

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Serhat ALADAĞ

Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Elde Edilen Bazı
Eşitsizlikler

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI – 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler

Çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup eşitsizliğin tarihi hakkında kısa bir bilgi sunulmuştur. İkinci kısımda konvekslik ve eşitsizliklerle ilgili bazı temel tanımlara ve bu tanımlar yardımıyla elde edilen bazı eşitsizliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm olan bulgular kısmında ise bazı temel matematiksel işlemler yardımıyla ters Minkowski tipli bazı yeni eşitsizlikler ortaya konmuştur. Bunun için Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren yeni bir birleştirilmiş çift taraflı integral operatör kullanılmıştır.

2023, 31 sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş kesirli integral operatör, konveks fonksiyonlar, integral eşitsizlikler.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

Some Inequalities Obtained with Generalized Fractional Integral Operators

The first part of the study is the introduction part and a brief information about the history of inequality is presented in this part. In the second part, some basic definitions about convexity and inequalities and some inequalities obtained with the help of these definitions are given. In the third part, the findings, some new inverse Minkowski type inequalities are obtained with the help of some basic mathematical operations. For this, a new unified two-sided integral operator is used, which contains the Mittag-Leffler function.

2023, 31 pages

Key Words: Generalized fractional integral operator, convex functions, integral inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, tez konumu belirlemede yardımcı olup bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarım da etkin katkısı bulunan ve tüm babacanlığı ile beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ ve her daim yanımda olan saygıdeğer hocam

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen babam Cemal ALADAĞ ile annem Nifsicihan ALADAĞ'a öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2023

Serhat ALADAĞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1. Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Temel Tanım ve Özellikler	3
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar	5
2.3. Bazı Kesirli İntegral Operatör Türleri	8
2.4. İyi Bilinen Bazı Klasik Eşitsizlikler	13
2.5. Kesirli İntegral Operatörleri Kullanılarak Yapılan Bazı Genelleştirmeler	14
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	15
4. SONUÇ	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Konveks Küme	3
2.2 Konveks Olmayan Küme	3
2.3 Konveks fonksiyon	4



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C(I)$: I aralığında koveks fonksiyonların sınıfı
K_s^1	: 1. anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı
K_s^2	: 2. anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı
$SX(h, I)$: I aralığında h –konveks fonksiyonların sınıfı
$SV(h, I)$: I aralığında h –konkav fonksiyonların sınıfı
$K_m(b)$: $[0, b]$ aralığında m –konveks fonksiyonların sınıfı
$[\varphi, \vartheta]$: $[\varphi, \vartheta]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$J_{\varphi+}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integral operatör
$J_{\vartheta-}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integral operatör
$H_{\varphi+}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integral operatör
$H_{\vartheta-}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integral operatör
${}^{\rho}I_{\varphi+}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integral operatör
${}^{\rho}I_{\vartheta-}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integral operatör
$(I_{\alpha}^{\rho} f)(t)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral operatör
$({}^{\vartheta}I_{\alpha} f)(t)$: f fonksiyonunun α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral operatör
$\zeta_{\varphi}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun sol üstel çekirdekli kesirli integral operatör
$\zeta_{\vartheta}^{\alpha} f(\varpi)$: f fonksiyonunun sağ üstel çekirdekli kesirli integral operatör

1. GİRİŞ

Konveks fonksiyonlar eşitsizlikler üzerine inşa edilmiş bir kavramdır. Konvekslik kavramı M.Ö 250 yıllarında π değerinin Arşimet tarafından hesaplanması ile ortaya çıkan bir kavramdır. Burada Arşimet konveks bir şeklin çevresinin, bu konveks şekli çevreleyen başka bir konveks şeklin çevresine göre daha küçük olduğunun farkına varmıştır. Teorik matematik ve uygulamalı matematikte fazlaca kullanılmakta olan konveks fonksiyonların iki ana özelliği vardır. Kesin konveks olan fonksiyonlar en çok bir tane minimuma sahiptirler ayrıca rastgele alınan yerel minimum küresel yani globaldir. 1905 ile 1906 yılları arasında ünlü Danimarkalı matematikçi ve mühendis olan J.L.W.V. Jensen'in yayınladığı iki makale sonrası konveks fonksiyon teorisi çok hızlı bir şekilde gelişmiştir. Bunun nedenlerinden birincisi, modern analizin içerisinde yer alan birden fazla alan doğrudan ya da dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamalarını kapsamaktadır. İkincisi ise eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların iç içe oluşu ve önemli olan bir çok eşitsizliğin konveks fonksiyonların uygulanması ile ortaya çıkan sonuçlardır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri kapsayan ilk kaynak "Convex Functions: Inequalities" J.Pecaric tarafından 1987 yılında yazılmıştır. Bunun yanı sıra Roberts ve Varberg [18], Niculescu ve Persson [16], Pecaric [17] gibi bir çok matematikçi konveks fonksiyonlar üstünde eşitsizlikler ile ilgili bir çok çalışma ortaya koymuşlardır. Yapılan bu çalışmaların belli bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturur. Bu çalışmada kullanılacak bir diğer konu ise kesirli hesaptır. Kesirli analiz; matematiksel analizin eski ve modern bir araştırma konusu aynı zamanda klasik analizin genellenmiş halidir. Ancak kesirli analiz yapısının karmaşık olması onun klasik analiz gibi yorumlanmasının önünde büyük bir engel oluşturmuştur. Bu sebepten dolayı kesirli analiz alanında yapılan çalışmalar 17. yy. sonrasına ertelenmiştir. Kesirli analiz, doğanın gerçekliğini çok daha güzel ifade eder. Doğanın daha ayrıntılı ve güzel bir şekilde ifade edilmesi için kesirli analiz konusunun özellikle bilim ve mühendislik alanlarında ön plana çıkarılması gerekir. Kesirli analiz kavramı ilk olarak L' Hospital tarafından Leibniz'e 1665 yılında yazılan bir mektup ile $\frac{dy}{dx}$ notasyonunun $n = \frac{1}{2}$ için ne olacağı sorulmuştur. Bu soruya karşılık Leibniz "Bir gün önemli sonuçların ortaya çıkacağı önemli bir paradoks olduğunu" söylemiştir [11]. Bu karşılıklı mektuplaşmalar ile kesirli analiz kavramı başlamıştır ve yaklaşık 300 yıl boyunca çok sayıda çalışma ortaya koyulmuştur. L'Hospital'in sormuş olduğu

sorudan etkilenerek kesirli türev ve kesirli integral konularını ortaya koyan ilk matematikçi Liouville olarak gösterilir. 19. yy. başlarından itibaren çok sayıda matematikçinin kesirli türev ve kesirli integral kavramlarını genelleştirmeleriyle birlikte bu konuda geniş çaplı bir çalışma sahası ortaya çıkmıştır. Geçmiş yıllarda tamsayı mertebeden oluşan modellerin kullanılması nedeni kesirli diferansiyel denklem çözümlerinin bulunamamış olmasıydı. Ancak kesirli türev ve kesirli integrallerin içinde problemleri çözebilmek için geniş çaplı çalışmalar ortaya koyulmuştur. Yapılan çalışmalar sonucu keyfi mertebeden türev ve integral kavramlarının yaşadığımız yani gerçek dünyada karşılaştığımız bir cisim ya da modeli tarif etmede tamsayı modellerine nazaran daha fazla doğru sonuç verdiği anlaşılmıştır. Günümüzde ise kesirli analiz; ısı iletimi, mekanik, sayısal analiz gibi birden fazla alanda uygulama alanına sahiptir.

Bu tezde Farid(2020) tarafından ortaya konan yeni bir birleştirilmiş çift taraflı integral operatör yardımıyla ters Minkowski tipli yeni eşitsizlikler ve $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun konkav oluşundan yola çıkılarak aynı kesirli integral operatörle yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

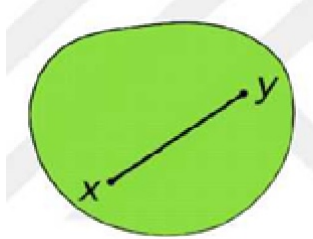
2.1. Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1 (Konveks Küme): X bir vektör uzayı, $A \subseteq X$ ve $\varphi, \vartheta \in A$ olarak seçilsin.

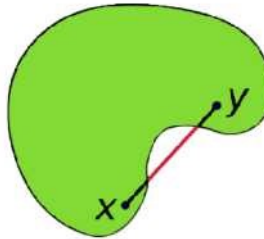
$$M = \{z \in X : z = \varpi\varphi + (1 - \varpi)\vartheta, 0 \leq \varpi \leq 1\} \subset A \quad (2.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir [10].

$z \in M$ olması durumunda φ ve ϑ 'nin katsayıları toplamı her zaman 1 sayısını verir. Bu yüzden (2.1) ifadesinde φ ve ϑ 'nin katsayıları yerine toplamları 1 sayısını veren herhangi iki pozitif çarpan ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vb.) seçilebilir. Bu tanım aynı zamanda uç noktaları φ ile ϑ olan bir doğru parçasını gösterir [3].



Şekil 2.1. Konveks Küme



Şekil 2.2. Konveks Olmayan Küme

Tanım 2.2 (J -Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R}' de bir aralık olsun. I 'dan seçilen her \wp ve ϑ elemanları için f fonksiyonu

$$f\left(\frac{\wp + \vartheta}{2}\right) \leq \frac{f(\wp) + f(\vartheta)}{2} \quad (2.2)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona I üzerinde J -konveks veya Jensen anlamında konveks fonksiyon denir [13].

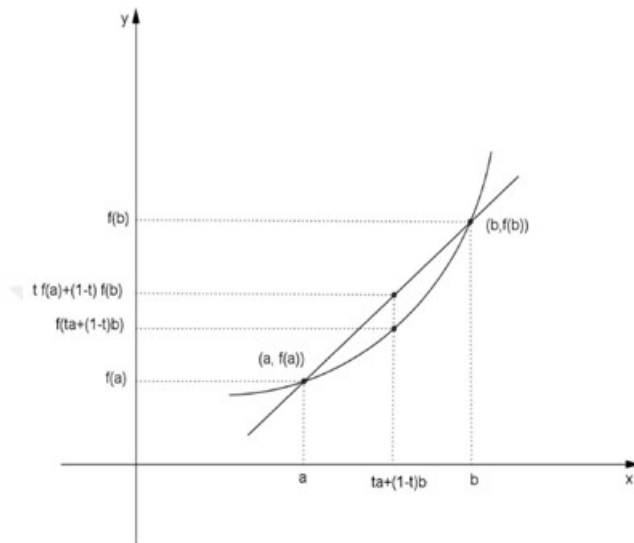
Tanım 2.3 (Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R}' de bir aralık olsun. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığındaki her \wp ve ϑ elemanı ve $\varpi \in [0, 1]$ için,

$$f(\varpi\wp + (1 - \varpi)\vartheta) \leq \varpi f(\wp) + (1 - \varpi)f(\vartheta) \quad (2.3)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir. I aralığında konveks olan fonksiyonların sınıfı $C(I)$ ile gösterilir. Eğer bu eşitsizlikte $\varpi \in (0, 1)$ ve $\wp \neq \vartheta$ için kesin ise (\leq yerine $<$ geliyorsa) bu durumda f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir [16].

Eğer $-f$ fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyon ise f fonksiyonuna konkav (kesin konkav) fonksiyon denir [16].

Sonuç 2.1 Konveks fonksiyon tanımında $\varpi = \frac{1}{2}$ seçilirse bu tanım J -konveks fonksiyon tanımına dönüşür.



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Şekil 2.3'e göre konveks fonksiyondan seçilen herhangi iki elemanın lineer terkinin fonksiyon altındaki görüntüsü, yine bu elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin lineer terkinin küçük ya da eşit kalıyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.4 f fonksiyonu reel sayıların bir I alt aralığında tanımlı fonksiyon olsun. $\varphi, \vartheta \in I$ olmak üzere,

a) $\varphi > \vartheta$ için $f(\varphi) < f(\vartheta)$ oluyorsa f fonksiyonuna I kümesi üzerinde azalan fonksiyon,

b) $\varphi > \vartheta$ için $f(\varphi) > f(\vartheta)$ oluyorsa f fonksiyonuna I kümesi üzerinde artan fonksiyon,

c) $\varphi > \vartheta$ için $f(\varphi) \leq f(\vartheta)$ oluyorsa f fonksiyonuna I kümesi üzerinde artmayan fonksiyon,

d) $\varphi > \vartheta$ için $f(\varphi) \geq f(\vartheta)$ oluyorsa f fonksiyonuna I kümesi üzerinde azalmayan fonksiyon denir [3].

2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Temel Tanımlar

Tanım 2.5 (Quasi-Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'nin bir alt aralığı ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I 'dan seçilen her φ ve ϑ elemanları ve $\varpi \in [0, 1]$ için f fonksiyonu

$$f(\varpi\varphi + (1 - \varpi)\vartheta) \leq \max\{f(\varphi), f(\vartheta)\} \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona *quasi*-konveks fonksiyon denir [18].

Eğer f fonksiyonu,

$$f(\varpi\varphi + (1 - \varpi)\vartheta) < \max\{f(\varphi), f(\vartheta)\} \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlarsa f 'e kesin *quasi*-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.6 (log-Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'nin bir alt aralığı ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I 'dan seçilen her φ ve ϑ elemanları ve $\varpi \in [0, 1]$ için f fonksiyonu

$$f(\varpi\varphi + (1 - \varpi)\vartheta) \leq f^\varpi(\varphi)f^{1-\varpi}(\vartheta) \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona *log*-konveks fonksiyon denir [18].

Tanım 2.7 (s-Konveks Fonksiyon (Birinci Anlamda)): $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < s \leq 1$ ve $\varphi^s + \omega^s = 1$ olsun. Her $\varphi, \omega > 0$ ile \wp ve ϑ negatif olmayan reel sayıları için için f fonksiyonu

$$f(\varphi\wp + \omega\vartheta) \leq \varphi^s f(\wp) + \omega^s f(\vartheta) \quad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyonuna birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir [6].

Tanım 2.8 (s-Konveks Fonksiyon (İkinci Anlamda)): $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < s \leq 1$ ve $\varphi + \omega = 1$ olsun. Her $\varphi, \omega > 0$ ve Her \wp ve ϑ negatif olmayan reel sayıları için f fonksiyonu

$$f(\varphi\wp + \omega\vartheta) \leq \varphi^s f(\wp) + \omega^s f(\vartheta) \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir [6].

Sonuç 2.2 (2.7) ve (2.8) ifadelerinde $s = 1$ seçilirse verilen tanımlar ile ilgili tanım aralıklarında bilinen konvekslik tanımı elde edilir [6].

Tanım 2.9 (h-Konveks Fonksiyon): $h \neq 0$ ve $h : J \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu verilsin. I , \mathbb{R} 'de bir aralık olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu her \wp ve ϑ elemanları ve $\varpi \in (0, 1)$ için

$$f(\varpi\wp + (1 - \varpi)\vartheta) \leq h(\varpi)f(\wp) + h(1 - \varpi)f(\vartheta) \quad (2.9)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu h -konveks fonksiyon denir. Bu türden fonksiyonların sınıfı $SX(h, I)$ ile gösterilir. Burada, I ve J , \mathbb{R} 'de iki aralık ve $(0, 1) \subseteq J$ 'dir. [22].

(2.9) eşitsizliği yön değiştiriyorsa f fonksiyonuna h -konkav fonksiyon denir. Bu türden fonksiyonların sınıfı $SV(h, I)$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.10 (m-Konveks Fonksiyon): $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Tanım kümesindeki her \wp ve ϑ elemanları ile $\varpi, m \in [0, 1]$ için f fonksiyonu

$$f(\varpi\wp + m(1 - \varpi)\vartheta) \leq \varpi f(\wp) + m(1 - \varpi)f(\vartheta) \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona m -konveks fonksiyon denir. $-f$ fonksiyonunun m -konveks fonksiyon olması durumunda f fonksiyonuna m -konkav fonksiyon denir. $K_m(b)$ ile $f(0) \leq 0$ şartını sağlayan $[0, b]$ aralığında tanımlı olan tüm m -konveks fonksiyonlar sınıfı ifade edilir [21].

Tanım kümesi $[0, b]$ olmak şartıyla bilinen konveks fonksiyon tanımı, Tanım 2.10'da $m = 1$ seçilerek elde edilir.

Tanım 2.11 (α, m) -**Konveks Fonksiyon**: $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $\wp, \vartheta \in [0, b]$ ve $\varpi \in [0, 1]$ için

$$f(\varpi\wp + m(1 - \varpi)\vartheta) \leq \varpi^\alpha f(\wp) + m(1 - \varpi^\alpha)f(\vartheta) \quad (2.11)$$

şartını sağlayan fonksiyona (α, m) -konveks fonksiyon denir. Burada $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ 'dir [12].

Tanım 2.12 (**Güçlü** $(\alpha, h - m)$ - **Konveks Fonksiyon**): $J \subseteq \mathbb{R}$, $(0, 1)$ 'i içeren bir aralık ve $h : J \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu verilsin. $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu, $\lambda \geq 0$, $\wp, \vartheta \in [0, b]$, $\varpi \in (0, 1)$, $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için aşağıdaki şartı sağlıyorsa güçlü $(\alpha, h - m)$ -konveks fonksiyon denir [25]:

$$f(\varpi\wp + m(1 - \varpi)\vartheta) \leq h(\varpi^\alpha)f(\wp) + mh(1 - \varpi^\alpha)f(\vartheta) - m\lambda h(\varpi^\alpha)h(1 - \varpi^\alpha)|\wp - \vartheta|^2 \quad (2.12)$$

Tanım 2.13 (**Geometrik Konveks Fonksiyon**): $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. I kümesinden seçilen her \wp ve ϑ elemanları ile $\varpi \in [0, 1]$ için f fonksiyonu

$$f(\wp^\varpi\vartheta^{1-\varpi}) \leq [f(\wp)]^\varpi[f(\vartheta)]^{1-\varpi} \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona geometrik konveks fonksiyon denir [24].

Tanım 2.14 (**Harmonik Konveks Fonksiyon**): I , reel sayılar kümesinde pozitif bir aralık olsun. I üzerinde tanımlı f fonksiyonu, I kümesindeki her \wp ve ϑ elemanları ile $\varpi \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{\wp\vartheta}{\varpi\wp + (1 - \varpi)\vartheta}\right) \leq \varpi f(\vartheta) + (1 - \varpi)f(\wp) \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona harmonik konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştireyorsa bu fonksiyona harmonik konkav fonksiyon denir [26].

Tanım 2.15 $f : [\wp, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varphi : [\wp, \vartheta] \rightarrow [\wp, \vartheta]$ fonksiyonları verilsin. $[\wp, \vartheta]$ aralığından seçilecek her ϖ ve ξ elemanları için

$$f(t\varpi(\varpi) + (1 - t)\varphi(\xi)) \leq tf(\varphi(\varpi)) + (1 - t)f\varphi(\xi)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna φ -konveks fonksiyon denir [4].

2.3. Bazı Kesirli İntegral Operatör Türleri

Tanım 2.16 (Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatör): $f \in L_1[\wp, \vartheta]$ olmak şartıyla $J_{\wp^+}^\alpha f$ ve $J_{\vartheta^-}^\alpha f$ Riemann- Liouville kesirli integrallerinin $\wp > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$J_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\wp}^{\varpi} (\varpi - t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad \varpi > \wp \quad (2.15)$$

ve

$$J_{\vartheta^-}^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} (t - \varpi)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.16)$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ olarak bilinen Gama fonksiyonudur. Riemann – Liouville tanımında $\alpha = 0$ alınırsa,

$$J_{\wp^+}^0 f(\varpi) = f(\varpi) \quad (2.17)$$

$$J_{\vartheta^-}^0 f(\varpi) = f(\varpi) \quad (2.18)$$

eşitlikleri elde edilir [19]

Tanım 2.17 (Hadamard Kesirli İntegral Operatör): Hadamard kesirli integralinin $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için sol ve sağ tanımları sırasıyla

$$H_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\wp}^{\varpi} \frac{f(t)}{\left(\ln \frac{\varpi}{t}\right)^{(1-\alpha)} t} dt, \quad \varpi > \wp > 0 \quad (2.19)$$

$$H_{\vartheta^-}^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} \frac{f(t)}{\left(\ln \frac{\varpi}{t}\right)^{(1-\alpha)} t} dt, \quad 0 < \varpi < \vartheta \quad (2.20)$$

şeklinde dir. Burada Γ Gama fonksiyonudur [9].

Tanım 2.18 (Katugampola Kesirli İntegral Operatör): $[\wp, \vartheta] \subset \mathbb{R}$ sonlu aralık, $\alpha > 0$ ve $f \in X_c^\rho(\wp, \vartheta)$ olsun. Sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli integral operatörleri $\wp < \varpi < \vartheta$ ve $\rho > 0$ için sırasıyla

$${}^\rho I_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\wp}^{\varpi} \frac{t^{\rho-1}}{(\varpi^\rho - t^\rho)^{(1-\alpha)}} f(t) dt \quad (2.21)$$

$${}^\rho I_{\vartheta^-}^\alpha f(\varpi) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} \frac{t^{\rho-1}}{(\varpi^\rho - t^\rho)^{(1-\alpha)}} f(t) dt \quad (2.22)$$

şeklinde dir ([7], [8]).

Teorem 2.1 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ ise $\varpi > \wp$ için,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} {}^\rho I_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) = J_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) \quad (2.23)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} {}^\rho I_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) = H_{\wp^+}^\alpha f(\varpi) \quad (2.24)$$

Benzer sonuçlar sağ taraflı operatörler için de geçerlidir [8].

Tanım 2.19 (Uyumlu Kesirli İntegral Operatör): $\alpha \in (n, n + 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ ve $\wp < \vartheta$ ve $f \in L[\wp, \vartheta]$ olsun. $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_\alpha^\wp f)(t) = \frac{1}{n!} \int_\wp^t (t - \varpi)^n (\varpi - \wp)^{\beta-1} f(\varpi) d\varpi, t > \wp \quad (2.25)$$

şeklinde ve α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral

$$({}^\vartheta I_\alpha f)(t) = \frac{1}{n!} \int_t^\vartheta (\varpi - t)^n (\vartheta - \varpi)^{\beta-1} f(\varpi) d\varpi, t < \vartheta \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\alpha = n + 1$ alınırsa bu taktirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece

$$(I_\alpha^\wp f)(t) = \left(J_{\wp^+}^\alpha f \right)(t)$$

ve

$$({}^\vartheta I_\alpha f)(t) = \left(J_{\vartheta^-}^\alpha f \right)(t) \text{ olduğu görülür. Yani } \alpha = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots, \text{ sol ve}$$

sağ uyumlu kesirli integraller sırasıyla sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgenir [1].

Tanım 2.20 (Üstel Çekirdekli Kesirli İntegral Operatör): $\wp, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\wp < \vartheta$ ve $f \in L[\wp, \vartheta]$

olsun. $\alpha \in (0, 1)$ için α . mertebeden sol ve sağ üstel çekirdekli kesirli integralleri sırasıyla

$$\zeta_\wp^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_\wp^\varpi \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(\varpi-s)\right) f(s) ds, \varpi > \wp \quad (2.27)$$

$$\zeta_\vartheta^\alpha f(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_\varpi^\vartheta \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-\varpi)\right) f(s) ds, \varpi < \vartheta \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Yeni sağ taraflı ve sol taraflı genelleştirilmiş kesirli integraller Sarıkaya ve arkadaşları tarafından (2016) şöyle tanımlanmıştır [20].

Tanım 2.21 $\wp, \vartheta \in \mathbb{R}$ ve $p < \varpi < \vartheta$ olsun. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. $f \in L[\wp, \vartheta]$ olmak üzere f fonksiyonunun sırasıyla sol ve sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri

$${}_{\wp^+}I_{\varphi}f(\varpi) = \int_{\wp}^{\varpi} \frac{\varphi(\varpi - t)}{\varpi - t} f(t) dt, \quad \varpi > \wp \quad (2.29)$$

ve

$${}_{\vartheta^-}I_{\varphi}f(\varpi) = \int_{\varpi}^{\vartheta} \frac{\varphi(t - \varpi)}{t - \varpi} f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.30)$$

olarak tanımlanır.

(2.29) ve (2.30) ifadelerinde yer verilen genelleştirilmiş kesirli integrallerin en önemli özelliği, Riemann-Liouville kesirli integral operatör, k -Riemann-Liouville kesirli integral operatör, Katugampola kesirli integral operatör, uyumlu kesirli integral operatör, Hadamard kesirli integral operatör vb. birçok kesirli integral operatörün genel hali olmasıdır. Bu (2.29) ve (2.30) kesirli integral operatörlerin önemli özel durumları aşağıda belirtilmiştir.

i) Eğer $\varphi(t) = t$ olarak seçilirse (2.29) ve (2.30) aşağıdaki gibi Riemann integraline dönüşür:

$$I_{\wp^+}f(\varpi) = \int_{\wp}^{\varpi} f(t) dt, \quad \varpi > \wp \quad (2.31)$$

$$I_{\vartheta^-}f(\varpi) = \int_{\varpi}^{\vartheta} f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.32)$$

ii) Eğer $\varphi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$ olarak seçilirse (2.29) ve (2.30) aşağıdaki gibi Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür:

$$I_{\wp^+}^{\alpha}f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\wp}^{\varpi} (\varpi - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \varpi > \wp \quad (2.33)$$

$$I_{\vartheta^-}^{\alpha}f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} (t - \varpi)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.34)$$

iii) Eğer $\varphi(t) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} t^{\frac{\alpha}{k}}$ olarak seçilirse (2.29) ve (2.30) aşağıdaki gibi k -Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür:

$$I_{\wp^+;k}^{\alpha}f(\varpi) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\wp}^{\varpi} (\varpi - t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad \varpi > \wp \quad (2.35)$$

$$I_{\vartheta^-;k}^{\alpha}f(\varpi) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} (t - \varpi)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.36)$$

Burada

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt, \quad R(\alpha) > 0 \quad (2.37)$$

ve

$$\Gamma_k(\alpha) = k^{\frac{\alpha}{k}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{k}\right), \quad R(\alpha) > 0 : k > 0 \quad (2.38)$$

[14].

iv) Eğer

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t (\varpi - t)^s (\varpi^{s+1} - t^{s+1})^{\alpha-1} \quad (2.39)$$

ve

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t (t - \varpi)^s (t^{s+1} - \varpi^{s+1})^{\alpha-1}, \quad (2.40)$$

olarak seçilirse $\alpha > 0$ ve $s \neq -1$ reel sayıları için (2.29) ve (2.30) aşağıda verilen sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli operatörlere dönüşür [7].

$$I_{\varphi^+, s}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varphi}^{\varpi} (\varpi^{s+1} - t^{s+1})^{\alpha-1} t^s f(t) dt, \quad \varpi > \varphi \quad (2.41)$$

$$I_{\vartheta^-, s}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} (t^{s+1} - \varpi^{s+1})^{\alpha-1} t^s f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.42)$$

v) Eğer $\varphi(t) = t(\varpi - t)^{\alpha-1}$ olarak seçilirse (2.29), aşağıdaki gibi uyumlu kesirli operatörlere dönüşür:

$$I_{\varphi}^{\alpha} f(\varpi) = \int_{\varphi}^{\varpi} t^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{\varphi}^{\varpi} f(t) d_{\alpha} t, \quad \varpi > \varphi, \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2.43)$$

vi) Eğer

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{[\log \varpi - \log(\varpi - t)]^{(\alpha-1)}}{\varpi - t} \quad (2.44)$$

ve

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t \frac{[\log(t - \varpi) - \log \varpi]^{(\alpha-1)}}{t - \varpi} \quad (2.45)$$

olarak seçilirse (2.29) ve (2.30) sırasıyla aşağıdaki gibi sağ taraflı ve sol taraflı Hadamard kesirli integrale dönüşür:

$$H_{\varphi^+}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varphi}^{\varpi} (\log \varpi - \log t)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad 0 < \varphi < \varpi < \vartheta, \quad (2.46)$$

$$H_{\vartheta^-}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varpi}^{\vartheta} (\log t - \log \varpi)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad 0 < \varphi < \varpi < \vartheta, \quad (2.47)$$

vii) Eğer $\varphi(t) = \frac{t}{\alpha} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} t\right)$ olarak seçilirse (2.29) ve (2.30) $\alpha \in (0, 1)$ için aşağıdaki gibi üstel çekirdekli integral operatörlere dönüşür:

$$\zeta_{\varphi}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_{\varphi}^{\varpi} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} (\varpi - t)\right) f(t) dt, \quad \varpi > \varphi \quad (2.48)$$

$$\zeta_{\vartheta}^{\alpha} f(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_{\varpi}^{\vartheta} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-\varpi)\right) f(t) dt, \quad \varpi < \vartheta \quad (2.49)$$

[2]

Tanım 2.22 (Yeni Bir Birleştirilmiş-Çift Taraflı İntegral Operatör) $0 < \wp < \vartheta$ olmak üzere $f : [\wp, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonu $f \in L_1[\wp, \vartheta]$ şartını sağlasın. $g : [\wp, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (\wp, ϑ) aralığında diferansiyellenebilir ve kesin artan fonksiyon olsun. $\frac{\phi}{\varpi}$ fonksiyonu $[\wp, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha), \Re(l) > 0$, $\Re(c) > \Re(\gamma) > 0$, $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < v \leq \delta + \mu$ olsun. Bu durumda $\varpi \in [\wp, \vartheta]$ için sol ve sağ taraflı integral operatörleri şu şekilde ifade edilmiştir [5]:

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \wp^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f \right) (\varpi; p) \\ &= \int_{\wp}^{\varpi} \frac{\phi(g(\varpi) - g(t))}{g(\varpi) - g(t)} E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}(\omega(g(\varpi) - g(t))^{\mu}; p) g'(t) f(t) dt \\ &= K_{\varpi}^t \left(E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \\ &= \frac{\phi(g(\varpi) - g(t))}{g(\varpi) - g(t)} E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}(\omega(g(\varpi) - g(t))^{\mu}; p). \end{aligned} \quad (2.50)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \vartheta^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f \right) (\varpi; p) \\ &= \int_{\varpi}^{\vartheta} \frac{\phi(g(t) - g(\varpi))}{g(t) - g(\varpi)} E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}(\omega(g(t) - g(\varpi))^{\mu}; p) g'(t) f(t) dt \\ &= K_{\varpi}^{\varpi} \left(E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \\ &= \frac{\phi(g(t) - g(\varpi))}{g(t) - g(\varpi)} E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}(\omega(g(t) - g(\varpi))^{\mu}; p) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Burada

$$\beta_p(\wp, \vartheta) = \int_0^1 t^{\wp-1} (1-t)^{\vartheta-1} e^{-\frac{p}{t(1-t)}} dt \quad (2.52)$$

ve

$$(c)_{nk} = \frac{\Gamma(c + nk)}{\Gamma(c)} \quad (2.53)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}(t; p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_p(\gamma + nk, c - \gamma)}{\beta(\gamma, c - \gamma)} \frac{(c)_{nk}}{\Gamma(\mu n + \alpha)} \frac{t^n}{(l)_{n\delta}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılmıştır. Bazı kaynaklarda $\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \varphi^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f\right)(\varpi; p)$ yerine $\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \varphi^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f\right)(\varpi, \omega; p)$; ve $\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \vartheta^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f\right)(\varpi; p)$ yerine $\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, \vartheta^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f\right)(\varpi, \omega; p)$ kullanılmıştır [15].

2.4. İyi Bilinen Bazı Klasik Eşitsizlikler

Teorem 2.2 (Minkowski Eşitsizliği):

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ $\varphi_k \geq 0$, $\vartheta_k \geq 0$ ve $\varpi > 1$ olsun. Bu halde

$$\left(\sum_{k=1}^n (\varphi_k + \vartheta_k)^{\varpi}\right)^{\frac{1}{\varpi}} \leq \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^{\varpi}\right)^{\frac{1}{\varpi}} + \left(\sum_{k=1}^n \vartheta_k^{\varpi}\right)^{\frac{1}{\varpi}} \quad (2.55)$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Teorem 2.3 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği):

$\hbar > 1$ ve $\frac{1}{\hbar} + \frac{1}{\varpi} = 1$ olsun. f ve g , $[\varphi, \vartheta]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı iki reel fonksiyon, $|f|^{\hbar}$ ve $|g|^{\varpi}$, $[\varphi, \vartheta]$ kapalı aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_{\varphi}^{\vartheta} |f(\xi) g(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\varphi}^{\vartheta} |f(\xi)|^{\hbar} d\xi\right)^{\frac{1}{\hbar}} \left(\int_{\varphi}^{\vartheta} |g(\xi)|^{\varpi} d\xi\right)^{\frac{1}{\varpi}} \quad (2.56)$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Sonuç 2.3 (İntegraller İçin Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olmak üzere eğer $f, |f|, g, |g|^q$ fonksiyonları $[\varphi, \vartheta]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\varphi}^{\vartheta} |f(\xi) g(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\varphi}^{\vartheta} |f(\xi)| d\xi\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\varphi}^{\vartheta} |f(\xi)| |g(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Teorem 2.4 (Young Eşitsizliği):

$\hbar, \varpi > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\hbar} + \frac{1}{\varpi} = 1$ eşitsizliğini sağlayan her \hbar, ϖ ve her $\varphi, \vartheta > 0$ sayısı için

$$\frac{\varphi^{\hbar}}{\hbar} + \frac{\vartheta^{\varpi}}{\varpi} \geq \varphi \vartheta \quad (2.57)$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.5. Kesirli İntegral Operatörleri Kullanılarak Yapılan Bazı Genelleştirmeler

Teorem 2.5 $m \in (0, 1]$ için $\eta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, integrallenebilir, (α, m) -konveks fonksiyonu $\eta_1(x) = \eta_1(a + b - \frac{x}{m})$ şartını sağlasın. $\eta_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) 'de diferansiyellenebilir, kesin artan fonksiyon olsun. Ayrıca $\frac{\phi}{x}, [a, b]$ 'de artan fonksiyon olsun. $\alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}, \Re(\alpha), \Re(l) > 0, \Re(c) > \Re(\gamma) > 0, p, \mu, \delta \geq 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olsun. Bu durumda $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \frac{2^\alpha \eta_1(a + \frac{b}{2})}{(1 + m(2^\alpha - 1))} \left[\left({}_{\eta_2} F_{\mu, \alpha, l, b^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c, 1} \right) (a, \omega; p) + \left({}_{\eta_2} F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c, 1} \right) (b, \omega; p) \right] \\ & \leq \left({}_{\eta_2} F_{\mu, \alpha, l, b^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} \eta_1 \right) (a, \omega; p) + \left({}_{\eta_2} F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} \eta_1 \right) (b, \omega; p) \\ & \leq 2K_b^a \left(E_{\mu, \alpha, l}^{\gamma, \delta, k, c}, \eta_2; \phi \right) \\ & \quad \times \left[\left(\eta_1(b) \eta_2(b) - m \eta_1\left(\frac{a}{m}\right) \eta_2(a) - \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(b - a)^\alpha} \left(\eta_1(b) - m \eta_1\left(\frac{a}{m}\right) \right)^\alpha I_{b^-} \eta_2(a) \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Teorem 2.6 $f, g : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $0 < u < v$, için $|f'|$ fonksiyonu φ -konveks ve g fonksiyonu kesin artan olsun. Aynı zamanda $\frac{\Psi}{x}, [u, v]$ aralığında artan fonksiyon olsun. $\alpha, \xi, \gamma, \zeta \in \mathbb{C}, \rho, \mu, v, \delta \geq 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $x \in (u, v)$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left({}_g F_{\mu, \alpha, \xi, u^+}^{\Psi, \gamma, \delta, k, \zeta} f^* g \right) (x, \omega; p) + \left({}_g F_{v, \alpha, \xi, v^-}^{\Psi, \gamma, \delta, k, \zeta} f^* g \right) (x, \omega; p) \right| \\ & \leq E_{\mu, \alpha, \xi}^{\gamma, \delta, k, \zeta} (\omega((g(x) - g(u))^\mu; \rho) \Psi(g(x) - g(u)) |f'(x)| \\ & \quad + K_x^u \left(E_{\mu, \alpha, \xi}^{\gamma, \delta, k, \zeta}, g; \Psi \right) \phi(|f'(u)|, |f'(x)|) (I(u, x; g) - g(u)) \\ & \quad + E_{v, \alpha, \xi}^{\gamma, \delta, k, \zeta} (\omega((g(v) - g(x))^v; \rho) \Psi(g(v) - g(x)) |f'(v)| \\ & \quad + K_v^x \left(E_{v, \alpha, \xi}^{\gamma, \delta, k, \zeta}, g; \Psi \right) \phi(|f'(x)|, |f'(v)|) (I(x, v; g) - g(x)). \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, (2.51) ifadesinde yer verilen birleştirilmiş çift taraflı integral operatör yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 3.1 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r > 0$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{M}{M+1} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{m+1} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teorem 3.1 şartları göz önüne alındığında $\frac{f(y)}{h(y)} \leq M$, $y \in [a, x]$, $x > 0$ için

$$(M+1)^r f^r(y) \leq M^r (f+h)^r(y) \quad (3.1)$$

yazılabilir. Öte yandan her $a < x \leq b$ için g fonksiyonu kesin artan olduğundan ve $x\phi(x) > 0$, $\beta_p(x, y) > 0$, $(c)_{nk} > 0$ olduğundan $K_x^y(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi) g'(y)$ fonksiyonu pozitif olur. (3.1) eşitsizliğinin her iki yanını $K_x^y(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi) g'(y)$ ile çarpılır y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (M+1)^r \int_a^x K_x^y(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi) g'(y) f^r(y) dy \\ & \leq M^r \int_a^x K_x^y(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi) g'(y) (f+h)^r(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade

$${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \leq \frac{M^r}{(M+1)^r} {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradan

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{M}{M+1} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.2)$$

elde edilir. Öte yandan teorem şartları altında $mh(y) \leq f(y)$ yazılabildiğinden

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^r h^r(y) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r (f(y) + h(y))^r \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) ifadesinin her iki yanını $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y)$ ile çarpılır ve y' 'ye göre a' 'den x' 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) h^r(y) dy \\ & \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) (f(y) + h(y))^r dy \end{aligned}$$

ki bu ifade düzenlenirse

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{(m+1)} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p)\right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) ve (3.4) toplanırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r > 0$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}; p \geq 0, \mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 \leq \theta \leq f(y) \leq A$ ve $0 \leq \sigma \leq h(y) \leq \beta$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p)\right)^{\frac{1}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p)\right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{A(\theta + \beta) + \beta(\sigma + A)}{(A + \sigma)(\beta + \theta)} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f+h]^r(x, \omega; p)\right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teorem 3.2'de verilen şartlar altında

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{h(y)} \leq \frac{1}{\sigma} \quad (3.5)$$

yazılabilir. (3.5) eşitsizliği $0 \leq \theta \leq f(y) \leq A$ ile çarpılırsa

$$\frac{\theta}{\beta} \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq \frac{A}{\sigma} \quad (3.6)$$

bulunur. (3.6) yardımıyla

$$h^r(y) \leq \left(\frac{\beta}{\theta + \beta}\right)^r (f(y) + h(y))^r \quad (3.7)$$

ve

$$f^r(y) \leq \left(\frac{A}{\sigma + A} \right)^r (f(y) + h(y))^r \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) ifadelerinin her ikisi de $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen sonuç y değişkenine göre (a, x) aralığı üzerinden integre edilirse

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{\beta}{\theta + \beta} \right) \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) + h(x, \omega; p)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.9)$$

ve

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{A}{\sigma + A} \right) \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) + h(x, \omega; p)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.3 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r > 0$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{1 + M(m + 2)}{(m + 1)(M + 1)} \left(\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f + h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teorem 3.3'de verilen şartlar altında

$$(M + 1)^r f^r(y) \leq M^r (f + h)^r(y) \quad (3.11)$$

yazılabilir. (3.11) ifadesinin her iki yanını $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılıp a 'dan x 'e integre alınırsa

$$\begin{aligned} & (M + 1)^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) f^r(y) dy \\ & \leq M^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) (f + h)^r(y) dy \end{aligned}$$

bulunur. (2.50) ve (2.51) ifadelerinde verilen tanımlar yardımıyla

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right) \leq \frac{M^r}{(M + 1)^r} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f + h)^r(x, \omega; p) \right)$$

elde edilir. İfadenin her iki yanının $\frac{1}{r}$ kuvveti alınursa

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{M}{(M+1)} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.12)$$

bulunur. Diğer taraftan teorem şartları altında

$$\left(1 + \frac{1}{m} \right) h(y) \leq \frac{1}{m} (f(y) + h(y)) \quad (3.13)$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının r . kuvveti alınarak

$$\left(1 + \frac{1}{m} \right)^r h^r(y) \leq \left(\frac{1}{m} \right)^r (f(y) + h(y))^r \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) eşitsizliğinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılıp a 'dan x 'e integrali alınursa

$$\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{(m+1)} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.15)$$

bulunur. (3.12) ve (3.15) taraf tarafa toplanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r > 1$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}; p \geq 0, \mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{2}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{2}{r}} \\ & \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2 \right) \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

İspat (3.12) ve (3.15) taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} \right) \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left[\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) eşitsizliğinin sağ tarafına Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left[\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \\ & \leq \left[\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \\ & \leq \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{2}{r}} + \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{2}{r}} \\ & \quad + 2 \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r, s > 0$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{rs}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p)]^{\frac{1}{r}} [h(x, \omega; p)]^{\frac{1}{s}} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

İspat Teorem 3.5 şartları altında

$$[h(y)]^{\frac{1}{s}} \geq M^{-\frac{1}{s}} [f(y)]^{\frac{1}{s}} \quad (3.19)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $[f(y)]^{\frac{1}{r}}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} [f(y)]^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{s}} & \geq M^{-\frac{1}{s}} [f(y)]^{\frac{1}{r}} [f(y)]^{\frac{1}{s}} \\ & \geq M^{-\frac{1}{s}} [f(y)]^{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)} \\ & \geq M^{-\frac{1}{s}} [f(y)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

bulunur. (3.20) eşitsizliğinin her iki yanını $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) g'(y) [f(y)]^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{s}} dy \\ & \geq M^{-\frac{1}{r}} \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) g'(y) f(y) dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p)]^{\frac{1}{r}} [h(x, \omega; p)]^{\frac{1}{s}} \\ & \geq M^{-\frac{1}{r}} \left[{}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f(x, \omega; p) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} & \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p)]^{\frac{1}{r}} [h(x, \omega; p)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \geq M^{-\frac{1}{rs}} \left[{}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h(x, \omega; p) \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.5 şartlarından

$$[f(y)]^{\frac{1}{r}} \geq m^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{r}} \quad (3.24)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
[f(y)]^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{s}} &\geq m^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{s}} \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)} \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} [h(y)]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ifadesine ulaşılır. (3.25) eşitsizliğinin her iki yanını $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınır

$$\begin{aligned}
&\int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) [f(y)]^{\frac{1}{r}} [h(y)]^{\frac{1}{s}} dy \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) h(y) dy
\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p)]^{\frac{1}{r}} [h(x, \omega; p)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\geq m^{\frac{1}{rs}} \left[{}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h(x, \omega; p) \right]^{\frac{1}{s}}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.23) ve (3.27) taraf tarafa çarpılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.6 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r, s > 0$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^s(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned}
&\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^s(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{rs}} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p)] [h(x, \omega; p)] \right)
\end{aligned}$$

İspat Teorem 3.5 ifadesinde $a < x, \omega; p \leq b$ şartları altında $f(x, \omega; p)$ ve $h(x, \omega; p)$ ifadeleri yerine $f^r(x, \omega; p)$ ve $h^s(x, \omega; p)$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.7 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r, s > 1$ için ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^s(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^s(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun.

$\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}; p \geq 0, \mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned} & {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) h(x, \omega; p)] \\ & \leq \frac{2^{r-1} M^r}{r (M+1)^r} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f^r + h^r](x, \omega; p) \right) \\ & \quad + \frac{2^{s-1}}{s (M+1)^s} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f^s + h^s](x, \omega; p) \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

İspat Verilen $\frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartından yararlanarak

$$(M+1)^r f^r(y) \leq M^r [f+h]^r(y) \quad (3.29)$$

yazılabilir. (3.29) ifadesinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & (M+1)^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) f^r(y) dy \\ & \leq M^r \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y) (f+h)^r(y) dy \end{aligned}$$

bulunur. Son ifade düzenlenirse

$${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \leq \frac{M^r}{(M+1)^r} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^r(x, \omega; p) \right) \quad (3.30)$$

bulunur. Diğer taraftan $a < y < x$ için $m \leq \frac{f(y)}{h(y)}$ şartı yardımıyla

$$(m+1)^s h^s(y) \leq [f+h]^s(y) \quad (3.31)$$

yazılabilir. (3.31) ifadesinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^s(x, \omega; p) \leq \frac{1}{(m+1)^s} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} (f+h)^s(x, \omega; p) \right) \quad (3.32)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$f(y) h(y) \leq \frac{f^r(y)}{r} + \frac{h^s(y)}{s} \quad (3.33)$$

olarak belirtilen Young eşitsizliğinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}; g; \phi \right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f(x, \omega; p) h(x, \omega; p) \\ & \leq \frac{1}{r} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right) + \frac{1}{s} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^s(x, \omega; p) \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

bulunur. (3.30) ve (3.32) yardımıyla (3.34) ifadesi

$$\begin{aligned}
& {}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} f(x,\omega;p) h(x,\omega;p) \\
& \leq \frac{1}{r} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} f^r(x,\omega;p) \right) + \frac{1}{s} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} h^s(x,\omega;p) \right) \\
& \leq \frac{M^r}{r(M+1)^r} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f+h)^r(x,\omega;p) \right) + \frac{1}{s(m+1)^s} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f+h)^s(x,\omega;p) \right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olarak yazılabilir. $(y+z)^r \leq 2^{s-1}(y^r+z^r)$, $r > 1$, $y, z > 0$ eşitsizliği kullanılarak

$${}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f+h)^r(x,\omega;p) \leq \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f^r+h^r)(x,\omega;p) \right) 2^{r-1} \tag{3.36}$$

ve

$${}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f+h)^s(x,\omega;p) \leq \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} (f^s+h^s)(x,\omega;p) \right) 2^{s-1} \tag{3.37}$$

elde edilir.(3.35), (3.36) ve (3.37) kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.8 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyelenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki $r > 0$ için ${}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} f^r(x,\omega;p) < \infty$, ${}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} h^r(x,\omega;p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan olsun. $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $0 < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{M+1}{M-n} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} [f(x,\omega;p) - nh(x,\omega;p)] \right) \\
& \leq \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} f^r(x,\omega;p) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} h^r(x,\omega;p) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \frac{m+1}{m-n} \left({}_gF_{\mu,\alpha,l,a^+}^{\phi,\gamma,\delta,k,c} [f(x,\omega;p) - nh(x,\omega;p)] \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

İspat $0 < n < m \leq \frac{f(y)}{h(y)} \leq M < \infty$ şartı yardımıyla

$$\begin{aligned}
mn & \leq Mn \implies mn + m \leq mn + M \leq Mn + M \\
& \implies (M+1)(m-n) \leq (m+1)(M-n)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{(M+1)}{(M-n)} \leq \frac{(m+1)}{(m-n)} \tag{3.40}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$m-n \leq \frac{f(y) - nh(y)}{h(y)} \leq M-n \tag{3.41}$$

ve bu ifade yardımıyla

$$\frac{(f(y) - nh(y))^r}{(M-n)^r} \leq h^r(y) \leq \frac{(f(y) - nh(y))^r}{(m-n)^r} \tag{3.42}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &\leq \frac{h(y)}{f(y)} \leq \frac{1}{m} \\ \implies \frac{m-n}{mn} &\leq \frac{f(y) - nh(y)}{nf(y)} \leq \frac{M-n}{Mn} \end{aligned} \quad (3.43)$$

ifadesi yardımıyla

$$\left(\frac{M}{M-n}\right)^r (f(y) - nh(y))^r \leq f^r(y) \leq \left(\frac{m}{m-n}\right)^r (f(y) - nh(y))^r \quad (3.44)$$

yazılabilir. (3.42) eşitsizliğinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(M-n)^r} \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) (f(y) - nh(y))^r dy \\ &\leq \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) h^r(y) dy \\ &\leq \frac{1}{(m-n)^r} \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) (f(y) - nh(y))^r dy \end{aligned} \quad (3.45)$$

bulunur. Kesirli integral operatör tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(M-n)} \left[\left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) - nh(x, \omega; p)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\ &\leq \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \frac{1}{(m-n)} \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) - nh(x, \omega; p)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.44) eşitsizliğinin her iki yanı $K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y)$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin y 'ye göre a 'dan x 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\left(\frac{M}{M-n}\right) \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) - nh(x, \omega; p)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left({}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^r(x, \omega; p) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\frac{m}{m-n}\right) \left[{}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} [f(x, \omega; p) - nh(x, \omega; p)]^r \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

(3.46) ve (3.47) toplanarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.9 $0 < a < b$ olmak üzere $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. f ve h pozitif fonksiyonları için $f, h \in L_1[a, b]$ olsun. g fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve sürekli artan fonksiyon olsun öyleki ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f^2(x, \omega; p) < \infty$, ${}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} h^2(x, \omega; p) < \infty$ şartları sağlansın. Bununla birlikte $x\phi(x) > 0$ ve $\frac{\phi}{x}$ fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında artan

olsun. $r, s > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $\omega, \alpha, l, \gamma, c \in \mathbb{C}$; $p \geq 0$, $\mu, \delta > 0$ ve $0 < k \leq \delta + \mu$ olmak üzere $x \in (a, b)$ için

$$\begin{aligned}
& {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f h(x, \omega; p) + {}_g F_{\mu, \alpha, l, b^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f h(x, \omega; p) \\
& \leq \frac{1}{r} \left(\int_a^x \left(\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right) (g'(y)) f^2(y) \right)^{\frac{r}{2}} dy \right. \\
& \quad \left. + \int_x^b \left(\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right) (g'(y)) f^2(y) \right)^{\frac{r}{2}} dy \right) \\
& \quad + \frac{1}{s} \left(\int_a^x \left(\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right) (g'(y)) h^2(y) \right)^{\frac{s}{2}} dy \right. \\
& \quad \left. + \int_x^b \left(\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right) (g'(y)) h^2(y) \right)^{\frac{s}{2}} dy \right)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

İspat $f(x) = \ln x$ fonksiyonu konkav olduğundan

$$\ln(t\alpha + (1-t)\beta) \geq t \ln \alpha + (1-t) \ln \beta \tag{3.49}$$

yazılabilir. Bu ifadede

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^p(y) \\
\beta &= \left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y) \\
t &= \frac{1}{r}, \quad (1-t) = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \ln \left(\frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} + \frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \right) \\
& \geq \frac{\ln \left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} \\
& \quad + \frac{\ln \left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \\
& = \ln \left[K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) g'(y) f(y) h(y) \right].
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} + \frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) \right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \\
& \geq K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi \right) g'(y) f(y) h(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $[a, x]$ aralığında y 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} dy \\ & + \int_a^x \frac{\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} dy \\ & \geq \int_a^x K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) f(y) h(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & {}_g F_{\mu, \alpha, l, a^+}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f h(x, \omega; p) \tag{3.50} \\ & \leq \frac{1}{r} \int_a^x \left(\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right) (g'(y)) f^2(y) \right)^{\frac{r}{2}} dy \\ & + \frac{1}{s} \int_a^x \left(\left(K_x^y \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right) (g'(y)) h^2(y) \right)^{\frac{s}{2}} dy \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan (3.49) ifadesinde

$$\begin{aligned} \alpha & = \left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y) \\ \beta & = \left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y) \\ t & = \frac{1}{r}, \quad (1-t) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} \right. \\ & \left. + \frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \right) \\ & \geq \frac{\ln \left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} \\ & + \frac{\ln \left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \\ & = \ln \left[K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) f(y) h(y) \right]. \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} + \frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} \\ & \geq K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) f(y) h(y) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $[x, b]$ aralığında y 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_x^b \frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{r}{2}} (g'(y))^{\frac{r}{2}} f^r(y)}{r} dy \\ & + \int_x^b \frac{\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right)^{\frac{s}{2}} (g'(y))^{\frac{s}{2}} h^s(y)}{s} dy \\ & \geq \int_x^b K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right) g'(y) f(y) h(y) dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & {}_g F_{\mu, \alpha, l, b^-}^{\phi, \gamma, \delta, k, c} f h(x, \omega; p) \tag{3.51} \\ & \leq \frac{1}{r} \int_x^b \left(\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right) (g'(y)) f^2(y)\right)^{\frac{r}{2}} dy \\ & \quad + \frac{1}{s} \int_x^b \left(\left(K_y^x \left(E_{\mu, \alpha', l}^{\gamma, \delta, k, c}, g; \phi\right)\right) (g'(y)) h^2(y)\right)^{\frac{s}{2}} dy \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (3.50) ve (3.51) taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç elde edilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada birleştirilmiş çift taraflı integral operatör yardımıyla ters Minkowski tipli bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Arzu eden araştırmacı uygun türden fonksiyonları bu eşitsizliklerde ve alanyazında mevcut diğer kesirli integral operatörleriyle elde edilmiş ters Minkowski tipli eşitsizliklerde uygulayarak elde edilecek üst sınırların ve böylece eşitsizliklerin karşılaştırmasını yapabilir. Öte yandan bu çalışmada kullanılan kesirli integral operatörü yardımıyla alanyazında mevcut farklı lemma ve teoremler genelleştirilmeye çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] T. Abdeljawad. On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 729:57–66, 2015.
- [2] B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, and B.T. Torebek. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353:120–129, 2019.
- [3] M. Bayraktar. *Fonksiyonel analiz*. Uludağ Üniversitesi Yay., 2000.
- [4] G. Cristescu. Hadamard type inequalities for φ -convex functions. *Analele Universității din Oradea*, 2004.
- [5] G. Farid. A unified integral operator and further its consequences. *Open Journal of Mathematical Analysis*, 4(1):1–7, 2020.
- [6] H. Hudzik and L. Maligranda. Some remarks on s -convex functions. *Aequationes Math.*, 48:100–111, 1994.
- [7] U.N. Katugampola. New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3):860–865, 2011.
- [8] U.N. Katugampola. New approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4):1–15, 2014.
- [9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.
- [10] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley and Sons. Inc., 1978.
- [11] G.W. Leibniz. “Letter from Hanover, Germany to G.F.A. L’Hospital, September 30, 1695”, *Leibniz Mathematische Schriften*. Olms-Verlag, Hildesheim, Germany, 1849.

- [12] V.G. Miheşan. *A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations. Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania., 1993.*
- [13] D.S. Mitrinović. *Analytic inequalities.* Springer-Verlag, Berlin., 1970.
- [14] S. Mubeen and G.M. Habibullah. k -fractional integrals and applications. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(2012):89–94, 2012.
- [15] B. Ni, G. Farid, and K. Mahreen. Inequalities for a unified integral operator via (α, m) -convex functions. *Journal of Mathematics*, 2020(2345416):1–9, 2020.
- [16] C.P. Niculescu and L.E. Persson. *Convex functions and their applications. A contemporary approach.* Springer Science+Business Media, Inc., 2006.
- [17] J. Pečarić, F. Proschan, and Y.L. Tong. *Convex functions, partial orderings and statistical applications.* Academic Press, Inc., 1992.
- [18] A.W. Roberts. *Convex functions.* Elsevier, 1993.
- [19] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives.* Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [20] M. Z. Sarikaya and F. Ertuğral. On the generalized Hermite-Hadamard inequalities. *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 47(1):193–213, 2020.
- [21] G.H. Toader. Some generalizations of the convexity. *In Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, 329:329–338, 1984.
- [22] S. Varošanec. On h -convexity. *J. Math. Anal. and Appl.*, 326:303–311, 2007.
- [23] M. Zahra, Y.M. Chu, and G. Farid. Refinements of some integral inequalities for φ -convex functions. *Journal of Mathematics*, 2020(8825786):1–14, 2020.
- [24] T.Y. Zhang, A. P. Ji, and F. Qi. On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s -geometrically convex functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2012(560586):1–

14, 2012.

- [25] Z. Zhang, G. Farid, and K. Mahreen. Inequalities for unified integral operators via strongly $(\alpha, h - m)$ -convexity. *Journal of Function Spaces*, 2021(6675826):1–11, 2021.
- [26] İ. İşcan. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6):935–942, 2014.



