MAYIS 2024 Yüksek Lisans Tezi-Matematik BURCU DOĞRUER DOĞAN

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNSTEIN POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLİŞKİSİ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BURCU DOĞRUER DOĞAN

MAYIS 2024

BERNSTEIN POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLİŞKİSİ

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Burcu DOĞRUER DOĞAN

Mayıs 2024

©2024[Gaziantep Üniversitesi]

BERNSTEIN POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLİŞKİSİ

başlıklı bu çalışma, **Burcu DOĞRUER DOĞAN** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü´nde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Çiğdem AYKAÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ………….............

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Anabilim Dalı Başkanı
………….............

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Sınav Tarihi: 24 Mayıs 2024

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Prof. Dr. Naciye Pelin ÖZKARTEPE
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Doç. Dr. Serkan ARACI
Hasan Kalyoncu Üniversitesi ………….............

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Burcu DOĞRUER DOĞAN

ABSTRACT

RELATIONSHIP OF BERNSTEIN POLYNOMIALS WITH SOME SPECIAL FUNCTIONS

DOĞRUER DOĞAN, Burcu
M:Sc in, Mathmatics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
May 2024
49 pages

This thesis consists of five chapters. The first part of the thesis includes the introduction and the definitions that will be used in the thesis. In the second part of the thesis, some basic definitions, theorems and identities of Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials, Gamma and Beta functions and Catalan numbers are given. In the third part of the thesis, definitions and identities related to Bernstein operators and polynomials are includd. In the fourth chapter of the thesis, the relations of Bernstein polynomials with Euler, Bernoulli and Gamma-Beta functions are discussed. The fifth chapter of the thesis includes the findings and conclusions. While finding these findings and results, the relationships established with some special polynomıals were motivated and the basic definitions, theorems and properties of these polynomıals were mentioned.

Key Words: Bernoulli polynomials, Euler polynomials, Genocchi polynomials, Bernstein polynomials, Gamma and Beta Functıons, Catalan numbers.

ÖZET

BERNSTEIN POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İLE İLİŞKİSİ

DOĞRUER DOĞAN, Burcu
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Mayıs 2024
49 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde girişe ve tezde kullanılacak olan tanımlara yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde Bernoulli, Euler, Genocchi polinomlarından, Gama-Beta fonksiyonlarına ve Catalan sayılarına ait bazı temel tanım, teorem ve özdeşliklerden söz edilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde Bernstein operatörü ve polinomlarıyla ilgili tanım ve özdeşliklere yer verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde Bernstein polinomlarının Euler, Bernoulli ve Gama-Beta fonksiyonlarıyla olan ilişkileri gösterilmiştir. Tezin beşinci bölümünde ise bulgu ve sonuçlara yer verilmiştir. Bu bulgu ve sonuçlar bulunurken bazı özel polinomlarla kurulan ilişkiler motivasyon alınmış ve bu polinomların temel tanım, teorem ve özelliklerinden söz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Genocchi polinomları, Gama ve Beta fonksiyonları, Bernstein polinomları, Catalan sayıları.

’’Canım aileme’’

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan anlayışı ,sabrı ve yönlendirmesini ihmal etmeyen master aşamasında beni yüreklendiren , Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden çok kıymetli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin hazırlanmasında desteklerini benden esirgemeyen yaptığı yönlendirmelerle cesaretlendiren kıymetli zamanını master aşamamda benim için harcamaktan kaçınmayan bir diğer kıymetli hocam Hasan Kalyoncu Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Serkan ARACI´ya sonsuz şükran ve teşekkürlerimi sunarım. 15 m^2´lik alanı defalarca bölüşerek gecesini gündüzüne katarak birlikte çalıştığımız ve benden yardımlarını esirgemeyen canım arkadaşım doktora öğrencisi Ayşe KARAGENÇ´e bu yola beraber çıktığımız ekip olmaktan keyif aldığım arkadaşlarımdan ve en büyük destekçilerimden olan Mehmet DÜNDAR´a çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik kıymetlim güzel annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Benden her anlamda yardımlarını esirgemeyen başarılarımın ve tez aşamamın akademide görünmeyen kahramanı eşim Ecz. Berat Sertaç DOĞAN´a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{B_n(f:x)}$	Bernstein operatörü
$\boldsymbol{B_{k,n}(x)}$	n. dereceden k. Bernstein polinomu
$\boldsymbol{B_n(x)}$	Bernoulli polinomu
$\boldsymbol{B_n}$	Bernoulli sayısı
$\boldsymbol{\beta}$	Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{C_n}$	Catalan sayısı
$\boldsymbol{G_n(x)}$	Genocchi polinomu
$\boldsymbol{G_n}$	Genocchi sayısı
$\boldsymbol{E_n(x)}$	Euler polinomu
$\boldsymbol{\gamma}$	Gama sayısı
$\boldsymbol{E_n}$	Euler sayısı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{Z}_+$	$\mathbb{N}-\{0\}$

BÖLÜM 1
GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Bernstein polinomları, Rus matematikçi Sergei Natanovich Bernstein tarafından 1912 yılında matematik bilimine tanıtılmıştır. 1950´li dönemler ve sonrası Bernstein polinomları bilgisayar biliminde ve dijital sinyal işlemede kullanım bulmaya başladı. 1980 yılı itibariyle bilgisayar grafikleri ve görüntü işleme gibi alanlarda da önemli bir rol oynamaya başladı.Günümüz itibariyle matematiksel analizin yanı sıra bilgisayar bilimi, mühendislik, fizik, ekonomi ve diğer birçok alanda hala kullanılmaktadır. Özellikle, veri analizi, sayısal hesaplama, modelleme ve simülasyon gibi alanlarda önemli bir araç olarak kabul görür. Aynı zamanda bu polinomların analitik ve yakınsaklık teoremine katkısı oldukça büyüktür. Özellikle fonksiyonların yakınsaklığı ve yaklaşım teorisi gibi konularda kullanılır. Bernstein polinomları, düzgün dağılmış ağırlıklı fonksiyonlar olarak tanımlanır ve bu özellikleri, birçok uygulama alanında faydalı olmalarını sağlar. Ünlü matematikçi Carl Ludwig Siegel, Natanovich'in Bernstein polinomlarını tanıtıp, matematiksel açıdan derinlemesine incelenmiş ve birçok uygulamada başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Bernstein polinomları matematiksel analizde ve çeşitli bilimsel ve mühendislik alanlarında temel bir rol oynamaya devam ediyor.

Özellikle Bernstein polinomları spline fonksiyonlarının temelini oluşturur ve yaklaşık analiz, interpolasyon ve diğer alanlarda önemli bir rol oynar. Bu polinomlar, matematiksel analizde ve uygulamalarında hala büyük bir öneme sahiptir. Natanoviçh bu polinomların uygulamasıyla bir fonksiyonun düzgünlük özellikleri ile polinomlarla yaptığı yaklaşımlar arasındaki bağıntıyı inceleyen bir alan olan yapısal fonksiyonun teorisinin temellerini attı. Weierstrass yaklaşım teoremini ve Bernstein teoremini kanıtladı.Bernstein polinomlarının zamanla önemin arttıran üreteç fonksiyonlarıda bulunuştur [1-3,6,9,10-12].

Bu tezde, Bernstein polinomlarının temel tanımı, özellikleri ve özdeşlikleri verilmiştir. Euler, Bernoulli, Genocchi polinomları ve sayılarına yer verilmiştir. Bernstein polinomlarının Euler, Bernoulli polinomlarıyla olan ilişkisi incelenmiş ve bu ilişkiler motivasyon alınarak, Bernstein polinomlarının Catalan sayılarıyla olan ilişkisi ve Gama fonksiyonlarıyla olan ilişkisi bulunmuştur.
Bernstein polinomlarının gösterimi;

$$B_{k,n} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

dir [3,6,9,10,11].

1.2 Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanımlar aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.1.1. f , x_0 ın delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun ve bir L sayısı verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f nin x_0 'a giderken limiti L dir.

Tanım 1.1.2. Bir fonksiyonun sürekli olması demek, grafiksel olarak fonksiyonun kesintisiz bir çizgiyle devam etmesi olduğu anlamına gelir. Bir fonksiyonun sürekli olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir;

- ***Tanımlılık***: Fonksiyonun tüm tanım kümesinde tanımlı olması gerekir. Yani, herhangi bir noktada fonksiyonun değeri belirlenmelidir.
- ***Limitlerin varlığı***: herhangi bir noktada, o noktaya yaklaşan değerlerin fonksiyon tarafından alınan limiti olmalıdır.
- ***Limitlerin eşitliği***: fonksiyonun limit değerleri ile o noktadaki değeri eşit olmalıdır. Yani $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ olmalıdır.

  Bu koşullar sağlandığında fonksiyon sürekli kabul edilir.

Tanım 1.1.3. f, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon, $y \in (a, b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad 1.1$$

limiti varsa f fonksiyonu ***x noktasında türevlenebilir*** denir.

Tanım 1.1.4. Bir f kompleks fonksiyonu bir t_0 noktasının belli olan bir $K(t_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa $f,\ t_0$ da analitiktir.

Tanım 1.1.5. $f\ :[a, b\ ] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için, $f'(x) = f(x)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ilkeli veya ***belirsiz integrali*** denir.

Tanım 1.1.6. $K \in \mathbb{R}$ için $|t| \in K$ bölgesinde

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)\frac{t^n}{n!} \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa $F(t, x)$ fonksiyonuna $f_n(x)$ fonksiyonunun ***üreteç fonksiyonu*** denir.

Tanım 1.1.7. $(f_n),\ A \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı fonksiyonlar dizisi verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ sayısı her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ yazılacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilirse (f_n) dizisi f(x) fonksiyonuna ***düzgün yakınsak*** tır.

Tanım 1.1.8. $U(t),\ R(t)$ iki kuvvet serisi olmak üzere;

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \qquad R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$$

bu serilerin çarpımları;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

şeklindedir. Bu çarpıma ***Cauchy çarpımı*** denir .

Tanım 1.1.9. f fonksiyonu, s noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-s)^n}{n!} \tag{1.4}$$

serisine s noktasında f fonksiyonundan üretilen ***Taylor serisi*** adı verilir. Taylor açılımında $x = 0$ ve $f(x) = e^x$ alınırsa ;

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (1.5)$$

serisi elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-s)^n = b_0 + b_1(x-s) + b_2(x-s)^2 + \cdots \quad (1.6)$$

şeklinde olan seriye ***kuvvet serisi*** denir.

Burada $s = 0$ alındığında ***Maclaurin serisi*** elde edilir.

BÖLÜM 2
BAZI ÖZEL POLİNOMLAR VE SAYILAR

Bu bölümde Bernoulli, Euler ve Genocchi sayı ve polinomlarına ait bazı temel tanım, teorem ve özdeşliklere yer verilecektir.

2.1 Bernoulli Polinomları

Bernoulli sayıları rasyonel sayı dizisidir. Bernoulli sayıları, Jakob Bernoulli ve Japon matematikçi Seki Köwa ile neredeyse aynı zamanda bulunmuştur. Bu sayılar teğet ve hiperbolik teğet Taylor dizisi açılımlarında, Euler-Maclaurin formülünde ve Rieman zeta işlevinin bazı değerlerine ilişkin ifadelerde kullanılmaktadır. Bernoulli polinomları, özellikle sayı teorisi, kombinatorik, diferansiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi alanlarda kullanılır. Bernoulli polinomları, genellikle kombinatorik ve sayı teorisi problemlerinde, olasılık ve istatistikte kullanılır. Ayrıca matematikte çeşitli alanlarda ortaya çıkan fonksiyonların temsilinde de karşımıza çıkar [2,4,7,18].

Tanım 2.1.1. Bernoulli polinomları $B_n(x)$,

$$F(x,t) = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \qquad |t| < 2\pi \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Özel olarak $x = 0$ için $B_n(0) = B_n$ elde edilir ve buradaki B_n ***Bernoulli sayısı*** olarak isimlendirilir [2,4,7,18].

Bernoulli sayılarını üreteç fonksiyonu

$$F(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \qquad |t| < 2\pi \tag{2.2}$$

dır [2,4,7,18].

(2.2) denklemi kullanılarak

$$\frac{t}{e^t-1}e^{tx}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}B_k\frac{t^k}{k!}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}\right)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafı $n!$ ile çarpılıp bölündüğünde

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \tag{2.3}$$

elde edilir. Burada t^n katsayıları eşitlendiğinde

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}B_k\binom{n}{k}x^{n-k} \tag{2.4}$$

arzu edilen eşitlik bulunur ki bu da Bernoulli sayıları ile polinomları arasındaki ilişkiyi verir [2,4,5,7,18]. Bernoulli polinomlarını hesaplamak için (2.4) bağıntısı kullanılırsa,

$n=0$ için

$$B_0(x)=\binom{0}{0}B_0x^0=1$$

dir.$n=1$ için

$$B_1(x)=\binom{1}{0}B_0x^1+\binom{1}{1}B_1x^0$$

$$=x-\frac{1}{2}$$

dir.

$n=2$ için

$$B_2(x)=\binom{2}{0}B_0x^2+\binom{2}{1}B_1x^1+\binom{2}{2}B_2x^0$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

dir. Bu şekilde n yerine değer verilmeye devam edilerek istenilen Bernoulli polinomları hesaplanabilir.

2.2 Euler Polinomları

Euler formülü karmaşık analizde kullanılan matematik formülü, karmaşık üstel fonksiyon ile trigonometrik fonksiyonlar arasındaki bağlantıyı gösterir [2-4,13,15].

Tanım 2.2.1. Euler polinomları $E_n(x)$,

$$M(x,t) = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{2.5}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [2-4,13,15]. Burada $x = 0$ alınırsa

$$E_n(0) = E_n$$

dir ve E_n, ***Euler sayısı*** olarak adlandırılır. Euler sayıları

$$M(t) = \frac{2}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{2.6}$$

ile gösterilir [15].

Teorem 2.2.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Euler polinomları, Euler sayıları cinsinden

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} E_k \tag{2.7}$$

şeklinde gösterilir [13,15].

İspat. (2.5) ve (2.6) denklemlerinden,

$$F(x,t) = e^{xt} F(t)$$

eşitliği görülür. e^{xt} nin Taylor açılımından faydalanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}E_k\right)\frac{t^n}{n!} \tag{2.8}$$

elde edilir [13,15].

Teorem 2.2.3. $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_0 = 1\,, (E+1)^n + E_n = \begin{cases} 2\,, n = 0\ ise \\ 0\,, n \geq 0\ ise \end{cases}$$

dir [13,15].

İspat. Gösterim olarak $E^n = E_n$ alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} E^n \frac{t^n}{n!} = e^{Et} = \frac{2}{e^t + 1}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$e^{(E+1)t} + e^{Et} = 2$$

bulunur. Taylor açılımı kullanıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}((E+1)^n + E_n)\frac{t^n}{n!} = 2$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$(E+1)^n + E_n = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

bulunur. Burada $t = 0$ iken limit alınırsa

$$E_0 = \lim_{t\to 0}\frac{2}{e^t + 1} = 1$$

arzu edilen eşitlik gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Euler polinomlarının simetriklik özelliği aşağıdaki gibidir [13,15].

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x) \tag{2.9}$$

İspat. 2.5 de verilen üreteç fonksiyonu kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(1-x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{(1-x)t}$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$= \frac{2}{e^{-t}+1}e^{(-t)x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlikte t^n katsayıları eşitlenirse teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.5. $d \equiv 1(\text{mod}2)$, Euler polinomları için Raabe formülü,

$$E_n(dx) = d^m \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{d}\right) \tag{2.10}$$

dir [13,15].

İspat. Euler polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(d^n \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{d-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n\left(x+\frac{k}{d}\right)\frac{(dt)^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{d-1}\frac{2}{e^{dt}+1}e^{\left(x+\frac{k}{d}\right)(dt)}$$

$$= \frac{2e^{xdt}}{e^{dt}+1}\sum_{k=0}^{d-1}e^{kt}$$

$$= \frac{2}{e^t+1}e^{xdt}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(dx) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.2.6. Euler polinomları Bernoulli sayıları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır [13,15].

$$E_n(x) = \binom{n}{k} 2^n B_k(x) \frac{1}{(n-k+1)} \frac{t^n}{n!} \tag{2.11}$$

İspat. Euler sayılarının üreteç fonksiyonunu $t(e^t - 1)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\frac{2}{e^t + 1} \frac{t(e^t - 1)}{t(e^t - 1)} = \frac{2t}{e^{2t} - 1} \frac{e^t - 1}{t}$$

yazılır. Burada $u = 2t$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{u}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{u^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n B_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k B_k \frac{t^k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right) \tag{2.12}$$

dir. Burada t^n katsayıları eşitlenirse

$$E_n(x) = \binom{n}{k} 2^n B_n \frac{1}{(n-k+1)} \frac{t^n}{n!}$$

olduğu görülür.

2.3 Genocchi Sayıları ve Polinomları

Genocchi polinomları, matematik alanında uzun bir süredir incelenmesine rağmen gizemli yapısı hala güncelliğini korumaktadır. Genocchi polinomlarının p-adik açılımları Kim tarafından, nümerik integrasyon yapısı Ryoo tarafından, Genocchi polinomlarının $q-$ benzerleri Aracı, Açıkgöz ve Qi tarafından tanımlanmış ve bu polinomların Bernstein polinomları ile ilişkisi Açıkgöz ve Aracı tarafından verilmiştir [2,3,19,20].

Tezin bu kısmında Genocchi sayıları ve polinomları tanımlanacak ve bunların analitik sayılar teorisindeki önemli teoremleri ispatları ile birlikte verilecektir.

Tanım 2.3.1. $G_n(x)$, Genocchi polinomları

$$G(x,t) = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < \pi \tag{2.13}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [3,11].

(2.13) denkleminde $x = 0$ yazılırsa

$$G(0,t) = G(t) = \frac{2t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(0)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n\frac{t^n}{n!}, \ \ |t| < \pi$$

elde edilir. Burada G_n, Genocchi sayılarıdır [3,11].

Teorem 2.3.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Euler sayılarının Genocchi sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir. [3,11].

$$E_n = \frac{G_{n+1}}{n+1} \tag{2.14}$$

İspat. (2.5) ve (2.13) deki üreteç fonksiyonlarından

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

yazılır. Burada eşit kuvvetlerin katsayıları karşılaştırıldığında teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.3. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{dG_n(x)}{dx} = nG_{n-1}(x) \tag{2.15}$$

dir [3,11].

İspat. (2.13) in her iki tarafına $\frac{d}{dx}$ türev operatörü uygulanırsa

$$\frac{2t}{e^t+1}\left(\frac{d}{dx}e^{xt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)$$

elde edilir. Genocchi polinomları düzgün yakınsak olduğundan terim terime türevlenebilme özelliğine sahiptir. Bu nedenle yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında türev operatörü ile toplam işareti yer değiştirebilir. Öyle ki

$$\frac{2t^2}{e^t+1}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}G_n(x)\right)\frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. t^n ′nin katsayıları eşitlenirse teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.4. $n\epsilon$ $\mathbb{N}$ olmak üzere Genocchi polinomları simetriklik özelliği aşağıdaki gibidir [3,11].

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1}G_n(x) \tag{2.16}$$

İspat. (2.13) denkleminden yola çıkılarak

$$G(1-x,t)=\frac{2t}{e^t+1}e^{(1-x)t}=-\frac{2(-t)}{e^{-t}+1}e^{x(-t)}=-G(x,-t)$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki fonksiyonlaarın yerine seri açılımları yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(1-x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}G_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte t^n katsayıları eşitlendiğinde teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.3.5. $n\in\ \mathbb{N}$ olmak üzere

$$G_{n+1}(x+1)+G_{n+1}(x)=2(n+1)x^n \tag{2.17}$$

dir [3,11].

İspat. (2.14) denkleminden

$$G(x+1,t)+G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}=\frac{2t}{e^t+1}e^{(x+1)t}+\frac{2t}{e^t+1}e^{xt}=2te^{xt}$$

elde edilir. Bu eşitlikte e^{xt} nin seri açılımı yukarıdaki son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big(G_n(x+1)+G_n(x)\big)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x^n)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

bulunur. t^n in katsayıları karşılaştırıldığında, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.6. $n\in\ \mathbb{N}$ olmak üzere

$$G_0=0\,,(G+1)^n+G_n=\begin{cases}2, & n=1\ ise\\ 0 & ,n\neq 1\ ise\end{cases} \tag{2.18}$$

dir [3,11].

İspat. (2.15) denkleminde her iki tarafın $t \to 0$ iken limiti alınırsa

$$G_0 = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{e^t + 1} = 0$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $G_n = G^n$ sembolik olarak kullanıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} G^n \frac{t^n}{n!} = e^{Gt} = \frac{2t}{e^t + 1}$$

elde edilir. Buradan

$$e^{(G+1)t} + e^{Gt} = 2t$$

ifadesini görmek kolaydır. Yukarıdaki eşitlikte bu fonksiyonların seri açılımları kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((G+1)^n + G_n) \frac{t^n}{n!} = 2t$$

eşitliğine ulaşılır. Bu bağıntıda katsayılar karşılaştırıldığında teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.7. $d \equiv 1 \ (mod2)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Genocchi polinomları için Raabe formülü aşağıdaki gibidir [3,11].

$$G_n(dx) = d^{n-1} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k G_n\left(x + \frac{k}{d}\right) \tag{2.19}$$

İspat. $d \equiv 1$(mod2) için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(d^{-1} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k G_n\left(x + \frac{k}{d}\right) \right) \frac{(dt)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(x + \frac{k}{d}\right) \frac{(dt)^n}{n!} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \frac{2dt}{e^{dt} + 1} e^{\left(x + \frac{k}{d}\right)(dt)}$$

$$= \frac{2t}{e^{dt}+1} e^{xdt} \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k e^{kt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(dx) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıda t^n katsayı karşılaştırması yapılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.8. Bernoulli sayıları ile Genocchi sayıları arasındaki ilişki;

$$G_n = 2^n \left(B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n \right) \tag{2.20}$$

şeklindedir [3,5,7].

İspat. İspat için Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu olan

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 2\pi)$$

eşitliğinde t yerine $2t$ ve $x = \frac{1}{2}$ yazılırsa

$$\frac{2t}{e^{2t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2^n t^n}{n!}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitliğin sol tarafını elde edebilmek için Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu $e^t - 1$ ile çarpılıp bölünürse

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1} = \frac{2t(e^t-1)}{e^{2t}-1} = \frac{2te^t}{e^{2t-1}} - \frac{2t}{e^{2t}-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{2} \frac{2^n t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{2^n t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n \right) \frac{2^n t^n}{n!}$$

elde edilir. t^n katsayıları karşılaştırılırsa,

$$G_n = 2^n \left(B_n\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\right) \tag{2.21}$$

bulunur ki bu Genocchi sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi verir [3,5,7].

2.4 Catalan Sayıları

Catalan sayıları üzerinde S. Eulier (1751) çalışmalar yapmıştır. Catalan sayıları Belçikalı Matematikçi tarafından Eugene Charles Catalan tarafından 1838 yılında keşfedildiği için onun adını taşır. Ancak, bu sayıların bazı özellikleri daha önce özellikle Euler ve Segner gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir. Catalan sayıları, birçok kombinatorik problemde ve matematiksel yapıda ortaya çıkar. Özellikle parantezleme yolları ve parantezleme düzenlemeleri gibi problemleri çözmek için kullanırlar. Catalan fonksiyonları olarak bilinen bu fonksiyonlar birçok kombinatorik problemde ve matematikte çeşitli alanlarda ortaya çıkar. Catalan sayıları bu fonksiyonların özel bir türüdür ve birçok matematiksel yapıyı modellemekte kulanılırlar. Genellikle bu fonksiyonlar yinelemeli ilişkilerle tanımlanır ve bu fonksiyonlar dinamik programlama, kombinatorik analiz ve matematiksel modellerme gibi alanlarda kullanılır [8].

Catalan sayıları birçok problemin çözümünde kullanılabilen özel bir sayı dizisidir. Segner sayıları olarak da anılabilir ve ayrıca pozitif tamsayılar kümesinde yer alır. Catalan sayıları,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2.22}$$

bağıntısı ile verilir [8].

Catalan sayılarının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

$$C_0 = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 5,\ C_4 = 14,\ C_5 = 42,\ C_6 = 132,\ \ C_7 = 429$$

Catalan sayıları (2.22) denklemine alternatif olarak

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}, \qquad n \geq 0 \tag{2.23}$$

şeklinde gösterilir. C_n in bir doğal sayı olduğu aşikardır ve Catalan sayılarının her biri, kendinden önceki terimlere bağlıdır [8].

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}, \qquad n \geq 0 \tag{2.24}$$

Burada $C_0 = 1$ dir. Hesaplamayı kolaylaştıran başka formül ise

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1} \qquad\qquad n \geq 0$$

dir [8].

2.4.1 Catalan Sayılarının Üreteç Fonksiyoları

Catalan sayıları, üstel ve klasik üreteç fonksiyonlarına sahiptir [21]. Bu üreteç fonksiyonu aracılığıyla, Catalan sayıları doğrudan hesaplanabilir. Catalan fonksiyonlarının klasik üreteç fonksiyonları;

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

formundadır [21].

Bu ifade $C(x)$ fonksiyonu x değişkenine göre bir üreteç fonksiyonudur. Burada $x = 0$ civarında seri açılımında x değişkeninin katsayıları C_n olan Catalan sayılarıdır. Bu fonksiyon, tüm doğal sayılar için geçerlidir ve bu sayede herhangi bir n için C_n değerini elde etmek mümkündür. Üreteç fonksiyonu Catalan sayılarının bazı temel özelliklerini kolayca ifade etmeyi sağlar. Üstel üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!} = F(t)$$

şeklinde olsun [21]. Burada $F(t)$ yi elde etmek için alternatif bir form vermeye çalışacağız.

(2.23) denkleminden yola çıkılarak C_n yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}\right)\frac{t^n}{n!}=F(t)$$

elde edilir ve buradan

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n+1}\frac{t^n}{n!}$$

ifadesinde Taylor teoremi kullanılarak,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{t}^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!} \tag{2.25}$$

sonucuna ulaşılır. Her iki tarafın türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^{2n}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2n\frac{t^{2n-1}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{1}\frac{t^{2n-1}}{n!}$$

elde edilir. Aynı şekilde her iki tarafın 2. mertebeden türevi alındığında,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(e^{t^2}\right)\right)=\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{1}\frac{t^{2n-1}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{1}(2n-1)\frac{t^{2n-2}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2n-1)!\,1!}(2n-1)\frac{t^{2n-2}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(2n-2)!\,1!}(2n-1)\frac{t^{2n-2}}{n!}$$

$$= 2! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{2} \frac{t^{2n-2}}{n!}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı t ye bağlı türev alındığında,

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{2} \frac{t^{2n-2}}{n!} = \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(e^{t^2}\right)}{dt}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{2} (2n-2)\frac{t^{2n-3}}{n!} = \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(e^{t^2}\right)}{dt}\right)$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2!\,(2n-3)!}\frac{t^{2n-3}}{n!} = \frac{1}{3}\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\left(e^{t^2}\right)}{dt}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{3} \frac{t^{2n-3}}{n!} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d^3t}\left(e^{t^2}\right)$$

$$\vdots$$

olacaktır. Bu şekilde u. mertebeden türevine kadar devam edilirse;

$$F_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{u} \frac{t^{2n-u}}{n!} = \frac{1}{u!}\frac{d^u}{d^ut}\left(e^{t^2}\right) \tag{2.26}$$

elde edilir. Buradan yola çıkarak;

$$F_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{u} \frac{t^n}{n!}$$

$$G_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2(n+1)}{u} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir ve sonuç olarak;

$$H_u(t) = F_u(t) - G_u(t)$$

yazılır. Buradan;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

olduğundan

$$H_u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!}$$

olur.

2.5 Gama ve Beta Fonksiyonları

Gama fonksiyonu, gama dağılımı ile ilişkilendirilen ve faktöriyel fonksiyonunun genelleştirilmiş bir versiyonu olan özel bir matematiksel fonksiyondur. Gama fonksiyonlarının uygulama alanları kalkülüs, matematiksel analiz, istatistik, fizik olup faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayı ve tamsayı olmayan reel sayılar için genellemesi olan bir fonksiyondur. Γ sembolü ile gösterilir [3,17].

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0 \tag{2.27}$$

Beta fonksiyonu, integral formülüyle tanımlanan bir matematiksel fonksiyon olup gama fonksiyonu ile ilişkilidir. Jacques Binet tarafından öğrencileri Euler ve Legendreye adanan Beta fonksiyonu Euler integralinin ilk türüdür. β sembolü ile gösterilir [3,17].

$$\beta(m,n) = \int_0^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx, \qquad (m > 0\,, n > 0) \tag{2.28}$$

Beta fonksiyonu, Gama fonksiyonu ile ilşkilendirildiği için, Beta fonksiyonu dağılımların normalleştirme katsayıları gibi birçok alanda kullanılır. Özellikle matematiksel fizikte ve olasılık teorisinde sıklıkla karşılaşılır. Gama ile Beta arasında olan ilişki gösterilmek istenirse aşağıdaki dönüşümün yapılması gerekir.

$$x = \cos^2\theta\,; \qquad dx = -2\cos\theta\sin\theta$$

Bu değerler denklem (2.28) de yerine yazılırsa;

$$\beta(m,n) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos\theta)^{2m-2}(\sin\theta)^{2n-2}(-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2m-1}(\sin\theta)^{2n-1}d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

olur.

$x = z$ için

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}dz \qquad m > 0$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty z^{n-1}e^{-z}dz \qquad n > 0$$

dir.

$z = x^2$ dönüşümü yapılırsa

$$dz = 2xdx$$

ve $z = y^2$ dönüşümü yapılırsa

$$dz = 2ydy$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler $\Gamma(m)$ ve $\Gamma(n)$ de yerine yazılırsa

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{2m-2}e^{-x^2}2xdx$$

$$= 2\int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{2n-2} e^{-y^2} 2y dy$$

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

elde edilecektir. Burada taraf tarafa çarpma işlemi yapılırsa;

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} r^{2m+2n-1} e^{-r^2} (cos\theta)^{2m-1} (sin\theta)^{2n-1} dr d\theta$$

$$= 2\left(\int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr\right) 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^{2m-1}\,(sin\theta)^{2n-1} d\theta\right)$$

olur. Bu çarpma işleminde $r^2 = z$ alınırsa elde edilen eşitlik

$$= 2\left(\int_0^{\infty} z^{m+n-1} e^{-z} d\right)$$

$$= \Gamma(m+n)$$

olacaktır. Sonuç olarak

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.29}$$

eşitliği elde edilir [17].

Teorem 2.5.1. Beta fonksiyonunun simetriklik özelliği aşağıdaki gibidir.

$$\beta(m,n) = \beta(n,m) \tag{2.30}$$

İspat. Beta fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

dir. Burada $x = 1 - y \Rightarrow dx = -dy$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$= \int_1^0 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy$$

$$= \beta(n,m)$$

eşitliği sağlanmış olur.

(2.30) denkleminde ispat edilen Beta fonksiyonunun simetrik özelliği, Beta fonksiyonunun parametrelerin yer değiştirebileceği ve sonucunun değişmeyeceğini gösteren bir teoremdir. (2.30) denkleminde her iki parametrenin de yer değiştireceği ve sonucun aynı kalacağını ifade etmektedir. Matematiksel olarak bu, integralin simetrik olduğu anlamına gelmektedir. İntegralde değişkenlerin yer değiştirmesi sonucu değiştirmeyeceğinden Beta fonksiyonunun hesaplanmasını ve analizini kolaylaştırır [17]. Başka bir deyişle, Beta fonksiyonunun değeri, argümanlarının yer değiştirmesi durumunda aynı kalır. Bu simetriklik özelliği, Beta fonksiyonunun integral tanıtımından türetilmiştir ve bu özellik, Beta fonksiyonunun matematiksel özelliklerinden biridir. Bu özellik Beta fonksiyonunun çeşitli matematiksel ve istatistiksel uygulamalarda kullanımını kolaylaştırır ve bazı integral hesaplamalarını daha basit hale getirir.

BÖLÜM 3

BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bernstein polinomları, özellikle bilgisayar grafikleri, sayısal analiz, ve CAD (bilgisayar destekli tasarım) gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır. Bernstein polinomları, fonksiyon interpolasyonunda düşük maaliyetli ve hesaplama açısından verimli bir yöntem sağlar. Bernstein polinomları, analitik geometri ve matematiksel fizikte de kullanılır. Özellikle eğrilerin, yüzeylerin ve hacimlerin matematiksel temsilleri ile ilgili problemlerde tercih edilirler. Bernstein polinomları, fonksiyonların belirli aralıklarda polinomlarla yaklaşımını sağlamak için kullanılır. Bir fonksiyonun Bernstein polinomları aracılığıyla interpolasyonu, Bernstein polinomlarının temel yapı taşlarıdır. Bernstein polinomları, olasılık dağılımlarını temsil etmek ve istatistiksel modeller oluşturmak için de kullanılabilir. Bu özellikler parametrik modellerin tanımlanması ve istatistiksel analizde faydalı olabilir [1-3,6,9,10,12,16].

3.1 Bernstein Operatörü ve Özellikleri

Tanım 3.1.1. $f \in \mathbb{C}[a,b]$ fonksiyonu verilsin. $a \leq x \leq b$ için n. dereceden Bernstein polinomları,

$$B_n(f;x) = B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(x) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_n(f)$ Bernstein operatörü olarak adlandırılır [3,6,9,10,12,16].

$k = 0,1,2,\ldots,n$ için

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n} \tag{3.2}$$

dir. n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} \tag{3.3}$$

dir. Bernstein operatörü $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde bir fonksiyonun, Bernstein poliomuna çevrilmesini sağlar. Bu dönüşüm, fonksiyonun belirli bir noktadaki değerlerini Bernstein polinomu serisinin katsayılarına çevirir. Öncelikle, bir fonksiyonun Bernstein polinomları dizisi $B_n(f)$ şu şekilde ifade edilir;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^n (1-x)^{n-k}$$

Bu formülde $f(x)$, $[0,1]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyondur. $B_n(f; x)$ n. dereceden Bernstein polinomudur ve x değeri, polinomun $[0,1]$ aralığında değerini hesaplamak için kullanılan değişkendir. Bernstein operatörü, herhangi bir noktadaki Bernstein polinomunu hesaplamak için kullanılır.

Bernstein operatörünün lineer olduğu açıktır.

$$B_n(\gamma f + \beta\delta g) = \gamma B_n f + \delta B_n \mathrm{g}$$

Tüm f ve g fonksiyonları için $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve tüm $\gamma, \delta \,\epsilon \mathbb{R}$ için $B_{k,n}(x)$ eşitliğinde($k = 0,1,2, \ldots, n$), $a = 0$, $b = 1$ seçilip yerine konulursa,

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{3.4}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $B_{k,n}(x)$ ***n. dereceden Bernstein polinomlarını*** göstermektedir [1-3,6,9,10,12,16].

Polinomlar, matematiksel ifadelerde hızlı bir şekilde hesaplanabilir ve basitçe tanımlanabilirler. Diferansiyel denklemlere ve integrasyon işlemlerine uygun olmaları nedeniyle birçok matematiksel problemin çözümünde önemli bir rol oynarlar. Ayrıca, spline eğrileri gibi istenilem doğrulukta yaklaşımlar oluşturmak için kullanılabilirler.

$$p(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + c_{n-2} t^{n-2} + \cdots + c_1 t + c_0$$

$\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ lineer kombinasyon olarak polinomu gösterir. Genel olarak derecesi n den küçük veya eşit olan bir polinom fonksiyonunu bu şekilde yazabilir ve sebebleri basitçe şöyledir.

1.Kolaylık ve Basitlik: Polinom fonksiyonları, genellikle diğer fonksiyonlara göre daha basit ve daha kolaydır. Bu nedenle, matematiksel ifadeleri temsil etmek için sıklıkla kullanılırlar.

2.Diferansiyellenebilme ve İntegrasyon: Polinom diferansiyallenebilme ve integrasyon gibi temel matematiiksel işlemlere uygun oldukları için analitik çalışmalarda ve problemlerin çözümünde çok yararlıdır. Daha yüksek dereceli fonksiyonlarla çalışmak genellikle daha karmaşık olabilir.

3.Yaklaşık Çözümler: Polinomlar, yaklaşık çözümler ve yaklaşık değerler elde etmek için sıklıkla kullanılır. Özellikle karmaşık sistemlerde veya fonksiyonların analitik çözümlerinin bulunmasının zor olduğu durumlarda, polinomlar kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilebilir.

4. İnterpolasyon ve Yaklaştırma: Polinomlar, verilen bir veri kümesini en iyi şekilde geçen eğrileri oluşturmak için kullanılabilirler. Bu, veri analizi, grafik çizimi ve modelleme gibi uygulamalarda yaygın olarak kullanılan bir tekniktir. Bu sebeplerden dolayı, derecesi n den küçük veya eşit olan polinom fonksiyonları matematik ve bilim dünyasında çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

3.2 Bernstein Polinomları

n. dereceden Bernstein polinomları

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır [1-3,6,9,10,12,16].

n. dereceden $(n+1)$ tane Bernstein polinomu vardır. Birkaç Bernstein polinomunu inceleyecek olursak.

- Derecesi 1 olan Bernstein polinomları

$$B_{0,1}(x) = \binom{1}{0} x^0 (1-x)^{1-0} = 1 - x$$

$$B_{1,1}(x) = \binom{1}{1} x^1 (1-x)^{1-1} = x$$

- Derecesi 2 olan Bernstein polinomları

$$B_{0,2}(x) = \binom{2}{0} x^0 (1-x)^{2-0} = (1-x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = \binom{2}{1} x^1 (1-x)^{2-1} = 2x(1-x)$$

$$B_{2,2}(x) = \binom{2}{2} x^2 (1-x)^{2-2} = x^2$$

- Derecesi 3 olan Bernstein polinomları

$$B_{0,3}(x) = \binom{3}{0} x^0 (1-x)^{3-0} = (1-x)^3$$

$$B_{1,3}(x) = \binom{3}{1} x^1 (1-x)^{3-1} = 3x(1-x)^2$$

$$B_{2,3}(x) = \binom{3}{2} x^2 (1-x)^{3-2} = 3x^2(1-x)$$

$$B_{3,3}(x) = \binom{3}{3} x^3 (1-x)^{3-3} = x^3$$

şeklinde görebiliriz.

Teorem 3.2.1. n. dereceden Bernstein polinomları $(n-1)$. dereceden iki Bernstein polinomunun kombinasyonu şeklinde tanımlanabilir. Bernstein polinomlarının yineleme tanımı;

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + x\left(B_{k-1,n-1}(x)\right) \tag{3.5}$$

dır [3,6,9,10].

İspat. Bunu göstermek için yalnızca Bernstein polinomu tanımını ve bazı basit cebirleri kullanmamız yeterli olacaktır [3,6,9,10].

O halde;

$$B_{k,n}(x)\big(x + (1-x)\big) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)$$

$$= (1-x)\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} + x\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}$$

$$= \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_{k,n}(x)$$

Negatif olmayan Bernstein polinomları Bernstein polinomlarının özel bir alt kümesidir. Bernstein polinomları, Bernstein fonksiyonları kullanılarak oluşturulan bir polinom serisidir. Bernstein fonksiyonları birbirinden farklı bir sayıda temel polinomlar arasında dönüşüm yaparak bir polinomu oluşturmak için kullanılır. Bu polinomlar, interpolasyon, yaklaşım ve analizde kullanılırlar. Özellikle, olasılık teorisi ve yaklaşıklı hesaplama alanlarında önemlidir. Negatif olmayan Bernstein polinomları özellikle polinom yaklaşımları, spline interpolasyonu ve olasılık dağılımlarının modellenmesi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılırlar. Bir $f(x)$ fonksiyonu $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $[a, b]$ aralığında negatif değildir. Bunu göstermek için yukarıdaki yinelemeli tanım özelliğini ve tümevarım yöntemini kullanılır.

$B_{0,1}(x) = 1 - x$ ve $B_{1,1}(x) = x$ $\quad 0 \leq x \leq 1$ her ikisinin de bu aralıkta negatif olmadığı bu şekilde görülür. Derecesi k dan küçük tüm Bernstein polinomlarının negatif olmadığı varsayılsın. Sonra Bernstein polinomlarının yinelemeli tanımı kullanılarak yazılabilir.

$$B_{k,n}(x) = (1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x) \tag{3.6}$$

Eşitliğin sağındaki ifadeler $0 \leq x \leq 1$ aralığında negatif olmayan bileşenler olduğundan $B_{k,n}(x)$ nin $0 \leq x \leq 1$ de ifadenin negatif olamayacagını gösterir. Bernstein polinomları tümevarım yöntemi yardımıyla $0 \leq x \leq 1$ aralığında bunu görmek mümkündür. Çünkü bu polinomlar, $[0,1]$ aralığında tanımlıdır ve bu aralıkta herhangi bir negatif değer bulunmaz. Bernstein polinomları $n.$ dereceli polinomlar olup, $n.$ dereceden bir polinom, $[0,1]$ aralığında tanımlı olması gereken bir fonksiyondur. Bu nedenle, Bernstein polinomlarının değerleri genellikle $[0,1]$ aralığında pozitif veya 0 dır [3,6,9,10].

Teorem 3.2.2. n. dereceden $(n+1)$ tane Bernstein polinomunun toplamı $n-1$ dereceli Bernstein polinomlarının toplamına eşittir.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

dir [3,6,9,10].

İspat. Bu ispat için yineleme tanımı kullanıp ve toplamlar yeniden düzenlenirse aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[(1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k-1,n-1}(x)\right]$$

$$= (1-x) \left[\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + B_{k,n-1}(x)\right] + x\left[\sum_{k=1}^{n} B_{k-1,n-1}(x) + B_{k,n-1}(x)\right]$$

$$= (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + t\sum_{k=1}^{n} B_{k-1,n-1}(x)$$

$$= (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) + x\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(1-x)B_{k,n-1}(x) + xB_{k,n-1}(x)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x)$$

dir. Bu eşitliği sağladıktan sonra aşağıdaki gibi yazmak kolaydır.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} B_{k,n-2}(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{1} B_{k,n}(x)$$

$$= (1-x) + x = 1$$

Teorem 3.2.3. Bernstein polinomlarında polinomun derecesi n arttıkça; n değişkenli polinomlar elde edilir [3,6,9,10].

İspat. Bernstein polinomlarının tanımı gereği

$$xB_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^{k+1}(1-x)^{n-k} \tag{3.7}$$

$$= \binom{n}{k} x^{k+1}(1-x)^{(n-1)-(k+1)}$$

$$= \binom{n}{k} x^{k+1}(1-x)^{(n+1)-(k+1)} \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} B_{k+1,n+1}(x)$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{(n+1)!}{(n+1-k-1)!(k+1)!}} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{(n-k)!\,(k+1)!}{(n+1)!}$$

dir. Benzer şekilde

$$(1-x)B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n+1-k} \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n+1}{k}}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}} B_{k,n+1}(x)$$

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}} = \frac{n!}{(n-1)!\,k!} \frac{(n+1-k)!\,k!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} B_{k,n+1}$$

olacaktır. Sonuç olarak

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow \frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(x) = x^k (1-x)^{n-k}$$

$$B_{k+1,n}(x) = \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \Rightarrow \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(x)$$
$$= x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}$$

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(x) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(x) = x^k (1-x)^{n-k} + x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)}$$

$$= x^k (1-x)^{n-k-1} \big((1-x) + x\big)$$

$$= x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k}} B_{k,n-1}(x)$$

Bu son denklem kullanılarak daha yüksek dereceli Bernstein polinomları cinsinden keyfi bir Bernstein polinomu yazılabilir. Öyle ki

$$B_{k,n-1}(x) = \binom{n-1}{k} \left[\frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(x) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(x) \right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \frac{k!\,(n-k)!}{n!} B_{k,n}(x)$$
$$+ \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \frac{(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!} B_{k+1,n}(x)$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \frac{k!\,(n-k)!\,(n-k-1)!}{n(n-1)!} B_{k,n}(x)$$
$$+ \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \frac{(k+1)k!\,(n-k-1)!}{n(n-1)!} B_{k+1,n}(t)$$

$$= \left(\frac{n-k}{n}\right) B_{k,n}(x) + \left(\frac{k+1}{n}\right) B_{k+1,n}(x)$$

dir. n arttıkça polinomun boyutu ve karmaşıklığı artar. Aynı zamanda derece arttıkça daha düzgün hale gelir. Buda yüksek dereceli polinomların daha pürüzsüz eğriler veya yüzeyler oluşturduğu anlama gelir. Bernstein polinomunun derecesi arttıça Bernstein polinomları tarafından daha iyi yaklaşılabilir. Bernstein polinomu bir fonksiyonun yaklaşımında kullanılan Bernstein yaklaşımı veya Bernstein interpolasyonu gibi yöntemlerde önemli bir rol oynar. İnterpolasyon için kullanıldığında daha düşük dereceli polinomlara göre daha az hata verir.

Teorem 3.2.4. n. dereceden Bernstein polinomlarının türevi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x) = n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right) \tag{3.8}$$

İspat. Bernstein polinomları tanımında her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}B_{k,n}(x) = \frac{d}{dx}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{kn!}{k!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-k)n!}{k!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$= n\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}t^{k-1}(1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}x^k(1-x)^{n-k-1}\right)$$

$$= n\left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x)\right)$$

elde edilir. Görüleceği üzere Bernstein polinomunun türevi $n-1$ dereceli iki Bernstein polinomunun farkıyla çarpılan polinomun derecesi olarak ifade edilebilir [3,6,9,10].

Teorem 3.2.5. Bernstein polinomları simetriktir.

$$B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x) \tag{3.9}$$

İspat. Bernstein polinomlarının tanımı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

serisinde k yerine $n-k$ yazıp, x yerine $1-x$ yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$B_{k,n}(x) = B_{n-k,n}(1-x) \tag{3.10}$$

elde edilir. Matematik dünyasında önemli bir yere sahip olan Bernstein üreteç fonksiyonlarını bizlere 2010 yılında ilk kez tanıtan, derin bilgi birikimiyle M.Açıkgöz ve S.Aracı tarafından verilmiştir. Bernstein üreteç fonksiyonlarını bizlere ulaşılabilir ve anlaşılır şekilde aktarılmış olması bu polinomlar üzerine yapılan çalışmaları hızlandırmış aynı zamanda düşünme ve bu polinomları çözme becerileri geliştirilmiştir [1-3].

Teorem 3.2.6. $k\,, n \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$F(t,x,k) = \frac{(tx)^k}{k!}e^{t(1-x)} = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.11}$$

şeklindedir [1-3].

İspat. $F_k(x,t)$ fonksiyonun Taylor seri açılımı,

$$e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir. Bu eşitliği kullanarak

$$F_k(x,t) = \frac{(tx)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}x^k(1-x)^n\frac{t^{n+k}}{n!\,k!}$$

ve sağ taraf $(n+k)!$ ile çarpıp bölündüğünde ;

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^k(1-x)^n\frac{t^{n+k}}{n!\,k!}\frac{(n+k)!}{(n+k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}x^k(1-x)^n\frac{t^{n+k}}{n!\,k!}$$

ve sağ taraf $(n+k)!$ ile çarpıp bölündüğünde

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^k(1-x)^n\frac{t^{n+k}}{n!\,k!}\frac{(n+k)!}{(n+k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}x^k(1-x)^n\frac{(n+k)}{n!\,k!}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^n\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlikte $n,$ yerine $n-k$ eşitliği kullanılarak,

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Bu da ispatlanması istenilen eşitliktir.

Bu üreteç fonksiyonunu kullanarak Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunun yineleme ilişkisi ve türevi bulunmuştur. Bernstein polinomlarının ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir.

· $B_{0,0}(x) = 1$

· $B_{0,1}(x) = (1-x), B_{1,1}(x) = x$

· $B_{0,2}(x) = (1-x)^2, B_{1,2}(x) = 2x(1-x), B_{2,2}(x) = x^2$

· $B_{0,3}(x) = (1-x)^3, B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2, B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x), B_{3,3}(x) = x^3$

· $B_{0,4}(x) = (1-x)^4, B_{1,4}(x) = 4x(1-x)^3, B_{2,4}(x) = 6x^2(1-x)^2,$
$B_{3,4}(x) = 4x^3(1-x), B_{4,4}(x) = x^4$

· $B_{0,5}(x) = (1-x)^5, B_{1,5}(x) = 5x(1-x)^4, B_{2,5}(x) = 10x^2(1-x)^3,$
$B_{3,5}(x) = 10x^3(1-x)^2, B_{4,5}(x) = 5x^4(1-x), B_{5,5}(x) = x^5$

Bernstein polinomların üreteç fonksiyonunun x e göre türevi alınırsa aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$F_k(x,t) = \frac{e^t (tx)^k}{k!\, e^{xt}} = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$\frac{\partial}{\partial_x} F_k(x,t) = \frac{t^k e^t x^k}{k!\, e^{xt}} = \frac{t^k e^t k x^{k-1} k!\, e^{xt} - k!\, t e^{xt} t^k e^t x^t}{k!\, e^{xt} k!\, e^{xt}}$$

$$= \frac{t^k x^{k-1} e^t}{(k-1)!\, e^{xt}} \frac{t^{-1}}{t^{-1}}$$

$$= \frac{t^{k-1} t x^{k-1} e^t}{(k-1)!\, e^{xt}}$$

$$= t\big(F_{k-1}(x,t) - F_k(x,t)\big)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{d}{dx} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n \left(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x) \right) \frac{t^n}{n.(n-1)!} = t\big(F_{k-1}(x,t) - F_k(x,t)\big)$$

buradan yola çıkılarak aşağıdaki eşitlik sağlanmıştır.

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{d}{dx} B_{k.n}(x) \frac{t^n}{n!} = t\big(F_{k-1}(x,t) - F_k(x,t)\big) \tag{3.12}$$

Bu eşitlik Bernstein polinomları için üreteç fonksiyonunun bir türev özelliğidir. Böylece aşağıdaki yineleme ilişkisi yazılmıştır [1-3].

$$\frac{1}{t} \frac{d}{dx} F_k(x,t) = F_{k-1}(x,t) - F_k(x,t)$$

Teorem 3.2.7. Matematikte özel sayı dizisi olan Bernstein sayıları Bersntein polinomlarıyla ilişkilidir. Belirli bir türev alma işlemi sonucunda ortaya çıkarlar. Bernstein sayıları Bernstein polinomlarına karşılık gelen katsayıları ifade eder. Bernstein sayıları;

$$B_{k,n} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} (-1)^{(k-j)}$$

bu şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.8. $n \in \mathbb{N}$ ve $k < n$ olmak üzere;

$$B_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & 0 < k < n \end{cases}$$

dir [3,6,9,10].

İspat. $n = 1$ ve $k = 0$ için

$$B_{0,1} = \sum_{j=0}^{0} \binom{1}{0}\binom{1}{0}(-1)^0$$

$$= 1$$

$n = 1$ ve $k = 1$ için

$$B_{1,1} = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j}\binom{1-j}{1-j}(-1)^{1-j}$$

$$= \binom{1}{0}(-1)^1 + \binom{1}{1}(-1)^0$$

$$= 0$$

$n = 2$ ve $k = 0$ için

$$B_{k,2} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2}{j}\binom{2-j}{k-j}(-1)^{k-j}$$

$$B_{0,2} = \sum_{j=0}^{0} \binom{2}{j}\binom{2-j}{-j}(-1)^{-j}$$

$$= \binom{2}{0}\binom{2}{0}(-1)^0$$

$$= 1$$

$n = 2$ ve $k = 1$ için

$$B_{1,2} = \sum_{j=0}^{1} \binom{2}{j}\binom{2-j}{1-j}(-1)^{1-j}$$

$$= \binom{2}{0}\binom{2}{1}(-1)^1 + \binom{2}{1}\binom{1}{0}(-1)^0$$

$$B_{1,2} = 0$$

…

buradan yola çıkarak genelleme yapılırsa

$$B_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & 0 < k < n \end{cases}$$

olur.

BÖLÜM 4
BERNSTEIN POLİNOMLARININ BAZI ÖZEL POLİNOMLARLA İLİŞKİSİ

Bu bölümde Bernstein polinomlarının Bernoulli ve Euler polinomları ile ilişkisine yer verilecektir.

4.1 Bernoulli Polinomları ve Bernstein Polinomları

Bernoulli polinomları ve Bernstein polinomları farklı matematiksel formülleri olan iki ayrı polinom türüdür. Bu polinomları birbiri cinsinden yazmak mümkündür.

Teorem 4.1.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $n > k$ olmak üzere

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n B_{k,n}(x) \frac{B_k}{x^k} \tag{4.1}$$

dir [2-3].

İspat. denkleminde x yerine $1 - x$ yazarsak, pay ve paydayı x^k ile çarpılırsa;

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, k = 0,1,2, \dots, n$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. $x \in [0,1]$ ve $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Bernoulli polinomları, Bernstein polinomları cinsinden

$$B_{k,n}(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-1} (-1)^j B_j(x) x^k \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir [2-3].

İspat. Bernstein polinomlarının tanımında n yerine $n + k$, x yerine $1 - x$ ve elde edilen x^n kuvvet fonksiyonu yerine

$$x^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}B_j(x)$$

ifadesi yazıldığında; ayrıca, $B_j(1-x) = (-1)^j B_j(x)$ eşitliğinden

$$B_{k,n+k}(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!\,n!}x^k\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}(-1)^j B_j(x)$$

olduğu görülür. Burada, n yerine $n-k$ yazarsak

$$B_{k,n}(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{n-k+1}\binom{n-k+1}{j}(-1)^j B_j(x)x^k$$

elde edilir. Burada

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{j+k}\binom{j+k}{k}$$

özelliği kullanılarak $x \in [0,1], k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$B_{k,n}(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-1}(-1)^j x^k B_j(x)$$

şeklindedir. Bernoulli ve Bernstein polinomları, adlarının benzerliği dışında matematiksel olarak birbirinden farklı iki tür polinom ailesidir. Her ikisi de farklı matematiksel bağlamlarda kullanılır ve farklı amaçlar için tasarlanmıştır. Ancak, belirli durumlarda, özellikle olasılık teorisi ve sayılar teorisi gibi alanlarda, bu iki polinom ailesi arasında dolaylı ilişkiler veya benzerlikler gözlemlenebilir. Doğrudan bir ilişki olmamakla birlikte, bazı durumlarda Bernoulli polinomları ve Bernstein polinomları arasında dolaylı ilşkiler veya benzerlikler gözlemlenebilir. Özellikle, belirli yaklaşım veya interpolasyon problemlerinde, bu iki polinom ailesi arasında matematiksel benzerlikler veya ilşkiler ortaya çıkabilir. Ancak, genel olarak, bunlar farklı matematiksel benzerlikler veya ilşkiler ortaya çıkabilir ve matematiksel bağlamlarda farklı amaçlar için kullanılan polinom ailesidirler. Bernsteın polinomlarının Bernoulli polinomlarıyla arasındaki bağıntı ifade edilmiş olur.

4.2 Euler Polinomları ve Bernsteın Polinomları

Euler polinomları ve Bernsteın polinomları farklı matematiksel formülleri olan iki ayrı polinom türüdür. Bu polinomları birbiri cinsinden yazmak mümkündür.

Teorem 4.2.1. Euler polinomlarını, Bernsteın polinomları ve Bernoulli polinomları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir [2,3].

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{n}}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(2-2^{k+1})B_{k,n+1}(x)\frac{B_k}{x^k} \tag{4.3}$$

Teorem 4.2.2. Euler polinomlarının bersnteın polinomları cinsinden ifade edilebilir [2,3].

$$B_{k,n}(x) = \frac{x^k}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}(-1)^i E_i(x) + \binom{n}{k}(-1)^{n-k}E_{n-k}(x)\right] \tag{4.4}$$

İspat. Bernstein polinomlarının tanımında n yerine $n-k, x$ yerine $1-x$ yazıldığında

$$x^n = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}E_i(x) + E_n(x)\right]$$

elde edilir.

$$B_{k,n}(x) = \frac{x^k}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}(-1)^i E_i(x) + \binom{n}{k}(-1)^{n-k}E_{n-k}(x)\right]$$

Benzer yolla $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}E_n$,

$$E_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2-2^{k+2})\binom{n+1}{k+1}B_{k+i}x^{n-k}$$

$x = \frac{1}{2}$ için;

$$E_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+2}-2^{2k+3})B_{k+1,n+1}\left(\frac{1}{2}\right)B_{k+1}$$

n yerine $n+1,\ k$ yerine $k+1$yazıldığında ;

$$B_{k+1,n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

elde edilir ve burada $n=0$ ve $n=1$ için; $E_0\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ve $E_1\left(\frac{1}{2}\right)=0$

dir. $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$E_n=2^nE_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$E_n=\frac{2^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+2}-2^{2k+3})B_{k+1,n+1}\left(\frac{1}{2}\right)B_{k+1}$$

dir. Euler ve Bernstein polinomları, farklı matematiksel bağlamlarda kullanılan farklı tiplerde polinomlardır. Her ikiside polinomlarla ilgili konseptlerin farklı yönlerini temsil eder. Ancak, her iki polinom ailesi de matematiksel analizde ve uygulamalarında önemli roller oynar. Euler ve Bernstein polinomları arasında doğrudan bir ilişki olmasa da bazı durumlarda Bernstein polinomları, Euler polinomlarının bir temsili sağlayabilir. Özellikle Bernstein polinomları interpolasyon veya yaklaşım amaçlarıyla kullanıldığında, uygun koşullar altında bu polinomlar euler polinomlarını veya onlara benzer fonksiyonları yaklaşık olarak temsil edebilir. Örneğin bir fonksiyonun Bernstein polinomlarla bir yaklaşımını kullanarak, bu yaklaşım bazen Euler polinomlarına benzer şekilde davranabilir, özellikle belirli koşullar altında. Ancak bu, genel bir kural değildir ve her iki polinom ailesinin de kendi bağlamlarındaa bağımsız olarak önemli olduğunu unutmamak gerekir. Bu tür ilişkiler, matematikteki iki farklı konseptlerin birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu ve bazen beklenmedik benzerliklerin veya bağlantıların ortaya çıkabileceğini gösterir.

BÖLÜM 5
BULGULAR VE SONUÇLAR

Beta fonksiyonu ve Catalan sayıları arasında bir ilişki, Beta fonksiyonunun integral formuyla ifade edilebilir. İlgili integralin hesaplanması sırasında, Beta fonksiyonu ile Catalan sayıları arasında kombinatorik serinin ortaya çıktığı gözlemlenebilir. Bu ilişki doğrudan Bernstein polinomları ile ilişkili değildir, ancak beta fonksiyonu ve Catalan sayıları arasındaki bağlantı dikkate alınır. Özetle Catalan sayıları ile Bernstein polinomları arasında doğrudan bir ilişki yoktur, ancak Beta fonksiyonu aracılığıyla dolaylı bir ilişki kurulabilir. Bu ilişki, matematikte farklı alanlar arasındaki beklenmedik bağlantıları gösteren bir örnektir.

Teorem 5.1. $m \in \mathbb{N}$ için,

$$C_m = \frac{1}{(m+1)\beta(m+1, m+1)} \int_0^1 B_{m,2m}(x)dx$$

dir.

İspat. Bernstein polinomlarının tanımında n yerine $2m$, k yerine m yazılıp eşitliğin iki tarafınıda $\frac{m!}{(m+1)!}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{m!}{(m+1)!} B_{m,2m}(x) = \binom{2m}{m} x^m (1-x)^m \frac{m!}{(m+1)!}$$

$$\frac{m!}{(m+1)!} B_{m,2m}(x) = C_m x^m (1-x)^m$$

elde edilir ve her iki tarafın 0 dan 1 e integrali alınırsa;

$$\frac{m!}{(m+1)!} \int_0^1 B_{m,2m}(x) = C_m \int_0^1 x^m (1-x)^m$$

$$= C_m \int_0^1 x^{m+1-1} (1-x)^{m+1-1}$$

$$= C_m \beta(m+1, m+1)$$

olacaktır. Burada C_m yalnız bırakılmak istenirse

$$C_m = \frac{\frac{m!}{(m+1)!}\int_0^1 B_{m,2m}(x)}{\beta(m+1,m+1)}$$

$$= \frac{\frac{m!}{(m+1)!}\Gamma(2m+2)\int_0^1 B_{m,2m}(x)}{\Gamma^2(m+1)}$$

$$= \frac{1}{(m+1)\beta(m+1,m+1)}\int_0^1 B_{m,2m}(x)dx.$$

elde edilir.

Teorem 5.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Catalan sayılarıyla Bernstein polinomlarının $x = \frac{1}{2}$ deki değeri;

$$C_n = \frac{4^{\boldsymbol{n}}}{n+1} B_{n,2n}\left(\frac{1}{2}\right)$$

şeklindedir.

İspat. Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunda $x = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{t^k}{2^k k!}\frac{e^t}{e^{\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2^k}\frac{t^k}{k!}e^{\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{t^k}{2^k k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+k}}{2^{n+k}k!\,n!}$$

elde edilir. Burada n yerine $n-k$ yazılırsa

$$= \sum_{n-k=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n (n-k)!\,k!}$$

olur. Bu eşitlik $\frac{n!}{n!}$ ile çarpılırsa;

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \frac{t^n}{n!}$$

$$B_{k,n}\left(\frac{1}{2}\right) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{n+1}$ ile çarpılıp; n yerine $2n$, k yerine n yazılırsa

$$\frac{1}{n+1} B_{n,2n}\left(\frac{1}{2}\right) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \frac{1}{n+1}$$

$$C_n = \frac{4^n}{n+1} B_{n,2n}\left(\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

Gama ve Bernstein polinomları arasındaki ilişkiyi kurmak için, Bernstein polinomları genellikle Beta fonksiyonuyla ilişkilendirilir. Beta fonksiyonu, Gama fonksiyonunu içerdiği için, Gamma fonksiyonu ile Bernstein polinomları arasında dolaylı bir ilişki ortaya çıkabilir. Örneğin Bernstein polinomları ve Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurarak, Gamma fonksiyonu bazen Bernstein polinomlarının türevlerinde veya integralinde kullanılabilir. Ancak, bu ilişki genellikle dolaylıdır ve doğrudan bir bağlantı oluşturulmaz. Sonuç olarak, Gamma fonksiyonu ve Bernstein polinomları arasında doğrudan bir ilişki olmasa da matematiksel bağlamları ve bazı hesaplamalarda kullanımı dolayısıyla aralarında dolaylı bağlantılar kurulabilir.

Teorem 5.3. $m \in \mathbb{N}$ için, Gama fonksiyonunun Bernstein ile ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma(m+1)\Gamma(2) = \Gamma(m+3) \frac{1}{(m+1)} \int_0^1 B_{m,m+1}(x)$$

İspat. Bernstein polinomlarının tanımında n yerine $m+1$, k yerine m yazılırsa;

$$B_{m,m+1} = \binom{m+1}{m} x^m (1-x)^1$$

olacaktır. Eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{(m+1)^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{(m+1)^2} B_{m,m+1}(x) = \frac{1}{(m+1)^2} \binom{m+1}{m} x^m (1-x)$$

$$= \frac{1}{m+1} x^m (1-x)^1$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafı $\binom{2m}{m}$ ile çarpılıp 0´dan 1´e integrali alınırsa

$$\binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} B_{m,m+1}(x) = \binom{2m}{m} \frac{1}{m+1} x^m (1-x)$$

$$\int_0^1 \binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} B_{m,m+1}(x) = \int_0^1 C_m x^m (1-x)$$

$$\binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} \int_0^1 B_{m,m+1}(x) = C_m \int_0^1 x^{m+1-1} (1-x)^{2-1} dx$$

$$\binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} \int_0^1 B_{m,m+1}(x) = C_m \beta(m+1,2)$$

$$C_m = \frac{\binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} \int_0^1 B_{m,m+1}(x)}{\beta(m+1,2)}$$

elde edilir. (3.23) denkleminden faydalanarak

$$\beta(m+1,2) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(2)}{\Gamma(m+3)}$$

yazılır ve Gama fonksiyonunun bernstein polinomlarıyla ilşkisi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$C_m = \frac{\binom{2m}{m} \frac{1}{(m+1)^2} \int_0^1 B_{m,m+1}(x)}{\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(2)}{\Gamma(m+3)}}$$

dir. (2.22) denkleminden yola çıkılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında, Gama fonksiyonuyla Bernstein polinomları arasındaki ilişki;

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(m+3)\frac{1}{(m+1)}\int_0^1 B_{m,m+1}(x)$$

şeklinde olur.

KAYNAKLAR

[1] Açíkgöz, M., & Araci, S. (2010). On the generating function for Bernstein polynomials. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1281, No. 1, pp. 1141-1143). American Institute of Physics.

[2] Açíkgöz, M., & Araci, S. (2010). The relations between Bernoulli, Bernstein and Euler polynomials. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1281, No. 1, pp. 1144-1147). American Institute of Physics.

[3] Araci, S. (2010). *Bernstein polinomları ve analitik sayılar teorisi üzerindeki yansımaları* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

[4] Cheon, G. S. (2003). A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, *16*(3), 365-368.

[5] Conway, J.B. (1986). Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, New York. p.330

[6] Çetin, E. (2011). *Bernstein polinomlarının uygulamaları* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).

[7] Çapkın, M. (2009). *Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Özellikleri* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).

[8] Eren, Y. (2015). *Binom katsayılarının bazı genelleştirmeleri* (Master's thesis, Kırıkkale Üniversitesi).

[9] Lorentz, G. G. (2012). *Bernstein polynomials*. AMS Chelsea Publishing Company, 1986, 134.

[10] Gould, H. W. (1958). A theorem concerning the Bernstein polynomials. Mathematics *Magazine*, *31*(5), 259-264.

[11] Horadam, A. F. (1991). Genocchi polynomials. In *Applications of Fibonacci* Numbers: Volume 4 Proceedings of 'The Fourth International Conference on *Fibonacci Numbers and Their Applications', Wake Forest University, NC, USA, July 30–August 3, 1990* (pp. 145-166). Dordrecht: Springer Netherlands.

[12] Joy, K. I. (2000). Bernstein polynomials. *On-Line Geometric Modeling Notes*, *13*(5).

[13] Jang, L. C., Kim, S. D., Park, D. W., & Ro, Y. S. (2006). A note on Euler number and polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, *2006*, 1-5.

[14] Kim, T., Rim, S. H., Simsek, Y., & Kim, D. (2008). On the analogs of Bernoulli and Euler numbers, related identities and zeta and L-functions. *J. Korean Math. Soc*, *45*(2), 435-453.

[15] Özbay, H. (2010). *Euler Sayıları, Polinomları ve Özellikleri* (Doctoral dissertation, Bursa Uludag University (Turkey)).

[16] Simsek, Y., & Acikgoz, M. (2010, January). A New Generating Function of (q-) Bernstein-Type Polynomials and Their Interpolation Function. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2010). Hindawi.

[17] Polat, S. (2013). *Hipergeometrik fonksiyonların geometrik özellikleri*. (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü)

[18] Srivastava, H. M., & Pinter, A. (2004). Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, *17*(4), 375-380

[19] Ryoo, C. S. (2008). A numerical computation on the structure of the roots of q-extension of Genocchi polynomials. *Applied Mathematics Letters*, *21*(4), 348-354.

[20] Kim, T. (2008). An invariant p-adic q-integral on Zp. *Applied Mathematics Letters*, *21*(2), 105-108.

[21] Gün, D. (2020). B-Spline eğrileri ile Eulerian tipli polinomlar arasındaki ilişkiler ve bunların uygulamaları.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Burcu DOĞRUER DOĞAN

Eğitim Bilgileri:

-Gaziantep Üniversitesi/Fen Edebiyat Fakültesi/Matematik (2016-2021)

Sertifikalar:

-GAP 11th International Summit Scientific Research Congress held on December 15-17, 2023 / Gaziantep, Turkiye