şeklinde ifade edilir. Denklem (4.3) dikkate alındığında toplam potansiyel enerji ifadesi

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega_c^2 (x - X_E)^2 + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (X_c^2 - X_E^2) \quad (4.4)$$

ile tanımlanır. Burada $X_E = X_c - eE_x/m\omega_c^2$ osilatörün yeni merkezidir. Sistemin enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları,

$$E_n(X_E) = \varepsilon_n + eE_x X_E + \frac{1}{2} m v_d^2 \quad (4.5)$$

$$\varphi_{n, X_E} = \frac{1}{l_B} u_n \left(\frac{x - X_E}{l_B} \right) \quad (4.6)$$

ile verilir. Denklem (4.6) ifadesindeki u_n , normalize osilatör dalga fonksiyonları,

$$u_n(\zeta) = \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} H_n(\zeta) e^{-\zeta^2/2} \quad (4.7)$$

n . mertebeden $H_n(\zeta)$ Hermit polinomları ile ifade edilir (Gulebaglan ve diğ., 2011). Sistemin X_E merkezli tek boyutlu harmonik osilatör özdeğer denklemi,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x - X_E)^2 \right\} \psi(x) = \varepsilon_n \psi(x) \quad (4.8)$$

ile verilir. Burada Denklem (4.8), manyetik uzunluk $x = \tilde{x} l_B$ ve enerji biriminde $\hbar^2/2ml_B^2 \equiv \hbar\omega_c/2$ dönüşüm uygulandığında özdeğer problemi sınır şartı ile birlikte,

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + (x - x_E)^2 \right\} \psi(x) = \varepsilon_n \psi(x) \quad (4.9)$$

$$\psi(0) = \psi(-\infty) = 0 \quad (4.10)$$

sırasıyla verilir. Denklem (4.9), tüm niceliklerinin boyutsuz olarak tanımlandığı ve sürekli bir parametre olan merkez koordinat ile ifade edilen, x_E merkezli tek boyutlu harmonik osilatöre denktir $-\infty < x_E = X_E/l_B < \infty$. Kenarın olmadığı durumu dikkate almış olsaydık sistemin enerji özdeğerleri x_E 'den bağımsız olarak Landau enerjilerine $E_n = 2n + 1$ tekabül ederdi. Kenar varlığı Landau enerjilerindeki dejenerasyonluğunu değiştirir ve enerji özdeğerlerini x_E 'ye bağımlı kılar. Merkez koordinat $|x_E|$ 'nin yeterince küçük olması halinde osilatör merkezinin kenara doğru yaklaştığı ve sistemin özfonksiyonlarının kenar civarında yerleştiği durumlar “kenar durumları” (edge states) olarak adlandırılan durumlara tekabül eder. Bu çalışmanın amacı dikkate aldığımız Denklem (4.9) ile tanımlanan Schrödinger denkleminin özdeğerlerinin yarı klasik bir yaklaşıklık olan WKB metodu kullanılarak $E_n(x_E)$ merkez koordinat x_E ve enerji kuantum sayısına n olan bağımlılıklarını araştırmaktır.

4.1.2. Yarı Klasik Kuantizasyon

Kenar durumlarının merkez koordinata x_E olan bağımlılığı WKB eylemi olarak bilinen yarı klasik eylem kuantizasyonu tarafından belirlenir.

$$S(E, x_E) = \pi(n + \gamma(E, x_E)) \quad (4.11)$$

Burada $\gamma(E, x_E)$ klasik dönme noktaları ile ilişkili olan bir parametredir ve $0 \leq \gamma(E, x_E) < 1$ aralığında tanımlıdır. Maslov indeksi olarak adlandırılan bu parametre $\gamma(E_n(x_E), x_E) \equiv \gamma_n(x_E)$ kesikli enerji kuantum sayısı n ve sürekli değişken x_E 'nin bir fonksiyonudur. Herhangi bir n kuantum sayısı için $E_n(x_E)$ enerji özdeğerleri Denklem (4.11) ifadesinin çözümleridir. Parabolik potansiyel terimini $x=0$ noktasındaki keskin duvar varlığını dikkate alarak yazalım.

$$v(x) = \begin{cases} x < 0, (x - x_E)^2 \\ x > 0, \infty \end{cases} \quad (4.12)$$

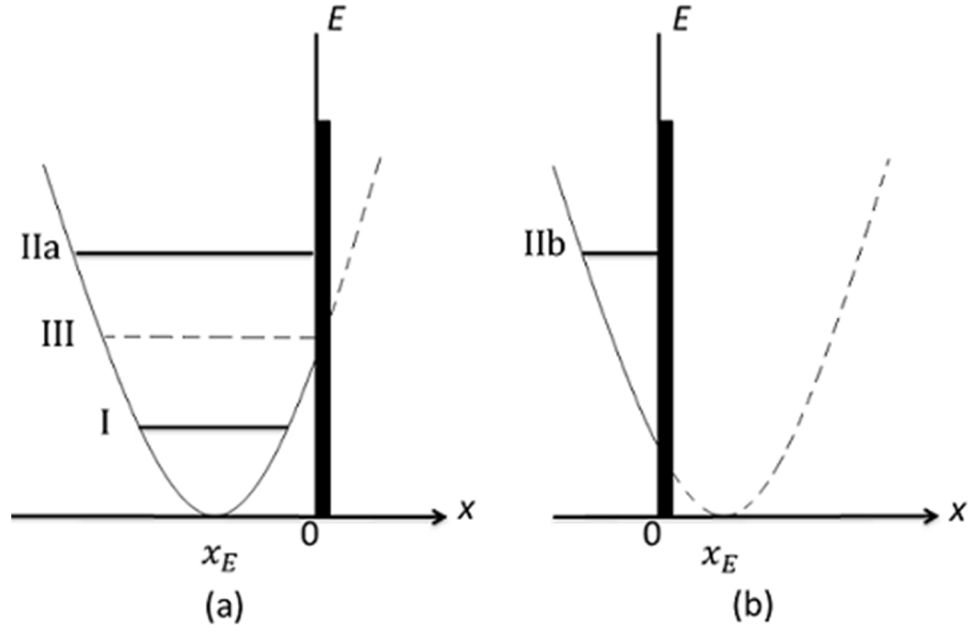
Parçacığın enerjisinin potansiyel enerjiye eşit olduğu $E=V(x)$ noktalar klasik dönme noktaları olarak adlandırılır, Denklem (4.9) dikkate alındığında $x_{1,2} = x_E \pm \sqrt{E}$ (x_1 ve x_2 sırasıyla sol ve sağ dönme noktalarıdır) olarak belirlenir. Burada ilgilendiğimiz problemin daha açık olarak anlaşılabilmesi için bazı tanımlara ihtiyaç vardır. Bunlar sırasıyla parçacığın dalga vektörü, eylem ve eylem kuantizasyonudur.

$$k(x) = \sqrt{E - v(x)} \quad (4.13)$$

$$S'(x, x') \equiv \int_x^{x'} k(x'') dx'', (x_1 \leq x \leq x_2) \quad (4.14)$$

$$S(E, x_E) = S'(x_1, x_2) \quad (4.15)$$

Öncelikle tek boyutlu harmonik osilatörün eylemini hesaplamak gerekir. Bunun için iki durum söz konusudur. Harmonik osilatör merkezi x_E 'nin sürekli değerlere sahip bir değişken olması osilatörün örneğin içinde veya dışında konumlanmasına neden olur (Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Harmonik osilatör potansiyeli ve $x=0$ noktasındaki sonsuz potansiyel duvarının şematik gösterimidir. Üç farklı durum dikkate alınmıştır. $x_E < 0$ ise düşük enerji bölgesi (I) $E < x_E^2$ ve yüksek enerji bölgesi (IIa) $E > x_E^2$ ile temsil edilir. $x_E > 0$ ise sadece yüksek enerji bölgesi (IIb) $E > x_E^2$ söz konusudur. (III) durumu ise arakesit bölgesine karşılık gelir.

WKB metodunun uygulanabilirlik açısından en kolay kısmı eylem hesabıdır. Düşük enerji bölgesinde (Şekil 4.1, I) klasik dönme noktaları $x_1 = x_E - \sqrt{E}$, $x_2 = x_E + \sqrt{E}$ olarak tanımlanır ve Denklem (4.14) dikkate alındığında osilatör eylemi,

$$S'(E) = \int_{x_E - \sqrt{E}}^{x_E + \sqrt{E}} \sqrt{E - (x - x_E)^2} dx = \frac{\pi E}{2} \quad (4.16)$$

olarak elde edilir. Bu durum aslında x_E merkezli tek boyutlu harmonik osilatör olarak karşımıza çıkan Landau kuantizasyonudur. Osilatör $x=0$ noktasındaki sonsuz duvar varlığından etkilenmez, sistemin çözümleri ve enerji özdeğerleri Landau çözümleri ve Landau enerjileri ile örtüşür. Harmonik osilatör merkezi x_E 'nin kenara yaklaştığı ve sağ dönme noktası x_2 'nin duvar üzerinde tanımlandığı yüksek enerji bölgesinde (Şekil 4.1 IIa, IIb) ise,

$$S'(E, x_E) = \int_{x_E - \sqrt{E}}^0 \sqrt{E - (x - x_E)^2} dx = \frac{\pi E}{4} - \frac{E}{2} \arcsin \frac{x_E}{\sqrt{E}} - \frac{x_E}{2} \sqrt{E - x_E^2} \quad (4.17)$$

eylem ifadesi merkez koordinat x_E 'ye bağılı olarak elde edilir. Eylem ifadelerinden faydalanarak bir sonraki bölümde $\gamma_n(x_E)$ parametresini belirlemeye çalışacağız. Dönme noktalarındaki dalga fonksiyonları ile ilişkili olan γ parametresi potansiyelin yeterince yumuşak olduğu ve sağ dönme noktasının duvardan çok uzakta (örneğin içinde) olduğu durumda standard WKB metodu uygulanarak elde edilir. Bu durum $\gamma = 1/2$ değerini aldığı Landau enerjilerine tekabül eder $\epsilon_n = 2n + 1$. Osilatör merkezinin kenara yaklaşması halinde ise γ parametresinin değeri değişir ve her bir dönme noktasının γ değerine sağladığı katkı farklılaşabilir. Burada üç durum söz konusudur.

- $E \leq x_E^2$ ise $\gamma = 1/2$ değerini alır, bu durum düşük enerji bölgesine (I) karşılık gelir,
- $E \geq x_E^2$ ise $\gamma = 3/4$ değerini alır, bu durum ise yüksek enerji bölgeleri (IIa, IIb) ile ilişkilidir,
- $E = x_E^2$ olması halinde ise γ , $1/2$ ile $3/4$ arasında yumuşakça değişen değerler alır.

Üçüncü durum süreksizliğe neden olur ve bu durumu onarmak için orta enerji bölgesine $E \approx x_E^2$ düşük enerji (I) $E \ll x_E^2 \rightarrow E \approx x_E^2$ ve yüksek enerji (IIa, IIb) bölgelerinden $E \gg x_E^2 \rightarrow E \approx x_E^2$ yaklaşarak bir çözüm üretmek gerekecektir.

4.1.2.1. Düşük Enerji Bölgesinden $E \approx x_E^2$ Bölgesine Yaklaşma

Düşük enerji bölgesinde $E \leq x_E^2$ dönme noktalarının konumları ve WKB eylemi,

$$x_{1,2} = x_E \pm \sqrt{E} \quad (4.18)$$

$$S'(E) = \frac{\pi E}{2} \quad (4.19)$$

olarak elde edilmiştir. Eğer tuzaklanmamış harmonik osilatör problemini dikkate almış olsaydık $E \ll x_E^2$ sistemin enerji özdeğerlerinin $E = 2n + 1$ kuantize enerji özdeğerlerine yaklaşmasını beklerdik. Ancak burada bizim ilgilendiğimiz asıl sorun E 'nin x_E^2 merkez koordinatına aşağıdan yaklaşması halinde enerjilerin nasıl modifiye

olacaktır. Enerjilerin x_E^2 'ye yaklaşması x_2 sağ dönme noktasının $x=0$ noktasındaki duvara daha da yaklaşmasına neden olur. Bunun anlamı klasik olarak yasaklı bölgedeki $x_2 < x < 0$ elektronun dalga fonksiyonunun üstel olarak artan katkı ile birlikte ekponensiyel olarak azalan katkıyı da içermesi demektir ki duvar üzerinde dalga fonksiyonunun sıfır olması bu iki dalganın kombinasyonu ile mümkündür. Sağ dönme noktasının arkasındaki duvarın etkisini dikkate alabilmek için x_2 civarında standard WKB işlemini uygulamaya ihtiyaç duyulur. Sol dönme noktasında x_1 ise tek bir dalga vardır ($x \rightarrow -\infty$ limitinde dalgalardan biri yok olur). Dolayısıyla WKB yaklaşımının önerdiği dönme noktaları civarındaki lineer potansiyel yaklaşımı, x_1 sol dönme noktası civarında birinci Airy fonksiyonun kullanılmasına olanak sağlar ve sol dönme noktasında standart WKB işlemi uygulanır. Klasik olarak izinli bölgede $x_1 \leq x \leq x_2 \leq 0$, x_1 civarında WKB yaklaşımının sağladığı dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(S'(x_1, x) + \frac{\pi}{4}\right) \\ \psi(x) &= \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(S'(x, x_2) - S + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\quad (4.20)$$

ile temsil edilir. Burada C bir sabittir. Duvara yakın olan sağ dönme noktası civarında ise potansiyelin lineer olarak değiştiğini kabul edelim ve bu nokta civarında potansiyelin Taylor açılımını dikkate alarak Schrödinger denkleminin çözümlerini bu potansiyel altında inceleyelim.

$$v(x) \approx E + 2\sqrt{E}(x - x_2) \quad (4.21)$$

Denklem (4.21) sağ dönme noktası x_2 civarında seriye açılan lineer potansiyeli temsil eder. Bu potansiyeli Schrödinger denkleminde yerine yazdığımızda,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 2\sqrt{E}(x - x_2) \right] \psi(x) = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu aşamada

$$y = y(x) \equiv (4E)^{1/6} (x - x_2) \quad (4.23)$$

Denklem (4.23) ile ifade edilen değişken dönüşümünün gerçekleştirilmesi halinde Denklem (4.22),

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - y\psi(y) = 0 \quad (4.24)$$

olarak elde edilir. İkinci dereceden lineer diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkan diferansiyel denklemin çözümleri Airy fonksiyonlarıdır ve sol dönme noktası x_1 'in aksine x_2 civarındaki çözüm her iki Airy fonksiyonunun kombinasyonundan oluşur.

$$\psi(y) = \alpha Ai(y) + \beta Bi(y) \quad (4.25)$$

$y < 0$ olduğu bölgede ($x < x_2$ bölgeye tekabül eder) Airy fonksiyonlarının asimtotik formu kullanılabilir ve $x < x_2$ bölgesinde dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \alpha \sin\left(S'(x, x_2) + \frac{\pi}{4}\right) + \beta \cos\left(S'(x, x_2) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.26)$$

ile ifade edilir. Bu dalga fonksiyonu, $x_1 \leq x \leq x_2$ bölgesi için WKB metodunun önerdiği çözüm ile örtüşmelidir. Aslında Denklem (4.26) ile ifade edilen fonksiyon Denklem (4.20) de elde edilen fonksiyon ile özdeştir ve bu iki fonksiyonu karşılaştırdığımızda C , α ve β gibi sabit katsayılar elde edilebilir. Burada $\xi \equiv S'(x, x_2) + \pi/4$ tanımını yaptığımız takdirde

$$\cos \zeta (C \cos S - \beta) + \sin \zeta (C \sin S - \alpha) = 0 \quad (4.27)$$

ifadesi elde edilir. Burada Denklem (4.27) ifadesinde her bir parantez ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} C \cos S - \beta &= 0 \\ C \sin S - \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Bu aşamada Denklem (4.25) ile ifade edilen dalga fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sonsuz potansiyelin varlığında sifıra eşit olması gerektiğini hatırlayalım.

$$\begin{aligned} y_0 &= -(4E)^{1/6}(x_E + \sqrt{E}) > 0, \\ \psi(y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\psi(y_0) = 0$ koşulunu uyguladığımızda

$$\beta = -\alpha \frac{Ai(y_0)}{Bi(y_0)} \quad (4.30)$$

elde edilen ifade katsayıları belirlememizde yardımcı olacaktır. Denklem (4.28) ile ifade edilen denklemleri tekrar düzenleyelim,

$$\begin{aligned} C \sin S - \alpha &= 0 \\ C \cos S + \alpha \frac{Ai(y_0)}{Bi(y_0)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\cos S + \frac{Ai(y_0)}{Bi(y_0)} \sin S = 0 \quad (4.32)$$

Denklem (4.32), $S(E)$ eylem kuantizasyonunun elde edilmesini mümkün kılar ve WKB formatının aşağıdaki gibi değişmesine neden olur.

$$S(E) = \frac{\pi E}{2} = \pi[n + \gamma(E, x_E)] \quad (4.33)$$

$0 < \gamma < 1$ aralığında tanımlı olan $\gamma(E, x_E)$,

$$\gamma(E, x_E) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{Bi(y_0)}{Ai(y_0)} \right) \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. Bu aşamada γ ve kuantize E_n enerji özdeğerlerini belirleyebilmek için dikkate alınması gereken iki durum söz konusudur.

- $E \ll x_E^2$ olması durumunda y_0 'ın alabileceği mümkün değerler çok büyüktür

$$\frac{\text{Ai}(y_0)}{\text{Bi}(y_0)} \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3}y_0^{3/2}} \approx 0 \quad (4.35)$$

Bu koşulu dikkate aldığımızda ve Airy fonksiyonlarının asimtotik ifadelerinden faydalandığımız taktirde Denklem (4.35) ifadesi elde edilir. Bu ifade Denklem (4.34) ifadesinde yerine yazıldığında γ ifadesi bulunur ve elde edilen γ ifadesi Denklem (4.33) de yerine yazıldığında ise kuantize E_n enerji özdeğerleri elde edilir. Sonuç harmonik osilatör problemi ile özdeşir $\gamma = 1/2$ ve $E_n = 2n + 1$.

- Enerjinin x_E^2 'ye yeterince yaklaşması halinde ise y_0 çok küçüktür. Airy fonksiyonlarının özelliklerinden faydalandığımızda,

$$\frac{\text{Ai}(y_0)}{\text{Bi}(y_0)} \approx \frac{\text{Ai}(0)}{\text{Bi}(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.36)$$

ifadesi elde edilir. Sırasıyla Denklem (4.34) ve Denklem (4.33) ifadelerinden $\gamma = 2/3$ ve $E_n = 2n + 4/3$ olarak bulunur.

4.1.2.2. Yüksek Enerji Bölgesinden $E \approx x_E^2$ Bölgesine Yaklaşma

Yüksek enerji bölgesinde $E \geq x_E^2$, sırasıyla klasik dönme noktaları ve eylem kuantizasyonu,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_E - \sqrt{E}, x_2 = 0, \\ S'(E, x_E) &= \frac{\pi E}{4} - \frac{E}{2} \arcsin \frac{x_E}{\sqrt{E}} - \frac{x_E}{2} \sqrt{E - x_E^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

ile tanımlıdır. Potansiyelin $v(x)$ sağ dönme noktası x_2 civarında lineer olarak değiştiğini düşünelim, Denklem (4.21) yeniden elde edilir.

$$v(x) = x_E^2 - 2xx_E \quad (4.38)$$

Bu potansiyeli Schrödinger denkleminde yerine yazalım,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - (x_E^2 - 2xx_E - E)\psi = 0 \quad (4.39)$$

burada $x_E^2 - 2xx_E - E = |2x_E|^{2/3}$ u gibi bir dönüşüm uyguladığımız taktirde,

$$\frac{d^2\psi}{du^2} - u\psi = 0 \quad (4.40)$$

Denklem (4.24) de elde edilen denklem ile özdeş bir denklem elde edilir ve böyle bir denklemin çözümleri Airy fonksiyonlarıdır. Denklem (4.40) çözümü

$$\psi(x) = \alpha \text{Ai} \left[\frac{x_E^2 - 2xx_E - E}{|2x_E|^{2/3}} \right] + \beta \text{Bi} \left[\frac{x_E^2 - 2xx_E - E}{|2x_E|^{2/3}} \right] \quad (4.41)$$

ile ifade edilir. Sınır şartını uyguladığımızda ise $\psi(0) = 0$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = - \frac{\text{Ai} \left[\frac{x_E^2 - E}{|2x_E|^{2/3}} \right]}{\text{Bi} \left[\frac{x_E^2 - E}{|2x_E|^{2/3}} \right]} = - \frac{\text{Ai}(-W)}{\text{Bi}(-W)} \quad (4.42)$$

elde edilir. Burada

$$W = \frac{E - x_E^2}{|2x_E|^{2/3}} > 0 \quad (4.43)$$

olarak tanımlıdır. Airy fonksiyonlarının asimtotik formunu $x < 0$ durumunu dikkate alarak yazdığımızda Denklem (4.40) için önerdiğimiz çözüm

$$\psi(x) \propto \alpha \sin \left[\frac{x_E^2 - 2xx_E - E}{|2x_E|^{2/3}} + \frac{\pi}{4} \right] + \beta \cos \left[\frac{x_E^2 - 2xx_E - E}{|2x_E|^{2/3}} + \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.44)$$

olarak elde edilir. Bu aşamada ise Denklem (4.39) ile ifade edilen lineer potansiyel için eylemi hesaplayalım.

$$S'(x, 0) = \int_x^0 \sqrt{E - x_E^2 + 2xx_E} dx \quad (4.45)$$

$$S'(x, 0) = \frac{(E - x_E^2)^{3/2} - (E - x_E^2 + 2xx_E)^{3/2}}{3x_E}$$

Denklem (4.45) ile ifade edilen eylem ifadesinide kullandığımız taktirde Denklem (4.44) ile ifade edilen dalga fonksiyonu artık aşağıdaki formu kazanır.

$$\psi(x) \propto \alpha \sin \left[-\varepsilon S'(x, 0) + \delta + \frac{\pi}{4} \right] + \beta \cos \left[-\varepsilon S'(x, 0) + \delta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.46)$$

Burada ε ve δ sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varepsilon = \text{sign}(x_E),$$

$$\delta = \frac{(E - x_E^2)^{3/2}}{3|x_E|} = \frac{2}{3} W^{3/2} \quad (4.47)$$

Sol dönme noktasında ise Denklem (4.20) ile birlikte WKB metodu da dikkate alındığında $x = x_1$ ($x_1 \leq x \leq 0$), bölgesi için tanımlı elektronun dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \sin \left(S - S'(x, 0) + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.48)$$

ile ifade edilir. Bu aşamada Denklem (4.46) ile Denklem (4.48) özdeş denklemleri ifade etmektedir ve birbirleriyle örtüşmelidir dolayısıyla bu iki denklemi birbiriyle karşılaştırmak mümkündür. Aynı zamanda bu iki dalga fonksiyonu $S'(x, 0)$ 'ın herhangi bir değeri için eşit olmalıdır.

$$-\alpha \varepsilon \cos(\delta + \pi/4) + \beta \varepsilon \sin(\delta + \pi/4) = -C \cos(S + \pi/4)$$

$$\alpha \sin(\delta + \pi/4) + \beta \cos(\delta + \pi/4) = C \sin(S + \pi/4) \quad (4.49)$$

Denklem (4.49) ile ifade edilen denklem seti elde edilir. Buradan,

$$\tan(S + \pi/4) = \varepsilon \cot(\delta_0 - \delta + \pi/4) \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\delta_0 = \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arctan\left(-\frac{\text{Bi}(-W)}{\text{Ai}(-W)}\right) \quad (4.51)$$

ile tanımlanır. Denklem (4.50) ile ifade edilen eşitlikten faydalanarak eylem kuantizasyonu

$$S = -\varepsilon \arctan \cot\left(\arctan \frac{\text{Bi}(-W)}{\text{Ai}(-W)} + \frac{2}{3} W^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \quad (4.52)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.11) ifadesini dikkate aldığımızda $0 < \gamma(E, x_E) < 1$ aralığında tanımlı olduğunu bildiğimiz γ parametresi

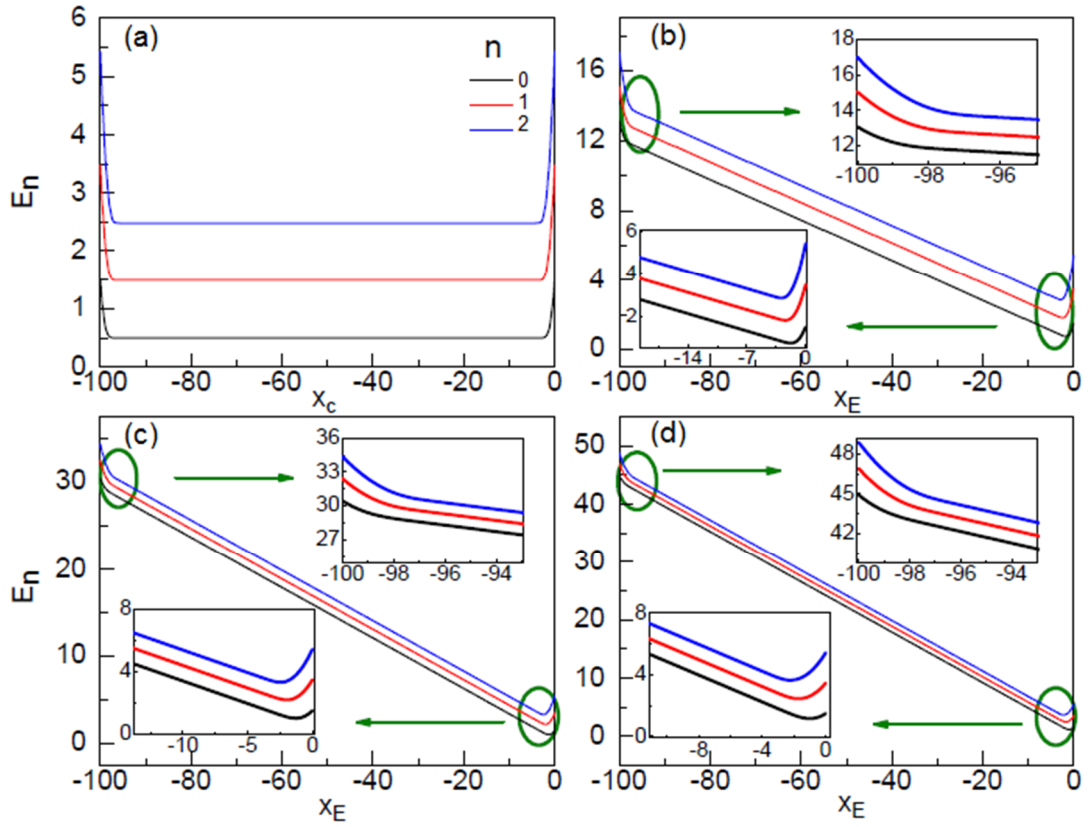
$$\gamma(E, x_E) = \frac{3}{4} - \frac{\varepsilon}{\pi} \arctan \cot\left(\arctan \frac{\text{Bi}}{\text{Ai}} + \frac{2}{3} W^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.53)$$

olarak elde edilir. Merkez koordinatın x_E iki farklı değeri için γ parametresini ve kuantize E_n enerji özdeğerlerini elde etmek mümkündür.

$$x_E = -\sqrt{E}, W = 0 \rightarrow \gamma(E, x_E) = \frac{2}{3}, E_n = 2n + \frac{4}{3} \quad (4.54)$$

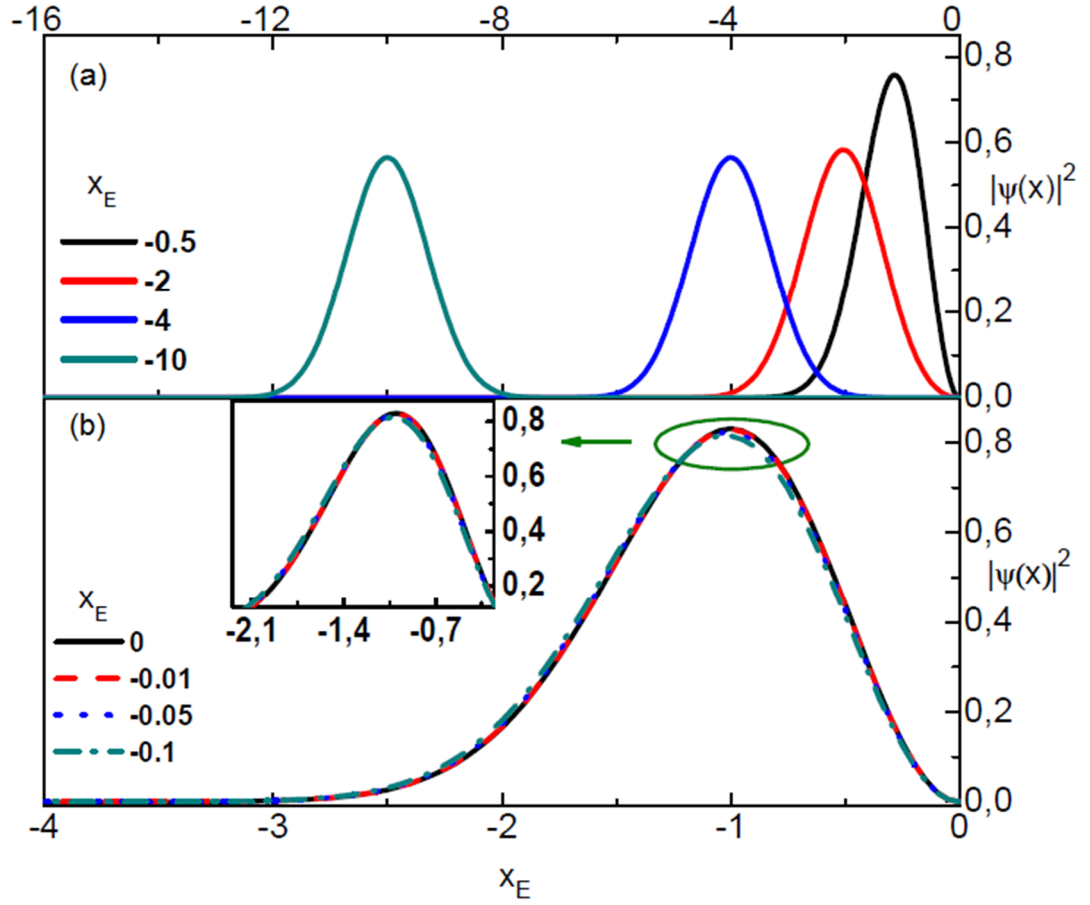
$$x_E = 0, W = \infty \rightarrow \gamma(E, x_E) = \frac{3}{4}, E_n = 4n + 3 \quad (4.55)$$

Şekil (4.2), (4.3) ve (4.4) sırasıyla sistemin Landau enerji durumlarını ile taban durum ve birinci uyarılmış durumda parçacığın bulunma olasılıklarını gösterir. Denklem (4.9) nümerik bir yöntem olan sonlu farklar metodu yardımıyla çözümlenerek sistemin enerji durumları ve parçacığın bulunma olasılıkları hesaplanmıştır.



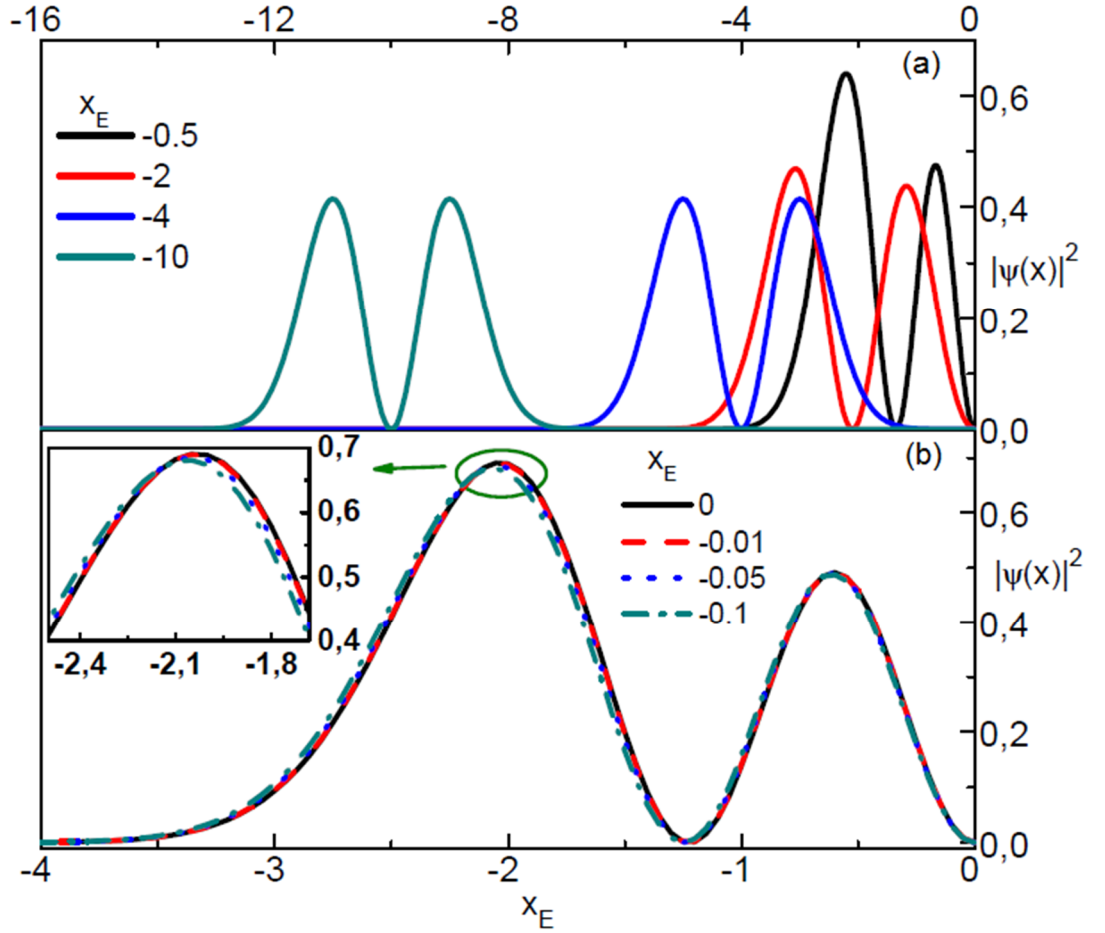
Şekil 4.2: Enerji durumları elektrik alan yokken ve elektrik alan varlığında merkez koordinatın bir fonksiyonu olarak çizilmiştir.

Şekil 4.2 elektrik alan yokken ve elektrik alan varlığında Landau enerji durumlarının (ilk üç enerji seviyesi) konuma bağlı olarak nasıl değiştiğini gösterir. Elektrik alan uygulanmadığı takdirde (Şekil 4.2 (a)) Landau enerjileri örnek içerisinde düzdür, örnek sınırlarında ise yukarıya doğru bükülür. Elektrik alan varlığında ise (Şekil 4.2 (b), (c), (d)) örnek içerisinde düz olan Landau durumları uygulanan elektrik alanın doğrultusuna bağlı olarak bükülme gösterirken, örnek sınırlarındaki enerji durumlarının yukarıya doğru bükülme davranışını devam eder ve uygulanan elektrik alanın değeri arttıkça seviyeler daha fazla bükülür. Landau enerji durumlarının örnek kenarlarında yukarıya doğru bükülmesinin nedeni, o noktalarda konumlandırılan sonsuz potansiyel duvarının etkisidir.



Şekil 4.3: Taban durumunda farklı merkez koordinatları için parçacığın bulunma olasılığı hesaplanmıştır.

Şekil 4.3 taban durum dalga fonksiyonunun evrimini merkez koordinatın örnek kenarına yaklaştığı ve örnek kenarını kestiği farklı değerleri için tasvir eder. Merkez koordinatın dört farklı değeri için parçacığın bulunma olasılıkları Şekil 4.3 (a) gösterilmiştir. Şekil 4.3 (b) de ise merkez koordinatın örnek kenarını kestiği farklı değerler için elde edilen olasılıkları gösterir. Merkez koordinat örnek kenarına yaklaştıkça parçacığın dalga fonksiyonunun kenar civarında lokalize olduğu görülmektedir.



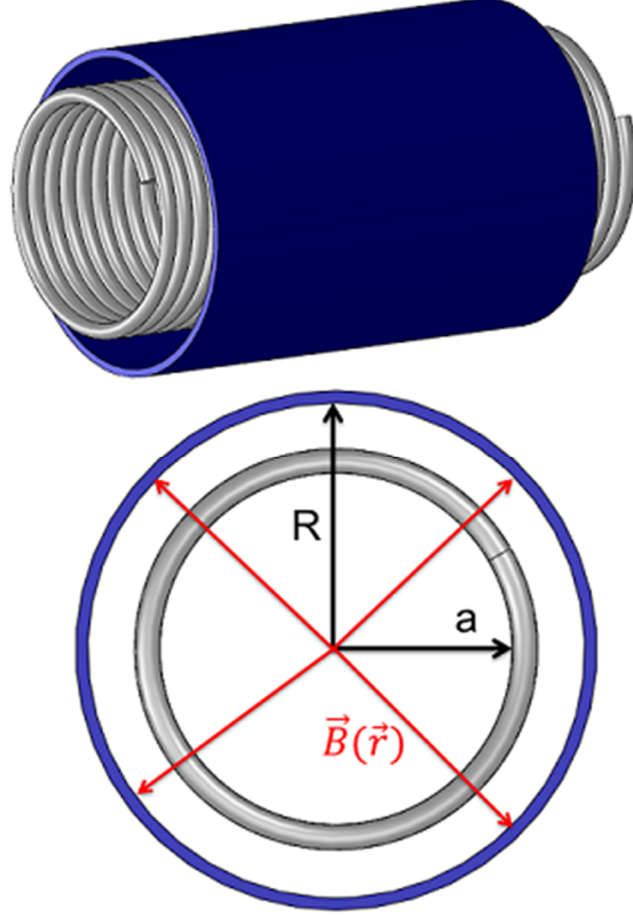
Şekil 4.4: Birinci uyarılmış durum için farklı merkez koordinatlarında parçacığın bulunma olasılığı hesaplanmıştır.

Şekil 4.4 farklı merkez koordinat değerleri için parçacığın birinci uyarılmış durumdaki bulunma olasılığını gösterir. Örnek kenarına yaklaştıkça dalga fonksiyonunun kenar civarında lokalize olduğu görülmektedir.

4.1.3. Silindir Bir Yüzey Üzerine Radyal Manyetik Alan Varlığında Spinsiz Parçacık

Dik ve homojen bir manyetik alan varlığında bir düzlem üzerinde iki boyuta sınırlandırılmış olan bir elektronun hareketini önceki bölümlerde incelemiştik. Problem seçili bir doğrultuda öteleme değişmezliğine sahip olan Landau ayarında çözüldüğü taktirde tek boyutlu harmonik osilatör problemine kolayca indirgenebilir ve neticede Landau düzeyleri olarak adlandırılan dejenere durumlar elde edilir. Burada ise bahsettiğimiz bu problemi radyal bir manyetik alan varlığında silindir bir yüzey üzerinde harekete sınırlandırılmış olan elektronun davranışını kuantum mekanişsel

olarak incelenecektir. İç içe geçmiş olan a yarıçaplı silindir bir solenoid ve R yarıçaplı bir silindir ($a < R$) dikkate alalım (Şekil 4.5).



Şekil 4.5: İç içe geçmiş R yarıçaplı bir silindir ile a yarıçaplı bir solenoidin gösterimidir ($a < R$). Kırmızı oklar silindir yüzeyi üzerinde her bir noktadan geçen radyal manyetik alanı temsil eder (Chryssomalakos, 2004).

Silindir yüzeyi üzerinde z eksenini boyunca hareket eden elektron Denklem (4.56) ile verilen yüzey akım yoğunluğu dağılımını taşır (Chryssomalakos, 2004).

$$\vec{j} = -\frac{2B_0R}{\mu_0 a^2} z \hat{\phi} \quad (4.56)$$

Burada μ_0 boş uzay geçirgenliğidir. Akım yoğunluğunun üreteceği radyal manyetik alan,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{B_0R}{a^2}(\rho, 0, -2z) \rightarrow \rho < a \\ B_0R\left(\frac{1}{\rho}, 0, 0\right) \rightarrow \rho > a \end{cases} \quad (4.57)$$

ve bu manyetik alana tekabül eden vektör potansiyeli \vec{A} , $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{B_0 R}{a^2} (0, \rho z, 0) \rightarrow \rho < R \\ -B_0 R \left(0, \frac{z}{\rho}, 0 \right) \rightarrow \rho > R \end{cases} \quad (4.58)$$

olarak elde edilebilir. Silindir yüzeyi üzerinde hareketi sınırlandırılmış olan kuantum spinsiz parçacığın Hamiltonyenini yazalım.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (4.59)$$

Burada hatırlatma olarak silindirik koordinatlarda bir vektörün diverjansı ve Laplasyen operatörünü tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\rho + \frac{\partial}{\partial z} V_z \\ \nabla^2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Denklem (4.60) daki ifadelerden faydalanarak Denklem (4.59) ile ifade edilen Hamiltonyen,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{q^2 B_0^2}{2m} z^2 - i\hbar q \frac{B_0}{mR} z \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.61)$$

formunu alır. Bu aşamada sistem üzerinde bazı sınır şartlarını tanımlayalım. Yüzeyinin dik bir manyetik alana maruz bırakıldığı yarım bir silindir dikkate alalım ve silindirin $\varphi = 0$ ile $\varphi = \pi$ noktalarında sonsuz yükseklikte potansiyel duvarları tanımlı olsun. Burada sistemi tanımlayan Hamiltonyen Denklem (4.61) ile verilir ve sistemin özdeğer denklemi,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{q^2 B_0^2}{2m} z^2 - i\hbar q \frac{B_0}{mR} z \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \psi = E\psi \quad (4.62)$$

ile ifade edilir. Sınır şartlarını sağlayacak en uygun çözüm bir sinus fonksiyonudur.

$$\psi(R, \varphi, z) = \sin(\lambda\varphi)Z(z) \quad (4.63)$$

Denklem (4.63) ile verilen dalga fonksiyonu Denklem (4.62) ile ifade edilen özdeğer denklemini sağlamalıdır. Dolayısıyla çözüm özdeğer denkleminde yerine yazıldığında,

$$-\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[\frac{\lambda^2}{R^2} - 2i \frac{qB_0\lambda}{\hbar R} z \cot(\lambda\varphi) + \frac{q^2B_0^2}{\hbar^2} z^2 \right] Z = \frac{2m}{\hbar^2} EZ \quad (4.64)$$

elde edilir. Bu aşamada $z = i\tilde{z}$ gibi bir dönüşüm yapıldığı takdirde Denklem (4.64),

$$\frac{d^2Z}{d\tilde{z}^2} + \left[\frac{\lambda^2}{R^2} + 2 \frac{qB_0\lambda}{\hbar R} \tilde{z} \cot(\lambda\varphi) - \frac{q^2B_0^2}{\hbar^2} \tilde{z}^2 \right] Z = EZ \quad (4.65)$$

olarak elde edilir. Denklem (4.65) ile ifade edilen denklemi biraz daha düzenlediğimiz takdirde

$$\frac{d^2Z}{d\tilde{z}^2} - \frac{1}{l_B^4} (\tilde{z} - b)^2 Z = \left[\frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{1}{l_B^4} (\alpha^2 + \beta^2) \right] Z \quad (4.66)$$

Denklem (4.66) elde edilir. Burada, l_B manyetik uzunluk olmak üzere α ve β gibi bazı değişkenler de tanımlanmıştır. Sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} l_B^2 &= \frac{\hbar}{qB_0}, \\ \alpha &= \frac{\hbar\lambda}{qB_0R} \cot(\lambda\varphi), \\ \beta &= \frac{\hbar\lambda}{qB_0R} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Denklem (4.66) ifadesi, $\tilde{z} = l_B \bar{z}$ gibi bir dönüşüm uygulandığı takdirde manyetik uzunluk biriminde elde edilir.

$$\frac{d^2Z}{d\bar{z}^2} - (\bar{z} - \bar{\alpha})^2 Z = \epsilon_n Z \quad (4.68)$$

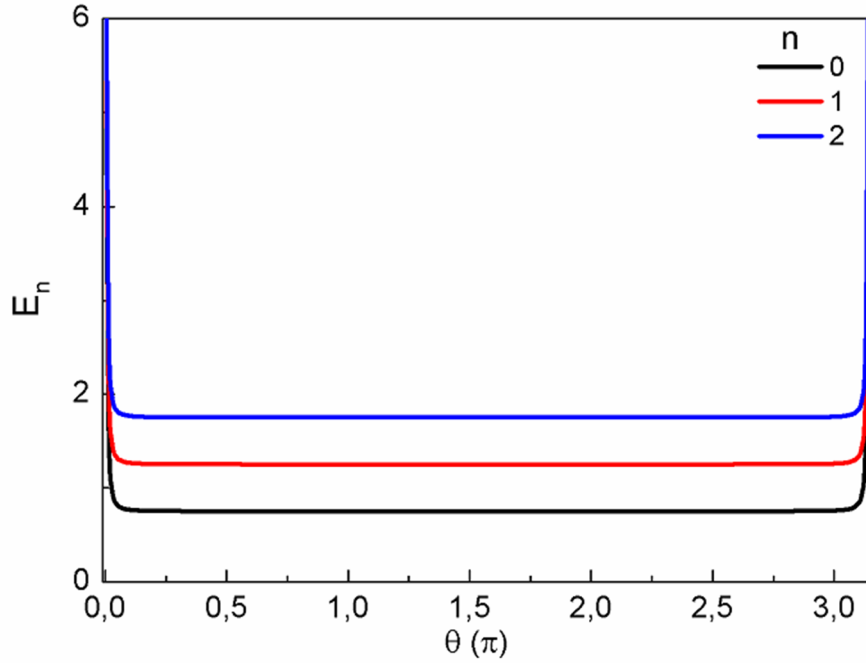
Denklem (4.68) de ifade edilen sistemin ε_n enerjili durumları,

$$\varepsilon_n = \frac{2ml_B^2}{\hbar^2} E - l_B^2 \frac{\lambda^2}{R^2} \frac{1}{\sin^2(\lambda\varphi)} \quad (4.69)$$

ile verilir. Sistemin $\hbar\omega_c$ enerji birimindeki enerji değerleri,

$$E_n = \frac{E}{\hbar\omega_c} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{l_B^2 \lambda^2}{R^2} \operatorname{cosec}^2(\lambda\varphi) \quad (4.70)$$

ile verilir.



Şekil 4.6: Silindir yüzey üzerinde hareketi sınırlanmış olan elektronun ilk üç enerji durumunu gösterir.

Şekil 4.6'dan da görüleceği üzere silindir yüzeyi üzerine hapsedilmiş olan elektronun enerji durumları düzlem üzerinde hareketi iki boyuta sınırlanmış olan elektronun Landau düzeyleri ile örtüşmektedir.

4.2. SİLİNDİR YÜZEY ÜZERİNDE SIKIŞTIRILAMAZ ŞERİTLERİN OLUŞUMU

Sıkıştırılamaz şeritler 2BES'lerinin tanımlı olduğu geometrilere yüksek manyetik alan varlığında kuantizasyonun bir sonucu olarak şekillenen ve akım taşıyan kanallardır. Düz

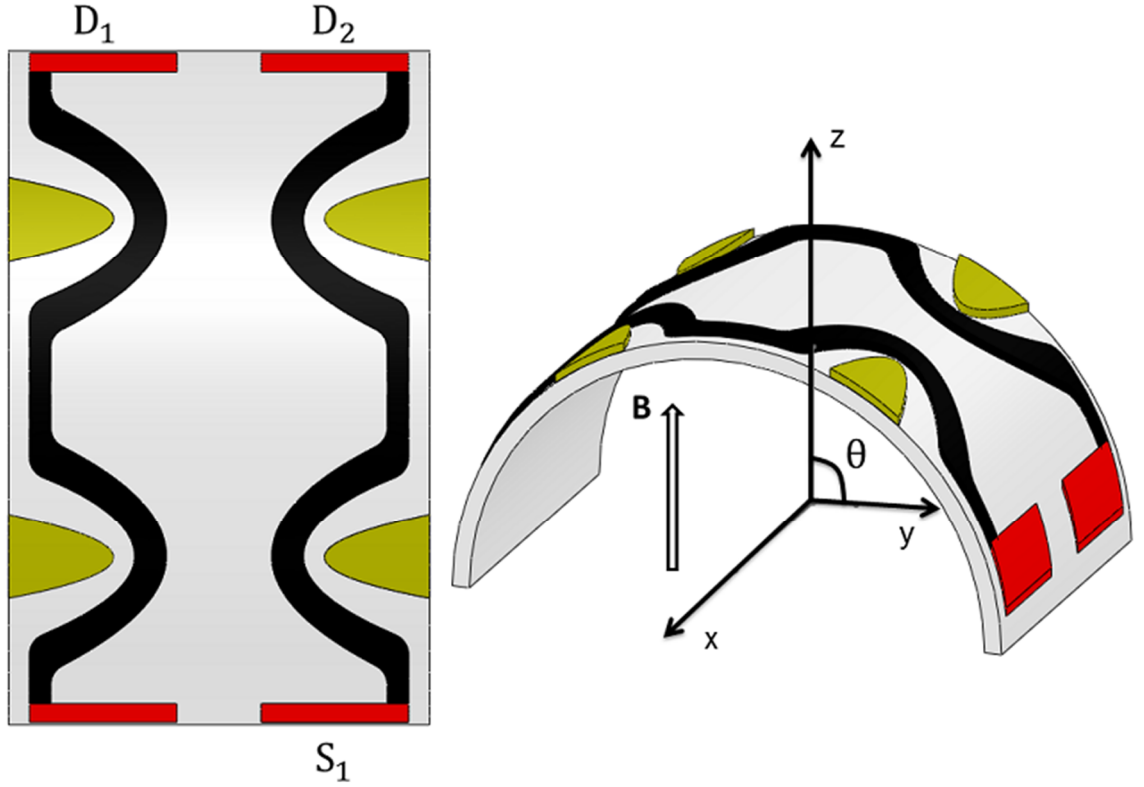
bir geometriye sahip olan 2BES'lerinde sıkıştırılmaz şeritlerin sistemde nasıl şekillendiği, hangi konumlarda merkezlendiği ve hangi şartlar altında oluştuğu (Siddiki ve Gerhardt, 2004), (Siddiki ve diğerleri, 2010) ve (Çicek ve diğerleri, 2010) gibi çalışmalarda öngörülmüştür. Bu çalışmada modellenen sistem ise silindirik bir geometriye sahip 2BES üzerinde tanımlı kuantum nokta kontaklardır (QPCs), (Arslan ve diğerleri, 2008). Ele alınan model nümerik bir metodla tanımlanacaktır ve böyle bir sistemde sıkıştırılmaz şeritlerin nasıl oluştuğu veya yaşayacağı irdelenecektir.

Sıkıştırılmaz şeritlerin oluşum sürecinde manyetik alanın büyüklüğüne bağlı olarak şerit, gerçek (real) veya artık (evanescent) olarak oluşabilir. Manyetik uzunluk $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$, 2B Fermi dalga uzunluğu $\lambda_f = 2\pi/k_f$ ve sıkıştırılmaz şeridin kalınlığı a_k arasındaki ilişki şeritin gerçek veya artık olup olmadığını niteler. Sıkıştırılmaz şeritin gerçek veya artık olma durumu sırasıyla aşağıda ifade edilmiştir.

$$l_B \leq \lambda_f \leq a_k \quad (4.71)$$

$$l_B \leq a_k \leq \lambda_f \quad (4.72)$$

Sıkıştırılmaz şerit kalınlığının a_k , Fermi dalga uzunluğundan λ_f daha büyük olması halinde şekillenen gerçek sıkıştırılmaz şerit, yük taşıyıcısının saçılmaya maruz kalmadan akımın taşındığı mükemmel bir kanaldır. Fermi dalga uzunluğunun şerit kalınlığından daha büyük olduğu manyetik alan değerlerinde şekillenen artık sıkıştırılmaz şerit varlığında ise karşılıklı iki şeridin yeterince yakın mesafede olması halinde yük taşıyıcısının bir şeritten diğerine saçılmaya uğrayabileceği ve akımın kayıplarla birlikte taşındığı mükemmel olmayan kanaldır. Eğer ki sıkıştırılmaz şerit kalınlığı manyetik uzunluktan l_B daha küçük ($a_k \leq l_B$) ise sistem tamamen klasik davranış sergiler ve Drude modeli ile tasvir edilebilir. Sadece sıkıştırılmaz şerit kalınlığının Fermi dalga uzunluğundan daha büyük olması halinde Hall potansiyeli kuantizedir. Modellenen sistemin şematik bir tasviri Şekil 4.7 de gösterilmiştir.



Şekil 4.7: Silindir bir geometriye sahip 2BES’ni tasvir eder. Sol taraftaki figür modelin üstten görünümüdür. Sarı renkteki yükseltler kuantum nokta kontakları, kırmızı renkteki yükseltler kontakları, siyah renkteki şeritler ise sıkıştırılmaz şeritleri göstermektedir.

Silindir bir geometride tanımlı olan 2BES, z doğrultusu boyunca yönlendirilmiş dik bir manyetik alana ($\vec{B} = B_0 \hat{z}$) maruz bırakılmıştır. Böyle bir geometride yüzey üzerindeki her bir noktada elektrona etki edecek olan manyetik alanın lokal değeri merkez açığı θ bağlı olarak değişecektir ve yüzey üzerinde uzaysal olarak değişen bir manyetik alan yaratılacaktır. Dolayısıyla Landau kuantizasyonu da manyetik alanın yüzey üzerindeki dik bileşenine ($B = B_0 \cos \theta$) bağlı olacaktır. Sistemi niteleyen parametreler ise manyetik alanın dik bileşeni varlığında yeniden şekillenecektir. Bu aşamada sistem parametrelerinden bahsetmek gerekir.

$$a_k^2 = \frac{2\varepsilon\Delta E_k}{\pi^2 e^2 \left. \frac{dn(x)}{dx} \right|_{x=x_k}} \quad (4.73)$$

Denklem (4.73) ifadesi k . sıkıştırılmaz şeritin kalınlığını belirtir. Burada ε dielektrik sabiti (GaAs için $\sim 12.4 \varepsilon_0$), $n(x)$ manyetik alan yokluğunda ($B=0$) yerel elektron

yoğunluğu, $dn(x)/dx|_{x=x_k}$ k. sıkıştırılmaz şeritin merkez noktasında x_k konuma bağlı gradyenti, ΔE_k ise tek parçacık enerji band boşluğunu ifade eder.

$$I_d = V_0 \left[\exp\left(\frac{(\theta - \theta_L)^2}{2a^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_R)^2}{2a^2}\right) \right] \quad (4.74)$$

Burada I_d Chklovskii'nin tanımladığı ve Denklem (3.2) de ifade edilen boşaltım şeritinden farklı olarak Gaussian fonksiyonu formunda biçimlendirilmiştir; a Gaussian fonksiyonunun genişliğini, θ_L ve θ_R sırasıyla Gaussian'ın sol ve sağ merkezini ve V_0 ise fonksiyonun genliğini temsil eder. Gaussian fonksiyonu formunda konuma bağlı olarak empoze edilen boşaltım şeriti, silindirik 2BES üzerinde nümerik olarak QPCs tanımlamayı mümkün kılar.

Manyetik alan ve θ açısıyla ilişkili olan doldurma faktörü ve manyetik uzunluk ifadeleri sırasıyla aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} v_0 &\propto \left(\frac{1}{B_0 \cos \theta} \right) \\ I_B &\propto \left(\frac{1}{\sqrt{B_0 \cos \theta}} \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Denklem (4.75) de ifade edildiği gibi doldurma faktörü manyetik alan ve merkez açı ile ters orantılı iken, manyetik uzunluk kareköküyle ters orantılıdır.

Tasvir edilen sistem Landau seviyeleri ve Zeeman yarılmaları olarak bilinen iki ayrı durum için ele alınacaktır.

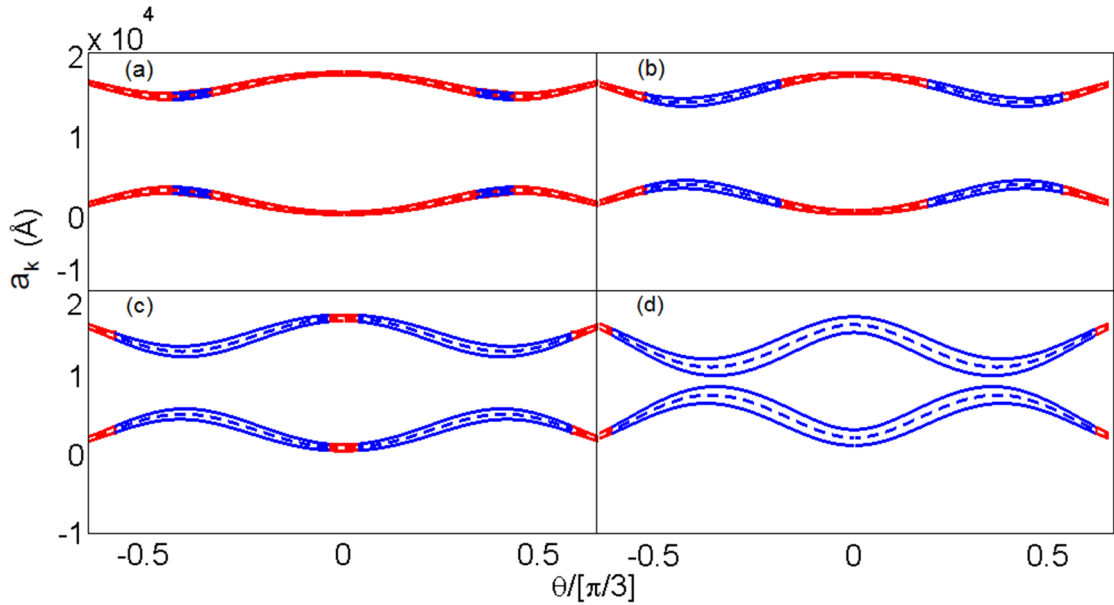
4.2.1. Landau Seviyeleri

Elektronun spin serbestlik dercesi dikkate alınmadığı ve sistemin enerji özdeğerlerinin Landau seviyeleri ile örtüştüğü durumda şerit kalınlığı ifadesindeki enerji band boşluğu, $\Delta E_k = \hbar\omega_c$ olarak ifade edilir ($\omega_c = eB/m$; siklotron frekansı). Denklem (3.3) ile verilen elektron yoğunluğu $n(x)$ ve enerji band boşluğu ΔE_k dikkate alındığında Denklem (4.73) ile ifade edilen şerit kalınlığı yeniden düzenlenmelidir.

$$a_k = 4 \left(\frac{a_B I_d k}{\pi} \right)^{1/2} \frac{v_0}{(v_0^2 - k^2)} \quad (4.76)$$

Burada a_B etkin Bohr yarıçapıdır ($a_B(\text{GaAs}) \sim 9.8\text{nm}$). Sistemi tanımlayan nicelikler ise Denklem (4.76), Denklem (4.74) ve Denklem (4.75) ile verilmektedir. Bu aşamada şeritlerin silindir yüzey üzerinde nasıl oluşacağı ve hangi niceliklere bağlı olarak değiştiğini incelemek gerekir.

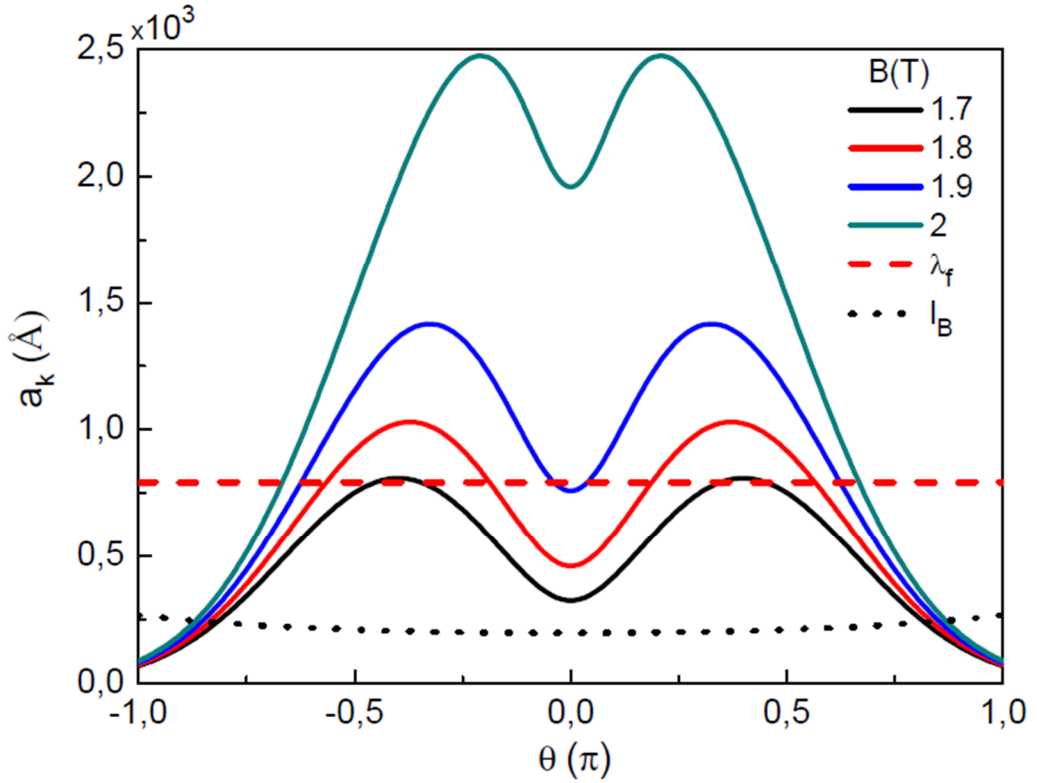
2BES'nin tanımlı olduğu silindir yüzey üzerinde sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlıkları farklı manyetik alan değerlerinde hesaplanmıştır.



Şekil 4.8: Farklı manyetik alan değerlerinde silindir yüzey üzerinde form alan sıkıştırılmaz şeritleri belirtir. (a) 1.7T, (b) 1.8T, (c) 1.9T ve (d) 2T.

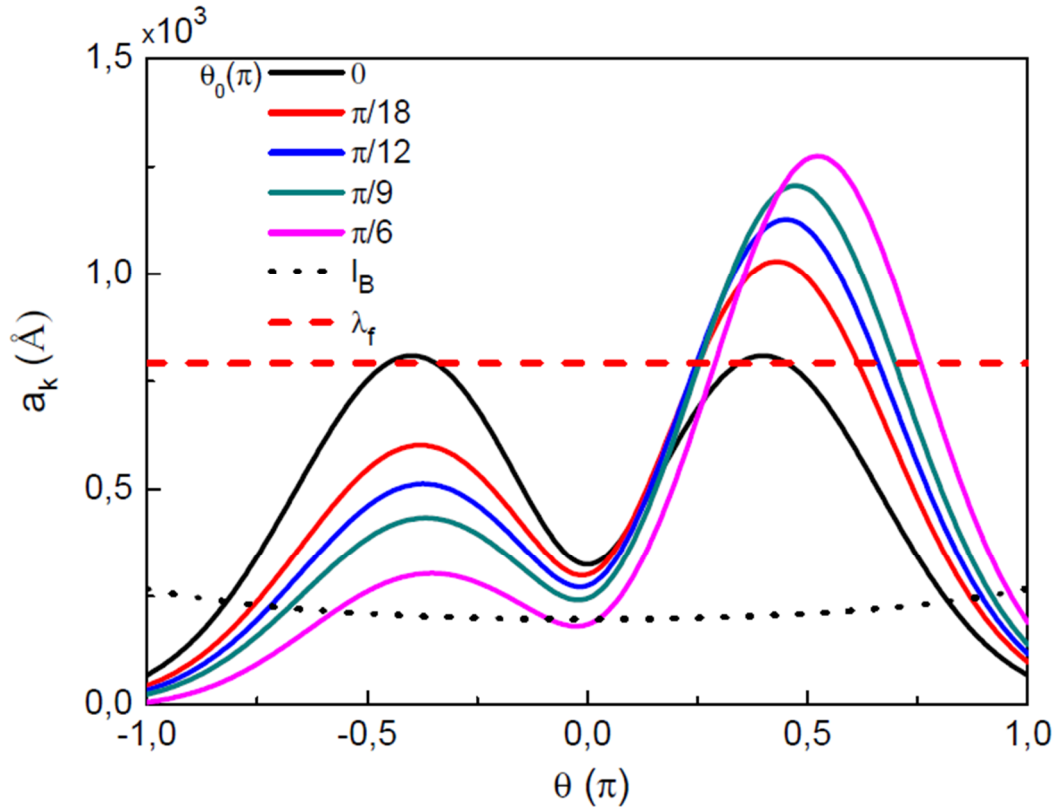
Şekil 4.8 de mavi bölgeler gerçek sıkıştırılmaz şeritleri betimlerken, kırmızı bölgeler artık şeritlerin hayat bulduğu şeritleri niteler. Manyetik alanın değeri arttıkça artık şeritler yok olup gerçek sıkıştırılmaz şeritler oluşmaktadır. Şekil 4.8 (d) dikkate alındığında 2T manyetik alan değeri için karşılıklı iki sıkıştırılmaz şeritin kapalı bir çevrim (loop) formunda olduğu dikkat çekmektedir. Manyetik alanın nüfuz ettiği kapalı bir yörünge boyunca ilerleyen tek bir elektron dikkate alındığında, elektronun izlediği iki yörünge arasında manyetik akı sayısına bağlı olarak oluşacak olan faz farkı nedeniyle Aharonov-Bohm fazı gözlenebilir ($\Delta\phi = 2\pi\Phi/\Phi_0$; Φ toplam manyetik akı, Φ_0 manyetik akı kuantası). Şekil 4.7 ile Şekil 4.8 (d)'yi ilişkilendirmek gerekirse S ucundan

gönderilen tek bir elektron kapalı çevrim içerisinde geçen manyetik akı sayısına bağlı olarak D_1 veya D_2 ucunda yapıcı veya yıkıcı girişim yaparak sonlanabilir. Aharonov-Bohm fazının iletkenlik osilasyonlarının gözlenebilmesi de kapalı çevrim içerisinde geçen manyetik akı sayısı ile birlikte sıkıştırılmaz şerit kalınlığı ve şeritlerin karşılıklı mesafesi gibi bazı kesin şartlara bağlıdır. Bu şartların sıkıştırılmaz şeritlerin kapalı ilmik formunda biçimlendiği manyetik alan değerinde (Şekil 4.8 (d)) sağlanması mümkün olabilir.



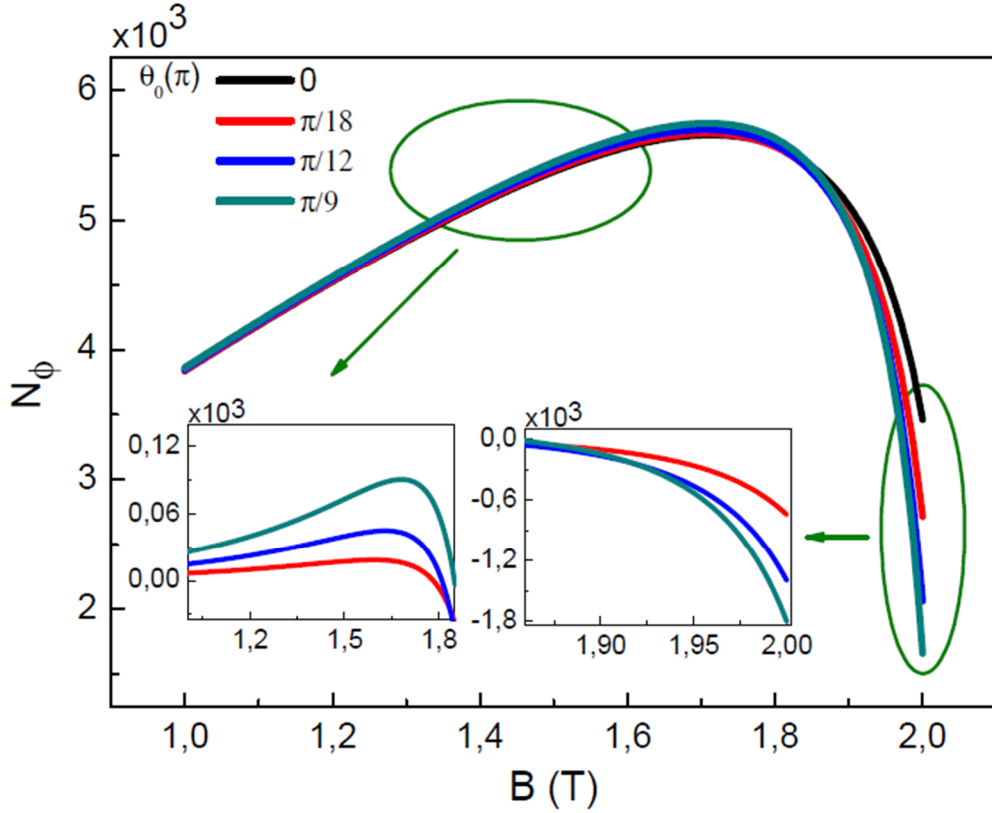
Şekil 4.9: Farklı manyetik alan değerlerinde merkez açının $\theta=0$ da konumlandığı durum için açıya bağlı olarak şerit kalınlığını gösterir.

Şekil 4.9'dan da anlaşılacağı üzere $a_k \geq \lambda_f$ olduğu aralık gerçek sıkıştırılmaz şeritlerin oluştuğu bölgedir ve gerçek şeritlerin oluşumunu manyetik alanın 2T değeri için en iyi şekilde görmek mümkündür.



Şekil 4.10: Farklı merkez açı değerleri için sabit manyetik alan altında ($B=1.7T$) açığa bağlı olarak şeritlerin oluşumu gösterir.

Silindir geometrisinin $[-\pi/3, \pi/3]$ aralığında dikkate alındığı ve merkez açının $[0, \pi/3]$ aralığında $\theta=0$ noktasından başlayarak belli aralıklarla kaydırılarak farklı merkez açı değerleri için hesaplanan şerit kalınlıkları Şekil 4.10 da gösterilmiştir. Merkez koordinatın kaydırılmasıyla şekillenen sıkıştırılmaz şeritlerin de açı doğrultusunda kaydığı gözlenmektedir. Böylece silindir yüzeyi üzerinde farklı merkez açı değerlerinde kapalı çevrim şeklinde oluşan sıkıştırılmaz şeritlerin kapattığı alan da değişmektedir. Alanın değişmesiyle birlikte kapalı çevrim içerisinden geçen manyetik akı sayısı da değişecektir. Sıkıştırılmaz şeritlerin kapattığı alanın ve dolayısıyla alanın içinden geçen manyetik akı sayısının değişmesiyle Aharonov-Bohm fazını gözlemek farklı alanlarda mümkün olabilir.



Şekil 4.11: Manyetik alana bağlı olarak farklı merkez açı değerlerinde akı hesabını gösterir.

Düz 2BES’de kapalı bir çevrim içinden geçen manyetik akı sayısı, manyetik alana bağlı olarak lineer davranış sergilerken, silindirik yüzey üzerinde tanımlı olan 2BES’de eğriliğin bir neticesi olarak lineer davranış sergilemediği Şekil 4.11’de farklı merkez açı değerleri için gösterilmiştir.

4.2.2. Zeeman Yarılması

Elektronun spin serbestlik derecesi dikkate alındığı ve Landau seviyelerinin yarılarak doldurma faktörünün tek ve çift durumlarına tekabül eden Zeeman yarılması altında tek parçacık enerji band boşluğu sırasıyla tek ve çift durumlar için verilmiştir.

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{tek}} &= g^* \mu_B B \\ \Delta E_{\text{çift}} &= \hbar \omega_c - g^* \mu_B B\end{aligned}\tag{4.77}$$

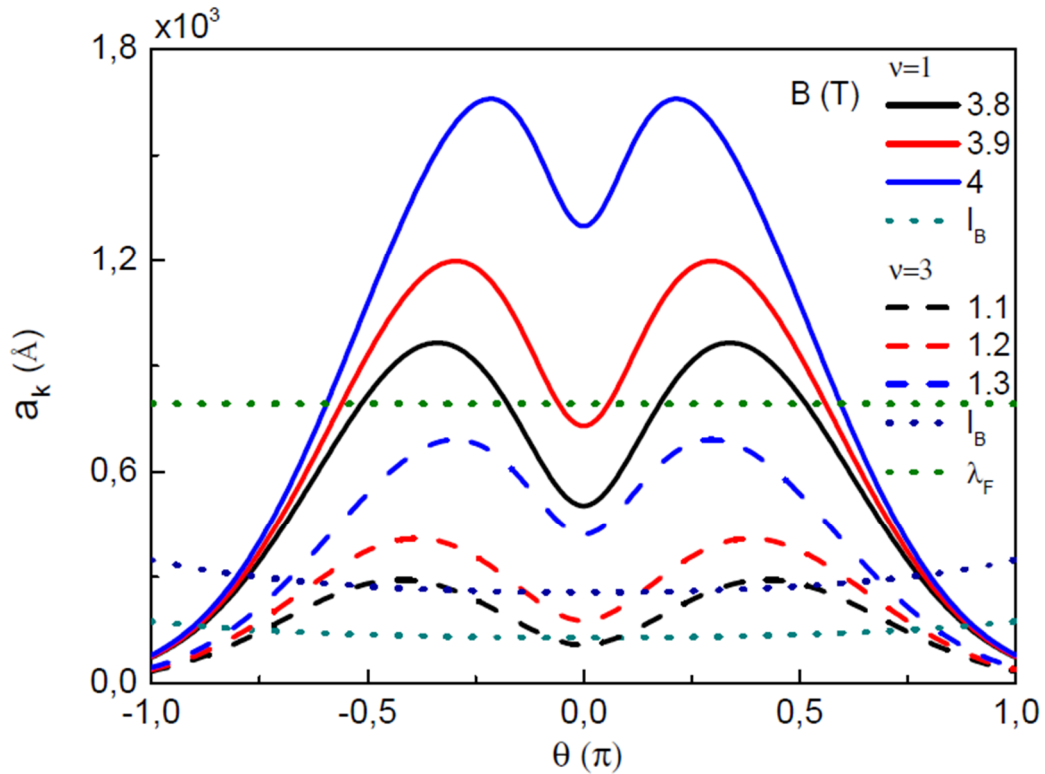
Burada g^* Landé g faktörü ve μ_B Bohr magnetonudur. İlk durumda doldurma faktörünün tek değerleri incelenecektir.

4.2.2.1. Tek Değerli Doldurma Faktörü

Tek değerli doldurma faktörüne takabül eden sıkıştırılmaz şerit kalınlığı,

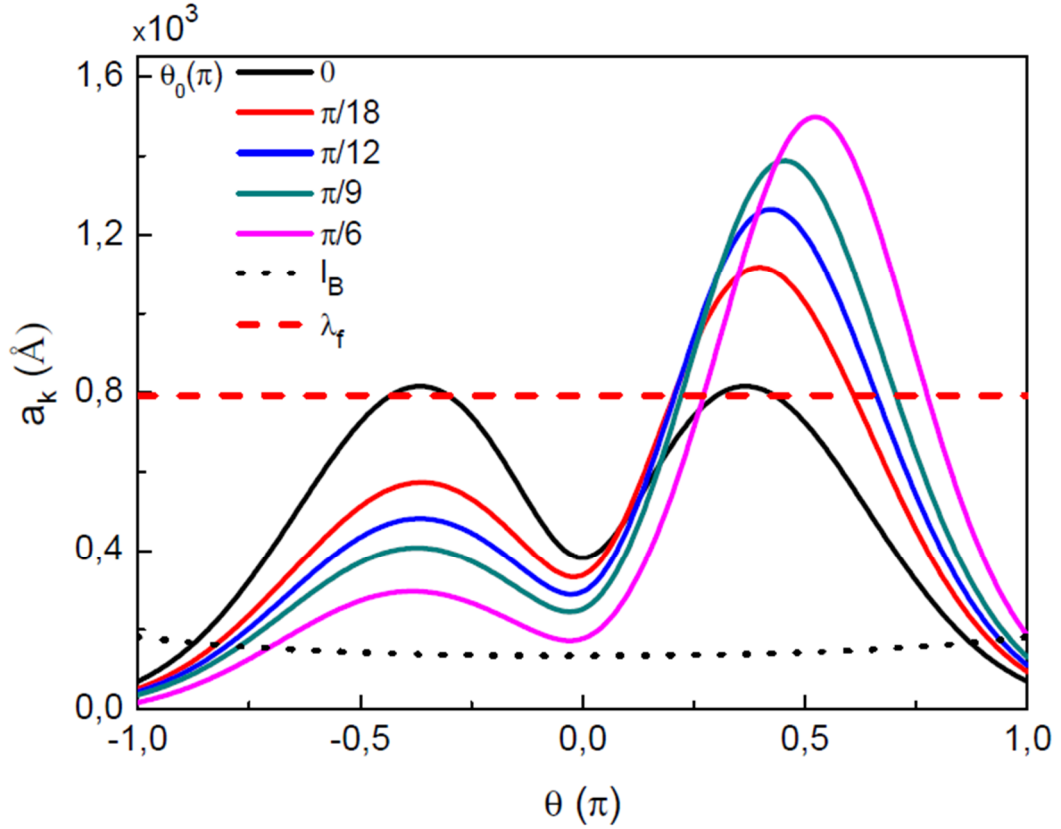
$$(a_k)_{\text{tek}} = \left(\frac{8a_B l_d k}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{\cos \theta} \right)^{1/2} \frac{v_0}{(v_0^2 - k^2)} \quad (4.78)$$

ile verilir. Burada doldurma faktörünün sırasıyla $v=1$ ve $v=3$ değerleri için sıkıştırılmaz şerit kalınlığı hesaplanacaktır.



Şekil 4.12: Farklı manyetik alan değerleri için açının bir fonksiyonu olarak $v=1$ ve $v=3$ doldurma faktörlerine karşılık gelen şerit kalınlıkları hesaplanmıştır.

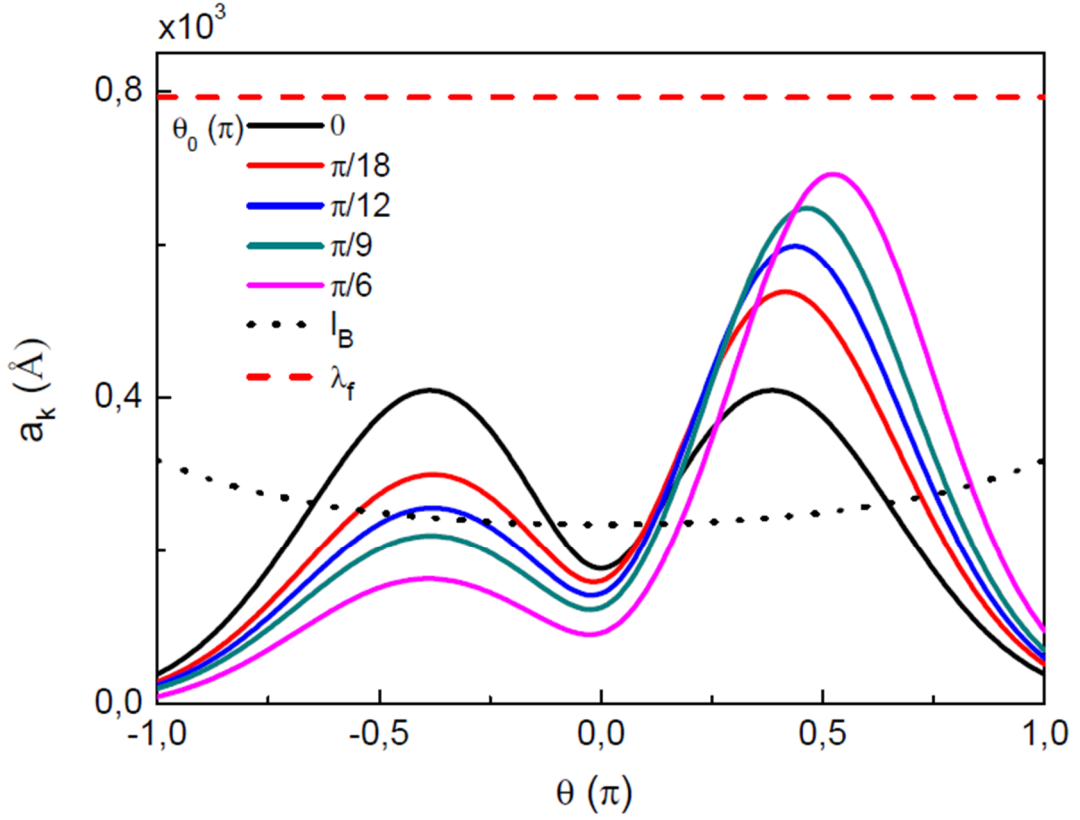
Şekil 4.12, $v=1$ ve $v=3$ doldurma faktörlerine karşılık gelen sıkıştırılmaz şeritlerin farklı manyetik alan değerlerinde oluşumunu gösterir. Gerçek sıkıştırılmaz şeritin $v=1$ platosu için manyetik alanın 4T değerinde oluştuğunu görmek mümkündür. Burada merkez açı $\theta=0$ değerinde konumlandırılmıştır. Doldurma faktörünün $v=3$ değeri için farklı manyetik alan değerlerinde sabit merkez açı değerinde şerit kalınlığı Şekil 4.12 de gösterilmiştir. Burada gerçek sıkıştırılmaz şeritlerin oluşmadığı açıkça görülmektedir ve $I_B \leq a_k \leq \lambda_F$ olduğu aralıkta artık sıkıştırılmaz şeritlerin varlığı söz konusudur.



Şekil 4.13: $\nu=1$ değerine karşılık gelen sıkıştırılmaz şeritler sabit manyetik alan değerinde farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır.

Şekil 4.13, sıkıştırılmaz şeritlerin sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerlerinde oluşumu gösterir. Burada merkez açının kaydırılmasıyla sıkıştırılmaz şeritlerin de kaydığını görmek mümkündür ve $a_k \geq \lambda_f$ değerleri gerçek sıkıştırılmaz şeritleri tanımlamaktadır. Farklı merkez açı değerlerinde hesaplanan sıkıştırılmaz şeritlerin kapattığı alanla birlikte alandan geçen manyetik akı sayısı da değişecektir. Böylece yüzey üzerinde değişen bir alan yaratılmasıyla Aharonov-Bohm fazının gözlenmesi mümkün kılınabilir.

Kuantum girişim olayını gözleyebilmek için sıkıştırılmaz şeritlerin kapalı çevrim formunda biçimlendiği manyetik alan değerinde, karşılıklı iki sıkıştırılmaz şerit arasındaki mesafenin manyetik uzunluk mertebesinde yeterince yakın olması ve şerit boyunca ilerleyen elektronun iki artık sıkıştırılmaz şerit arasındaki saçılmaya maruz kalması gibi bazı şartlarında sağlanması gerekir.



Şekil 4.14: $\nu=3$ değerine karşılık sıkıştırılmaz şerit kalınlığı sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır.

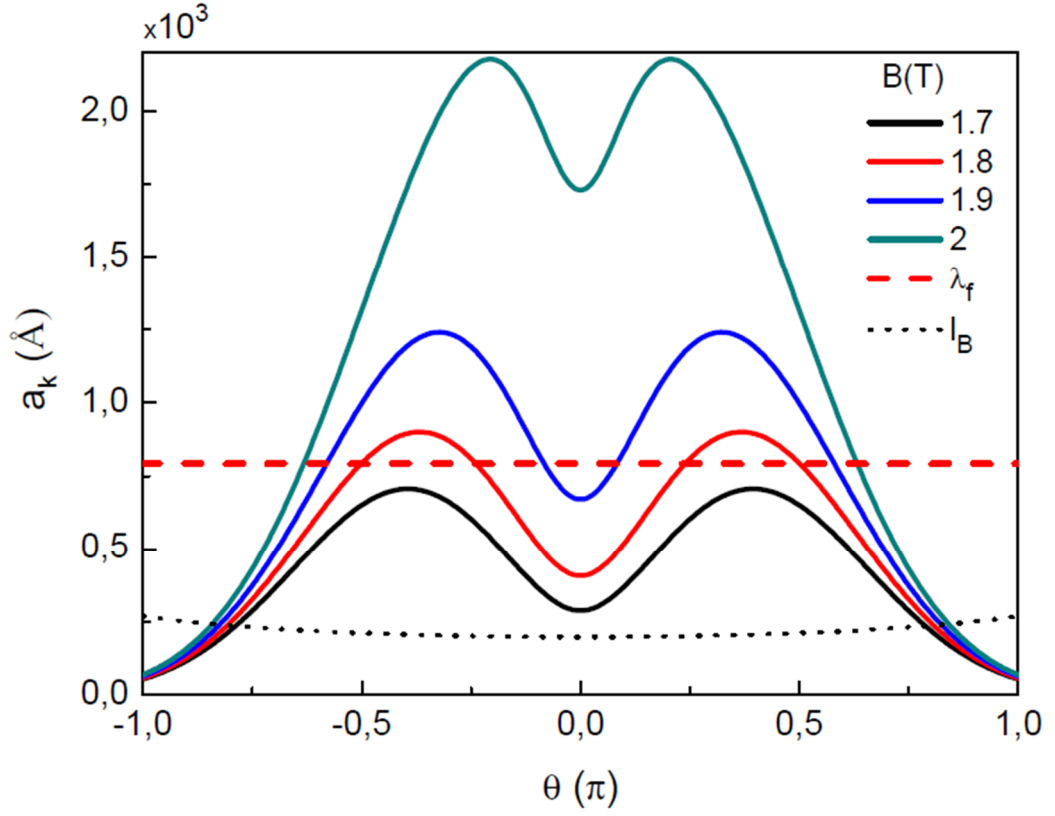
Şekil 4.14, $\nu=3$ doldurma faktörü değerinde sıkıştırılmaz şerit kalınlık hesabı sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır. Doldurma faktörünün 3 değeri için farklı merkez açı değerlerinde hesaplanan sıkıştırılmaz şeritlerin artık şeritler olduğu görülmektedir ($l_B \leq a_k \leq \lambda_F$).

4.2.2.2. Çift Değerli Doldurma Faktörü

Çift değerli doldurma faktörüne karşılık gelen sıkıştırılmaz şerit kalınlık ifadesi,

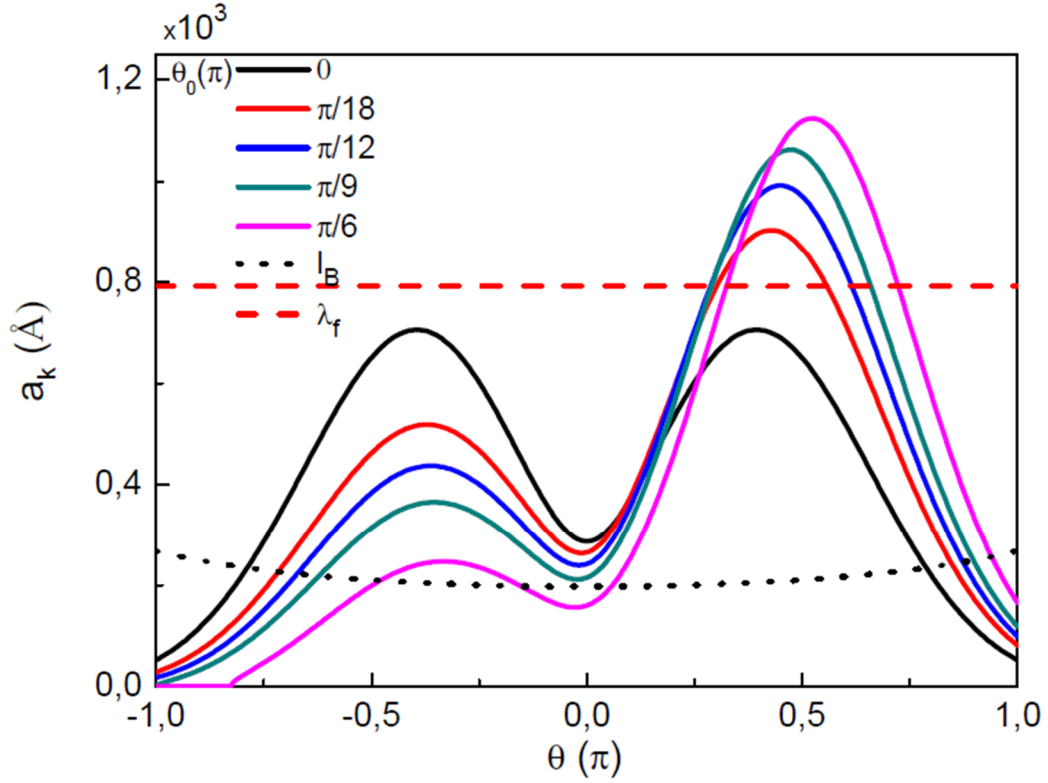
$$(a_k)_{\text{çift}} = \left(\frac{8a_B l_d k}{\pi} \right)^{1/2} \left[2 - \frac{g}{\cos \theta} \right]^{-1/2} \frac{v_0}{(v_0^2 - k^2)} \quad (4.79)$$

ile verilir. Burada $\nu=2$ doldurma faktörü değeri için şerit kalınlığı hesabı yapılacaktır.



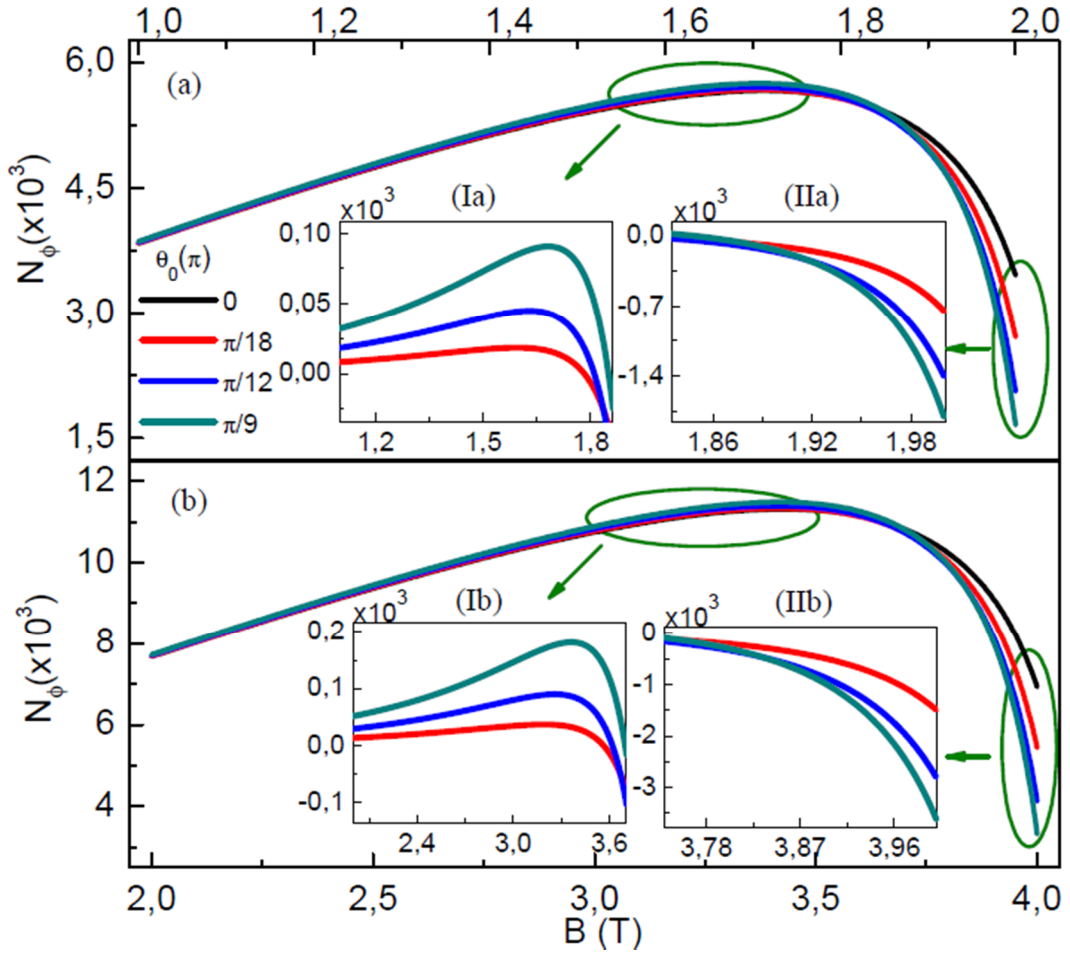
Şekil 4.15: $\nu=2$ değeri için farklı farklı manyetik alan değerlerinde açıya bağlı olarak kalınlık hesabını gösterir.

Doldurma faktörünün çift değerine karşılık gelen ve Zeeman yarılmasının dikkate alındığı sıkıştırılmaz şerit hesabı farklı manyetik alan değerlerinde sabit merkez açı $\theta=0$ değeri için hesaplanmıştır (Şekil 4.15). Manyetik alanın 2T değerinde gerçek sıkıştırılmaz şeritlerin oluştuğunu ($a_k \geq \lambda_F$) görmek mümkündür.



Şekil 4.16: $\nu=2$ değeri için sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerlerinde kalınlık hesabını gösterir.

Şekil 4.16 sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için $\nu=2$ değerine karşılık gelen sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlık hesabını gösterir. Gerçek sıkıştırılamaz şeritlerin $a_k \geq \lambda_F$ aralığında olduğu ve merkez açının kaydırılmasıyla sıkıştırılamaz şeritlerin kaydırılarak farklı alanları kapattığı görülmektedir. Sıkıştırılamaz şeridin kapalı ilmik formunda biçimlendiği manyetik alan değerinde manyetik akı sayısı doğrudan şeritlerin kapattığı alan ile ilişkilidir. Bu çalışmada merkez açı parametresi dikkate alınan geometriden dolayı kritik bir öneme sahiptir. Yüzey üzerinde oluşan sıkıştırılamaz şeritlerin farklı alanları kapatmasıyla alan içerisinde geçen manyetik akı sayısındaki değişim (Şekil 4.7) S ucundan gönderilen elektronun manyetik akı sayısına bağlı olarak yapıcı veya yıkıcı girişimiyle farklı (D_1 veya D_2) kontaklarda sonlanmasına neden olur. Sıkıştırılamaz şeritin kapattığı alan ve alanın içerisinde geçen manyetik akı sayısındaki değişimden faydalanarak Aharonov-Bohm osilasyonlarını görmek mümkün olabilir.



Şekil 4.17: Doldurma faktörünün tek ve çift değerlerine karşılık manyetik alana bağlı olarak farklı merkez açı değerleri için kapalı çevrim içinden geçen manyetik akı sayısı hesaplanmıştır. (a) $\nu=2$ değeri ve (b) $\nu=1$ değerini gösterir.

Şekil 4.17 doldurma faktörünün $\nu=1$ (a) ve $\nu=2$ (b) değerlerine karşılık gelen farklı merkez açı değerleri için şeritlerin kapalı çevrim formunda olduğu manyetik alan aralığında, çevrim içerisinde geçen manyetik akı sayısı hesaplanmıştır. Şekil 4.17 (Ia) ve (Ib) ise düz 2BES’nde manyetik alana bağlı olarak lineer davranış sergileyen manyetik akının lineer davranış eğiliminden çıkıp lineer olmayan bir davranış sergilediği aralığı belirten grafiklerdir.

4.3. CHKLOVSKİİ MODELİ

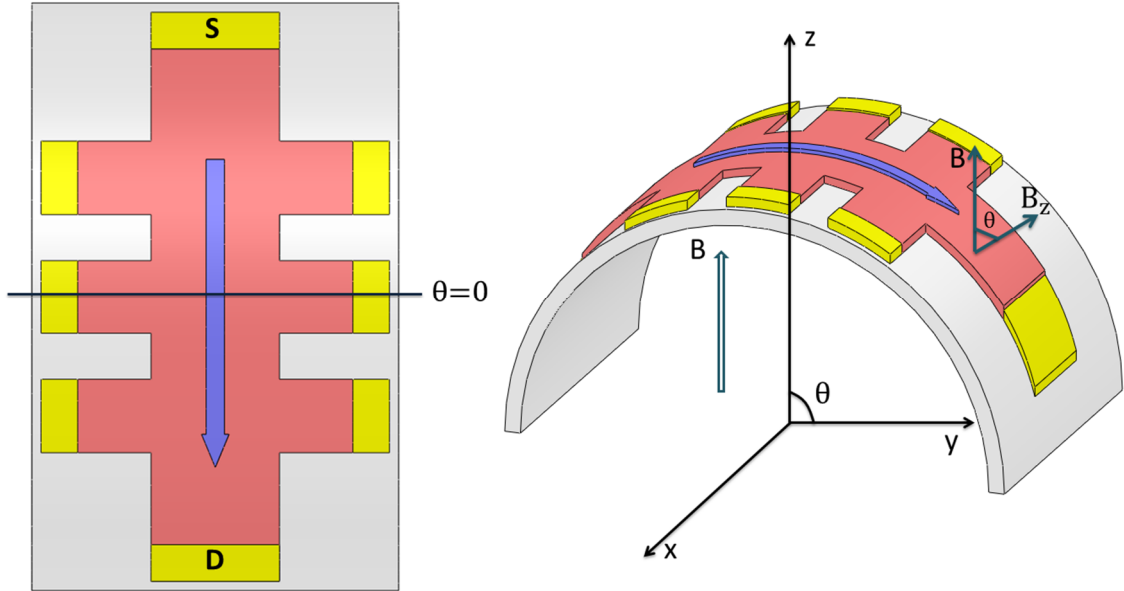
Yüksek manyetik alan ve düşük sıcaklıkta 2BES’nde biçimlenen sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlık hesabı Chklovskii tasviri ile ele alınacaktır. Sistemi tanımlayan elektron yoğunluğu, boşaltım bölgesi, şerit kalınlığı gibi nicelikler Bölüm 3.1 de anlatılan Chklovskii tasvirinde verilen nicelikler ile özdeşdir. Aşağıda bu nicelikler belirtilmiştir.

$$n(x) = n_0 \left(\frac{x - l_d}{x + l_d} \right)^{1/2}, |x| > l_d,$$

$$l_d = \frac{V_g \varepsilon}{4\pi^2 n_0 e},$$

$$a_k^2 = \frac{2\varepsilon \Delta E}{\pi^2 e^2 \left. \frac{dn(x)}{dx} \right|_{x=x_k}}$$
(4.80)

Burada doldurma faktörünün çift ve tek değerleri için sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlık hesabı silindirik bir geometriye sahip 2BES için irdelenecektir. Bu geometrinin şematik bir temsili Şekil 4.18 de verilmiştir.



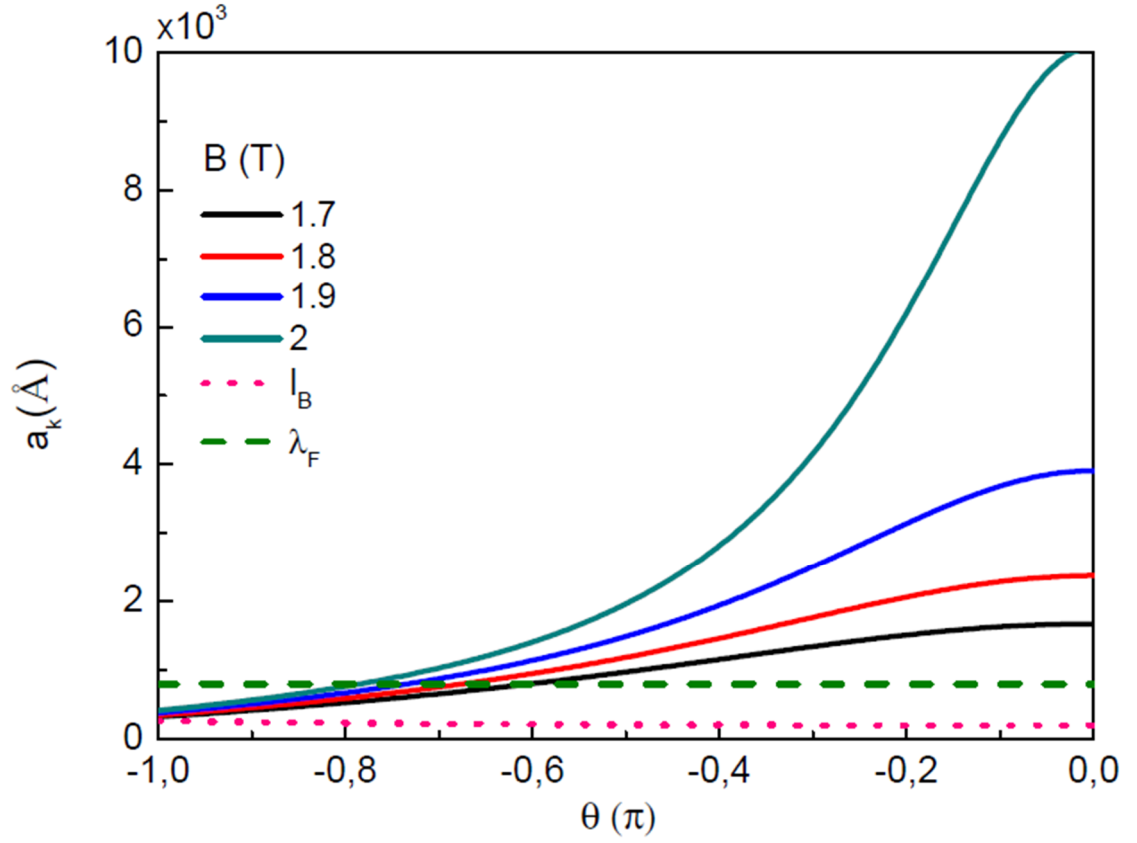
Şekil 4.18: Silindirik bir geometri üzerinde dik bir manyetik alana maruz bırakılan kuantum Hall çubuğu tasvir edilir. Ok akımın akış doğrultusunu belirtir. $\theta=0$ silindir yüzeyinin konumlandığı merkez açısı belirtilir.

4.3.1. Çift Değerli Doldurma Faktörü

Doldurma faktörünün çift değerine $\nu=2$ karşılık gelen sıkıştırılmaz şerit kalınlığı,

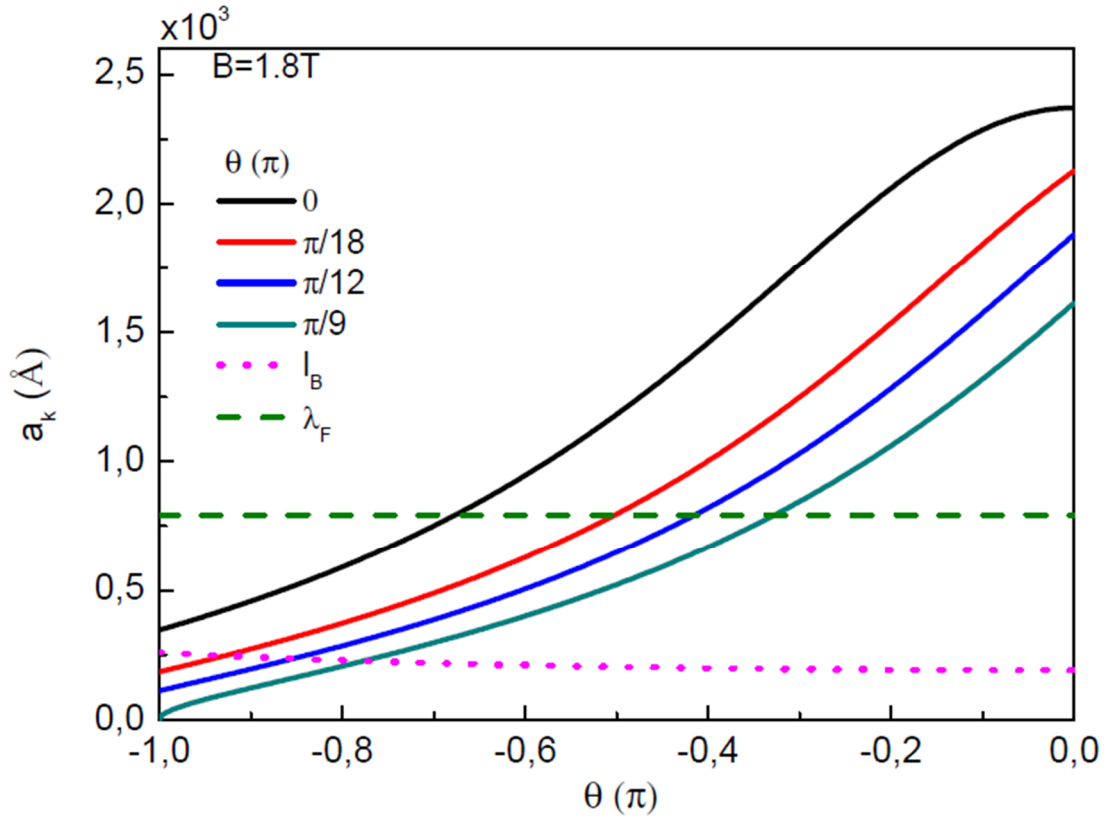
$$(a_k)_{\text{çift}} = \left(\frac{8a_B l_d k}{\pi} \right)^{1/2} \left[2 - \frac{g}{\cos \theta} \right]^{-1/2} \frac{v_0}{v_0^2 - k^2}$$
(4.81)

ile verilir. Burada a_B etkin Bohr yarıçapı ($\sim 9.8 \text{ nm}$), l_d boşaltım bölgesi ($\sim 2200 \text{ \AA}$) ve g Landé g faktörüdür. Manyetik alan ve merkez açısı bu hesapta değişken parametreler olarak dikkate alınacaktır.



Şekil 4.19: Farklı manyetik alan değerlerinde sabit merkez açısı ($\theta=0$) sıkıştırılmaz şerit kalınlık hesabını gösterir.

Farklı manyetik alan değerlerinde açının bir fonksiyonu olarak merkez açının $\theta=0$ noktasında konumlandığı durum için şerit kalınlığı Şekil 4.19 da belirtilir. Burada sistem simetrik bir geometriye sahip olduğu için $[-\pi/3, \pi/3]$ aralığı yerine $[-\pi/3, 0]$ aralığında hesaplar yapılmıştır. Gerçek sıkıştırılmaz şeritlerin oluştuğu $a_k \geq \lambda_F$ koşulu Şekil 4.19 da belirtilmiştir.



Şekil 4.20: Farklı merkez açı değerlerinde sabit manyetik alan altında kalınlık hesabını belirtir.

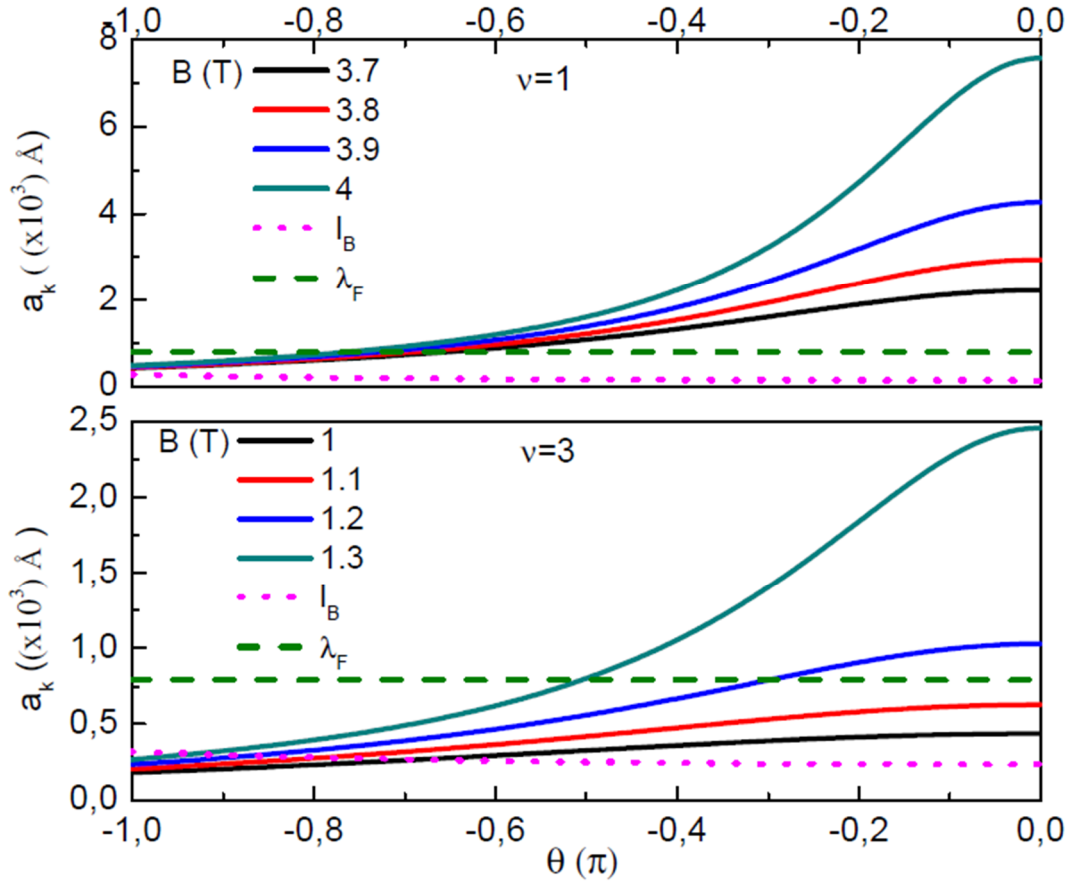
Şekil 4.20 sıkıştırılamaz şerit kalınlık hesabının sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için hesaplanmıştır.

4.3.2. Tek Değerli Doldurma Faktörü

Doldurma faktörünün tek değerine karşılık gelen şerit kalınlığı,

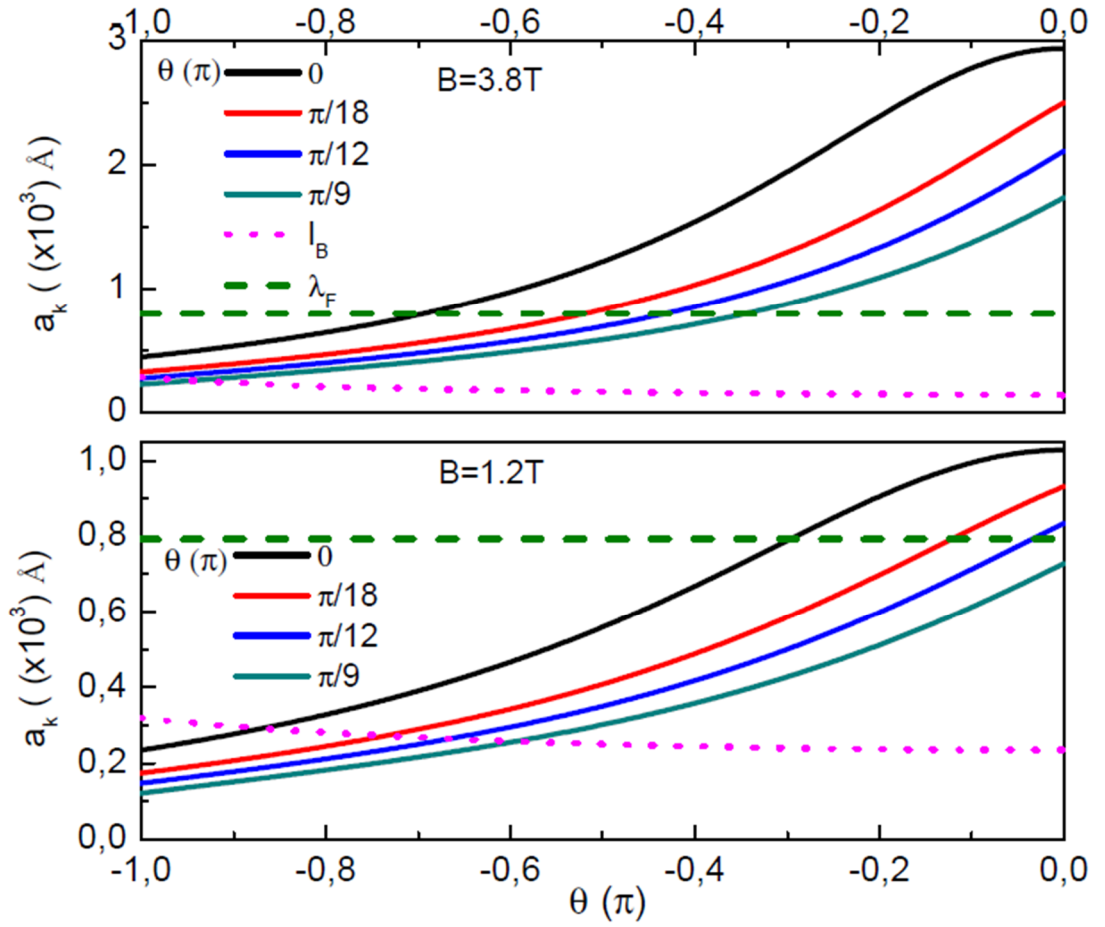
$$(a_k)_{\text{tek}} = \left(\frac{8a_B l_d k}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{\cos \theta} \right)^{1/2} \frac{v_0}{v_0^2 - k^2} \quad (4.82)$$

ile verilir. Burada doldurma faktörünün $v=1$ ve $v=3$ değerleri için kalınlık hesabı yapılmıştır.



Şekil 4.21: Farklı manyetik alan değerlerinde doldurma faktörünün $\nu=1$ ve $\nu=3$ değerleri için kalınlık hesabını gösterir.

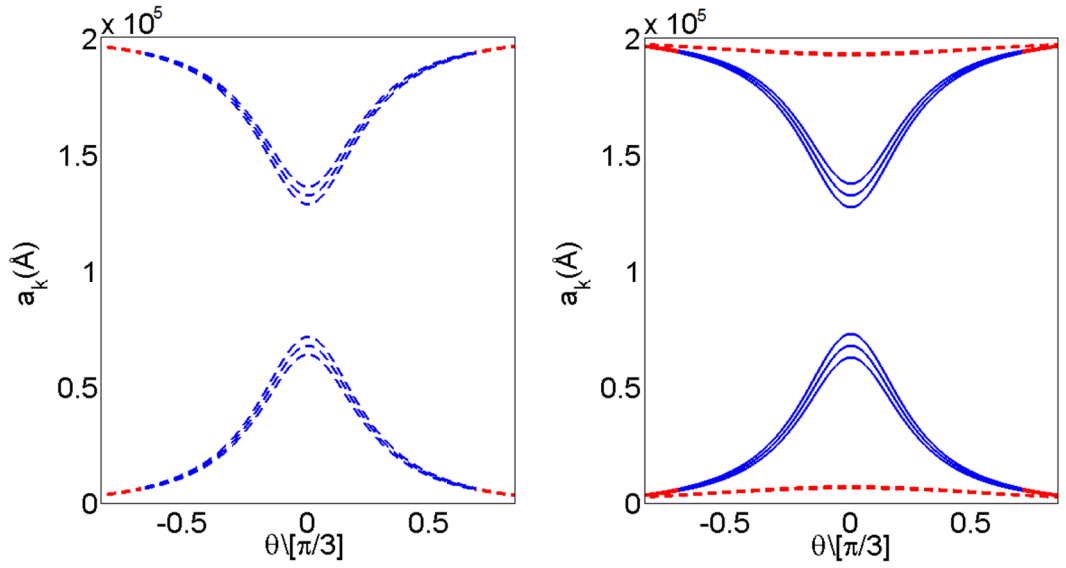
Farklı manyetik alan değerlerinde (sabit merkez açısı, $\theta=0$) doldurma faktörünün tek değerlerine karşılık gelen sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlık hesabı Şekil 4.21 de gösterilmiştir.



Şekil 4.22: Sabit manyetik alan altında farklı merkez açı değerleri için doldurma faktörünün tek değerleri üst grafik $\nu=1$ ve alt grafik $\nu=3$ için kalınlık hesabını gösterir.

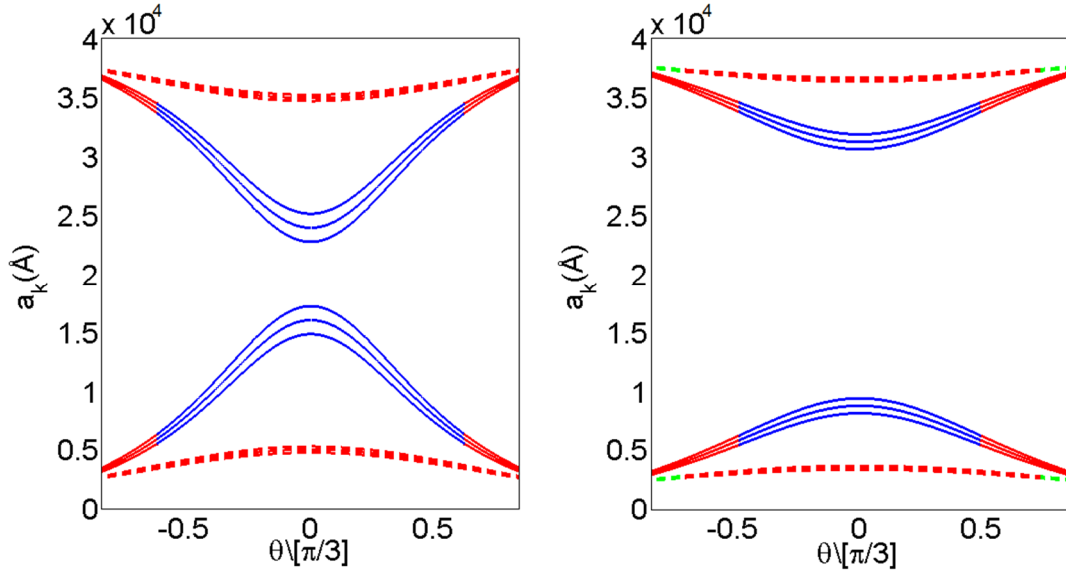
Şekil 4.22 tek değerli doldurma faktörü $\nu=1$ ve $\nu=3$ için kalınlık hesabının farklı merkez açı değerlerinde sabit manyetik alan altındaki sonucudur.

Doldurma faktörü $\nu=1$ ve $\nu=2$ değerleri için yüksek manyetik alandan düşük manyetik alana doğru sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlıkları ve şeritlerin gerçek veya artık olarak şekillendiği aralık Şekil 4.23 de gösterilmiştir. Mavi şeritler gerçek sıkıştırılmaz şerit kalınlığını ($I_B < \lambda_F < a_k$) temsil ederken kırmızı şeritler artık sıkıştırılmaz şeritleri ($I_B < a_k < \lambda_F$) temsil etmektedir.



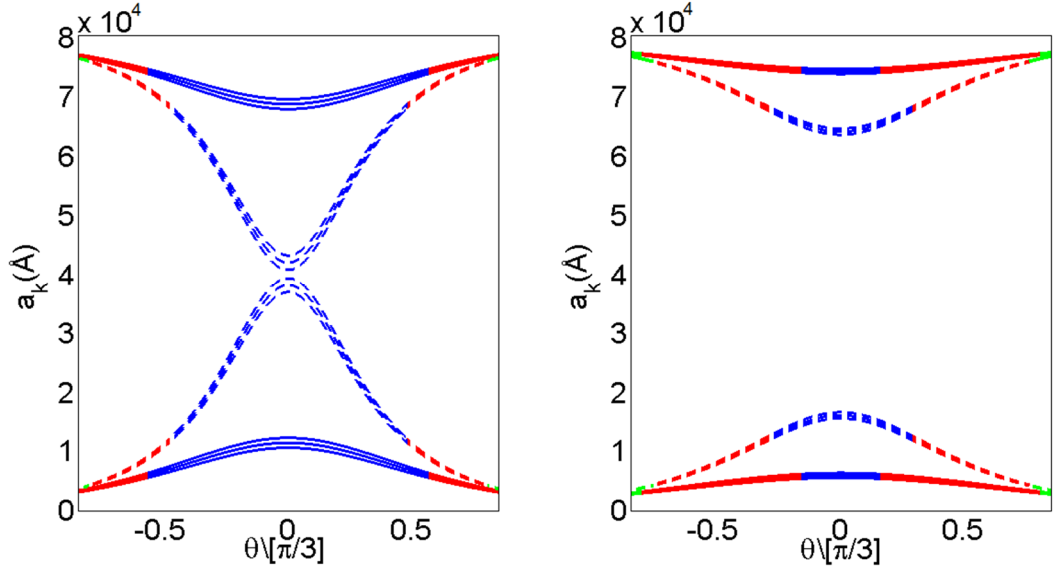
Şekil 4.23: Soldaki grafik $\nu=1$ platosunun tek başına olduğu 4T manyetik alan değerine karşılık gelen kalınlık hesabıdır. Sağdaki grafik ise $\nu=1$ ve $\nu=2$ platolarının bir arada olduğu daha düşük manyetik alan ($\sim 2T$) değerlerinde kalınlık hesabını gösterir. Düz çizgi $\nu=2$ platosuna karşılık gelir, kesikli çizgiler ise $\nu=1$ platosuna karşılık gelir.

Şekil 4.24 de ise daha düşük manyetik alan değerlerinde $\nu=1$ ve $\nu=2$ platolarında şekillenen sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlık hesabını gösterir. Burada her iki plato değerinde sıkıştırılamaz şeritlerin artık olarak olduğu bir aralık mevcuttur.



Şekil 4.24: Düşük manyetik alan değerlerinde ($<2T$) $\nu=1$ ve $\nu=2$ platoları için sıkıştırılamaz şerit kalınlıklarını gösterir. Düz çizgi $\nu=2$ platosuna karşılık gelir, kesikli çizgiler ise $\nu=1$ platosuna karşılık gelir.

Şekil 4.25 ise düşük manyetik alan değerlerinde ($<1.3T$) $\nu=2$ ve $\nu=3$ plato değerlerine karşılık gelen sıkıştırılamaz şeritlerin kalınlıklarını temsil eder.



Şekil 4.25: $v=2$ ve $v=3$ platolarının kalınlık hesabını gösterir. Kesikli çizgiler $v=3$ platosunu temsil eder, düz çizgiler $v=2$ platosunu temsil eder. Kırmızı şeritler sıkıştırılmaz şeritlerin artık olarak oluştuğu aralığı belirtir.

Chklovskii tasviri dikkate alındığında silindir bir geometri üzerinde biçimlenen sıkıştırılmaz şeritlerin kalınlık hesabı elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın ilk aşamasında, dik bir manyetik alana maruz bırakılan iki boyutlu elektron sisteminin enerji özdeğerleri yarı klasik yaklaşıklık altında incelenmiştir. Sistemi tasvir eden en uygun ve ideal model tek boyutlu harmonik osilatör problemidir. Örnek kenarında sonsuz potansiyel duvarı etkisinin de dikkate alındığı sistemde WKB metodu kullanılarak, örnek içerisinde enerji özdeğerleri konumdan bağımsız olarak elde edilirken kenar civarında enerji özdeğerleri konuma bağlı olarak elde edilmiştir. Yeterince yüksek manyetik alan varlığında manyetik uzunluk niceliğinin de yeterince küçük olduğunu kabul edersek potansiyelin yavaşça değiştiği sistemlerde geçerli olan WKB metodu çalıştığımız sistem üzerinde de geçerliliğini sürdürebilir. Kenar civarında sonsuz potansiyel duvarının etkisi analitik olarak parçacığın dalga fonksiyonunu yazabilmeyi zorlaştırırken, WKB metodu kenar civarında yarı klasik olarak dalga fonksiyonunu yazabilme imkanı tanır. Sistemin enerji özdeğerleri yarı klasik yaklaşıklık altında elde edilir ve Maslov indeksi ile ilişkilendirilir. Klasik dönme noktalarında parçacığın kazandığı faz ile ilişkili bir terim olan Maslov indeksi kenar civarında, örnek içerisinde ve osilatör merkezinin kenara yaklaştığı üç farklı durum için farklı değerlere sahiptir. Örnek ortasında düz olan Landau seviyeleri örnek kenarlarına yaklaştıkça enerji özdeğerleri modifiye olarak yukarıya doğru bükülmektedir. Sonrasında silindirik koordinatlarda benzer sınır şartları varlığında problem incelenerek enerji özdeğerlerinin düz 2BES ile aynı davranış sergilediği belirlenmiştir.

Düz 2BES'leri üzerinde gerçekleştirilen manyeto ölçümleri bu zamana kadar farklı heteroyapılar üzerinde sıklıkla çalışılan bir alan olmasıyla birlikte sistemin taşınım özellikleri de iyi bilinmektedir. Silindir yüzeyler üzerinde oluşturulabilen 2BES'leri ise düz 2BES'leri aksine taşınım özellikleri açısından ilginç sonuçlar doğurmaktadır. MBE tekniği ile oluşturulan yüksek mobiliteli heteroyapılar üzerinde tanımlanan standard Hall çubukları kimyasal aşındırmaya maruz bırakılarak alt yüzeyin bükülmesi sonucu yüzeyin eğrilik kazandırılmasıyla silindir yüzey oluşturulur. Manyetik alan varlığında

2BES'nde oluşan akım kanalları silindir bir yüzey üzerinde uzaysal olarak değişen manyetik alan varlığında ise lokal olarak farklı özelliklere sahip olacaktır.

Çalışmanın ikinci aşamasında ise nümerik modelleme ile oluşturulan silindir bir yüzey üzerinde tanımlı kuantum nokta kontaklar ile standard bir kuantum Hall çubuğu için sıkıştırılamaz şeritlerin oluşum şartları incelenmiştir. Silindir yüzeyi üzerinde oluşan bir sıkıştırılamaz şeridin, kanal boyunca artık veya gerçek olarak birlikte şekillenebileceği belirlenmiştir ve dolayısıyla uzaysal olarak farklı noktalarda kanal boyunca taşınan akımın özellikleri de farklılık gösterir. Parçacığın spin serbestlik derecesinin dikkate alınmadığı Landau seviyeleri ile spin serbestlik derecesinin dikkate alındığı Zeeman yarılması için hesaplar gerçekleştirilmiştir. Kalınlık hesabında manyetik alan ve silindirin merkez açısı değeri değişken parametreler olarak dikkate alınmıştır. Öyle ki sıkıştırılamaz şeritlerin parçacığın spin serbestlik derecesinden bağımsız olarak kapalı ilmik formunda biçimlendiği bir manyetik alan değeri vardır. Bu manyetik alan değerinde merkez açısı değiştirilerek sıkıştırılamaz şeritlerin farklı alanları kapattığı bir çevrim elde edilmiştir. Alana bağlı olarak çevrim içerisinden geçen manyetik akı sayısı da değişecektir. Geometrik bir faz olan Aharonov-Bohm fazı, manyetik alanın nüfuz ettiği kapalı bir çevrim boyunca ilerleyen elektronun manyetik akı sayısına ve elektronun ilerlediği iki yörünge arasında kazandığı faz farkına bağlı olarak gözlenebilir. Bu çalışmada ise hem örnek geometrisinden faydalanarak hem de sıkıştırılamaz şeritlerin kapalı çevrim formunda biçimlendiği manyetik alan değerinde ve farklı alanları kapattığı merkez açısı değerlerinde karşılıklı şeritlerin yeterince yakın mesafede olması ve manyetik akı sayısı gibi bazı kesin şartlar altında Aharonov-Bohm fazını gözleyebilmeyi mümkün kılar, çevrim içerisinden geçen manyetik akı sayısına bağlı olarak elektronun kazandığı faz yıkıcı veya yapıcı girişim yaparak farklı kontaklarda sonlanacaktır. Alan içerisinden geçen manyetik akı sayısı düz bir sistemde lineer olarak değişirken silindir bir geometride eğriliğin bir sonucu olarak lineer olarak davranmadığı farklı merkez açısı değerleri için elde edilmiştir.

Kuantum mekaniksel bir sistemin kazandığı Aharonov-Bohm fazından faydalanarak ileride mekanik kontrollü kuantum anahtarı yapmak mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

- Aharonov, Y. and Bohm, D., 1959, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, *The Physical Review*, 115 (3), 485-491.
- Arslan, S., Cicek, E., Eksi, D., Aktas, S., Weichselbaum, A. and Siddiki, A., 2008, Modeling of quantum point contacts in high magnetic fields and with current bias outside the linear response regime, *Physical Review B*, 78, 125423.
- Ashcroft, N.W., Mermin, N.D., 1976, *Solid State Physics*, Harcourt College Publishers, United States of America, ISBN: 0-03-083993-9.
- Avishai, Y. and Montambaux, G., 2008, Semiclassical analysis of edge state energies in the integer quantum Hall effect, *arXiv:0806.2983v1*.
- Aznar, J.H., 2007, *Investigation on unconventional aspects in the quantum Hall regime on narrow gate defined channels*, Ludwig-Maximilians Universität München
- Chklovskii, D.B., Shklovskii, B.I. and Glazman L.I., 1992, Electrostatics of edge channels, *Physical Review B*, 46 (7), 4026-4034.
- Chryssomalakos, C., Franco, A. and Reyes-Coronado, A., 2004, Spin-1/2 particle on a cylinder with radial magnetic field, *European Journal of Physics*, 25, 489-502.
- Cicek, E., Mese, A.I., Ulas, M. and Siddiki A., 2010, Spatial distribution of the incompressible strips at AB interferometer, *Physica E*, 42, 1095-1098.
- Davies, J.H., 1998, *The Physics of Low Dimensional Semiconductors*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN: 0-521-48148-1.
- Dereli, T., Verçin, A., 2009, *Kuantum Mekaniği Temel Kavramlar ve Uygulamaları*, Türk Bilimler Akademisi Ders Kitapları, ISBN: 978-9944-252-30-0.
- Friedland, K.J., Siddiki, A., Hey, R., Kostial, H., Riedel, A. and Maude, D.K., 2009, Quantum Hall effect in a high-mobility two-dimensional electron gas on the surface of a cylinder, *Physical Review B*, 79, 125320.
- Fuchs, J.N., Piéchon, F., Goerbig, M.O. ve Montambaux, G., 2010, Topological Berry phase and semiclassical quantization of cyclotron orbits for two dimensional electrons in coupled band models, *The European Physical Journal B*, 77, 351-362.
- Goerbig, M.O., 2009, Quantum Hall Effects, *arXiv: 0909.1998v2*

- Griffits, D.J., 1995, *Introduction to quantum mechanics*, Prentice Hall, New Jersey.
- Holcomb, D.F., 1999, Quantum electrical transport in samples of limited dimensions, *American Journal of Physics*, 67 (4), 278-297.
- Ihn, T., 2010, *Semiconductor Nanostructures Quantum States and Electronic Transport*, Oxford University Press, New York, ISBN: 978-0-19-953442-5.
- Jeckelmann, B. and Jeanneret, B., 2001, The quantum Hall effect as an electrical resistance standard, *Reports on Progress in Physics*, 64, 1603–1655.
- Keller, J.B., 1958, Corrected Bohr-Sommerfeld Quantum Conditions for Nonseparable Systems, *Annals of Physics*, 4, 180-188.
- Klitzing, K.v. and Dorda, G. and Pepper, M., 1980, New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Physical Review Letters*, 45 (6), 494-497.
- Mendach, S., Schumacher, O., Welsch, H., Heyn, Ch., Hansena W. and Holz, M., 2006, Evenly curved two-dimensional electron systems in rolled-up Hall bars, *Applied Physics Letters*, 88, 212113.
- Prinz, V.Ya., Seleznev, V.A., Gutakovskiy, A.K., Chehovskiy, A.V., Preobrazhenskii, V.V., Putyato, M.A., Gavrilova, T.A., 2000, Free-standing and overgrown InGaAs/GaAs nanotubes, nanohelices and their arrays, *Physica E*, 6, 828-831.
- Salman, A., Yucel, M.B., Siddiki, A., Edge electrostatic revisited, 2013, *Physica E*, 47, 229-236.
- Siddiki, A., Erden Gulebaglan, S., Boz Yurdasan, N., Bilgec, G., Yıldız, A., and Sokmen I., 2010, Evanescent incompressible strips as origin of the observed Hall resistance overshoot, *Europhysics Letters*, 92, 67010.
- Siddiki, A. and Gerhardts R.R., 2004, Incompressible strips in dissipative Hall bars as origin of quantized Hall plateaus, *Physical Review B*, 70, 195335.
- Stormer, H.L., 1999, The fractional quantum Hall effect, *Reviews of Modern Physics*, 71 (4), 875-889.
- Yoshioka, D., 1998, *The Quantum Hall Effect*, Springer Series in Solid State Science, Germany, ISBN: 3-540-43115-2.
- Zettili, N., 2001, *Quantum Mechanics Concepts and Applications*, John Wiley & Sons, LTD., Chichester, ISBN: 0-471-48943-3.

ÖZGEÇMİŞ

Fotoğraf

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	S.Seyyare Aksu
Uyruğu	T.C.
Doğum tarihi, Yeri	1989, İstanbul
Telefon	0543 202 49 53
E-mail	seyyareaksu@gmail.com

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Yüksek Lisans	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/ Fizik Anabilim Dalı / Katıhal Fiziği Programı	2014
Lisans	Fizik Bölümü	2011
Lise	Sarıyer Vehbi Koç Vakfı Lisesi	2007