

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

**HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN
KONOİDAL REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ ÜZERİNE**

KEZİBAN AKDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

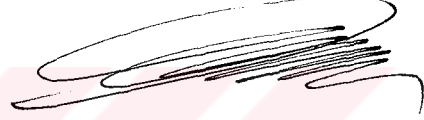
Danışman : Y.Doç.Dr.Mustafa ÇALIŞKAN

Samsun
Ocak 1995

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU



Üye : Y. Doç. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN



Üye : Y. Doç. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL



ONAY

Yukarıdaki İmzaların , adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım

14.12.1995

Prof. Dr. Veysel KARTAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler ve E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeylere yer verilmiş olup, bu yüzeylerin integral invariantları üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde 1-parametrelî hareketler tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde E^n de k . mertebeden helisel hareketler, homotetik hareketler, simetrik-helisel hareketler ve simetrik-homotetik hareketler üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde konoidal regle yüzeyler tanıtılmıştır.

Beşinci bölüm yüksek lisans çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde önce E^n de k . mertebeden helisel hareketlere iştirak eden konoidal aksoid yüzey çiftleri tanıtılmıştır. Daha sonra E^n de k . mertebeden homotetik hareketlere iştirak eden konoidal regle yüzey çiftleri ile ilgili teoremler verilmiştir.

ABSTRACT

This study has been arranged in five chapters. In the first chapter, the ruled surfaces in E^3 , 3-dimensional Euclidean space and $(k+1)$ -dimensional generalized ruled surfaces in the E^n are studied and the integral invariants of these ruled surfaces are given. In the second chapter, 1-parameter motions are introduced. In the third chapter, helical motions, homothetic motions, symmetric-helical motions and symmetric-homothetic motions of order k in the Euclidean space E^n are given. In the fourth chapter, konoidal ruled surfaces are introduced.

The fifth chapter is the original part of my M. Sc. Studies. In this chapter, firstly the pair of konoidal axoids under the helical motions of order k in the E^n are introduced. Then some theorem about the pair of konoidal ruled surfaces under the homothetic motions of order k in the E^n are given.

TEŐEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca danıőmanlıęımı yapan ve bana her türlü yardımda bulunup yol gösteren Saygıdeğer Hocam Sayın Y.Doç.Dr. Mustafa ÇALIŞKAN'a saygılarımla sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Bana çalıőmalarımda destek olup yardımlarını esirgemeyen ,Eğitim Fakóltesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölüm Baőkanı , Saygıdeğer Hocam Sayın Prof.Dr.Nuri KURUOğLU ' na en içten teőekkürlerimi sunarım.

KEZİBAN AKDEMİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
I-REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE.....	1
I.1. E^3 de Regle Yüzeyler.....	1
I.2. E^n de $(k+1)$ -Boyutlu Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler.....	10
II- E^n DE HAREKETLER.....	20
II.1.1-Parametrel Hareketler.....	20
II.2.1-Parametrel Homotetik Hareketler.....	24
III- E^n DE k .MERTEBEDEN HELİSEL VE HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLER.....	27
III.1. E^n de k .Mertebeden Helisel Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	27
III.2. E^n de k . Mertebeden Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	34
III.3. E^n de k . Mertebeden Simetrik-Helisel Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	39
III.4. E^n de k Mertebeden Simetrik-Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri.....	50
IV-KONOİDAL REGLE YÜZEYLER.....	63
IV.1. Konoidal Regle Yüzeyler.....	63
V-HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN KONOİDAL REGLE YÜZEYLER.....	73
V.1. E^n de k . Mertebeden Helisel Hareketler Üzerine.....	73
V.2. Konoidal Aksoit Yüzey Çiftleri.....	76
V.3. E^n de k . Mertebeden Homotetik Hareketler.....	78
V.4. Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri Üzerine.....	79

I. BÖLÜM

REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Bu bölümde önce E^3 de 2-boyutlu regle yüzeyler ve bunların integral invaryantları tanıtılacaktır. Daha sonra E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyler ve bunların integral invaryantları üzerinde durulacaktır.

I.1. E^3 de Regle Yüzeyler

Tanım I.1.1.

Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir **Regle Yüzey** ve $\forall P \in M$ noktasından geçen, M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** denir, [11].

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

eğrisi seçilir ve bu eğriye regle yüzeyin **dayanak eğrisi** adı verilir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta β ise

$$(I.1.1) \quad \begin{aligned}\beta : \mathbb{R} &\rightarrow M \\ v &\rightarrow \beta(v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha'(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$$

birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$(t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur.

Tanım I.1.2.

Bir

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(I.1.2) \quad (t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + v\alpha'(t)$$

regle yüzeyi, $\forall t \in I$ için

$$\varphi(t+2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalıdır** denir,[11].

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri de kapalı eğrilerdir. Bir periyot sonra her anadoğru kendisi üzerine gelir.

Tanım I.1.3.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yürümesi** denir ve

$$\langle a, d\varphi \rangle = 0$$

şeklinde bulunur,[11].

Tanım I.1.4.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** adı verilir,[11].

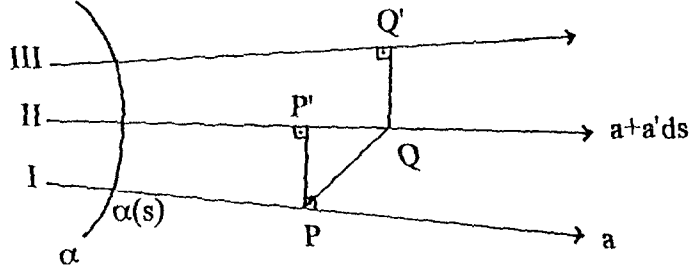
Tanım I.1.5.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** adı verilir, [11].

$\eta(s, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının η yer vektörü ; dayanak eğrisinin $\alpha(s)$ yer vektörü , $a(s)$ doğrultman vektörü ve yer vektörünün dayanak eğrisine olan v uzaklığı cinsinden

$$(I.1.3) \quad \eta(s, v) = \alpha(s) + va(s)$$

şeklinde ifade edilebilir. v parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunur. Regle yüzeyin ilk ikisi , $a(s)$ ve $a(s)+da(s)$ olan komşu üç doğrusu verilsin.



Şekil I.1.1.

P, P' ve Q, Q' komşu ana doğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar . İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi ,

$$(I.1.4) \quad a(s) \wedge [a(s) + a'(s)ds] = a(s) \wedge a'(s)ds$$

bağıntısından dolayı $a \wedge a'$ vektörüne paraleldir. Limit halde PQ vektörü PP' ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$(I.1.5) \quad \langle a, PQ \rangle = 0 \quad , \quad \langle a+a'ds, PQ \rangle = 0$$

olacağından

$$(I.1.6) \quad \langle a', PQ \rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca (I.1.3) den dayanak eğrisinin s -yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\eta}{ds} = T + \frac{dv}{ds} a + v \frac{da}{ds}$$

olur ve (I.1.6) da yerine yazılırsa

$$\left\langle \frac{da}{ds}, \frac{d\eta}{ds} \right\rangle = 0$$

olacağından

$$\left\langle \frac{da}{ds}, T + \frac{dv}{ds} a + v \frac{da}{ds} \right\rangle = 0 ,$$

$$(I.1.7) \quad \langle a', T \rangle + v \|a'\|^2 = 0 ,$$

$$v = - \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2}$$

bulunur . Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (I.1.3) den

$$(I.1.8) \quad \eta(s) = \alpha(s) - \frac{\langle a', T \rangle}{\|a'\|^2} a(s)$$

elde edilir. Eğer $\|a'\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder . Regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (I.1.8) de

$$(I.1.9) \quad v=0 \quad \text{veya} \quad \langle a', T \rangle = 0$$

alınması yeterlidir.

Tanım I.1.6.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyin bir anadoğrusunu kapsayan ve yüzey normaline dik olan düzleme **teğet düzlem** denir.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + va(s)$$

denkleminde s ve v ye göre kısmî türev alındığında

$$\varphi_s = T + va' \quad , \quad \varphi_v = a(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_s \wedge \varphi_v = (T + va') \wedge a(s) ,$$

$$\varphi_s \wedge \varphi_v = T \wedge a + va' \wedge a$$

olur. Ayrıca yüzey normali

$$(I.1.10) \quad N = \frac{\varphi_s \wedge \varphi_v}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_s \wedge \varphi_v\|} (T \wedge a + a' \wedge a)$$

olduğundan ve μ sabit olmak üzere teğet düzlemin bir noktasındaki vektörel denklemi

$$\langle \mu a, N \rangle = 0$$

veya (I.1.10) dan

$$(I.1.11) \quad \det[\mu a, T + va', a] = 0$$

olarak bulunur.

Tanım I.1.7.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye **açılabilir** denir,[11].

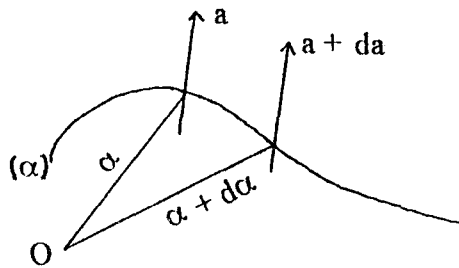
Tanım I.1.8.

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi** (**drali**) denir,[11].

Anadoğruların birim doğrultman vektörü a olan bir regle yüzeyin dağılma parametresini P_a ile gösterelim. Komşu iki anadoğrunun ortak dikmesi doğrultusundaki bir vektör (I.1.4) den dolayı $a \wedge a'$ vektörüne paralel olduğundan bu doğrultudaki birim vektör,

$$\frac{a \wedge a'}{\|a \wedge a'\|} = \frac{a \wedge a'}{\|a\| \|a'\| |\sin \theta|} = \frac{a \wedge a'}{\|a'\|}$$

dir.



Şekil I.1.2.

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\alpha(s)$ ve $\alpha(s) + d\alpha(s)$ olduğundan bu noktalaradaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık, $d\alpha$ vektörünün $\frac{a \wedge a'}{\|a'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklığı

$$z = \langle d\alpha, \frac{a \wedge a'}{\|a'\|} \rangle ,$$

$$z = \frac{1}{\|a'\|} \langle d\alpha, a \wedge a' \rangle ,$$

$$(I.1.12) \quad z = \frac{\det [d\alpha, a, a']}{\|a'\|^2}$$

olarak buluruz. Eğer anadoğruların küresel göstergelerini gözönüne alırsak bu göstergelerin yay elementi olan

$$(I.1.13) \quad d\psi = \left\| \frac{da}{ds} \right\| ds ,$$

komşu iki doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_a = \frac{z}{d\psi} ,$$

$$P_a = \frac{\det [d\alpha, a, a']}{\|a'\|^2} : \|a'\| ds ,$$

$$(I.1.14) \quad P_a = \frac{\det \left[\frac{d\alpha}{ds}, a, a' \right]}{\|a'\|^2}$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral, koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invariantsdır.

Teorem I.1.1.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır,[11].

Bir

$$\varphi(s,v) = \alpha(s) + va(s)$$

regle yüzeyinin anadoğrularının dik yörüngeleri teşkil ettirilir ve burada $d\varphi$ nin tam diferensiyeli gözönüne alınırsa ,

$$(I.1.15) \quad \begin{aligned} \langle a, d\varphi \rangle &= 0 \quad , \\ \langle a, d\alpha + dva + vda \rangle &= 0 \quad , \\ \langle a, d\alpha \rangle + dv \|a\|^2 &= 0 \quad , \\ -dv &= \langle a, d\alpha \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin Regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integralini alırsak

$$(I.1.16) \quad L_a = \int_{(\alpha)} \langle d\alpha, a \rangle = - \int_{(\alpha)} dv$$

elde edilir.Buradan

$$\begin{aligned} L_a : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow L_a(v) = - \int_{(\alpha)} dv \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olan L_a fonksiyonuna regle yüzeyin **açılım uzunluğu (adımı)** denir.

Açılım uzunluğu regle yüzeyin integral invaryantıdır. Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri gözönüne alınırsa , adım hiç bir zaman regle yüzeyin striksiyon eğrisinin uzunluğunu aşamaz , fakat eşitlik hali mümkündür. Açılabilir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise striksiyon eğrisi bir nokta ve dolayısıyla regle yüzey bir koni olur.

Tanım I.1.9.

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü a olan bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir peryot sonra ilk konumu ile yaptığı açığı regle yüzeyin **açılım açısı** denir ve λ_a ile gösterilir,[11].

$\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin a doğrultman vektörünü

$$(I.1.17) \quad a_1 = a_1(s)$$

olacak şekilde bir ortonormal üç ayaklının ilk bileşeni olarak alalım. Doğrultmana dik olan vektörü a_2 birim vektörü olarak alırsak

$$a_3 = a_1 \wedge a_2$$

şeklinde $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormal sistemini tespit etmiş oluruz. Böylece regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden uzayı $\{a_1, a_2, a_3\}$ çatısının gerdiği uzay olarak alabiliriz. Bir tam dönmeden sonra doğrultmanın ilk ve son konumları aynı olacağından \bar{a}_1 ve a_1 ile gösterilen bu konumlar için

$$\bar{a}_1 = a_1$$

elde edilir. Aynı şekilde üç ayaklının diğer vektörlerinin ilk ve son konumlarını, sırası ile a_2, a_3 ve \bar{a}_2, \bar{a}_3 ile gösterelim. Böylece sabit sistemi $\{\alpha(s_0) : \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ ve hareketli sistemide $\{\alpha(s_0) : a_1, a_2, a_3\}$ şeklinde alalım. İkinci ve üçüncü eksenlerin ilk ve son konumları arasındaki açı θ ve dönüşümü A ise A ya karşılık gelen matris,

$$(I.1.18) \quad A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{bmatrix}$$

ve buradan da

$$(I.1.19) \quad \begin{aligned} a_2 &= \bar{a}_2 \cos\theta - \bar{a}_3 \sin\theta \\ a_3 &= \bar{a}_2 \sin\theta + \bar{a}_3 \cos\theta, \quad \theta = \theta(s) \end{aligned}$$

yazılabilir. (I.1.19) dan diferensiyel alınırsa

$$(I.1.20) \quad \begin{aligned} da_2 &= d\bar{a}_2 \cos\theta - d\bar{a}_3 \sin\theta + (-\bar{a}_2 \sin\theta - \bar{a}_3 \cos\theta)d\theta \\ da_3 &= d\bar{a}_2 \sin\theta - d\bar{a}_3 \cos\theta + (\bar{a}_2 \cos\theta - \bar{a}_3 \sin\theta)d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. \bar{a}_2 ve \bar{a}_3 sabit sistemde olduğundan

$$(I.1.21) \quad d\bar{a}_2 = d\bar{a}_3 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla (I.1.20) denklem sistemi

$$\begin{aligned} da_2 &= (-\bar{a}_2 \sin\theta - \bar{a}_3 \cos\theta)d\theta, \\ da_3 &= (\bar{a}_2 \cos\theta - \bar{a}_3 \sin\theta)d\theta \end{aligned}$$

olacağından (I.1.19) dan dolayı

$$(I.1.22) \quad \begin{aligned} da_2 &= -a_3 d\theta \\ da_3 &= a_2 d\theta \end{aligned}$$

olur. Buradan $d\theta$ çözülürse

$$(I.1.23) \quad -d\theta = \langle da_2, a_3 \rangle = -\langle da_3, a_2 \rangle$$

elde edilir. Eğer (I.1.23) ün $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak açılım açısının λ_a değeri

$$(I.1.24) \quad \lambda_a = - \int_{\alpha(s)} d\theta$$

veya

$$(I.1.25) \quad \lambda_a = \int_{(\alpha)} \langle da_2, a_3 \rangle = - \int_{(\alpha)} \langle da_3, a_2 \rangle$$

olarak bulunur.

I.2. E^n de $(k+1)$ - Boyutlu Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

E^n de diferensiyellenebilir bir

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

eğrisi verilmiş olsun. Her $\alpha(t)$ noktasında tanımlanmış bir ortonormal vektör alan sistemi $\{ e_1(t), \dots, e_k(t) \}$ olsun. Bu sistem $T_{\alpha(t)}(E^n)$ uzayının k -boyutlu bir alt uzayını gerer, bu uzayı $E_k(t)$ ile gösterirsek

$$(I.2.1) \quad E_k(t) = \text{Sp}\{e_1(t), \dots, e_k(t)\} \subset T_{\alpha(t)}(E^n)$$

olur.

Tanım I.2.1.

$E_k(t)$ altuzayı α eğrisi boyunca hareket ederken E^n de bir $(k+1)$ -boyutlu yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E^n de $(k+1)$ -boyutlu **genelleştirilmiş regle yüzey** denir. E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey Φ ile gösterilir, [5].

Tanım I.2.1.

$E_k(t)$ altuzayına Φ nin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α eğrisine de Φ nin dayanak eğrisi denir. Φ için bir parametrizasyon

$$(I.2.2) \quad \Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

dir. Φ nin t ye ve u_i ye göre türevleri alınırsa

$$\Phi_t = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t)$$

ve

$$\Phi_{u_i} = e_i(t) \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Burada

$$\left\{ \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t), e_1, \dots, e_k \right\}$$

sistemini lineer bağımsız kabul edeceğiz.

Tanım I.2.3.

$$(I.2.3) \quad \text{Sp} \{ e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k \}$$

altuzayına Φ nin $E_k(t)$ ye göre **asimptotik demeti** denir ve $A(t)$ ile gösterilir, [5].
Eğer

$$(I.2.4) \quad \text{boy } A(t) = k+m \quad , \quad 0 \leq m \leq k$$

kabul edilirse $A(t)$ asimptotik demetinin $E_k(t)$ yi ihtiva eden bir

$$(I.2.5) \quad \{ e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m} \}$$

ortonormal bazı bulunabilir.

Teorem I.2.1.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey Φ olsun. $\forall t \in I$ için $E_k(t)$ doğrultman uzayının öyle bir $\{ e_1, \dots, e_k \}$ bazı bulunabilir ki , bu baz için

$$(I.2.6) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \kappa_i > 0 \quad ,$$

$$(I.2.7) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j \quad , \quad m < i \leq k$$

dır , [5].

Burada $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_m > 0$ dır. Bu şekilde tanımlanan $\{ e_1, \dots, e_k \}$ bazına $E_k(t)$ nin **tabii taşıyıcı bazı** veya Φ nin **asli çatısı** denir , [8].

O halde $\{ e_1, \dots, e_k \}$ bazı Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin (I.2.5) nolu bazını tek olarak belirler.

Φ nin sabit bir noktası P olsun . $P = \Phi(t, u_1, \dots, u_k)$ ise P noktasındaki teğet uzayın bir bazı

$$(I.2.8) \quad \{ \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k u_i \dot{e}_i(t) , e_1, \dots, e_k \}$$

olur. Çünkü (I.2.8) sisteminin gerdiği uzay $T_P(\Phi)$ uzayıdır. Burada t sabit tutulup $u_i, 1 \leq i \leq k$, parametreleri değiştirilirse P noktası $E_k(t)$ uzayının noktalarını tarar.

Tanım I.2.4.

$$(I.2.9) \quad Sp \{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\} \subset \bigcup_{P \in \Phi} T_P(\Phi)$$

uzayına Φ nin $E_k(t)$ ye göre **teğetsel demeti** denir ve $T(t)$ ile gösterilir, [5]. Eğer boy $A(t) = k+m$

kabul edilirse

$$(I.2.10) \quad k+m \leq \text{boy } T(t) \leq k+m+1$$

dir. $T(t)$ nin boyutu için iki ihtimali ayrı ayrı inceleyelim.

Kabul edelim ki $\forall t \in I$ için $\text{boy } T(t) = k+m$ olsun. Bu durumda Φ nin α dayanak eğrisinin hız vektörü $A(t)$ uzayının içindedir ve

$$(I.2.11) \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j}, \quad \zeta_i, \eta_j \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$(I.2.12) \quad P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i(t) e_i(t)$$

yazılabilir. Buradan türev alarak

$$\dot{P}(t) = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i),$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^k (\dot{u}_i e_i + u_i \dot{e}_i)$$

bulunur. Bu son eşitlik ve (Teo.I.2.1.) den

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^k (\zeta_i + \dot{u}_i) e_i + \sum_{j=1}^m \eta_j a_{k+j} + \sum_{i=1}^m u_i \dot{e}_i + \sum_{i=m+1}^k u_i \dot{e}_i ,$$

$$\left| \text{-----} \right|$$

*

$$\dot{P}(t) = * + \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \right) + \sum_{i=m+1}^k u_i \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j \right) ,$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^k (\zeta_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^m u_i \alpha_{ij} + \sum_{i=m+1}^k u_i \alpha_{ij}) e_j + \sum_{s=1}^m \eta_s a_{k+s} + \sum_{s=1}^m u_s \kappa_s a_{k+s} ,$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{j=1}^k (\zeta_j + \dot{u}_j + \sum_{i=1}^k u_i \alpha_{ij}) e_j + \sum_{s=1}^m (\kappa_s u_s + \eta_s) a_{k+s}$$

bulunur.

$$(I.2.13) \quad \kappa_s u_s + \eta_s = 0 \quad , \quad 1 \leq s \leq m$$

biçimindeki $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ vektörleri $E_k(t)$ içindedir. κ_s , $1 \leq s \leq m$, değerleri sıfırdan farklı olduklarından (I.2.13) sisteminin çözümü tektir, yani u_s , $1 \leq s \leq m$, skalarleri tek olarak hesaplanabilir.

Tanım I.2.5.

(I.2.12) de görüldüğü gibi $P(t)$ noktasını u_s , $1 \leq s \leq m$, ler temsil etmektedir. Burada bu bileşenlerden $(k-m)$ -tanesi keyfi seçilebilir. Belli bir t için (I.2.12) ve (I.2.13) eşitliklerini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde $(k-m)$ -boyutlu bir uzayı doldururlar. Bu uzaya Φ nin $E_k(t)$ içindeki **sırt (edge) uzayı** denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir, [5].

Tanım I.2.6.

K_{k-m} sırt uzayı, doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca Φ tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(k-m+1)$ -boyutlu **sırt regle yüzeyi** denir, [8].

Şimdi $\forall t \in I$ için $\text{boy}T(t) = k+m+1$ olsun. Bu durumda

$$\dot{\alpha} \notin \text{Sp}\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

dir. Bu halde $T(t)$ nin

$$(I.2.14) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

şeklinde bir ortonormal bazı bulunabilir. $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$(I.2.15) \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \sum_{i=1}^m \eta_i a_{k+i} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

yazılabilir.

Herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisinin (I.2.12) deki ifadesinde t ye göre türev alınıp , türev denkleminde (I.2.15) ifadesi yerine konulduktan sonra (Teo.I.2.1) uygulanarak $\dot{P}(t)$ türev vektörü için

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^k (\zeta_i + \dot{u}_i + \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} u_j) e_i + \sum_{s=1}^m (\kappa_s u_s + \eta_s) a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\kappa_s u_s + \eta_s = 0, \quad 1 \leq s \leq m$$

olacak biçimdeki $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ vektörleri $Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{\alpha}\}$ da yatarlar. Yukarıdaki denklem sistemi (I.2.13) ile aynıdır.

Tanım I.2.7.

$1 \leq s \leq m$ için elde edilen m -tane $\kappa_s u_s + \eta_s = 0$ lineer denklemi ile tanımlanan $P(t)$ noktalarının doldurduğu $(k-m)$ -boyutlu uzaya Φ nin $E_k(t)$ içindeki **merkez uzayı** denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir , [5].

Tanım I.2.8.

$Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı doğrultman uzayı olarak α eğrisi boyunca hareket ederken Φ tarafından ihtiva edilen bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(k-m+1)$ -boyutlu **merkez regle yüzeyi** denir ve Ω ile gösterilir , [8].

Tanım I.2.9.

Φ $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyine ait $(k-m+1)$ -boyutlu Ω merkez regle yüzeyinin bir ortogonal yörüngesi r olmak üzere , Ω nin doğrultman uzayına total olarak dik olan bir doğrultman uzayı , r yi dayanak eğrisi kabul ederek bir regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye Φ nin $(m+1)$ -boyutlu **asli regle yüzeyi** denir ve Λ ile gösterilir , [5]. Λ nin doğrultman uzayı $F_m(t)$ ile gösterilirse

$$(I.2.16) \quad \text{boy } F_m(t) + \text{boy } Z_{k-m}(t) = \text{boy } E_k(t)$$

bulunur ve ayrıca

$$(I.2.17) \quad \begin{aligned} F_m(t) &= \text{Sp}\{e_1, \dots, e_m\} \quad , \\ Z_{k-m}(t) &= \text{Sp}\{e_{m+1}, \dots, e_k\} \quad , \\ E_k(t) &= \text{Sp}\{e_1, \dots, e_k\} \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

(k+1)-boyutlu Φ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait α dayanak eğrisi için

$$(I.2.18) \quad \alpha(t) = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olduğundan aşağıdaki iki önerme doğrudur.

Φ nin bir $Z_{k-m}(t_0)$ merkez uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1}(t_0) \neq 0$ olmasıdır.

Φ nin bir $K_{k-m}(t_0)$ sırt uzayının olması için gerek ve yeter şart $\eta_{m+1}(t_0) = 0$ olmasıdır.

O halde, sırt veya merkez uzaydan hangisi varsa ona ait regle yüzey için bir parametrisasyon

$$(I.2.19) \quad \Phi(t, u_{m+1}, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k-m} u_{m+i} e_{m+i}(t)$$

olacaktır.

$m=k$ ise $\text{boy } K_{k-m}(t) = \text{boy } Z_{k-m}(t) = 0$ dır. Bu durumda sırt regle yüzeyi Φ nin sırt eğrisine dejenere olur, merkez regle yüzeyi ise Φ nin striksiyon çizgisine dejenere olur. Böylece şunu söyleyebiliriz :

Sırt regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler E^3 ün tanjant yüzeylerine (striksiyon çizgisiz yüzey) genelleşir, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler ise E^3 ün striksiyon çizgili regle yüzeylerine genelleşir.

Tanım I.2.10.

Sırt regle yüzeyli Φ genelleştirilmiş regle yüzeyine ait bir $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ ortonormal bazını \mathbb{R}^n nin bir $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ ortonormal bazına tamamlayalım. Burada a_{k+m+1}, \dots, a_n vektörlerinin meydana getirdiği $\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ bazına **tamamlayıcı baz** adı verilir. Eğer Φ merkez regle yüzeyli ise tamamlayıcı ortonormal bazı $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ dir, [8].

Burada,

$$(I.2.20) \quad \begin{cases} a_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + \omega_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda}, & 1 \leq i \leq m, \\ a_{k+m+1} = -\sum_{j=1}^m \omega_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}, \\ a_{k+m+s} = \sum_{j=1}^m \omega_{sj} a_{k+j} + \beta_s a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{s\lambda} a_{k+m+\lambda}, & 2 \leq s \leq n-k-m \end{cases}$$

dir,[5].

Tanım I.2.11.

Φ , E^n de merkez regle yüzeyli bir genelleştirilmiş regle yüzey olsun.

$$(I.2.21) \quad \Phi_i(t, u) = \alpha(t) + u e_i(t), \quad (t, u) \in I \times \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m$$

parametrik ifadesi ile tanımlanan Φ_i regle yüzeylerine Φ nin **2-boyutlu asli regle yüzeyleri** denir, [6].

$\Phi_i, 1 \leq i \leq m$, nin doğrultman uzayı bir boyutludur. Bu uzay h_i ile gösterilirse $h_i = \text{Sp}\{e_i\}$ dir ve $E_k(t)$ içindedir. Burada $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ olduğundan $i \neq j$ için $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ dir. Bu şekilde tanımlanan h_i doğrultmanlarına **asli ışın** denir.

Tanım I.2.12.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu Φ regle yüzeyi

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

parametrizasyonu ile verilmiş olsun. Eğer bir p pozitif tamsayısı için

$$(I.2.22) \quad \Phi(t+p, u_1, \dots, u_k) = \Phi(t, u_1, \dots, u_k)$$

ise Φ ye **kapalıdır** denir. Burada p en küçük periyodu gösterir. Kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrileri de kapalıdır, [6].

Tanım I.2.13.

$(k+1)$ -boyutlu bir regle yüzey Φ olsun. Eğer

1- $\text{boy}A(t)=k+m=\text{sabit}$, $\forall t \in I$,

2- Bir $J=\{t \mid 0 \leq t \leq p\} \subset I$ kapalı aralığı üzerinde Φ nin p periyotlu bir asli çatası mevcut ise Φ regle yüzeyine **basit kapalıdır** denir, [6].

Basit kapalı bir Φ regle yüzeyinin h_i doğrultmanları α kapalı dayanak eğrisi boyunca oluşan, Φ nin 2-boyutlu Φ_i , $1 \leq i \leq m$, asli regle yüzeyi de kapalı olur.

Tanım I.2.14.

$m=k$ için $\text{boy}K_{k-m}(t)=\text{boy}Z_{k-m}(t)=0$ olduğundan $m=k$ için Φ nin merkez regle yüzeyi striksiyon çizgisinden ibarettir. Bu striksiyon çizgisi α olmak üzere Φ , $(k+1)$ -boyutlu basit kapalı genelleştirilmiş regle yüzeyine ait Φ_i , $1 \leq i \leq k$, 2-boyutlu asli regle yüzeyinin ortogonal yörüngesinin bir periyot sonra ilk ve son noktaları arasındaki uzaklığa Φ nin **i -yinci açılım uzunluğu** denir. Φ nin i -yinci açılım uzunluğu L_i ile gösterilirse

$$(I.2.23) \quad L_i = \int_0^p \zeta_i(t) dt \quad \text{veya} \quad L_i = \int_0^p \langle d\alpha, e_i \rangle$$

dir, [6].

Φ regle yüzeyinin 2-boyutlu asli regle yüzeyi Φ_i , $1 \leq i \leq m$, nin α dayanak eğrisini kapalı dayanak eğrisi kabul eden ve Φ_i nin h_i doğrultmanları ile sabit θ_i açılarını yapan bir kapalı regle yüzey $\Psi \subset \Phi$ olsun . Ψ nin L açılım uzunluğu

$$(I.2.24) \quad L = \sum_{i=1}^k L_i \cos \theta_i \quad , \quad \sum_{i=1}^k (\cos \theta_i)^2 = 1$$

dır, [6].

E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş kapalı regle yüzeyinin $T(t)$ teğetsel demetinin boyutu $k+m+1$ olsun . $n=k+m+1$ olması durumunda , $1 \leq i \leq m$, için Φ nin i -yinci açılım açısını tanımlayacağız.

Tanım I.2.15.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş basit kapalı regle yüzey Φ olsun. Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin boyutu $k+m+1$ ise Φ nin , Φ_i 2-boyutlu asli regle yüzeyleri Φ nin m -tane λ_i açılım açısını tanımlar ve

$$(I.2.25) \quad \lambda_i = \int_0^p \omega_i(t) dt \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

ile ifade edilir, [6].

$n=k+m+1$ için (I.2.20) denkleminde

$$\omega_i = -\langle a_{k+m+1}, a_{k+i} \rangle$$

bulunur.

Tanım I.2.16.

Φ , $(k+1)$ -boyutlu regle yüzeyinin α dayanak eğrisi için

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olmak üzere $\eta_{m+1} \neq 0$ ise

$$(I.2.26) \quad P_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

ifadesine Φ nin i -yinci asli dağılma parametresi denir, [8].

Tanım I.2.17.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu Φ regle yüzeyinin **total dağılma parametresi**

$$(I.2.27) \quad D = \prod_{i=1}^m P_i$$

ile tanımlanır. Burada P_i ler i -yinci asli dağılma parametreleridir, [13].

Tanım I.2.18.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu bir regle yüzey Φ ve Φ nin i -yinci açılım uzunluğu L_i , $1 \leq i \leq m$, olsun. Bu durumda Φ nin açılım uzunluğu

$$(I.2.28) \quad L = \sqrt[m]{|L_1 \dots L_m|}$$

olarak tanımlanır, [8].

Tanım I.2.19.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu bir regle yüzey Φ ve Φ nin i -yinci açılım açısı λ_i , $1 \leq i \leq m$, olsun. Bu durumda Φ nin açılım açısı

$$(I.2.29) \quad \lambda = \sqrt[m]{|\lambda_1 \dots \lambda_m|}$$

olarak tanımlanır, [13].

Tanım I.2.20.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu bir regle yüzey Φ ve Φ nin asli dağılma parametreleri P_1, \dots, P_m olsun. Bu durumda Φ nin dağılma parametresi

$$(I.2.30) \quad P = \sqrt[m]{|P_1 \dots P_m|}$$

ile tanımlanır, [13].

Teorem I.2.2.

Regüler bir $(k+1)$ -regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin bir $E_k(t)$, $t \in I$, doğrultman uzayı içindeki asimptotik ve teğetsel demetleri çakışmıyorlarsa o zaman Φ nin dayanak eğrilerinin hız vektörleri $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+m+1}\}$ uzayında bulunur ve Φ bir $Z_{k-m}(t)$ ($m > 0$) merkez uzayına sahiptir. Merkez uzayının noktalarında Φ nin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler. Φ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı, her P noktasındaki tanjant uzayında bulunur, [5].

II. BÖLÜM

E^n DE HAREKETLER

Bu bölümde E^n de 1-parametrelilik hareketler ve 1-parametrelilik homotetik hareketler tanıtılacaktır. Bunların integral invaryantları ile ilgili bazı teorem ve sonuçlar verilecektir.

II.1. 1-Parametrelilik Hareketler

Tanım II.1.1.

$I \subset \mathbb{R}$ sıfırı içeren bir aralık olsun. $t \in I$ için $A(t)$ pozitif ortogonal matris ve $C(t)$ de bir sütun matrisi olmak üzere elemanları

$$(II.1.1) \quad f_t = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilen $\{f_t\}$ cümlesine E^n in 1-parametrelilik hareketi denir, burada $A(t)$ ve $C(t)$ nin elemanları t nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır, [9].

Bir $\bar{X} \in E^n$ noktası için

$$(II.1.2) \quad f_t(\bar{X}) = X = A(t)\bar{X} + C(t)$$

dir. Kısalığın hatırı için $A(t)$ ve $C(t)$ yerine çoğu zaman A ve C kullanılacaktır. 1- parametrelilik hareketler için \bar{E} yi hareketli E yi de sabit uzay olarak alacağız.

$\bar{X} \in \bar{E}$ sabit noktasının f_t altındaki yörüngesi E de bir eğridir. Bu X_t yörünge eğrisinin teğet vektör alanı

$$\dot{X} = \frac{dX_t}{dt} = \frac{df_t(\bar{X})}{dt}$$

dir. Burada $\bar{X} = f_t^{-1}(X_t)$ olduğu açıktır. f_t nin inversi

$$f_t^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere df/dt türevi de hesaplanarak,

$$\frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{A}A^{-1} & -\dot{A}A^{-1}C + \dot{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. $\dot{A}A^{-1}=B_t$ ve $-B_tC + \dot{C}=V_t$ alınarak

$$(II.1.3) \quad \frac{df}{dt} f_t^{-1} = \begin{bmatrix} B_t & V_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve buradan da

$$(II.1.4) \quad \dot{X} = B_t X + V_t$$

bulunur.

Tanım II.1.2.

(II.1.3) eşitliği ile verilen harekete t -anındaki **ani hareket** denir, [12].

Tanım II.1.3.

Ani harekette $B_t=V_t=0$ ise bu harekete **ani duraklama** denir,[12].

Tanım II.1.4.

Ani harekette $B_t=0$ ve $V_t \neq 0$ ise bu harekete **ani öteleme** denir.

Tanım II.1.5.

$X|_{x_0}=0$ olacak şekilde bir x_0 noktası varsa ani harekete **ani dönme** ve x_0 noktasına da **ani dönme merkezi** denir.

$A \in SO(n)$ olduğundan $B = \dot{A}A^{-1}$ matrisi bir anti-simetrik matristir.

(II.1.2) den t ye göre türev alarak

$$(II.1.5) \quad \dot{X} = \dot{A}\bar{X} + A\dot{\bar{X}} + \dot{C}, \quad X \in E, \quad \bar{X} \in \bar{E}$$

bulunur. Burada $\bar{X} \in \bar{E}$ ve $X \in E$ sabit noktalar ise bu noktalara **pol noktaları** denir. Pol noktaları için $\dot{X} = 0$ ve $\dot{\bar{X}} = 0$ olacağından

$$(II.1.6) \quad \dot{A}\bar{X} + \dot{C} = 0$$

elde edilir.

Eğer \dot{A} regüler ise (II.1.6) bağıntısından

$$(II.1.7) \quad \bar{X} = -(\dot{A})^{-1} \dot{C}$$

bulunur. X nin bu değerini (II.1.2) de yerine yazarsak

$$(II.1.8) \quad X = -(A\dot{A}^{-1})\dot{C} + C$$

sonucu elde edilir.

Tanım II.1.6.

(II.1.7) ve (II.1.8) denklemlerini sağlayan noktaların geometrik yerine, sırası ile, hareketin **hareketli ve sabit pol eğrisi** adı verilir.

(II.1.5) ve (II.1.6) bağıntılarından pol eğrilerinin hız vektörleri için

$$(II.1.9) \quad \dot{X} = A\dot{\bar{X}}$$

bağıntısı elde edilir.

Buna göre pol eğrilerinin yay uzunlukları için

$$\int \|\dot{X}\| dt = \int \|A\dot{\bar{X}}\| dt$$

veya

$$\int \|\dot{X}\| dt = \int \|\dot{\bar{X}}\| dt, \quad A \in SO(n)$$

$$s = \bar{s}$$

bulunur. Bu ise hareket boyunca pol eğrilerinin birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanması demektir.

Tanım II.1.7.

\mathbb{R}^3 deki her u vektörü için

$$B_t(u) = w_t(u) \wedge u \quad (B = \dot{A}A^T)$$

ile tanımlanan w_t vektörüne hareketin dönme kısmına ait **Darboux vektörü** denir.

II.2. 1-Parametrelili Homotetik Hareketler

Tanım II.2.1.

$t \in I$, $A(t) \in SO(n)$, $C(t) \in \mathbb{R}^n$ ve $h(t) = h(t)I_n$ olmak üzere

$$(II.2.1) \quad F_t = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h(t) \neq 0$$

şeklinde tanımlı $\{F_t\}$ cümlesine E^n in bir **1-parametrelili homotetik hareketi** denir. Burada $A(t)$, $C(t)$ ve $h(t)$ nin elemanları t nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır,[10].

$h = hI_n$ olduğundan $h^{-1} = (1/h)I_n$ ve $h^T = h$ dir. Burada $hA = S$ dersek $S^{-1} = (1/h)A^T$ olur. $\bar{X} \in \bar{E}$ için

$$(II.2.2) \quad F_t(\bar{X}) = X = S\bar{X} + C$$

ve

$$(II.2.3) \quad \dot{X} = \dot{S}\bar{X} + S\dot{\bar{X}} + \dot{C}$$

bulunur.

Tanım II.2.2.

(II.2.3) eşitliğindeki \dot{X} ya **mutlak hız**, $\dot{S}\bar{X} + \dot{C}$ ya **sürüklenme hızı** ve $S\dot{\bar{X}}$ ya **izafi hız** denir.

$X \in E$ ve $\bar{X} \in \bar{E}$ sabit noktaları için $\dot{X} = 0$ ve $\dot{\bar{X}} = 0$ olacağından

$$(II.2.4) \quad \dot{S}\bar{X} + \dot{C} = 0$$

bulunur. Bu denklem sisteminin çözümü için \dot{S} nın regüler olup olmadığını bilmek gerekir. Bunun için şu teoremi verebiliriz.

Teorem II.2.1.

(II.2.1) ile verilen homotetik hareketteki \dot{S} matrisinin determinanı $\forall t \in I$ için sıfırdan farklıdır, [10].

O halde (II:2.4) denklem sisteminde $\det \dot{S} \neq 0$ olduğundan sistemin çözüm uzayının boyutu sıfırdır . Yani sistemin çözümü bir tek noktadan ibarettir.

Tanım II.2.3.

Bir harekette hareketin Jacobian matrisinin türevinin determinanı sıfırdan farklı ise bu harekete **regüler hareket** denir.

Sonuç II.2.1.

E^n in homotetik hareketleri $\forall n$ için regüler hareketlerdir.

Sonuç II.2.2.

E^n in bir homotetik hareketinin $\forall t$ anında hareketli ve sabit uzayda bir tek pol nokta çifti vardır.

(II.2.4) denkleminde $\det \dot{S} \neq 0$ olduğundan \bar{X} ve X için

$$(II.2.5) \quad \bar{X} = -(\dot{S})^{-1} \dot{C}$$

$$(II.2.6) \quad X = -S\dot{S}^{-1}\dot{C} + C$$

bulunur. Bu denklemleri sağlayan \bar{X} ve X noktalarına hareketin hareketli ve sabit pol noktaları denir. Pol noktalarının geometrik yerine de , sırasıyla , homotetik harekete iştirak eden **hareketli ve sabit pol eğrileri** denir.

Buna göre homotetik hareketler altında pol eğrilerinin hız vektörleri arasında

$$(II.2.7) \quad \dot{X} = S\ddot{X}$$

bağıntısı elde edilir. O halde homotetik hareketler altında pol eğrilerinin yay uzunlukları için

$$\begin{aligned}
\|\dot{\bar{X}}\| dt &= \|\dot{S\bar{X}}\| dt , \\
\|\dot{\bar{X}}\| dt &= \|hA\dot{\bar{X}}\| dt , \\
\|\dot{\bar{X}}\| dt &= |h| \|A\dot{\bar{X}}\| dt , \\
\|\dot{\bar{X}}\| dt &= |h| \|\dot{\bar{X}}\| dt , \quad A \in SO(n), \\
\Rightarrow \quad ds &= |h| d\bar{s}
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu ise homotetik hareket boyunca pol eğrilerinin birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanması demektir.

(II.2.1) ifadesinden F_t^{-1} ve dF_t/dt hesap edilirse

$$F_t^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{dF}{dt} = \begin{bmatrix} S & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\dot{S}S^{-1} = H_t$ ve $-H_t C + \dot{C} = U_t$ alınır

$$\frac{dF}{dt} F_t^{-1} = \begin{bmatrix} H_t & U_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca $F_t^{-1}(X) = \bar{X}$ olduğundan $\bar{X} = S^{-1}(X - C)$ dir. Bu netice (II.2.3) de yerine yazılır ve $\dot{\bar{X}} = 0$ olduğu gözönüne alınır

$$(II.2.8) \quad \dot{X} = H_t(X - C) + \dot{C}$$

bulunur, burada $\det H_t \neq 0$ dir.

III. BÖLÜM

E^n DE k MERTEBEDEN HELİSEL VE HOMOTETİK HAREKETLE İŞTİRAK EDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ REGLE YÜZEYLER

III.1. E^n de k Mertebeden Helisel Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

E^n in bir

$$(III.1.1) \quad X = A\bar{X} + C, \quad A \in SO(n)$$

hareketi için

$$(III.1.2) \quad \dot{X} = B(X-C) + \dot{C} \quad (B = \dot{A}A^{-1}, \dot{\bar{X}} = 0)$$

bulunur. B anti-simetrik matrisinin determinantı, n tek ise sıfırdır, hatta n nin çift olduğu bazı hallerde de sıfır olabilir.

$\forall t \in I$ için $\det B(t) \neq 0$ ise

$$(III.1.3) \quad B(t) (P(t) - C(t)) + \dot{C}(t) = 0$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu $P(t)$ çözüm noktası hareketin t -anındaki ani dönme merkezi veya pol'ü olarak adlandırılır. Hareket boyunca $P(t)$ noktaları E de sabit pol eğrisini, \bar{E} de hareketli pol eğrisini oluştururlar. Bu durumda E^n in 1-parametrelili hareketini, birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanan pol eğrileri belirler.

Şimdi $\forall t$ ve $\forall n$ için $\det B(t) = 0$ olduğunu kabul edelim.

Tanım III.1.1.

$\forall t$ ve $\forall n$ için $\det B(t) = 0$ olmak üzere $\text{rank} B(t) = n - k$ olsun. $e(t)$, $B(t)$ nin çekirdeğinde bir birim vektör ise

$$(III.1.4) \quad B(t) (P(t)-C(t)) + \dot{C}(t) = \lambda(t)e(t) , \lambda(t) \in IR$$

denkleminin çözümleri k -boyutlu bir uzayı doldururlar , yani denklem sistemini sağlayan P noktaları E^n in bir tek şekilde belirtilen alt uzayını doldururlar. Bu uzaya hareketin t -anındaki **ani eksen uzayı** denir ve $E_k(t)$ ile gösterilir ($\lambda(t) \neq 0$ ise ani screw eksen uzayı , $\lambda(t)=0$ ise ani dönme eksen uzayı adını alır). Böylece \bar{E} ve E de bu hareket altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{E}_k(t)$ ve $E_k(t)$ uzayları elde edilir.

Tanım III.1.2.

$\bar{\alpha} \subset \bar{E}$ eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek , $\bar{E}_k(t)$ ekseni hareket boyunca \bar{E} hareketli uzayında bir $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey oluşturur. Bu yüzeye hareketin **hareketli aksoid yüzeyi** denir ve $\bar{\Phi}$ ile gösterilir.

Tanım III.1.3.

$E_k(t)$ eksen uzayı hareket boyunca E sabit uzayında $\alpha = A\bar{\alpha} + CCE$ eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek bir $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye hareketin **sabit aksoid yüzeyi** denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım III.1.4.

E^n deki bu hareketin $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri , her t için bu hareket altında ortak bir $\bar{E}_k(t) \subset \bar{\Phi}$ ve $E_k(t) \subset \Phi$ doğrultman uzayı çifti boyunca yuvarlanarak ve kayarak birbirlerine dokunurlar. Böyle bir hareket E^n in **k .mertebeden helisel hareketi** olarak adlandırılır, [8].

Burada eğrilerin birbirleri üzerinde yuvarlanmasında kayma yoktur , ancak hareketin kendisinde kayma vardır. k .mertebeden helisel hareket $\lambda=0$ için kaymaksızın yuvarlanmadır.

Teorem III.1.1.

E^n in k . mertebeden bir helisel hareketi $X = A\bar{X} + C$ ile verilsin.

i) Bu hareket altında meydana gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin asli çatılarını oluşturan vektörler

$$(III.1.5) \quad A\bar{e}_i = e_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

şeklinde birbirlerine karşılık gelirler .

ii) Bu vektörlerin türevleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$(III.1.6) \quad A\dot{\bar{e}}_i = \dot{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

iii) $\bar{\Phi}$ ve Φ nin, sırası ile, \bar{P}_i ve P_i ($1 \leq i \leq m$) asli dağılma parametreleri için aşağıdaki bağıntı vardır:

$$(III.1.7) \quad |P_i| = |\bar{P}_i|.$$

İspat:

i) $\bar{\Phi}$ ve Φ nin asli çatıları, sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f: E^n &\rightarrow E^n \\ \bar{X} &\rightarrow f(\bar{X}) = X = A\bar{X} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_*: T_{\bar{X}}(E^n) &\rightarrow T_X(E^n) \\ \dot{\bar{X}} &\rightarrow f_*(\dot{\bar{X}}) = \dot{X} \end{aligned}$$

ve $f_* = A$ olduğundan

$$A\bar{e}_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Hatta

$$(III.1.8) \quad A\bar{a}_{k+j} = a_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$(III.1.9) \quad A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olmalıdır, [8].

ii) $\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemini B nin çekirdeğini gerecek şekilde seçelim. Yani,

$$(III.1.10) \quad Be_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

olsun. (III.1.5) ten t ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{A}\bar{e}_i + A\dot{\bar{e}}_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ \dot{e}_i &= \dot{A}A^{-1}e_i + A\dot{\bar{e}}_i \quad (e_i = A^{-1}e_i), \\ \dot{e}_i &= Be_i + A\dot{\bar{e}}_i \end{aligned}$$

elde edilir . $Be_i=0$ olduğundan dolayı

$$A\dot{\bar{e}}_i = \dot{e}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur , [8].

iii) $\bar{\Phi}$ için bir parametrizasyon

$$\bar{\Phi}(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = \bar{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{e}_i(t)$$

dır. $\bar{\Phi}$ nin asli çatısı için

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \bar{\kappa}_i > 0$$

eşitliğinin her iki tarafına hareketin Jacobian dönüşümü olan A yı uygulayalım.

$$A\dot{\bar{e}}_i = A \left(\sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \right) \quad ,$$

$$A\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} A\bar{e}_j + \bar{\kappa}_i A\bar{a}_{k+i} \quad .$$

Burada (III.1.5) , (III.1.6) ve (III.1.8) kullanılarak

$$(III.1.11) \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} e_j + \bar{\kappa}_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur. Öte yandan Φ nin $\{e_1, \dots, e_k\}$ asli çatısı için

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad \kappa_i > 0$$

olduğundan bu son ifade ile (III.1.11) karşılaştırılırsa

$$(III.1.12) \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \quad , \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

$\bar{\Phi}$ nin $\bar{\alpha}$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}$$

olacağından bu eşitliğin her iki tarafına A yı uygularsak,

$$A\dot{\bar{\alpha}} = A\left(\sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1}\right),$$

$$A\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i A\bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} A\bar{a}_{k+m+1}$$

ve burada (III.1.5) , (III.1.9) kullanılırsa

$$(III.1.13) \quad A\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \dot{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \dot{a}_{k+m+1}$$

bulunur.

$$\alpha = A\bar{\alpha} + C \quad , \quad (\bar{\alpha} = A^{-1}(\alpha - C)) ,$$

$$\dot{\alpha} = \dot{A}\bar{\alpha} + A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C} \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = \dot{A}A^{-1}(\alpha - C) + \dot{C} + A\dot{\bar{\alpha}} \quad , \quad \dot{A}A^{-1} = B \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = B(\alpha - C) + \dot{C} + A\dot{\bar{\alpha}} \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = \lambda e + A\dot{\bar{\alpha}} \quad , \quad \lambda e = 0 \quad ,$$

$$(III.1.14) \quad A\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha}$$

elde edilir.

Öte yandan Φ nin α dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \zeta_i \dot{e}_i + \eta_{m+1} \dot{a}_{k+m+1}$$

olduğundan bu son ifade , (III.1.14) gözönünde bulundurularak (III.1.13) ile karşılaştırılırsa

$$(III.1.15) \quad \bar{\zeta}_i = \zeta_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$(III.1.16) \quad |\bar{\eta}_{m+1}| = |\eta_{m+1}|$$

bulunur.

$$\bar{P}_i = \frac{\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{\kappa}_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

olduğundan (III.1.12) ve (III.1.16) denklemleri kullanılırsa

$$|\bar{P}_i| = |P_i| \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

Sonuç III.1.1.

E^n in k . mertebeden helisel hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzey çiftlerinin dağılıma parametreleri , sırasıyla , \bar{P} ve P olmak üzere

$$\bar{P} = P$$

dir , [2].

$X = A\bar{X} + C$ ile verilen k . mertebeden helisel hareketi gözönüne aldığımızda, bu hareket için

$$A(t+p) = A(t) \quad , \quad C(t+p) = C(t)$$

ise harekete **kapalıdır** denir. Hareketin kapalı olması , herhangi bir $\bar{\alpha}$ kapalı eğrisi için $\alpha = A\bar{\alpha} + C$ resim eğrisinin kapalı olması demektir. Bu durumda, bu eğrileri dayanak eğrisi kabul eden hareketli ve sabit aksoid yüzeyleri kapalı olurlar .

Teorem III.1.2.

$X = A\bar{X} + C$ ile verilen k . mertebeden bir helisel harekete iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin i.açılım uzunlukları, sırasıyla , \bar{L}_i ve L_i olmak üzere

$$(III.1.17) \quad \bar{L}_i = L_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k$$

dır, [3].

Sonuç III.1.2.

$\bar{\Phi}$ ve Φ , sırasıyla , hareketli ve sabit aksoid yüzeyler olsunlar. Bunların açılım uzunlukları \bar{L} ve L olmak üzere ,

$$\bar{L} = L$$

dir , [2].

Teorem III.1.3.

k . mertebeden helisel harekete iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin i. açılım açıları , sırasıyla , $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere

$$(III.1.18) \quad \bar{\lambda}_i = \lambda_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m = k$$

dır.

Sonuç III.1.3.

$\bar{\Phi}$ ve Φ ,sırasıyla, hareketli ve sabit aksoid yüzeyler ve bunların açılım açıları $\bar{\lambda}$ ve λ olmak üzere

$$\bar{\lambda} = \lambda$$

dır.

Tanım III.1.5.

$m < i \leq k$ için verilen

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j$$

ifadesindeki katsayılar için

$$\alpha_{ij} = 0$$

ise Φ nin Ω merkez (veya sırt) regle yüzeyi **silindirik** denir.

Teorem III.1.4.

E^n in bir k . mertebeden helisel hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit aksoid yüzeylerinin merkez (veya sırt) regle yüzeyleri $\bar{\Omega}$ ve Ω olmak üzere , $\bar{\Omega}$ silindirik ancak ve ancak Ω da silindirik, [8].

III.2. E^n de k. Mertebeden Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

E^n de bir homotetik hareketi , $A \in SO(n)$, $C \in \mathbb{R}^n_1$ ve $h=hI_n$ olmak üzere

$$X = F(\bar{X}) = S\bar{X} + C$$

veya

$$X = S\bar{X} + C$$

ile tanımlamıştık . Ayrıca buradan türev alarak

$$\begin{aligned} \dot{X} &= S\dot{\bar{X}} + \dot{S}\bar{X} + \dot{C} \\ \dot{X} &= \dot{S}S^{-1}(X-C) + \dot{C} , \quad \dot{\bar{X}} = 0 , \quad \bar{X} = S^{-1}(X-C) \end{aligned}$$

türev denklemleri bulunur. Burada $H_t = \dot{S}S^{-1}$ alınırsa

$$\dot{X} = H(X-C) + \dot{C} , \quad H = H(t) = H_t$$

elde edilir. Ayrıca $H_t = \dot{S}S^{-1}$ konumu pol noktalarının (II.2.5) ve (II.2.6) denklemlerinde de düşünülürse hareketli ve sabit pol noktaları için

$$\bar{X} = -(H_t S)^{-1} \dot{C}$$

ve

$$X = -H_t^{-1} \dot{C} + C$$

bulunur.

$\forall t \in I$ için $\det H_t \neq 0$ olduğundan daima bir tek pol noktası vardır . Bu nokta \bar{E} hareketli uzayında \bar{Q} ve E sabit uzayında Q ile gösterilirse , \bar{Q} ve Q , sırasıyla , hareketli ve sabit uzaylarda $\bar{\alpha}$ ve α hareketli ve sabit pol eğrilerini çizerler. O halde $\forall t \in I$ için böyle pol eğrileri daima vardır. Bu eğriler pol noktaları üzerinde kayarak yuvarlanırlar.

Pol noktalarında eğrilerin hızları sıfır olacağından

$$\dot{S}\bar{X} + \dot{C} = 0$$

denkleminde $\bar{\alpha}$ hareketli pol eğrisi için

$$\bar{\alpha} = -\dot{S}^{-1} \dot{C}$$

ve sabit pol eğrisi için de

$$\alpha = S\bar{\alpha} + C$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi $\bar{\alpha}$ pol eğrisinin $\bar{\alpha}(t)$, $\forall t \in I$ noktasına bağlanmış bir $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_k(t)\}$ ortonormal vektör alan sistemini gözönüne alalım. Bu ortonormal vektör alan sisteminin hareket boyunca değişmesiyle meydana gelen bir regle yüzey şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım III.2.1.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketi esnasında $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ sistemi $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca \bar{E} hareketli uzayında bir $(k+1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye hareketin $(k+1)$ -boyutlu hareketli genelleştirilmiş regle yüzeyi denir. Bu yüzeyi $\bar{\Phi}$ ile gösterirsek $\bar{\Phi}$ nin parametrik ifadesi

$$\bar{\Phi}(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k) = \bar{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{e}_i(t)$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$S\bar{e}_i(t) = \varepsilon_i(t), \quad 1 \leq i \leq k$$

denilirse bir $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ ortogonal sistemi elde edilir. Bu ortogonal sistemi $\bar{\alpha}$ ye karşılık gelen α pol eğrisinin $\alpha(t)$ noktasına bağlayalım. Hareket esnasında bu ortogonal sistemin meydana getirdiği regle yüzeyi şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım III.2.2.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketi altında $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ sistemi, α resim eğrisini dayanak eğrisi kabul ederek E sabit uzayında bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye hareketin $(k+1)$ -boyutlu sabit genelleştirilmiş regle yüzeyi denir (Φ).

Teorem III.2.1.

E^n de $X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketi esnasında meydana gelen hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeyleri, dayanak eğrileri boyunca birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar, [2].

Tanım III.2.3.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin birbirleri üzerinde kaymalı yuvarlanmasını sağlayan $X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine E^n in **k. mertebeden homotetik hareketi** denir, [2].

$$\begin{aligned} F : E^n &\rightarrow E^n \\ \bar{X} &\rightarrow F(\bar{X}) = X = S\bar{X} + C \end{aligned}$$

$$F_* : T_{\bar{x}}(E^n) \rightarrow T_x(E^n)$$

$$\bar{e}_i \rightarrow F_*(\bar{e}_i) = S\bar{e}_i = \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Dolayısıyla

$$(III.2.1) \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = h^2 \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

olur. O halde $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ ortogonal sistemini

$$(III.2.2) \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{h}, \quad 1 \leq i \leq k$$

şeklinde normalize edilebilir. Bu ortonormal sistemin gerdiği uzay $E_k(t)$ ile gösterilirse $E_k(t)$ yi doğrultman uzayı kabul eden Φ regle yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\{e_1, \dots, e_k\}$, $E_k(t)$ nin bir tabii taşıyıcı bazıdır.

$\bar{\Phi}$ nin $\bar{A}(t)$ asimptotik demetinin ortonormal bazı $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ olarak almırsa

$$(III.2.3) \quad S\bar{a}_{k+i} = h a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir, [2].

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin teğetsel demetlerinin boyutları $k+m+1$ olmak üzere bu teğetsel demetlerin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ ortonormal bazları için

$$(III.2.4) \quad S\bar{a}_{k+m+1} = h a_{k+m+1}$$

bağıntısı geçerlidir, [2].

$\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyli ise bunların $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal bazları arasında

$$(III.2.5) \quad S\bar{a}_{k+m+\lambda} = h a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntısı vardır.

Teorem III.2.2.

E^n in k . mertebeden homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerine ait asli çatıları oluşturan vektörler arasındaki bağıntı

$$A\bar{e}_i = e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

dır, [2].

Teorem III.2.3.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeyleri verilsin. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin asli çatılarını oluşturan vektörlerin türevlerine ait

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \quad , \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i}$$

eşitliklerindeki katsayılar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır, [2] :

$$\begin{aligned} \dot{S}S^{-1} + \bar{\alpha}_{ii}I_n &= [(\dot{h}/h) + \alpha_{ii}]I_n \quad , \quad i=j \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \\ \bar{\alpha}_{ij} &= \alpha_{ij} \quad , \quad i \neq j \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq k \quad , \\ \bar{\kappa}_i &= \kappa_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad . \end{aligned}$$

Teorem III.2.4.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden genelleştirilmiş regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. Bu regle yüzeylerin dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$\begin{aligned} h \bar{\zeta}_i &= \zeta_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad , \\ |h \bar{\eta}_{m+1}| &= |\eta_{m+1}| \end{aligned}$$

bağıntıları vardır, [2].

Teorem III.2.5.

$X = S\bar{X}+C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin i. dağılma parametreleri , sırasıyla , \bar{P}_i ve P_i olmak üzere

$$|P_i| = |h| |\bar{P}_i| , \quad 1 \leq i \leq m$$

dir , [2].

Teorem III.2.6.

$X = S\bar{X}+C$ homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ genelleştirilmiş regle yüzeylerinin \bar{P} ve P ile verilen dağılma parametreleri arasında

$$P = |h| \bar{P}$$

bağıntısı vardır , [2].

Tanım III.2.4.

$X = S\bar{X}+C$ homotetik hareketinde , $\bar{\alpha}$ ve α pol eğrileri kapalı ise harekete **kapalı homotetik hareket** denir.

Teorem III.2.7.

$X = S\bar{X}+C$ kapalı homotetik hareketine iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ hareketli ve sabit genelleştirilmiş regle yüzeylerine ait i. açılım uzunlukları \bar{L}_i ve L_i olmak üzere

$$h d\bar{L}_i = dL_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

dir , [2].

III.3. E^n de k . Mertebeden Simetrik - Helisel Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

Tanım III.3.1.

E^n de k . mertebeden helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen hareketli ve sabit aksoidler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ ve Φ nin doğrultman uzayları , sırasıyla , $\bar{E}_k(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere bu ortonormal sistemler , helisel hareketler altında birbirlerine

$$(III.3.1) \quad A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

ifadesi ile karşılık geliyorsa bu helisel harekete E^n de k . mertebeden simetrik helisel hareket adı verilir,[8].

Teorem III.3.1.

E^n de k . mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri dayanak eğrileri boyunca, birbirleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır,[14].

İspat :

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse , bu eğriler hareket altında birbirlerine $\dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C}$ şeklinde karşılık gelirler. Burada eğrilerin parametrelerine göre türev alınırsa

$$\dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C}$$

bulunur. Pol noktalarında $\dot{A}\bar{\alpha} + \dot{C} = 0$ olduğundan

$$(III.3.2) \quad \dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}}$$

elde edilir. $\bar{\alpha}$ ve α nin yay uzunlukları , sırasıyla , \bar{s} ve s ile gösterilirse

$$\begin{aligned} s &= \int \|\dot{\alpha}\| dt \quad , \\ s &= \int \|A\dot{\bar{\alpha}}\| dt \quad , \\ s &= \int \|\dot{\bar{\alpha}}\| dt \quad , \quad A \in SO(n) \quad , \\ s &= \bar{s} \end{aligned}$$

dir.

Teorem III.3.2.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen aksoidler $\bar{\Phi}$ ve Φ ve bu aksoidlerin doğrultman uzayları $\bar{E}_k(t) = \text{Sp}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = \text{Sp}\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere

$$(III.3.3) \quad A\dot{\bar{e}}_i = -\dot{e}_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

dır, [14].

İspat :

$\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemini B nin çekirdeğini gelecek şekilde seçmiştik. (III.3.1) bağıntısından türev alırsak

$$\begin{aligned} \dot{A}\bar{e}_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (\bar{e}_i &= -A^{-1}e_i), \\ -\dot{A}A^{-1}e_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (B &= \dot{A}A^{-1}), \\ Be_i + A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i & (Be_i &= 0), \\ A\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i, & 1 \leq i &\leq k \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi simetrik helisel hareketler altında $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazlarının birbirlerine nasıl karşılık geleceğini görelim.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin boyutunun $k+m$, $0 \leq m \leq k$, olmasından dolayı bu demetlerde $\dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k$ ve $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olan m tanesi alınırsa $\bar{A}(t)$ asimptotik demetinin bir bazı

$$(III.3.4) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}, \quad 0 \leq m \leq k$$

olur. Benzer düşünce ile $A(t)$ asimptotik demetinin bir bazı da

$$(III.3.5) \quad \{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}, \quad 0 \leq m \leq k$$

şeklindedir.

$\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}$ bazlarında ilk k-tane vektörden oluşan $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve

$\{e_1, \dots, e_k\}$ sistemleri ortogonal olduğundan $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin ortogonal bazları , sırasıyla,

$$(III.3.6) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\},$$

$$(III.3.7) \quad \{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$$

olarak alınabilir.

Teorem III.3.3

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{E}_k(t)$ ve $E_k(t)$ ye göre asimptotik demetlerinin ortogonal bazları arasında aşağıdaki bağıntı vardır, [14]:

$$(III.3.8) \quad A\bar{y}_{k+j} = -y_{k+j} \quad , \quad 1 \leq j \leq m \quad .$$

İspat :

Φ nin asimptotik demeti olan $A(t)$ nin (III.3.5) ile verilen bazına ortogonalleştirme metodu uygulanarak elde edilen $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ sisteminin vektörleri

$$y_1 = e_1 \quad ,$$

$$y_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 \quad ,$$

$$y_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle e_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2 \quad ,$$

.

.

.

$$y_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, y_j \rangle}{\|y_j\|^2} y_j \quad ,$$

$$y_{k+1} = \dot{e}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \dot{e}_{k+1}, y_j \rangle}{\|y_j\|^2} y_j \quad ,$$

.

.

.

$$y_{k+m} = \dot{e}_{k+m} - \sum_{j=1}^{k+m-1} \frac{\langle \dot{e}_{k+m}, y_j \rangle}{\|y_j\|^2} y_j$$

şeklinde hesaplanır.

Simetrik helisel hareketler , tanım gereğince , $A\bar{e}_i = -\dot{e}_i$, $1 \leq i \leq k$, olduğundan $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ dır. Ayrıca (Teo.III.3.2) den $A\dot{e}_i = -\ddot{e}_i$, $1 \leq i \leq k$, dır. Bu neticeler yukarıdaki formüllerde kullanılırsa

$$y_i = e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur ve buradan da

$$y_{k+1} = \dot{e}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \dot{e}_{k+1}, e_j \rangle}{\|e_j\|^2} e_j$$

$$y_{k+1} = (-A) \left(\bar{e}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle \bar{e}_{k+1}, \bar{e}_j \rangle}{\|\bar{e}_j\|^2} \bar{e}_j \right)$$

bağıntısı bulunur. Burada parantez içindeki ifade $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}$ bazının ortonormalleştirilmesi esnasında elde edilen \bar{y}_{k+1} vektörüdür. O halde \bar{y}_{k+1} ve y_{k+1} vektörleri arasında

$$A\bar{y}_{k+1} = -y_{k+1}$$

bağıntısı vardır. Buna göre y_{k+2}, \dots, y_{k+m} vektörleri için de benzer uygulamayla

$$A\bar{y}_{k+2} = -y_{k+2}$$

.

.

.

$$A\bar{y}_{k+m} = -y_{k+m}$$

bağıntıları bulunur.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin ortogonal bazlarını normalize edebiliriz. $\{e_1, \dots, e_k\}$ ve $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ zaten ortonormal olduğundan

$$(III.3.9) \quad a_{k+j} = \frac{y_{k+j}}{\|y_{k+j}\|} \quad , \quad \bar{a}_{k+j} = \frac{\bar{y}_{k+j}}{\|\bar{y}_{k+j}\|} \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

alınırsa $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin , sırasıyla,

$$(III.3.10) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\},$$

$$(III.3.11) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

ortonormal bazları bulunur.

Sonuç III.3.1.

(III.3.10) ve (III.3.11) deki bazlar birbirlerine

$$(III.3.12) \quad \begin{aligned} A\bar{e}_i &= -e_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ A\bar{a}_{k+i} &= -a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

şeklinde karşılık gelirler,[14].

İspat :

(III.3.1) bağıntısından dolayı $A\bar{e}_i = -e_i$, $1 \leq i \leq k$, dir. (III.3.8) den

$$\begin{aligned} a_{k+i} &= \frac{y_{k+i}}{\|y_{k+i}\|}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ a_{k+i} &= \frac{-A\bar{y}_{k+i}}{\|-A\bar{y}_{k+i}\|}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ a_{k+i} &= -A \frac{\bar{y}_{k+i}}{\|\bar{y}_{k+i}\|}, \quad A \in SO(n), \quad 1 \leq i \leq m, \\ a_{k+i} &= -A\bar{a}_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ A\bar{a}_{k+i} &= -a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

elde edilir.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k, \ddot{\bar{\alpha}}\}$ ve $T(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\}$ teğetsel demetleri için $boy\bar{T}(t) = boyT(t) = k+m$ ise $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin (III.3.10) ve (III.3.11) deki bazları, sırasıyla, $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin de ortonormal bazları olur.

$boy\bar{T}(t) = boyT(t) = k+m+1$ olsun . Bu taktirde $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin

$$(III.3.13) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}, \bar{y}_{k+m+1}\},$$

$$(III.3.14) \quad \{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$$

ortogonal bazları elde edilir.

Teorem III.3.4.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin boyutları $k+m+1$ ise bunların ortogonal bazları birbirlerine aşağıdaki şekilde karşılık gelirler,[14]:

$$(III.3.15) \quad \begin{aligned} A\bar{e}_i &= -e_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ A\bar{y}_{k+i} &= -y_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ A\bar{y}_{k+m+1} &= y_{k+m+1}. \end{aligned}$$

İspat :

Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin $\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}, \dot{\alpha}\}$ bazının ortonormalleştirilmiş şekli $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olsun. Bu taktirde $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ olduğundan ortonormalleştirme metodundan

$$y_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

elde edilir ve böylece $T(t)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olur. Ayrıca yine ortonormalleştirme metodu ile

$$y_{k+m+1} = \dot{\alpha} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\alpha}, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \dot{\alpha}, y_{k+j} \rangle}{\|y_{k+j}\|^2} y_{k+j}$$

dır. Burada (III.3.1) ve (III.3.8) kullanılarak

$$y_{k+m+1} = A \left(\dot{\bar{\alpha}} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\bar{\alpha}}, \bar{e}_i \rangle}{\|\bar{e}_i\|^2} \bar{e}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \dot{\bar{\alpha}}, \bar{y}_{k+j} \rangle}{\|\bar{y}_{k+j}\|^2} \bar{y}_{k+j} \right)$$

$$y_{k+m+1} = A\bar{y}_{k+m+1}$$

bulunur.

$\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin bu şekilde tanımlanan ortogonal bazlarında (III.3.9) ve

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|}, \quad \bar{a}_{k+m+1} = \frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|}$$

kullanılırsa $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin, sırasıyla,

$$(III.3.16) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\},$$

$$(III.3.17) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ortonormal bazları elde edilir.

Sonuç III.3.2.

(III.3.16) ve (III.3.17) deki bazlar birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$A\bar{a}_{k+i} = -a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$A\bar{a}_{k+m+1} = a_{k+m+1}$$

bağıntılarıyla karşılık gelirler,[14].

İspat :

(Sonuç.III.3.1) gereğince

$$A\bar{e}_i = -e_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$A\bar{a}_{k+i} = -a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

dir.

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|}$$

de (III.3.15) eşitliği kullanılırsa

$$a_{k+m+1} = A \left(\frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|} \right),$$

$$a_{k+m+1} = A\bar{a}_{k+m+1}$$

elde edilir.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeyleri merkez regle yüzeyli ise o zaman tamamlayıcı ortonormal bazları, sırasıyla, $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ dir. Bu baz vektörlerine simetrik helisel hareketler altında karşılık gelen vektörler $y_{k+m+\lambda}$, $2 \leq \lambda \leq n-k-m$, ile gösterilirse

$$A\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda}, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

yazılabilir ve $\{y_{k+m+2}, \dots, y_n\}$ sistemi $\bar{\Phi}$ ye karşılık gelen Φ aksoid yüzeyi için tamamlayıcı ortogonal bir bazdır. Bu baz normalize edilirse

$$(III.3.18) \quad a_{k+m+\lambda} = \frac{y_{k+m+\lambda}}{\|y_{k+m+\lambda}\|}, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olmak üzere Φ için $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal baz elde edilir.(III.3.18) bağıntısına $A\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda}$ uygulanırsa

$$a_{k+m+\lambda} = A \left(\frac{\bar{a}_{k+m+\lambda}}{\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\|} \right)$$

bulunur. $\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\| = 1$ olduğundan

$$A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Sonuç III.3.3.

k. mertebeden simetrik helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoitlerinin teğetsel demetleri, $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ olmak üzere E^n in $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ ye göre iki ortonormal bazı , sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, \dots, a_n\}$ şeklinde verilsin. Bu iki baz birbirlerine

$$A\bar{e}_i = -e_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+i} = -a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda} \quad , \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bağıntılarıyla dönüştüğünden k. mertebeden simetrik helisel hareket E^n de $(n-k-m)$ -boyutlu $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ altuzayına göre bir yansımadır, [14].

Teorem III.3.5.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden aksoit yüzeyleri $\bar{\Phi}$ ve Φ , bunların dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$(III.3.19) \quad \bar{\zeta}_i = \zeta_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \quad ,$$

$$(III.3.20) \quad \bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1}$$

bağıntıları vardır, [14].

İspat :

$$\dot{\alpha} = A\dot{\bar{\alpha}} \quad ,$$

$$\dot{\alpha} = A \left(\sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \right) ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i (-e_i) + \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1} ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k (-\bar{\zeta}_i) e_i + \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1} .$$

Bu ifadeyi $\dot{\alpha}$ nın hipotezdeki değeriyle kıyaslırsak

$$\bar{\zeta}_i = \zeta_i , \quad 1 \leq i \leq k$$

ve

$$\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1}$$

elde edilir.

Teorem III.3.6.

k. mertebeden helisel hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeyleri için

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} , \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} , \quad 1 \leq i \leq m$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$(III.3.21) \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} , \quad 1 \leq j \leq k , \quad 1 \leq i \leq m ,$$

$$(III.3.22) \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntıları vardır,[14].

İspat :

$$\dot{\bar{e}}_i = -A \dot{\bar{e}}_i ,$$

$$\dot{\bar{e}}_i = -A \left(\sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \right) ,$$

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i}$$

bu ifade hipotezde verilenlerle kıyaslanırsa

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \quad , \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 1 \leq j \leq k$$

elde edilir.

Teorem III.3.7.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. dağılma parametreleri , sırasıyla, \bar{P}_i ve P_i olmak üzere

$$(III.3.23) \quad \bar{P}_i = P_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır,[14].

İspat :

$$\bar{P}_i = \frac{\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{\kappa}_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$\bar{P}_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \quad (\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1} \quad , \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i) \quad ,$$

$$\bar{P}_i = P_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

Sonuç III.3.4.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin dağılma parametreleri \bar{P} ve P ise

$$(III.3.24) \quad \bar{P} = P$$

dir,[14].

Teorem III.3.8.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. açılım uzunlukları, sırasıyla, \bar{L}_i ve L_i olmak üzere

$$(III.3.25) \quad |\bar{L}_i| = |L_i| \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

dir,[14].

İspat :

$$L_i = - \int_0^p \zeta_i(t) dt , \quad 1 \leq i \leq m=k ,$$

$$L_i = - \int_0^p -\bar{\zeta}_i(t) dt \quad (\bar{\zeta}_i = -\zeta_i , \quad 1 \leq i \leq k) ,$$

$$L_i = \int_0^p \bar{\zeta}_i(t) dt ,$$

$$L_i = - \bar{L}_i$$

$$|L_i| = |\bar{L}_i| , \quad 1 \leq i \leq m=k$$

elde edilir.

Teorem III.3.9.

k. mertebeden kapalı simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin i. açılım açıları , sırasıyla , $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere

$$(III.3.26) \quad |\bar{\lambda}_i| = |\lambda_i| , \quad 1 \leq i \leq m=k$$

dır,[14].

Sonuç III.3.5.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin açılım açıları arasında $\bar{\lambda} = \lambda$ bağıntısı vardır,[14].

Sonuç III.3.6.

k. mertebeden simetrik helisel hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ aksoid yüzeylerinin total dağılıma parametreleri arasında $\bar{D} = D$ bağıntısı vardır,[14].

III.4. E^n de k . Mertebeden Simetrik - Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri

Tanım III.4.1.

E^n de k . mertebeden homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen hareketli ve sabit regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ nin doğrultman uzayı $\bar{E}_k(t) = \text{Sp}\{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_k\}$ ve $S\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, olmak üzere Φ nin doğrultman uzayı da $E_k(t) = \text{Sp}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ olsun. $\{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_k\}$ ortonormal sistemi ve $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ ortogonal sistemi hamotetik hareketler altında, birbirlerine

$$(III.4.1) \quad S\bar{\epsilon}_i = -\epsilon_i, \quad (\dot{S}S^{-1})\epsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

bağıntılarını sağlayacak şekilde karşılık geliyorsa bu homotetik harekete E^n de k . mertebeden simetrik homotetik hareket adı verilir,[1].

k . mertebeden simetrik homotetik hareketler için $h(t)$ homotetik oranını $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için pozitif kabul edeceğiz.

Teorem III.4.1.

k . mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeyleri dayanak eğrileri boyunca birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar,[1].

İspat :

$\bar{\Phi}$ ve Φ nin dayanak eğrileri pol eğrileri olarak seçilirse bu hareket altında eğriler $\alpha = S\bar{\alpha} + C$ şeklinde birbirlerine karşılık gelirler. Burada eğrilerin parametrelerine göre türev alınırsa

$$\dot{\alpha} = \dot{S}\bar{\alpha} + S\dot{\bar{\alpha}} + \dot{C}$$

olur. Pol noktalarında $\dot{S}\bar{\alpha} + \dot{C} = 0$ olduğundan

$$(III.4.2) \quad \dot{\alpha} = S\dot{\bar{\alpha}}$$

bulunur. $\bar{\alpha}$ ve α nin yay uzunlukları, sırasıyla, \bar{s} ve s olmak üzere

$$ds = \|\dot{\alpha}\| dt, \quad d\bar{s} = \|\dot{\bar{\alpha}}\| dt,$$

$$ds = \|S\dot{\bar{\alpha}}\| dt, \quad S = hA, \quad A \in SO(n),$$

$$ds = \|hA\dot{\bar{\alpha}}\| dt, \quad S = hA, \quad A \in SO(n),$$

$$ds = |h| \|\dot{\bar{\alpha}}\| dt ,$$

$$ds = h d\bar{s}$$

bulunur. Bu ise $\bar{\Phi}$ ve Φ nin birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanması demektir.

Teorem III.4.2.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ ,bu yüzeylerin doğrultman uzayları $\bar{E}_k(t) = \text{Sp}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $E_k(t) = \text{Sp}\{e_1, \dots, e_k\}$ ise

$$(III.4.3) \quad S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{e}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k$$

dır,[1].

İspat :

(III.4.1) den türev alırsak

$$\begin{aligned} \dot{S}\bar{e}_i + S\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i \quad , \quad \bar{e}_i = -S^{-1}e_i \quad , \\ -(\dot{S}S^{-1})e_i + S\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i \quad , \quad (\dot{S}S^{-1})e_i = 0 \quad , \\ S\dot{\bar{e}}_i &= -\dot{e}_i \quad , \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

elde edilir.

boy $\bar{A}(t) = \text{boy}A(t) = k+m$, $0 \leq m \leq k$, olsun. $\bar{A}(t)$ asimptotik demetinde $\dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olan m-tanesi $\dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}$ ise $\bar{A}(t)$ nin bir bazı

$$(III.4.3) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_{k+1}, \dots, \dot{\bar{e}}_{k+m}\} \quad , \quad 0 \leq m \leq k$$

olur. Benzer olarak A(t) nin bir bazı da

$$(III.4.4) \quad \{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_{k+1}, \dots, \dot{e}_{k+m}\}$$

olarak bulunur.

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortogonal olduğundan $\bar{A}(t)$ ve A(t) nin ortogonal bazıları

$$(III.4.5) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}\},$$

$$(III.4.6) \quad \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$$

şeklinde elde edilebilir.

Teorem III.4.3.

(III.4.5) ve (III.4.6) daki ortogonal bazlar için

$$(III.4.7) \quad S\bar{y}_{k+i} = -y_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı geçerlidir,[1].

İspat :

Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin (III.4.4) ile verilen bazına ortogonalleştirme metodunu uygulayalım :

$$y_1 = \epsilon_1 \quad ,$$

$$y_2 = \epsilon_2 - \frac{\langle \epsilon_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 \quad ,$$

$$y_3 = \epsilon_3 - \frac{\langle \epsilon_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle \epsilon_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2 \quad ,$$

·
·
·

$$y_k = \epsilon_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \epsilon_k, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i \quad ,$$

$$y_{k+1} = \dot{\epsilon}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\epsilon}_{k+1}, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i \quad ,$$

·
·
·

$$y_{k+m} = \dot{\epsilon}_{k+m} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\epsilon}_{k+m}, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i \quad .$$

Simetrik homotetik hareketler için $S\bar{e}_i = -\epsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, ($i \neq j$ için $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0$)
ve $S\dot{\bar{e}}_i = -\dot{\epsilon}_i$, $1 \leq i \leq k$, olduğundan bunlar yukarıdaki formüller de kullanılırsa

$$y_i = \epsilon_i , 1 \leq i \leq k$$

elde edilir. $S\bar{e}_i = -\epsilon_i$ ve $S = hA$, $A \in SO(n)$ olduğundan

$$y_{k+1} = \dot{\epsilon}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \epsilon_i, \dot{\epsilon}_{k+1} \rangle}{\|\epsilon_i\|^2} \epsilon_i ,$$

$$y_{k+1} = (-S) \left(\dot{\bar{e}}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \bar{e}_i, \dot{\bar{e}}_{k+1} \rangle}{\|\bar{e}_i\|^2} \bar{e}_i \right)$$

bulunur. Burada parantez içindeki ifade (III.4.3) deki bazın ortonormalleştirilmesi esnasında elde edilen \bar{y}_{k+1} vektörüdür. O halde

$$S\bar{y}_{k+1} = -y_{k+1}$$

olur. Benzer işlemler y_{k+2}, \dots, y_{k+m} için de yapılırsa

$$S\bar{y}_{k+i} = -y_{k+i} , 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ asimptotik demetlerinin (III.4.5) ve (III.4.6) ile verilen ortogonal bazlarını

$$(III.4.8) \quad \epsilon_i = \frac{\epsilon_i}{h} , 1 \leq i \leq k , a_{k+i} = \frac{y_{k+i}}{\|y_{k+i}\|} , \bar{a}_{k+i} = \frac{\bar{y}_{k+i}}{\|\bar{y}_{k+i}\|} , 1 \leq i \leq m$$

şeklinde normalize edersek , $\bar{A}(t)$ nin

$$(III.4.9) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$$

ve $A(t)$ nin

$$(III.4.10) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$$

ortonormal bazları elde edilir.

Teorem III.4.4

(III.4.9) ve (III.4.10) daki ortonormal bazlar için

$$S\bar{e}_i = -he_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$S\bar{a}_{k+i} = -ha_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntıları geçerlidir,[1].

İspat :

$S\bar{e}_i = -\varepsilon_i$ ve $e_i = \varepsilon_i/h$, $1 \leq i \leq k$, olduğundan $S\bar{e}_i = -he_i$, $1 \leq i \leq k$, bulunur. (Teo.III.4.3) ve (III.4.8) bağıntısından

$$a_{k+i} = \frac{y_{k+i}}{\|y_{k+i}\|}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$a_{k+i} = -\frac{S\bar{y}_{k+i}}{\|S\bar{y}_{k+i}\|}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$a_{k+i} = -\frac{S}{h} \frac{\bar{y}_{k+i}}{\|\bar{y}_{k+i}\|}, \quad A \in SO(n), \quad h > 0,$$

$$a_{k+i} = -\frac{S}{h} \bar{a}_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$S\bar{a}_{k+i} = -h a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin teğetsel demetleri, sırasıyla,

$$\bar{T}(t) = Sp\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \dot{\bar{e}}_1, \dots, \dot{\bar{e}}_k, \dot{\bar{\alpha}}\}$$

ve

$$T(t) = Sp\{e_1, \dots, e_k, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_k, \dot{\alpha}\}$$

olmak üzere $boy\bar{T}(t) = boyT(t) = k+m$ ise $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ nin (III.4.9) ve (III.4.10) daki bazları aynı zamanda, sırasıyla, $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin de ortonormal bazları olur.

$boy\bar{T}(t) = boyT(t) = k+m+1$ olsun. Bu taktirde $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ nin, sırasıyla,

$$(III.4.11) \quad \{\bar{\epsilon}_1, \dots, \bar{\epsilon}_k, \bar{y}_{k+1}, \dots, \bar{y}_{k+m}, \bar{y}_{k+m+1}\},$$

$$(III.4.12) \quad \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$$

ortogonal bazları bulunur.

Teorem III.4.5.

(III.4.11) ve (III.6.12) deki ortogonal bazlar arasında

$$(III.4.13) \quad \begin{aligned} S\bar{\epsilon}_i &= -\epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ S\bar{y}_{k+i} &= -y_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ S\bar{y}_{k+m+1} &= y_{k+m+1} \end{aligned}$$

bağıntıları vardır, [1].

İspat :

Φ nin $T(t)$ teğetsel demetinin $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \dot{\epsilon}_{k+1}, \dots, \dot{\epsilon}_{k+m}, \dot{\alpha}\}$ bazının ortogonallaştırılmış şekli $\{y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m+1}\}$ olsun. Bu takdirde ortogonalleştirme formülleri gereğince $i \neq j$ için $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0$ olduğundan

$$y_i = \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq k$$

bulunur. Bu durumda $T(t)$ nin bir ortogonal bazı $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}, y_{k+m+1}\}$ olur. Burada $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}\}$ aynı zamanda $A(t)$ asimptotik demetinin ortogonal bazı olduğundan (III.4.1) bağıntısı ve (Teo.III.4.3) gereğince

$$\begin{aligned} S\bar{\epsilon}_i &= -\epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ S\bar{y}_{k+j} &= -y_{k+j}, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$y_{k+m+1} = \dot{\alpha} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\alpha}, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \dot{\alpha}, y_{k+j} \rangle}{\|y_{k+j}\|^2} y_{k+j}$$

dir. $y_i = \epsilon_i$, $1 \leq i \leq k$, ve $S\dot{\alpha} = \dot{\alpha}$ gözönüne alınırsa

$$y_{k+m+1} = S \left(\dot{\alpha} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \dot{\alpha}, \bar{\epsilon}_i \rangle}{\|\bar{\epsilon}_i\|^2} \bar{\epsilon}_i - \sum_{j=1}^m \frac{\langle \dot{\alpha}, \bar{y}_{k+j} \rangle}{\|\bar{y}_{k+j}\|^2} \bar{y}_{k+j} \right)$$

bulunur. Parantez içindeki ifade $\bar{T}(t)$ teğetsel demetinin bazının normalize edilmesi

esnasında elde edilen \bar{y}_{k+m+1} olduğundan

$$S\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

elde edilir.

$\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin yukarıdaki şekilde tanımlı ortogonal bazlarında (III.4.8) ifadesi ve

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|}, \quad \bar{a}_{k+m+1} = \frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|}$$

eşitlikleri kullanılırsa $\bar{T}(t)$ nin

$$(III.3.14) \quad \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}\}$$

ve $T(t)$ nin de

$$(III.3.15) \quad \{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

ortonormal bazları elde edilir.

Teorem III.4.6.

(III.4.14) ve (III.4.15) deki ortonormal bazlar arasında

$$S\bar{e}_i = -he_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$S\bar{a}_{k+i} = -ha_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$S\bar{a}_{k+m+1} = ha_{k+m+1}$$

bağıntıları vardır, [1].

İspat :

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}\}$ sistemleri , sırasıyla , $\bar{A}(t)$ ve $A(t)$ için bir ortonormal baz olduğundan (Teo.III.4.4) gereğince

$$S\bar{e}_i = -he_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$S\bar{a}_{k+i} = -ha_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m$$

ve (Teo.III.4.5) gereğince

$$S\bar{y}_{k+m+1} = y_{k+m+1}$$

dir.

$$a_{k+m+1} = \frac{y_{k+m+1}}{\|y_{k+m+1}\|},$$

$$a_{k+m+1} = \frac{S}{h} \frac{\bar{y}_{k+m+1}}{\|\bar{y}_{k+m+1}\|} ,$$

$$a_{k+m+1} = \frac{S}{h} \bar{a}_{k+m+1} ,$$

olduğundan

$$S\bar{a}_{k+m+1} = h a_{k+m+1}$$

elde edilir.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen regle yüzey çiftleri $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. Bu regle yüzeylerin $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ teğetsel demetlerinin bazıları , sırasıyla, E^n in

$$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$$

ve

$$\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$$

bazılarına tamamlanabilir.

$\bar{\Phi}$ ve Φ merkez regle yüzeyli olsun. Bu taktirde $\bar{\Phi}$ nin tamamlayıcı ortonormal bazı $\{\bar{a}_{k+m+2}, \dots, \bar{a}_n\}$ dir. Bu baz vektörlerinin simetrik homotetik hareketler altında karşılık geldiği vektörler $y_{k+m+\lambda}$, $1 \leq \lambda \leq n-k-m$, ile gösterilirse

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda} , \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m$$

yazılabilir ve $\{y_{k+m+2}, \dots, y_n\}$ sistemi $\bar{\Phi}$ ye karşılık gelen Φ regle yüzeyi için tamamlayıcı ortogonal baz olur.

$$(III.4.16) \quad a_{k+m+\lambda} = \frac{y_{k+m+\lambda}}{\|y_{k+m+\lambda}\|} , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olmak üzere $\{a_{k+m+2}, \dots, a_n\}$ tamamlayıcı ortonormal bazı elde edilir. (III.4.16) da $S\bar{a}_{k+m+\lambda} = y_{k+m+\lambda}$ kullanılırsa

$$a_{k+m+\lambda} = \frac{1}{h} S \left(\frac{\bar{a}_{k+m+\lambda}}{\|\bar{a}_{k+m+\lambda}\|} \right) , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m ,$$

$$S\bar{a}_{k+m+\lambda} = h a_{k+m+\lambda} , \quad \|\bar{a}_{k+m+\lambda}\| = 1 , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

Sonuç III.4.1.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketler altında birbirlerine karşılık gelen teğetsel demetler $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ olsun. E^n in $\bar{T}(t)$ ve $T(t)$ ye göre iki ortonormal bazı sırasıyla, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \dots, \bar{a}_n\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, \dots, a_n\}$ olarak verilsin. Bu iki baz arasında

$$\begin{aligned} S\bar{e}_i &= -he_i, & 1 \leq i \leq k, \\ S\bar{a}_{k+i} &= -ha_{k+i}, & 1 \leq i \leq m, \\ S\bar{a}_{k+m+\lambda} &= ha_{k+m+\lambda}, & 1 \leq \lambda \leq n-k-m \end{aligned}$$

bağıntıları bulunduğundan E^n de k. mertebeden simetrik homotetik hareket E^n in $(n-k-m)$ - boyutlu $Sp\{a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ altuzayına göre bir yansımadır, [1].

Teorem III.4.7.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftleri $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. Bu regle yüzeylerin asli çatılarını $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ ve $\{e_1, \dots, e_k\}$ olarak alalım. Bu durumda

$$\dot{\bar{e}}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{e}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i}, \quad \dot{e}_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i}$$

türev vektörlerinin katsayıları arasında

$$(III.4.17) \quad \bar{\alpha}_{ii} = (\dot{h}/h) + \alpha_{ii}, \quad i=j,$$

$$(III.4.18) \quad \bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}, \quad i \neq j,$$

$$(III.4.19) \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq k$$

bağıntıları vardır, [1].

İspat :

$\varepsilon_i = he_i$ ifadesinde türev alırsak

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{h}e_i + h\dot{e}_i, \quad e_i = \varepsilon_i/h,$$

$$\dot{e}_i = \frac{\dot{h}}{h} e_i + h \left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} e_j + \kappa_i a_{k+i} \right),$$

$$\dot{\epsilon}_i = \left(\frac{\dot{h}}{h} + \alpha_{ii} \right) \epsilon_i + \sum_{j=1, i \neq j}^k \alpha_{ij} h \epsilon_j + \kappa_i h a_{k+i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

$$(III.4.20) \quad \dot{\epsilon}_i = \left(\frac{\dot{h}}{h} + \alpha_{ii} \right) \epsilon_i + \sum_{j=1, i \neq j}^k \alpha_{ij} \epsilon_j + \kappa_i h a_{k+i}$$

elde edilir. Diğer taraftan ,

$$S \dot{\bar{\epsilon}}_i = - \dot{\epsilon}_i \quad ,$$

$$\dot{\epsilon}_i = - S \dot{\bar{\epsilon}}_i \quad ,$$

$$\dot{\epsilon}_i = - S \left(\sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \bar{\epsilon}_j + \bar{\kappa}_i \bar{a}_{k+i} \right) \quad ,$$

$$\dot{\epsilon}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} (- S \bar{\epsilon}_j) + \bar{\kappa}_i (- S \bar{a}_{k+i}) \quad ,$$

$$\dot{\epsilon}_i = \sum_{j=1}^k \bar{\alpha}_{ij} \epsilon_j + \bar{\kappa}_i h a_{k+i} \quad ,$$

$$(III.4.21) \quad \dot{\epsilon}_i = \bar{\alpha}_{ii} + \sum_{j=1, i \neq j}^k \bar{\alpha}_{ij} \epsilon_j + \bar{\kappa}_i h a_{k+i}$$

bulunur. Burada (III.4.20) ile (III.4.21) karşılaştırılırsa

$$\bar{\alpha}_{ii} = (\dot{h}/h) + \alpha_{ii} \quad ,$$

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \quad , \quad 1 \leq j \leq k \quad ,$$

$$\bar{\kappa}_i = \kappa_i \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

Teorem III.4.8.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. Bu regle yüzeylerin dayanak eğrileri $\bar{\alpha}$ ve α olmak üzere

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{\epsilon}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \quad , \quad \dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \zeta_i \epsilon_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

ifadelerindeki katsayılar arasında

$$(III.4.22) \quad \zeta_i = -h\bar{\zeta}_i$$

$$(III.4.23) \quad \eta_{m+1} = h\bar{\eta}_{m+1}$$

bağıntıları vardır,[1].

İspat :

$$\dot{\alpha} = S\ddot{\alpha} ,$$

$$\dot{\alpha} = S \left(\sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} \bar{a}_{k+m+1} \right) ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i S \bar{e}_i + \bar{\eta}_{m+1} S \bar{a}_{k+m+1} ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \bar{\zeta}_i (-h e_i) + \bar{\eta}_{m+1} h a_{k+m+1} ,$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k (-h \bar{\zeta}_i) e_i + h \bar{\eta}_{m+1} a_{k+m+1} .$$

Bu ifade $\dot{\alpha}$ nın hipotezdeki değeri ile karşılaştırılırsa $\zeta_i = -h\bar{\zeta}_i$, $\eta_{m+1} = h\bar{\eta}_{m+1}$ elde edilir.

Teorem III.4.9.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin i. dağılma parametreleri , sırasıyla , \bar{P}_i ve P_i olmak üzere

$$(III.4.24) \quad P_i = h\bar{P}_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır,[1].

İspat :

$$P_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \text{ de (III.4.19) ve (III.4.23) kullanılırsa}$$

$$P_i = \frac{h\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{\kappa}_i} ,$$

$$P_i = h \frac{\bar{\eta}_{m+1}}{\bar{\kappa}_i} ,$$

$$P_i = h \bar{P}_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

Sonuç III.4.2.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yüzeylerinin dağılıma parametreleri \bar{P} ve P ise $P = h\bar{P}$ bağıntısı vardır,[1].

Teorem III.4.10.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ ve bunların i. açılım uzunlukları \bar{L}_i ve L_i olmak üzere

$$(III.4.25) \quad dL_i = -h d\bar{L}_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

dir,[1].

İspat :

$dL_i = -\zeta_i dt$ ifadesinde (III.4.22) bağıntısını kullanırsak

$$dL_i = -(-h\bar{\zeta}_i) dt , \quad 1 \leq i \leq m ,$$

$$dL_i = (-h)(-\bar{\zeta}_i dt) , \quad 1 \leq i \leq m ,$$

$$dL_i = -h d\bar{L}_i ; \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

Teorem III.4.11.

k. mertebeden kapalı simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ yüzeylerinin i. açılım açıları , sırasıyla , $\bar{\lambda}_i$ ve λ_i olmak üzere , bunlar arasında

$$(III.4.26) \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

bağıntısı vardır,[1].

Sonuç III.4.3.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yzeylerinin açılım açıları arasında $\bar{\lambda} = \lambda$ bağıntısı vardır,[1].

Sonuç III.4.4.

k. mertebeden simetrik homotetik hareketlere iştirak eden $\bar{\Phi}$ ve Φ regle yzeylerinin total dağılma parametreleri arasında $D = h^m \bar{D}$ bağıntısı vardır,[1].



IV. BÖLÜM

KONOİDAL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde konoidal , ortokonoidal ve kuvvetli konoidal regle yüzeyleri tanıtaacağız.

IV. Konoidal Regle Yüzeyler

Tanım IV.1.1.

E^n de $(k+1)$ -boyutlu regle yüzey Φ olsun. Φ nin her $E_k(t)$ doğrultman uzayının paralel olduğu sabit bir $E^q \subset E^n$, $q \geq k$, altuzayı mevcut ise Φ ye **q-konoidal regle yüzey** , E^q altuzayına da Φ nin **doğrultu uzayı** (Richraum'u) denir, [7].

Eğer bir Φ $(k+1)$ -regle yüzeyi $(n-1)$ -konoidal ise Φ ye kısaca **konoidaldir** denir ve onun doğrultu uzayı sabit bir **doğrultu hiperdüzlem** (Richthyperebone) dir.

Örnek IV.1.1.

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında dik silindir yüzeyi bir konoidal regle yüzeydir.

Tanım IV.1.2.

Ω merkez regle yüzeyli ve doğrultu uzayı E^q olan q-konoidal bir $(k+1)$ -regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına ortogonal ise Φ ye **q-ortokonoidal** dir denir , [7].

Eğer $q = n-1$ ise Φ ye kısaca **ortokonoidal** diyeceğiz.

Teorem IV.1.1.

E^n de q-konoidal $(k+1)$ -regle yüzey Φ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin boyutu $(k+m)$ sabit olsun. Bu durumda E^q doğrultu uzayının boyutu olan q-sayısı için ,

$$(IV.1.1) \quad k+m \leq q \leq n-1$$

eşitsizliği geçerlidir ve Φ nin asimptotik demetleri E^q doğrultu uzayına paraleldir,[7].

İspat :

Teoremin ispatı için $k+m \leq q$ olduğunu göstermeliyiz.

E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyeni olan alt vektör uzayı $(E^q)^\perp$ olmak üzere $\text{boy}(E^q)^\perp = n-q$ dur. $(E^q)^\perp$ in bir ortonormal bazı $\{b_{q+1}, \dots, b_n\}$ olsun.

E^q sabit olduğundan $(E^q)^\perp$ de sabittir. Bu durumda Φ nin $E_k(t)$, $t \in I$, doğrultman uzayının $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı bazı için,

$$(IV.1.2) \quad \langle b_{q+s}, e_i(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq s \leq n-q$$

dır. Burada t ye göre türev alırsak

$$(IV.1.3) \quad \langle b_{q+s}, \dot{e}_i(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq s \leq n-q$$

bulunur. Son eşitlikte (I.2.6) ve (I.2.7) bağıntıları kullanılırsa

$$(IV.1.4) \quad \kappa_i \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \kappa_i > 0,$$

$$(IV.1.5) \quad \langle b_{q+s}, a_{k+i} \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq s \leq n-q$$

elde edilir. (IV.1.2) ve (IV.1.5) ifadelerinden Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti $(E^q)^\perp$ e ortogonal, dolayısıyla E^q ya paraleldir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım IV.1.3.

Silindirik olmayan ($m > 0$), q -konoidal $(k+1)$ -regle yüzey Φ ve Φ nin $A(t)$ asimptotik demetinin boyutu $(k+m)$ sabit olsun. Eğer $q = k+m$ ise Φ ye kuvvetli konoidal (strengkonoidal) denir, [7].

Teorem IV.1.2.

Silindirik olmayan ($m > 0$) Φ , q -konoidal $(k+1)$ -regle yüzeyi, $k+m$ sabit boyutlu $A(t)$ asimptotik demetine ve $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olsun. Bu taktirde Φ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak (I.2.20) ifadesinde

$$w_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir,[7].

karşılık gelirler ve katsayı matrisi I_{n-q} birim matrisi haline gelir. $\det I_{n-q} \neq 0$ olduğundan çözüm tektir. Buna göre lineer denklem sistemi homojen olduğundan çözüm sadece aşikar çözümdür. Dolayısıyla

$$w_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir.

(\Leftarrow):

$$w_i = 0, \quad \gamma_{i\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

olsun. Bu sonucun elde edilebilmesi için (IV.1.6) daki katsayıların oluşturduğu matrisin regüler olması gerekir. Regüler olması için de herşeyden önce kare matris olması gerekir ki bu da $q=k+m$ olmasıyla sağlanır. O halde Φ kuvvetli konoidaldir.

Teorem IV.1.3.

E^n de bir Φ (k+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal olsun. Eğer Φ , Ω merkez regle yüzeyli ise, o zaman Φ (k+m)-ortokonoidaldir, [7].

İspat:

(Teo.IV.1.1) e göre Φ nin $A(t)$ asimptotik demeti Φ nin E^{k+m} doğrultu uzayına paraleldir. Ayrıca (Teo.I.2.2.) ye göre Φ nin merkez noktalarındaki tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktirler. O halde ortokonoidallik tanımı gereği Φ (k+m)-ortokonoidaldir.

Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi p-konoidal ve q-konoidal gibi değişik mertebelerden konoidal olabilir. Eğer $E^q \subset E^p$ olacak şekilde E^q ve E^p doğrultu uzayları mevcut ise Φ ye aynı anda q-konoidal ve p-ortokonoidaldir denir.

Teorem IV.1.4.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatısına sahip olan, Ω merkez regle yüzeyli, silindirik olmayan ($m > 0$) kuvvetli konoidal (k+1)-regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ ortokonoidal ise (I.2.20) türev denklemlerinde

$$\beta_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir. Bu durumda Φ bir ($n=k+m+1$)-boyutlu Öklid uzayında bulunur, [7].

İspat:

Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi kuvvetli konoidal ise $q=k+m$ dir. Ayrıca Φ merkez regle yüzeyli olduğundan $a_{k+m+1}(t)$, $t \in I$, merkez tanjant vektörü vardır.

Şimdi Φ (k+1)-regle yüzeyi ortokonoidal olsun . Bu takdirde $q=n-1$ olup Φ nin doğrultu uzayı bir hiperdüzlemdir. O halde $(E^q)^\perp = \text{Sp}\{b\}$, yani E^q nun ortogonal tümleyeni 1-boyutlu bir altuzaydır. (Teo.IV.1.3) e göre $a_{k+m+1}(t)$, $t \in I$, merkez tanjant vektörü E^q doğrultu uzayına diktir, yani a_{k+m+1} vektörü $\text{Sp}\{b\}$ uzayında bulunur. O halde

$$\langle b, a_{k+m+1}(t) \rangle = \lambda \quad (\lambda = \text{sabit})$$

yazılabilir. t ye göre türev alınırsa

$$\langle b, a_{k+m+1}(t) \rangle = 0$$

olur. $a_{k+m+1}(t)$ nin (I.2.20) türev denklemlerindeki değeri yerine yazılır ve (Teo.IV.1.2) gözönünde bulundurulursa

$$-\sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda \langle b, a_{k+m+\lambda} \rangle = 0$$

veya

$$\beta_\lambda = 0$$

elde edilir. Ayrıca $q=k+m$ ve $q=n-1$ olduğundan $n=k+m+1$ elde edilir ki bu da Φ nin (k+m+1)-boyutlu Öklid uzayında olması demektir.

Teorem IV.1.5.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatusına sahip olan , Ω merkez regle yüzeyli , silindirik olmayan ($m > 0$) , (k+1)-regle yüzey Φ olsun . Eğer Φ için (I.2.20) türev denklemlerinde

$$w_i = 0 \quad , \quad \beta_\lambda = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

ise Φ , ortokonoidaldir,[7].

Teorem IV.1.6.

$\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ asli çatusına sahip olan , Ω merkez regle yüzeyli , silindirik olmayan ($m > 0$) , (k+1)-regle yüzey Φ olsun . Eğer Φ , q-ortokonoidal ise (I.2.20) de

$$w_i = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

dir,[7].

İspat:

Bir Φ (k+1)-regle yüzeyi Ω merkez regle yüzeyli ise a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü vardır. Φ q-ortokonoidal olduğundan a_{k+m+1} vektörü Φ nin E^q doğrultu uzayına diktir, yani a_{k+m+1} vektörü E^q ya ortonormal vektör uzayında bulunur. E^q

sabit olduğundan $(E^q)^\perp$ de sabittir. O halde a_{k+m+1} merkez tanjant vektörü Φ nin parametrizasyonundaki I parametre aralığının $t_0 \in I$ değeri için sabit olarak bulunur. Buna göre

$$\langle a_{k+m+1}(t_0), a_{k+i}(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

eşitliğinde t ye göre türev alırsak

$$\langle a_{k+m+1}(t_0), \dot{a}_{k+i}(t) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir ve $\dot{a}_{k+i}(t)$ nin (I.2.20) deki değeri yerine yazılırsa

$$w_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

bulunur.

Tanım IV.1.4.

E^n de bir $(k+1)$ -regle yüzey Φ ve Φ nin bir $E_k(t_0)$ doğrultman uzayı t_0 ın bir ε civarında ($\forall t \in I$ için $|t-t_0| < \varepsilon$) bir Ω merkez regle yüzeyine sahip olsun. Eğer $E_k(t_0)$ ın merkez noktalarındaki tanjant uzayları Φ nin E^q doğrultu uzayına ortogonal iseler $E_k(t_0)$ doğrultman uzayına **q-orthooid** denir, [7].

Φ nin $(n-1)$ -orthooid doğrultman uzayına kısaca **orthooid** denir. Bu tanım E^3 ortokonoidal ışın yüzeylerinin orthoidal doğrultman uzayı kavramının direkt bir genelleştirilmesidir. E^3 ün sadece dönel (helezoni) yüzeyleri orthoid doğrultman uzayına sahiptir.

Örnek IV.1.2.

E^3 de $E_k(t) = \text{Sp}\{ X = (0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R} \}$ altuzayı doğrultman uzayı olarak

$$\begin{aligned} \alpha : I = (0, 2\pi) &\rightarrow E^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

eğrisi boyunca oluşturduğu yüzeyin denklemi

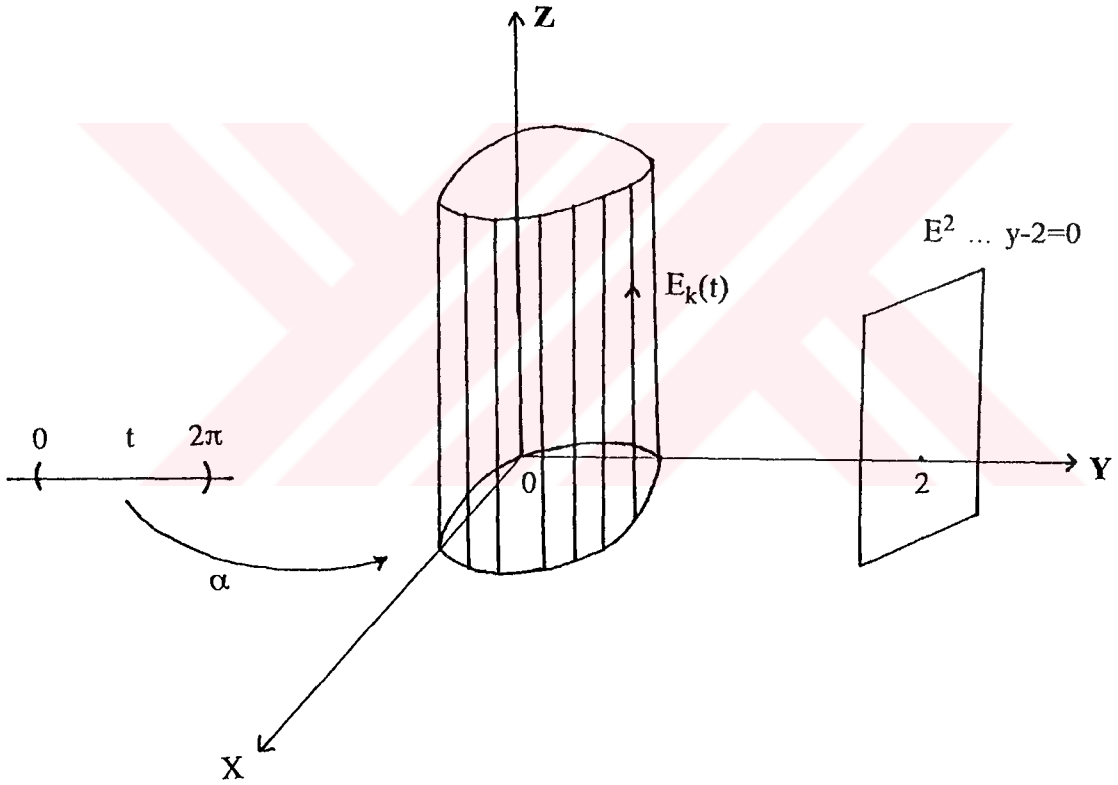
$$\begin{aligned} \Phi(t, \lambda) &= \alpha(t) + \lambda e_3 \\ &= (\cos t, \sin t, 0) + \lambda (0, 0, 1) \\ &= (\cos t, \sin t, \lambda) \end{aligned}$$

olup Φ dönüşümü E^3 de bir 2-regle yüzey (ışın yüzeyi) gösterir.

$\forall t \in I$ için $E_k(t)$ doğrultman uzayları $E^2 \dots y=2=0$, düzlemine paralel olduğundan Φ ışın yüzeyi E^3 de konoidaldir. Ayrıca $\alpha(t)$ dayanak eğrisi Φ nin merkez regle yüzeyi olup $\alpha(t)$ noktasındaki

$$-\dot{\alpha}(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

merkez tanjant uzayı (vektörü) $t = \pi$ için E^2 doğrultu uzayına ortogondur. O halde $E_k(\pi)$ doğrultman uzayı Φ nin bir orthoid doğrultman uzayıdır.



Şekil IV.1.1

Tanım IV.1.5

E^n de q -konoidal bir $(k+1)$ -regle yüzey Φ ve Φ nin bir doğrultman uzayı E_k olsun. Eğer E_k nin noktalarında Φ nin tanjant uzayları E^q doğrultu uzayına paralel ise E_k doğrultman uzayına **q -tangoiddir** denir, [7].

Φ nin $(n-1)$ -tangoid doğrultman uzayına kısaca **tangoid doğrultman uzayı** da denir.

Örnek IV.1.3.

(Örnek IV.1.2) de $t = \pi/2$ ve $t = 3\pi/2$ değerlerine karşılık gelen E_k doğrultman uzaylarının noktalarında Φ nin tanjant uzayları E^2 doğrultu uzayına paraleldir . O halde $E_k(\pi/2)$ ve $E_k(3\pi/2)$ doğrultman uzayları Φ nin tangoid doğrultman uzaylarıdır.

Teorem IV.1.7.

E^n de $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ doğal taşıyıcı baza sahip olan , konoidal basit kapalı $(k+1)$ -regle yüzey Φ olsun. Eğer Φ , E^n in bir hiperdüzleminde bulunuyorsa Φ en az iki tane tangoid doğrultman uzayına sahiptir,[7].

İspat :

Kapalı bir I aralığında $t_i \in I$, $1 \leq i \leq 2$, için $a_{k+m+1}(t_i)$ merkez tanjant vektörünün E^q doğrultu uzayına paralel olduğunu göstermeliyiz . Hipoteze göre Φ konoidal ve E^n in bir hiperdüzleminde bulunduğundan $q=n-1$ dir . O halde E^q doğrultu uzayının ortogonal tümleyenini sabit bir b vektörünün gerdiği altuzaydır . a_{k+m+1} vektörünün E^q ya paralel olduğunu göstermek için b vektörüne dik olduğunu göstermek yeterlidir .

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)$$

ifadesinde Φ nin bir kapalı $\alpha(t)$ dayanak eğrisi için

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^k \zeta_i e_i + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

dir . Buna göre

$$\langle \dot{\alpha}(t), b \rangle = \eta_{m+1}(t) \langle a_{k+m+1}(t), b \rangle$$

olur . Burada Φ nin kapalı bir yörüngesi üzerinden integral alırsak

$$\int_{\Phi} \eta_{m+1}(t) \langle a_{k+m+1}(t), b \rangle = \int_{\Phi} \langle \dot{\alpha}(t), b \rangle = 0$$

bulunur . Bu nedenle en az iki $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, için

$$(IV.1.7) \quad \eta_{m+1}(t_i) < a_{k+m+1}(t_i), b \geq 0$$

dır. Gerçekten ,

$$\eta_{m+1}(t_i) < a_{k+m+1}(t_i), b \geq \eta_{m+1}(t_i) \| a_{k+m+1}(t_i) \| \| b \| \cos t_i$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında $t = \pi/2$ ve $t = 3\pi/2$ değerleri için $\cos t = 0$ olduğundan (IV.1.7) ifadesi doğrudur. O halde Φ nin en az iki $t \in I$ değeri için tangoid doğrultman uzayı vardır .

Tanım IV.1.6.

(I.2.2) parametrizasyonuna ve (I.2.20) türev denklemlerine sahip olan ve hiç silindirik olmayan doğrultmanları ihtiva eden bir Φ_i 2-regle yüzeyinde ζ_i / κ_i , $1 \leq i \leq m = k$, invaryantına Φ_i nin **Blaschke invaryantı** denir , [7].

Blaschke invaryantı $\dot{\alpha}$ ve \dot{e}_i , $1 \leq i \leq k$, dan elde edilir.

Teorem IV.1.8.

E^n de bir $(k+1)$ -regle yüzey Φ nin kapalı ortogonal yörüngeli doğrultmanı ve $\alpha(t)$ striksiyon çizgili basit kapalı yönlendirilebilen asli ışın yüzeylerinin Blaschke invaryantı $0 \leq t \leq p$ periyot aralığında en az iki yerde sıfır değerine sahiptir (yani en az $t_1 \neq t_2$ olmak üzere t_1, t_2 için Blaschke invaryantının değeri sıfırdır).

Eğer Φ ortokonoidal ise Blaschke invaryantının sıfır olduğu $t_i, 1 \leq i \leq 2$, değerlerine karşılık gelen doğrultmanlar Φ nin orthoid doğrultmanlarıdır.

İspat :

Φ nin herhangi bir doğrultman uzayının kapalı yörüngesinde i . açılım uzunluğu

$$L_i = - \int_{\Phi} \zeta_i(t) dt = - \int_0^p \zeta_i(t) dt$$

dır. Buradan en az $t_1 \neq t_2$ değeri için

$$\zeta_i(t_i)=0, \quad 1 \leq i \leq 2$$

dir . O halde $\kappa_i(t) \neq 0$ olduğundan Φ nin i. Blaschke invariyantı sıfırdır .

Eğer Φ ortokonoidal ise $t_1 \in I$ nin bir ε_1 komşuluğunda ve $t_2 \in I$ nin bir ε_2 komşuluğunda da ortokonoidaldir. O halde t_1 ve t_2 ye karşılık gelen doğrultmanlar da orthoid doğrultmanlar olur.



V. BÖLÜM

HOMOTETİK HAREKETLERE İŞTİRAK EDEN KONOİDAL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde helisel ve homotetik hareketlere iştirak eden regle yüzey çiftleri üzerinde durulacaktır.

V.1. E^n de k. Mertebeden Helisel Hareketler Üzerine

E^n in k. mertebeden helisel hareketi için

ile

$$\{ \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n \}$$
$$\{ e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n \}$$

ortonormal baz sistemlerinin vektörleri arasında şu bağıntılar vardır, [8] :

$$(V.1.1) \quad A\bar{e}_i = e_i, \quad A\dot{\bar{e}}_i = \dot{e}_i, \quad B e_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$(V.1.2) \quad A\bar{a}_{k+i} = a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$(V.1.3) \quad A\bar{a}_{k+m+s} = a_{k+m+s}, \quad 1 \leq s \leq n-k-m.$$

E sabit uzayının $\{ e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n \}$ ortonormal bazını

$$(V.1.4) \quad B a_{k+m+s} = 0, \quad 1 \leq s \leq n-k-m$$

olacak şekilde seçelim .

(V.1.3) den $s=1$ için ,

$$A\bar{a}_{k+m+1} = a_{k+m+1} \quad (\bar{a}_{k+m+1} = A^{-1} a_{k+m+1})$$

elde edilir . Buradan türev alacak olursak

$$\dot{A}\bar{a}_{k+m+1} + A\dot{\bar{a}}_{k+m+1} = \dot{a}_{k+m+1}$$

ve (I.2.20) deki türev denklemlerinden ve $B = \dot{A} A^{-1}$ olduğundan

$$B a_{k+m+1} + A \left(- \sum_{j=1}^m \bar{w}_j \bar{a}_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\beta}_\lambda \bar{a}_{k+m+\lambda} \right) = - \sum_{j=1}^m w_j a_{k+j} - \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

yazılır. Bu son eşitlikte (V.1.2), (V.1.3) ve (V.1.4) kullanılırsa

$$(w_1 - \bar{w}_1) a_{k+1} + \dots + (w_m - \bar{w}_m) a_{k+m} + (\beta_2 - \bar{\beta}_2) a_{k+m+2} + \dots + (\beta_{n-k-m} - \bar{\beta}_{n-k-m}) a_n = 0$$

elde edilir ve buradan da

$$(V.1.5) \quad w_j = \bar{w}_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$(V.1.6) \quad \beta_\lambda = \bar{\beta}_\lambda, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

bulunur.

(V.1.2) den türev alarak

$$B a_{k+i} + A \dot{\bar{a}}_{k+i} = \dot{a}_{k+i} \quad (\bar{a}_{k+i} = A^{-1} a_{k+i}, \quad \dot{A} A^{-1} = B)$$

bulunur. Φ için (I.2.20) deki türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} B a_{k+i} + A \left(-\bar{\kappa}_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^m \bar{\tau}_{ij} \bar{a}_{k+j} + \bar{w}_i \bar{a}_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \bar{\gamma}_{i\lambda} \bar{a}_{k+m+\lambda} \right) \\ = -\kappa_i e_i + \sum_{j=1}^m \tau_{ij} a_{k+j} + w_i a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

olur . Burada (V.1.1), (V.1.2) ve (V.1.3) uygulanırsa

$$(\kappa_i - \bar{\kappa}_i) \mathbf{e}_i + \sum_{j=1, i \neq j}^m (\bar{\tau}_{ij} - \tau_{ij}) \mathbf{a}_{k+j} + (\mathbf{B} + \bar{\tau}_{ii} - \tau_{ii}) \mathbf{a}_{k+i} + (\bar{w}_i - w_i) \mathbf{a}_{k+m+1}$$

$$+ \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} (\bar{\gamma}_{i\lambda} - \gamma_{i\lambda}) \mathbf{a}_{k+m+\lambda} = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

ve böylece

$$(V.1.7) \quad \kappa_i = \bar{\kappa}_i, \quad w_i = \bar{w}_i, \quad \gamma_{i\lambda} = \bar{\gamma}_{i\lambda}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m,$$

$$(V.1.8) \quad \tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j,$$

$$(V.1.9) \quad (\tau_{ii} - \bar{\tau}_{ii}) \mathbf{I}_n = \mathbf{B}, \quad 1 \leq i \leq m$$

elde edilir.

V.2. Konoidal Aksoid Yüzey Çiftleri

Teorem V.2.1.

$\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir ancak ve ancak Φ kuvvetli konoidaldir , [4].

İspat :

$\bar{\Phi}$ silindirik ise Φ de silindiriktir , [8].

$\bar{\Phi}$, q-konoidal olsun . $X=A\bar{X}+C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için (V.1.1) , (V.1.2) ve (V.1.3) gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır . O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q$ ise $E_k(t) // E^q$ dir. Yani Φ , q-konoidaldir.

$\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidal olduğundan ,(Teo.VI.1.2) den

$$\bar{w}_i = 0 , \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0 , 1 \leq i \leq m , 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

ve (V.1.7) den

$$w_i = 0 , \gamma_{i\lambda} = 0 , 1 \leq i \leq m , 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir. O halde (Teo.IV.1.2) den Φ kuvvetli konoidaldir. Bu teoremin tersi de doğrudur.

Teorem V.2.2.

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal $\Rightarrow \Phi$, (k+m)-ortokonoidaldir , [4].

İspat :

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal olduğundan $\bar{\Phi}$, kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir. O halde (Teo.V.2.1) den Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir. Ayrıca (III.1.16) dan

$\bar{\eta}_{m+1} = \eta_{m+1}$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ dir. Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir. O halde Φ , (k+m)-ortokonoidaldir .

Teorem V.2.3.

$\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olsun . Eğer $\bar{\Phi}$ ortokonoidal ise Φ , ortokonoidaldir, [4].

İspat :

(Teo.V.2.1) den $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olduğundan Φ de kuvvetli konoidaldir. $\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan (Teo.IV.1.4) den

$$\bar{\beta}_\lambda = 0, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir. (Teo.IV.1.6) dan $\bar{w}_i = 0$ dir. Çünkü q -ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade $q=n-1$ için de geçerlidir. O halde (V.1.5) ve (V.1.6) dan

$$w_i = 0, \quad \beta_\lambda = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir . Buradan (Teo.IV.1.5) e göre Φ ortokonoidaldır.



V.3. E^n de k. Mertebeden Homotetik Hareketler

E^n in k. mertebeden homotetik hareketi için

$$\{ \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{a}_{k+1}, \dots, \bar{a}_{k+m}, \bar{a}_{k+m+1}, \dots, \bar{a}_n \}$$

ile

$$\{ e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n \}$$

ortonormal baz sistemlerinin vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$(V.3.1) \quad S\bar{e}_i = he_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$(V.3.2) \quad S\bar{a}_{k+i} = ha_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$(V.3.3) \quad S\bar{a}_{k+m+\lambda} = ha_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m.$$

$S = hA$, $h = hI_n$, $A \in SO(n)$ olduğundan bu bağıntılar,

$$(V.3.4) \quad A\bar{e}_i = e_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$(V.3.5) \quad A\bar{a}_{k+i} = a_{k+i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$(V.3.6) \quad A\bar{a}_{k+m+\lambda} = a_{k+m+\lambda}, \quad 1 \leq \lambda \leq n-k-m,$$

şeklini alır.

E sabit uzayının $\{e_1, \dots, e_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_n\}$ bazını

$$Ba_{k+m+s} = 0, \quad 1 \leq s \leq n-k-m$$

olacak şekilde seçelim. Bu takdirde k. mertebeden helisel hareketler için elde ettiğimiz (V.1.5), (V.1.6), (V.1.7), (V.1.8) ve (V.1.9) bağıntıları aynı zamanda k. mertebeden homotetik hareketler için de geçerlidir.

V.4. Homotetik Hareketlere İştirak Eden Konoidal Regle Yüzey Çiftleri Üzerine

Teorem V.4.1.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden ve silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun . $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir $\Leftrightarrow \Phi$ kuvvetli konoidaldir .

İspat :

$\bar{\Phi}$, q-konoidal olsun . $X = S\bar{X} + C$ hareketi esnasında $\bar{E}_k(t)$ nin ortonormal bazı için (V.3.4) , (V.3.5) ve (V.3.6) gözönüne alınırsa E^q altuzayı vardır. O halde $\bar{E}_k(t) // \bar{E}^q \Rightarrow E_k(t) // E^q$ dir .Bu da Φ nin q-konoidal olması demektir.

$\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olduğundan (Teo.IV.1.2) den

$$\bar{w}_i = 0 \quad , \quad \bar{\gamma}_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

ve (V.1.7) den

$$w_i = 0 \quad , \quad \gamma_{i\lambda} = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir . O halde (Teo.IV.1.2) den Φ kuvvetli konoidaldir . Bu teoremin tersinin doğruluğunun ispatı kolayca verilebilir.

Teorem V.4.2.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden ve silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun . $\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidaldir $\Leftrightarrow \Phi$,(k+m)-ortokonoidaldir .

İspat :

$\bar{\Phi}$, (k+m)-ortokonoidal ise $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidaldir ve merkez regle yüzeye sahiptir.(Teo.V.4.1) den Φ de kuvvetli konoidaldir . $\bar{\Phi}$ merkez regle yüzeyli olduğundan $\bar{\eta}_{m+1} \neq 0$ dir . Ayrıca (Teo.III.2.4) den $|\bar{h}\bar{\eta}_{m+1}| = |\eta_{m+1}|$ olduğundan $\eta_{m+1} \neq 0$ olur . Bu ise Φ nin merkez regle yüzeye sahip olduğunu gösterir . O halde Φ , (k+m)-ortokonoidaldir.Teoremin tersinin ispatı kolaylıkla yapılabilir.

Teorem V.4.3.

$X = S\bar{X} + C$ homotetik hareketine iştirak eden, silindirik olmayan regle yüzeyler $\bar{\Phi}$ ve Φ olsun. $\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olmak üzere $\bar{\Phi}$, ortokonoidaldir $\Leftrightarrow \Phi$, ortokonoidaldir.

İspat :

$\bar{\Phi}$ kuvvetli konoidal olduğundan (Teo.V.4.1) den Φ de kuvvetli konoidaldir . $\bar{\Phi}$ ortokonoidal olduğundan (Teo.IV.1.4) den

$$\bar{\beta}_\lambda = 0 , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

dir . (Teo.IV.1.6) dan $\bar{w}_i = 0$ dir . Çünkü q-ortokonoidallik için geçerli olan bu ifade $q = n-1$ için de geçerlidir . O halde (V.1.5) ve (V.1.6) dan

$$w_i = 0 , \quad \beta_\lambda = 0 , \quad 1 \leq i \leq m , \quad 2 \leq \lambda \leq n-k-m$$

elde edilir . Böylece (Teo.IV.1.5) gereği Φ , ortokonoidaldir .Teoremin tersinin ispatı kolaylıkla yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] AYDEMİR,İ., E^n de Simetrik Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftlerinin İntegral İnvaryantları Ve Kesit Eğrilikleri, Ondokuz Mayıs Ün. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Samsun,(1992).
- [2] ÇALIŞKAN,M., Homotetik Hareketlere İştirak Eden Genelleştirilmiş Regle Yüzey Çiftleri, İnönü Ün. Fen-Ed. Fak., Doktora Tezi, Malatya, (1983).
- [3] ÇALIŞKAN,M., On The Pair Axoids, Pure And Applied Mathematika Sciences Vol.XXX, No:1-2, September, (1989).
- [4] ÇALIŞKAN,M.-KURUOĞLU,N., On The Pair Of Konoidal Axoids, Pure And Applied, Mathematika Sciences, Vol.XXXVI, No:1-2 September, (1992).
- [5] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflächen, Math. Z.150.261-271 (1976).
- [6] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflächen Im Grossen I, Arch, Math., Vol.38, 106-115 (1982).
- [7] FRANK,H.-GIERING,O., Varallgemeinerte Regelflächen Im Grossen II., Journal Of Geometry, Vol.23 (1984).
- [8] FRANK,H., On Kinematics Of The n-Dimensional Euclidean Space, Contributions To Geometry, Proceedings Of The Geometry Symposium In Siegen 1978, Birkhauser Verlag Basel, (1979).
- [9] HACISALİHOĞLU,H.H., On The Geometry Of Motion In The Euclidean n-Space, Communications De La Faculté des Sciences de L'Unuversité d'Ankara, Tome 23 A (1974)
- [10] HACISALİHOĞLU,H.H., On The Rolling Of One Curve Or Surface Upon Another, Proceedings Of The Royal Irish Acedemy, Vol.71, Sec. A, Num.2, Dublin, (1971).
- [11] HACISALİHOĞLU,H.H., Differensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:2, Malatya (1983).

- [12] NOMIZU,K., Kinematics Of Differential Geometry Of Submanifolds, Tohoku Mat. Journ. 30 (1978), 627-637, (1977).
- [13] THAS,C., Een(lokal) Studie Van de $(m+1)$ -Dimensionale Varieteiten, Van de n -Dimensionale Euclidische Ruimte \mathbb{R}^n ($n \geq 2m+1$ en $m \geq 1$), Beschreven Door Een Eendimensionale Familie Van n -Dimensionale Lineaire Ruimten. Paleis Der Academien-Hertogsstraat, I, Brussel, (1974).
- [14] TOSUN,M. E^n de Simetrik Helisel Hareketlere İştirak Eden Aksoid Yüzey Çiftleri Üzerine, Ondokuz Mayıs Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Samsun, (1992).



ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Kozaklı'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Samsun'da tamamladım. 1988 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalına girdim ve 1992 yılında mezun oldum. Bir yıl Erbaa Kız Meslek Lisesinde öğretmenlik yaptıktan sonra 1994 yılında Amasya Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. Halen bu görevi yapmaktayım.